arXiv:2602.16815v1 [math.AG] 18 Feb 2026

利用克利福德不变量分类二元二次型

SOHAM MONDAL 和 T. E. VENKATA BALAJ I

Abstract. 我们以函子性的方式，将秩二向量丛上的线丛值二次型的相似类，与由相应广义克利福德代数的零次部分和一次部分组成的对的同构类对应起来。作为应用，我们推广了高斯合成，并探讨了与二次代数的皮卡群之间的联系。

1. Introduction

在 [15, 第五章、命题 2.4.1、§2], 中，M. A. Knus 证明：若 (E, q) 和 (E', q') 是环 R 上秩为 2 的 R 值二次模，则 (E, q) 与 (E', q') 等距，当且仅当它们的完整克利福德代数 $C(E, q)$ 和 $C(E', q')$ 作为分次代数同构。此外，他还证明，对于满足维特消去的环 R，若两个二次模 (E, q) 和 (E', q') 非退化，则 (E, q) 与 (E', q') 等距，当且仅当它们的完整克利福德代数 $C(E, q)$ 和 $C(E', q')$ 作为 R 代数同构（尽管它们未必作为分次代数同构），且它们的偶克利福德代数 $C_0(E, q)$ 和 $C_0(E', q')$ 作为 R 代数同构。然而，对于取值于非平凡线丛的二次型，完整广义克利福德代数通常不具有自然的代数结构；关于这一现象的全面讨论，见 [5] 。因此，我们无法期待得到类似于取值于平凡线丛的情形下那种按等距同构分类的结果。尽管如此，与线丛值二次型 (E, q, L) 相关的完整广义克利福德代数的偶次数分量，记为 $C_0(E, q, L)$，确实具有自然的代数结构；而奇次数分量，记为 $C_1(E, q, L)$，则具有典范的结构，即作为 $C_0(E, q, L)$ 上的双模。对于任意基概形 S 上的二元二次型 (E, q, L)，广义偶克利福德代数 $C_0(E, q, L)$ 是一个二次 $\mathscr{O}_S$ 代数。我们的主要结果（其定义将在后文说明）是定理 3.1，表述如下：

定理 3.1. 对于任意概形 S，自然映射

$$(E, q, L) \mapsto (C_0(E, q, L), C_1(E, q, L))$$

诱导一个双射

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Similarity classes of binary quadratic} \\ \text{forms (E, q, L) over } S \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Isomorphism classes of pairs } (C, E), \\ \text{with } C \text{ a quadratic algebra over } S, \\ \text{and } E \text{ a } \textit{traceable } C\text{-module} \end{array} \right\},$$

它关于 S是函子性的，并且在相差符号的意义下保持判别式，即满足

$$\Delta(q) = -\Delta(C_0(E, q, L)).$$

在上文中， E 是可迹 C-模，意味着在 S上扎里斯基局部地， C 上的迹映射等于 E 作为左 C-模的迹映射；这一概念由 M. M. Wood 在 [21]中定义并使用。对 (C, E) 与 (C', E') 的同构由 $\mathscr{O}_S$-代数的同构$C \cong C'$ ，以及保持 C 与 C' 模结构的 $\mathscr{O}_S$-模同构$E \cong E'$ 给出。

作为定理 3.1的直接推论，我们得到以下结果：

2020 *Mathematics Subject Classification.* 11E16, 11E88, 13C20, 14C22,15A66,16D70.*Key words and phrases.* 二元二次型，克利福德代数，高斯合成，皮卡群，二次代数，可迹模。

推论 3.4。 设 $q_1 : E_1 \to L_1$ 和 $q_2 : E_2 \to L_2$ 是概形 S 上的两个二元二次型。若存在：

(1) $C_0(E_1, q_1, L_1)$ 与 $C_0(E_2, q_2, L_2)$ 作为 $\mathscr{O}_S$-代数之间的同构；以及 (2) E_1 与 E_2 作为 $\mathscr{O}_S$-模之间的同构，其中 $C_0(E_1, q_1, L_1)$-模（以及 $C_0(E_2, q_2, L_2)$-模）结构与上述 (1) 中的同构相容，

那么 q_1 与 q_2 相似。反之， q_1 与 q_2 相似则意味着存在这样的同构。

因此，在本文中，我们通过定理 3.1，将 Knus 的结果大幅拓展，给出了以下更广泛情形下二元二次型在相似意义下的分类：

- 线丛值二元型：我们将理论拓展至涵盖取值于可逆层（线丛）而非仅取值于结构层 $\mathscr{O}_S$ 的形式。
- 退化型：与以往主要关注非退化型的工作不同，我们将退化型纳入分类，从而处理更广泛、更一般的二次型类。
- 一般基概形 S：我们的结果适用于任意基概形 S。

这一更广泛的框架使二元二次型的处理更加灵活且具有几何意义，从而增强其在代数情境与几何情境中的适用性。

将定理 3.1 中的双射限制到本原二元二次型后，我们得到如下结果：

定理 3.12. 对任意概形 S，自然映射

$$(E, q, L) \mapsto (C_0(E, q, L), C_1(E, q, L))$$

诱导一个双射

$$\left\{ \begin{array}{c} \text{Similarity classes of primitive binary} \\ \text{quadratic forms (E, q, L) over } S \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \text{Isomorphism classes of pairs } (C, E), \\ \text{with } C \text{ a quadratic algebra over } S, \\ \text{and } E \text{ a locally free rank 1 } C\text{-module} \end{array} \right\},$$

其关于 S 具有函子性，并且保持判别式（至多相差一个符号），即

$$\Delta(q) = -\Delta(C_0(E, q, L)).$$

虽然定理 3.12 给出了任意基概形上本原二元二次型的分类 S，但我们在定理 3.1的基础结果之上，提出了另一种视角，将 Kneser 最初发展的合成理论与结构分析 [14] 扩展并加以完善，后续的完善工作由 Bichsel 和 Knus 完成 [5]。在他们的研究中，Bichsel 和 Knus 通过构造泛范数形式，对取值于可逆R-模的任意环上的非退化本原二元二次型进行了分类 R（见 [5, 例 42]）。本文从几个重要方面拓宽并推广了他们的框架。具体而言，我们研究：取值于一般基概形 S上任意线丛的二元二次型，这些二次型不一定非退化。因此，我们推广了 Knus[15] 和 Bichsel-Knus [5]的结果。

作为定理 3.1的一个应用，我们得到以下结构性结果，它揭示了二次代数与二元型所关联的克利福德代数理论之间的深刻联系：

定理 5.10. 给定任意基概形 S上的二次 $\mathscr{O}_S$-代数 C ，存在一个取值于适当线丛的二元二次型，其广义偶克利福德代数与 C同构。

鉴于定理 5.10 的证明，自然会产生一个问题：给定一个二次代数 C ，它定义在基概形 S上，如何用二次型系统地参数化其皮卡群？基于我们的主定理，我们得以证明如下结论：

定理 5.11。 设 S 为一般概形，且 C 为定义在 S上的二次代数。自然映射

$$(E, q, L) \to C_1(E, q, L)$$

诱导 $\left\{ \text{在 } C \quad S \right\} \longleftrightarrow$ 上的本原二元二次型 (E, q, L) 的相似类，其偶克利福德代数 $C_0(E,\ q,\ L)$ 与 Pic(C) 同构/ $\sim$,

其中，对于 $E,\ E' \in$ Pic(C)，当且仅当存在一个 C 在 S 上的自同构 φ，使得 $E' \cong \varphi^* E$ 作为 C-模成立。这里，$\varphi^* E$ 表示 C-模 E，其结构在局部上由 $\alpha \cdot e = \varphi(\alpha)e$ 给出；Pic(C)/ $\sim$ 表示 Pic(C) 中的 $\sim$-等价类集合。

定理 5.11为 C 的皮卡群参数化提供了一种近似，其中主要障碍源于 C 存在非平凡自同构。为消除这一障碍，我们引入二次代数的刚化，通过 定向 的概念消除所有非平凡自同构。所谓 N-扭曲二元形式，是指取值于某个指定线丛的二元形式，该线丛与一个由 N 确定的固定可逆层相关联。由此得到以下结果：

定理 5.17. 设 S 为一般概形，使得 2 在 $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$中不是零因子。设 C 为 S上的二次代数。存在以下对象之间的集合论双射：

$$\left\{ S\text{上的本原 } N\text{-扭曲二元二次型的相似类，其偶克利福德代数同构于 } C,\text{ 且保持固定的 } N\text{-定向} \right\} \longleftrightarrow \text{Pic}(C)。$$

2011年，Wood 在其论文 [21, 定理 1.4], 中建立了 S 上的线性二元二次型的相似类与对($C,\ E$) 的同构类之间的函子性双射，其中 C 是二次代数，而 E 是可迹 C-模。然而，必须明确区分 Wood 对线性二元二次型的定义与上文所用、并由 Kneser [14]等人提出的二元二次型经典概念。具体而言，定义在秩 2 向量丛上的 Wood线性二元二次型，恰好对应于定义在对偶向量丛上的经典二元二次型。更多细节请参见 [21, 命题 6.1]。这种对应关系凸显了这两种视角之间微妙却至关重要的联系。

导出范畴的结果被用于 [21], 中定理 1.4 的证明，它们经由超上同调，在构造相应的代数结构与模结构时起着关键作用。具体而言，由线性二元二次型产生的复形是在基概形 S上层的导出范畴中处理的，从而能够对相应的二次代数与可迹模给出相容且对基变换稳健的定义。关于这一方法的详细阐述，包括导出范畴的必要背景及其在当前模问题中的应用，可见于 [21, §3 与附录 A]。我们的关注点之所以不同，不仅在于我们以经典二元二次型取代 Wood线性二元二次型，还在于我们旨在借助克利福德代数的视角来处理分类问题；克利福德代数提供了丰富的代数结构，用以编码经典二次型的内在性质。

给定一个二元二次型 $q\colon\ E \to L$ 在经典意义下，先验地并不存在于对偶模 $E^\vee$ 上、在同一框架内构造二元二次型的典范方法。然而，借助 Wood 构造以及本文的主要结果，即定理3.1，我们能够以自然且定义良好的方式建立这样的构造。

利用 [21, 命题 61] 给出的双射以及定理3.1 与 Wood 对应 [21], ，我们得出以下结果：

定理 5.4。 设 E 是秩为 2 的局部自由 L，是一般概形 S 上秩为 1 的局部自由层。那么我们有

- 在 E 上取值于 L 的经典二元二次型与 $E^\vee$ 之间存在对偶；
- 在 E 上取值于 L 的 Wood线性二元二次型与 $E^\vee$ 之间存在对偶；
- 克利福德对空间与 Wood 对空间上的对合。

射影对偶是射影几何中的一个基本概念，它在点与直线（或更一般地说，维数互补的几何对象）之间建立了一种对称性。现在，在代数闭域 k 上，若 char(k) $\neq 2$，经典形式与 Wood形式之间的代数对偶就对应于这种几何对偶：

(1) 经典二元二次型定义圆锥曲线。(2) Wood的线性二元二次型定义
其对偶圆锥曲线。

因此：

> “在特征不为2的代数闭域上，代数对偶蕴含几何对偶，反之亦然。”

在其论文 [9, 定理 3。24], William Dallaporta给出了与给定二次代数相关联的皮卡群的一种参数化 C。然而，其方法依赖于Wood的著作中所发展的构造 [21], ，这些构造使用线性二元二次型，而且并未纳入Clifford理论框架。因此，Dallaporta的参数化植根于线性二元二次型（见 [9, 定义 3。12]），这与我们对经典二元二次型的定义有实质性差异。此外，其方法缺乏克利福德理论视角，而该视角是我们分析框架的核心。这一缺失凸显了概念基础与技术方法上的深刻分歧。

二元二次型的合成是数论中一个历史悠久的课题。自 Gauss 在其开创性著作《算术研究》《算术研究》 [17], 中开展研究以来，人们为简化并推广这一概念做出了大量努力。Martin Kneser 在其颇具影响力的著作 [14], 中引入了二次模的概念 E ，将其定义为偶克利福德代数 $C_0(E)$ 上的模。Kneser 的关键见解是将合成解释为在 $C_0(E)$ 上取张量积。这提供了一个比以往方法更优雅、更一般的框架。值得注意的是，Kneser 成功地为仿射概形建立了这一合成律，且不对基环的特征施加任何条件。Kneser 研究的是偶克利福德代数相同的情形。具体而言，在其论文的第 6 节中，他考察了 $C_1 = C_2 = C$ 且同构 ϕ_1, ϕ_2 为恒等映射的情形。在这种情况下，合成映射称为“ C型”。在 [14, 定理 3], 中，Kneser 证明， C 型的本原二元二次型的同构类在 C 型合成下构成一个阿贝尔群$G(C)$。此外，Kneser 还建立了群 $H(C)$与 Pic(C) 之间的同构，其中群 $H(C)$ 是通过 C型合成定义的。关于这一构造的详细说明，见 [14, 命题 2，§6]。在 [14], 中，Kneser 考察的是 C型二次模的同构类，而我们使用的是二元二次型的相似类。本文研究一种更一般的合成律。我们考察仅要求偶克利福德代数彼此同构的两个本原二元二次型的合成；特别地，这些同构未必是恒等映射。我们的方法从两个重要方向推广了 Kneser 的构造：

- 通过明确纳入类型间的同构，并且
- 允许任意基概形。

尽管我们仍使用记号 $H(C)$ 表示所得的结构，但其含义如今更加广泛。它涵盖涉及类型间非恒等同构的合成，并定义在任意基概形上。

在她的工作中， [21], Wood 建立了一个集合论双射——仅限于本原情形——将线性二元二次型对应到皮卡群商集的不交并。她主要受模空间理论考量的驱动，并未提出群律，也未确定与任何特定皮卡群之间的显式同构。随后，Dallaporta [9] 引入了一种群结构，但同样仅限于线性二元二次型的范畴。Wood 和 Dallaporta 的工作都考察线性二元二次型，而我们考察的是经典意义上的二次型。尽管他们的框架完全未涉及克利福德代数视角，我们的方法的主要创新在于系统地纳入了经典的克利福德理论观点；我们将表明，这也使得一种同样内蕴且代数上

稳健的理论表述成为可能。定理5.28 给出了取值于任意基概形上线丛的本原二元二次型相似类上的合成律 S。

例如，我们的方法有一个优点：当相关的二元二次型 (E, q, L) 满足 $L \cong \mathscr{O}_S$ 时，或者等价地，当 $C/\mathscr{O}_S \cong \wedge^2 E$ 时，与 Wood 对（分别为 Clifford 对）相对应的直和 $C \oplus E$ 具有自然的四元数代数结构。

本文结构安排如下。第 2 节回顾必要的定义、记号和结果，随后在第 3 节证明主定理。第 4 节介绍一种对本原二元二次型进行分类的替代方法，第 5 节讨论主定理的应用。

致谢。 Soham Mondal 衷心感谢大学拨款委员会（UGC）授予他备受认可的 UGC NET-JRF 奖学金。这项奖学金以他的学生编号 423142 颁发，使他能够全身心投入这项研究，不必承受经济负担。他同样感谢印度理工学院马德拉斯分校数学系以下杰出的教员，他们通过各自的研究项目为他提供了宝贵的经济支持：

- Barun Sarkar 教授
- Arijit Dey 教授
- Kunal Krishna Mukherjee 教授

2. Preliminaries

本节回顾本文所需的定义、记号和结果。

定义 2.1 (**双线性型与对称双线性型**)。 设 S 为一般概形，L 为 S上的线丛， E 为 S上的向量丛。

(1) 在 S 上的 L-值双线性形式是一个三元组 (E, b, L)，其中 $b\colon E \times E \to L$ 是一个双线性 $\mathscr{O}_S$-模态射。态射 b 将开子集 $U \subseteq S$ 上的每一对局部截面 $s_1, s_2 \in \Gamma(U, E)$ 映射到一个截面 $b(s_1, s_2) \in \Gamma(U, L)$，并满足关于第一个自变量的双线性条件：

$$b(fs_1 + gs_2, t) = fb(s_1, t) + gb(s_2, t), \quad \textit{for all } f, g \in \mathscr{O}_S(U),$$

关于第二个自变量也同样如此。

(2) 如果 L-值双线性形式 (E, b, L) 满足 b 在朴素交换态射 $\sigma\colon E \times E \to E \times E$（定义为 $\sigma(e_1, e_2) = (e_2, e_1)$）下不变，则称其为对称的。具体而言， b 满足：

$$b(e_1, e_2) = b(e_2, e_1),$$

对于所有局部截面 $e_1, e_2 \in \Gamma(U, E)$。等价地， $b \circ \sigma = b$。

这个定义将经典的双线性形式和对称双线性形式概念推广到了概形和向量丛的语境中，为在代数几何中研究此类结构提供了框架。

定义 2.2 (**二次型**)**.**（取值于 L 的） S 上的二次型是一个三元组 (E, q, L)，其中E 是一个向量丛，且 $q\colon E \to L$ 是满足下列条件的层映射：

- 下列层映射图表是交换的，

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{O}_S \otimes E & \xrightarrow{\simeq} & E \\ {\scriptstyle (-)^2 \otimes q}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle q} \\ \mathscr{O}_S \otimes L & \xrightarrow{\simeq} & L \end{array}$$

等价地，在 $U \subseteq S$ 上的截面上，我们有

$$q(av) = a^2 q(v), \ \forall\ a \in \Gamma(U, \mathscr{O}_S), v \in \Gamma(U, E).$$

- 相应的极化形式 b_q： $E \times E \to L$，定义在 $U \subseteq S$ 上的截面上，定义为

$$b_q(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w),\ \forall\ v,w \in \Gamma(U,E),$$

是 S 上取值于 L 的双线性形式。

设 S 是任意概形。固定其上的向量丛 E 和 L。记 $\mathrm{Sym}_2 E$ 为 E 的对称张量平方所成的子模。我们给出 E 上取值于线丛 L 的二次型的两种等价定义。

引理 2.3。 [2, 引理 1。1] 以下对象集合之间存在自然双射：

(1) 层态射 q： $E \to L$ 满足：

$$q(av) = a^2 q(v),$$

$\mathscr{O}_S$ 的截面 a 和 E 的截面 v；并且层态射

$$b_q : E \times E \to L,$$

定义为

$$b_q(v,w) = q(v+w) - q(v) - q(w),$$

对于 E 的截面 v 和 w，是 $\mathscr{O}_S$-双线性的。*(2)* $\mathscr{O}_S$-模态射 $\mathrm{Sym}_2 E \to L$。

定义 2.4 (**二次型的等距**)。 *(L 值)* 二次型 φ:$(E, q, L) \simeq (E', q', L)$ 之间的等距是一个 $\mathscr{O}_S$-模同构 φ: $E \to E'$，使得下列 $\mathscr{O}_S$-模态射图表交换：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & L \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle Id} \\ E' & \xrightarrow{q'} & L \end{array}$$

定义 2.5 (**相似**)。 两个二次型 (E, q, L) 和(E', q', L') 之间的相似或相似变换，是一对 (φ,μ_φ) $\mathscr{O}_S$-模同构 φ： $E \to E'$ 和 μ_φ： $L \to L'$，使得下列 $\mathscr{O}_S$-模图表交换：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & L \\ \downarrow{\scriptstyle \varphi} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \mu_\varphi} \\ E' & \xrightarrow{q'} & L' \end{array}$$

定义 2.6 (**二次型的判别式**)。 设 S 是一个概形，设 E 是一个秩为 n 的局部自由 $\mathscr{O}_S$-模，且设 L 是 S 上的线丛。设 q 是 E 上的一个二次型，其值取自 L，也就是说，它是一个层态射 q: $E \to L$，满足

$$q(av) = a^2 q(v)$$

对于所有局部截面 $a \in \mathscr{O}_S$、 $v \in E$，以及与之相关的对称双线性形式 b_q： $E \times E \to L$。

局部地，在 S 的仿射扎里斯基开覆盖 $\{U_i\}$ 上，其中 $E|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}^{\oplus n}$ 且 $L|_{U_i} \cong \mathscr{O}_{U_i}$，二次型由下式给出

$$q\left(\sum x_k e_k^{(i)}\right) = \sum_{k \le l} b_{kl}^{(i)} x_k x_l,$$

其中 $b_{kl}^{(i)} \in \mathscr{O}_S(U_i)$，且 b_q 的矩阵为 $(B_{kl}^{(i)})$，其中 $B_{kk}^{(i)} = 2b_{kk}^{(i)}$ 且 $B_{kl}^{(i)} = b_{kl}^{(i)}$ 对 $k \neq l$。

那么， q 的判别式 是整体截面

$$\Delta(q) \in H^0(S, L^{\otimes n} \otimes (\det E)^{\otimes -2})$$

局部定义为 $\Delta_i = \det(B_{kl}^{(i)}) \in \mathscr{O}_S(U_i)$。详情请参见 [16]。

定义 2.7 (**二次代数**)。 二次 $\mathscr{O}_S$-代数是一个 $\mathscr{O}_S$-代数层 C ， 作为 $\mathscr{O}_S$-模层局部自由且秩为 2；也就是说，存在由开集 U 构成的基 S ， 使得 $C(U)$是一个自由的 $\mathscr{O}_S(U)$-模。

例 2.8。 若 L/K 是一个二次域扩张，则$\mathrm{Spec}(L)$的结构层是$\mathrm{Spec}(K)$上的二次代数。

引理 2.9。 [9, 命题 2.4] 设 C 是 S上的二次代数。那么 $C/\mathscr{O}_S$ 是一个局部自由的$\mathscr{O}_S$-模，秩为 1。此外，若 C 作为 $\mathscr{O}_S$-模是自由的，则存在 $\tau \in \Gamma(S, C)$ ， 使得$C = \mathscr{O}_S \oplus \tau\mathscr{O}_S$作为 $\mathscr{O}_S$-模成立。特别地， $C/\mathscr{O}_S = \tau\mathscr{O}_S$ 是自由的。

注 2.10 （概形上层的全局分裂失败）。 若 R 是交换环，且 C 是二次 R-代数，则有一个经典结果：模 C 分解为

$$C \cong R \oplus (C/R)$$

作为 R-模；参见 [15, 引理 1.3。5] 以及 [20, 引理 1。3]。这一分解反映了这样一个事实：在仿射情形下，典范包含 $R \hookrightarrow C$ 存在一个截面，从而保证商映射 $C \twoheadrightarrow C/R$ 分裂。

然而，正如 [4] 和 [16, 例 2。10] 中的例子所示，这一结果无法推广到概形情形。尽管如此，当基概形 S 满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ 时，全局分裂仍成立。

引理 2.11。 [16, 引理 2。11] 设 S 为一个满足 $\frac{1}{2} \in \Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ 的概形，则 $\mathscr{O}_S \cdot 1_C \hookrightarrow C$ 是 $\mathscr{O}_S$-直和项 C。

定义 2.12 (**二次代数的判别式**)。二次代数 C 的判别式定义为以下有序对：

$$(\Delta(C), N)$$

其中：

- $N = (C/\mathscr{O}_S)^\vee$，是 S 上的一个线丛（可逆层），
- $\Delta(C) \in H^0(S, N^{\otimes 2})$ 是 $N^{\otimes 2}$ 的一个整体截面，按以下方式局部构造。

局部构造。设 $U \subseteq S$ 是一个开子集，在此开子集上， $C|_U$ 作为 $\mathscr{O}_U$-模是秩为 2 的自由模。取一组基 $\{1, \tau\}$，使得：

$$\mathcal{C}|_U \simeq \mathscr{O}_U[\tau]/(\tau^2 + r\tau + s), \quad \text{with } r, s \in \Gamma(U, \mathscr{O}_U)$$

则：

- 令 $\bar{\tau} \in (C/\mathscr{O}_S)|_U$ 为 τ 的像，
- 令 $\tau^\vee \in N(U)$ 为对应于 τ 的对偶基元素，
- 于是

$$\Delta(C)|_U := (r^2 - 4s)(\bar{\tau}^\vee \otimes \bar{\tau}^\vee) \in N^{\otimes 2}(U)$$

设 S 为一个概形，并设 C 为 S 上的一个二次代数，即交换 $\mathscr{O}_S$-代数的一个层，且为秩 2 的局部自由层。判别式的局部定义：

$$\Delta(C)|_U := (r^2 - 4s)(\bar{\tau}^\vee \otimes \bar{\tau}^\vee)$$

在重叠处粘合，即它定义了 $((C/\mathscr{O}_S)^\vee)^{\otimes 2}$ 的一个良定义的整体截面。我们称两个判别式 (Δ, N) 与 (Δ', N') 是同构 的，如果存在 $\mathscr{O}_S$-模的一个同构

$$f : N \xrightarrow{\cong} N'$$

使得

$$\Delta' = f^{\otimes 2}(\Delta),$$

其中 $f^{\otimes 2}$: $N^{\otimes 2} \xrightarrow{\cong} (N')^{\otimes 2}$ 是张量平方上的诱导同构。更详细的讨论请参见 [16]。

定义 2.13 (广义偶克利福德代数)。 在其学位论文中，Bichsel [6] 介绍了与取值于仿射概形上线丛的二次型相关联的偶克利福德代数的构造。随后，Bichsel–Knus[5], 、Caenepeel–van Oystaeyen [7], 以及 Parimala–Sridharan [12]提出了其他方法。现在我们回顾 Asher Auel [1]所阐述的直接张量构造。

设 (E, q, L) 是定义在概形 S 上、秩为 n 的（取值于线丛的）二次型，其中 $n = 2m$或 $n = 2m + 1$。考虑张量代数 $T(E \otimes E \otimes L^\vee)$，并将由以下形式的元素分别生成的理想记为 $J_1^{C_0}$和 $J_2^{C_0}$

$$v \otimes v \otimes f - f(q(v)) \cdot 1,$$

and

$$u \otimes v \otimes f \otimes v \otimes w \otimes g - f(q(v))\, u \otimes w \otimes g,$$

对于 E 的局部截面 u, v, w，以及 $L^\vee$ 的局部截面 f, g。

在 Asher Auel 的著作中，(E, q, L) 的广义偶克利福德代数被定义为如下商

$$C_0(E, q, L) = T(E \otimes E \otimes L^\vee)/(J_1^{C_0} + J_2^{C_0}).$$

存在一个典范的 $\mathscr{O}_S$-模态射

$$i_{C_0} : E \otimes E \otimes L^\vee \to C_0(E, q, L),$$

它由自然嵌入与

$$\theta : E \otimes E \otimes L^\vee \hookrightarrow T(E \otimes E \otimes L^\vee)$$

投影复合得到

$$p : T(E \otimes E \otimes L^\vee) \twoheadrightarrow C_0(E, q, L),$$

并经由张量代数的一次分量分解。

命题 2.14 （广义偶克利福德代数的泛性质）。 [1, 命题 1.1]给定一个 $\mathscr{O}_S$-代数 A 以及一个 $\mathscr{O}_S$-模态射 $j : E \otimes E \otimes L^\vee \to A$ 使得

$$j(v \otimes v \otimes f) = f(q(v)) \cdot 1 \quad and \quad j(u \otimes v \otimes f) \cdot j(v \otimes w \otimes g) = f(q(v))\, j(u \otimes w \otimes g),$$

则存 在唯一的 $\mathscr{O}_S$-代数同态 ψ: C_0（E, q, L） $\to A$ 满足 $j = \psi \circ i_{C_0}$。

证明。 详见 [16,命题 2.19] 。 □

注 2.15。 从此以后，我们所说的偶克利福德代数，即二次型（E, q, L）的偶克利福德代数（其中 L 为非平凡线丛），均指其广义偶克利福德代数。这一推广用以计入由 L 所作的扭曲。

命题 2.16。 设 （E, q, L） 为概形 S 上秩为 n 的二次型。记 $n = 2m$ 或$n = 2m + 1$。

(a) $C_0(E、 q、 L)$ 是一个秩为 2^{n-1} 的局部自由 $\mathscr{O}_S$-代数。(b) 任意相似 $(\varphi、 \lambda) : (E、 q、 L) \to (E'、 q'、 L')$ 都会诱导一个 $\mathscr{O}_S$-代数同构

$$C_0(\varphi, \lambda) : C_0(E, q, L) \xrightarrow{\cong} C_0(E', q', L').$$

(c) 对于任意概形态射 $p: S' \to S$，存在一个规范的 $\mathscr{O}_S$-模同构

$$C_0(p^*(E,q,L)) \xrightarrow{\cong} p^*C_0(E,q,L).$$

证明。 该结果是以下结论的推论： [1, 命题 1。2]。另见 [16, 命题 2.20 和命题 2。21]。 □

命题 2.17。 设 $q: E \to L$ 是一个二元二次型。那么，商 $C_0(E,q,L)/\mathscr{O}_S$ 与 $(\wedge^2 E \otimes L^\vee)$ 作为 $\mathscr{O}_S$-模是典范同构的。

证明。 偶克利福德代数 $C_0(E,q,L)$ 关于二次型 q满足泛性质。具体而言，由张量积结构诱导出一个自然映射：

$$E \otimes E \otimes L^\vee \xrightarrow{\theta} T(E \otimes E \otimes L^\vee) \xrightarrow{p} C_0(E,q,L),$$

其中：

- $T(E \otimes E \otimes L^\vee)$表示 $E \otimes E \otimes L^\vee$的张量代数，
- p 是到偶克利福德代数 $C_0(E,q,L)$上的商映射，
- θ 是从 $E \otimes E \otimes L^\vee$ 到张量代数的典范包含。

再对 $\mathscr{O}_S$的作用取商后，我们得到如下映射序列：

$$E \otimes E \otimes L^\vee \xrightarrow{\theta} T(E \otimes E \otimes L^\vee) \xrightarrow{p} C_0(E,q,L) \xrightarrow{Q} C_0(E,q,L)/\mathscr{O}_S.$$

在开子集 $U \subset S$上的截面层面，这些映射的合成在形如以下的元素上为零：

$$\{x \otimes x \otimes f : x \in \Gamma(U,E), f \in \Gamma(U,L^\vee)\}.$$

这可直接由克利福德代数的定义关系得出。根据商的泛性质，存在唯一的 $\mathscr{O}_S$-模态射：

$$\xi : \wedge^2 E \otimes L^\vee \to C_0(E,q,L)/\mathscr{O}_S.$$

为证明 ξ的满射性，我们将问题局部化。现在可以假设 E 和 L 是自由的 R-模。根据 Poincar´e–Birkhoff–Witt（PBW）定理（ [15, 第四章，定理 1.5.1，§1] ），以及二次型 q的二元性可知，$C_0(E,\ q,\ L)$ 在局部由形如 1 和 $(x \wedge y)$ 的元素生成，其中 $x,\ y \in E$。因此，映射 ξ 局部化后是满射，进而在整体上也是满射。

$C_0(E,\ q,\ L)/\mathscr{O}_S$和 $\wedge^2 E \otimes L^\vee$ 都是秩为 1 的局部自由 $\mathscr{O}_S$-模。这是因为 E 是秩 2 向量丛（因为 q 是二元的），因此 $\wedge^2 E$ 是线丛。与 $L^\vee$（另一个线丛）作张量积会保持秩不变。

由于 ξ 是两个秩相同的局部自由 $\mathscr{O}_S$-模之间的满射态射，因此它也必定是单射。因此， ξ 是一个同构。 □

注 2.18。 鉴于注 *2.10*，我们可以在局部将层 $C_0(E,\ q,\ L)$ a s

$$C_0(E,q,L) \cong \mathscr{O}_S \oplus (\wedge^2 E \otimes L^\vee).$$

引理 2.19 （二元二次型及其相关偶克利福德代数的判别式比较）。 [16, 引理 2.26] 设 S 是一个一般概形，且 $q:\ E \to L$ 是 S上的一个二元二次型，其中 E 是一个秩为2 的向量丛， L 是 S上的一个线丛。记相关广义克利福德代数的偶部为$C_0(E,q,L)$。那么，二次型 q的判别式与二次代数 $C_0(E,q,L)$ 的判别式仅相差一个符号。

证明。 详细证明请参见 [16, 引理 2.28]。 □

定义 2.20 (**克利福德双模**)。 这里，我们回顾其定义 [1], ，着重强调其函子性以及与基变换的相容性。

$\mathscr{O}_S$-模 $E \otimes T(E \otimes E \otimes L^\vee)$ 自然具有右 $T(E \otimes E \otimes L^\vee)$-模结构，记作 $\otimes$。一个 $\mathscr{O}_S$-双线性映射

$$* : (E \otimes E \otimes L^\vee) \times E \to E \otimes (E \otimes E \otimes L^\vee)$$

定义如下

$$(u \otimes v \otimes f) * w = u \otimes (v \otimes w \otimes f),$$

对于 E 的截面 u， v， w 和 $L^\vee$ 的截面 f，它在 $E \otimes T(E \otimes E \otimes L^\vee)$ 上诱导出左 $T(E \otimes E \otimes L^\vee)$-模结构 $*$。该结构由其与右 $T(E \otimes E \otimes L^\vee)$-模结构的交换性唯一确定。因此，我们定义

$$C_1(E, q, L) = \frac{E \otimes T(E \otimes E \otimes L^\vee)}{E \otimes J_1^{C_0} + J_1^{C_0} * E},$$

并配以自然诱导的 $\mathscr{O}_S$-模态射

$$i : E \to C_1(E, q, L),$$

它是一个局部可分裂嵌入。容易验证 $E \otimes J_2^{C_0} \subset J_1^{C_0} * E$ 和 $J_2^{C_0} * E \subset E \otimes J_1^{C_0}$，因此 $C_1(E,\ q,\ L)$ 继承了关于 $C_0(E,\ q,\ L)$ 的双模结构。分别将右、左 $C_0(E,\ q,\ L)$-模结构记为 $\cdot$ 和 $*$。

假设秩(E) $= n = 2m$ 或 $n = 2m + 1$，该模具有一个滤过

$$E = F_1 \subset F_3 \subset \cdots \subset F_{2m+1} = C_1(E, q, L),$$

其中， F_{2i+1} 表示截断 $E \otimes T^{\leq i}(E \otimes E \otimes L^\vee)$ 在 $C_1(E,\ q,\ L)$ 中的像，其中 $0 \leq i \leq m$。相关分次分量满足

$$F_{2i+1}/F_{2i-1} \cong \wedge^{2i+1} E \otimes (L^\vee)^{\otimes i}.$$

因此， $C_1(E,\ q,\ L)$ 是一个秩为 2^{n-1} 的局部自由 $\mathscr{O}_S$-模。

命题 2.21 (克利福德双模的泛性质)。 [1, 命题 1。4] 设 B 是一个$C_0(E, q, L)$-双模，其右作用和左作用分别记为 $\cdot$ 和 $*$。设 $j :\ E \to B$ 是一个$\mathscr{O}_S$-模态射，满足恒等式

$$j(u) \cdot i_{C_0}(v \otimes w \otimes f) = i_{C_0}(u \otimes v \otimes f) * j(w),$$

对于所有截面 u、 v、 $w \in \Gamma(U, E)$ 以及 $f \in \Gamma(U, L^\vee)$，其中 $U \subseteq S$ 是任意开子集。则存在唯一的 $C_0(E, q, L)$-双模态射

$$\psi : C_1(E, q, L) \to B$$

使得 $j = \psi \circ i$。

证明。 有关详细证明，请参见 [16,命题 2.28] 。 □

命题 2.22。 [1, 命题 1.5] 设 (E, q, L) 是概形 S 上秩为 n 的二次型。记作 $n = 2m$ 或 $n = 2m + 1$。

(a) 存在一个 $\mathscr{O}_{S'}$-模的典范同构:

$$C_1(p^*(E, q, L)) \xrightarrow{\cong} p^* C_1(E, q, L).$$

(b) 任一相似变换$(\varphi, \lambda) : (E, q, L) \to (E', q', L')$ 诱导一个 $\mathscr{O}_S$-模同构

$$C_1(\varphi, \lambda) : C_1(E, q, L) \to C_1(E', q', L'),$$

它是 $C_0(\varphi,\lambda)$-半线性的，如下面的交换图所示：

$$\begin{array}{ccc} C_1(E,q,L)\otimes_{C_0(E,q,L)} C_1(E,q,L) & \xrightarrow{C_1(\varphi,\lambda)\otimes C_1(\varphi,\lambda)} & C_1(E',q',L')\otimes_{C_0(E',q',L')} C_1(E',q',L') \\ \downarrow m & & \downarrow m \\ C_0(E,q,L)\otimes_{\mathscr{O}_S} L & \xrightarrow{C_0(\varphi,\lambda)\otimes\lambda} & C_0(E',q',L')\otimes_{\mathscr{O}_S} L' \end{array}$$

其中，m 表示相应模中的乘法映射。

定理 2.23。 二元二次型 (E, q, L) 的克利福德双模 $C_1(E, q, L)$ 同构于其底层秩 2 向量丛 E。

证明。 该断言由克利福德双模的泛性质（命题 2.21）得出；详情参见 [16,注 2。32]。 □

注 2.24。 从现在起，通过典范同一，在二元二次型 (E, q, L)的情形下，我们将 E与 $C_1(E, q, L)$视为相同。

接下来，我们回顾 Wood 对可迹模的记法及其一些性质。

定义 2.25 (**可迹模**)。 [11, 定义 1。2] 设 $f : X \to T$ 是一个双覆盖，并考虑一个 $\mathscr{O}_X$-模 $\mathcal{M}$。我们称 $\mathcal{M}$ 为可迹的，若：

(1) 推前 $f_*\mathcal{M}$ 是秩 2 的局部自由 $\mathscr{O}_T$-模，并且

(2) $f_*\mathcal{M}$ 与 $f_*\mathscr{O}_X$ 给出相同的迹映射 $f_*\mathscr{O}_X \to \mathscr{O}_T$，即复合映射

$$f_*\mathscr{O}_X \xrightarrow{mult.} \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_T}(f_*\mathscr{O}_X, f_*\mathscr{O}_X) \xrightarrow{\mathrm{trace}} \mathscr{O}_T$$

and

$$f_*\mathscr{O}_X \xrightarrow{mult.} \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{O}_T}(f_*\mathcal{M}, f_*\mathcal{M}) \xrightarrow{\mathrm{trace}} \mathscr{O}_T$$

一致。

用交换代数对可迹 模的局部描述如下。假设 $T =$ 谱(A)，其中 $A = \Gamma(T, \mathscr{O}_T)$是一个交换环，$X =$ 谱(B)，其中 $B = \Gamma(X, \mathscr{O}_X)$是秩 2 的自由 A-模，并且 M 是有限生成的 B-模，使得 $f_*M = M$ 是秩 2 的自由A-模。 B 上的乘法映射为：

$$B \otimes_A B \to B, \quad b_1 \otimes b_2 \mapsto b_1 b_2,$$

这诱导出一个映射：

$$\mu_B : B \to \mathrm{End}_A(B)$$

将 $b \in B$ 映到自同态 $x \mapsto bx$。类似地，对于 M，我们得到：

$$\mu_M : B \to \mathrm{End}_A(M)$$

将 $b \in B$ 映到 $m \mapsto bm$。

由于 B与 M都是秩 2 的自由 A-模，自同态环 $\mathrm{End}_A(B)$ 与 $\mathrm{End}_A(M)$ 具有到 A的良定义迹映射，定义为作用在该模上的线性算子的迹。

因此我们得到两个复合映射：

$$\mathrm{Tr}_{\mathscr{O}_X} : B \xrightarrow{\mu_B} \mathrm{End}_A(B) \xrightarrow{\mathrm{tr}} A \quad \text{for } \mathscr{O}_X \text{ and}$$

$$\mathrm{Tr}_M : B \xrightarrow{\mu_M} \mathrm{End}_A(M) \xrightarrow{\mathrm{tr}} A \quad for \ \mathcal{M}.$$

$\mathcal{M}$ 的可迹性则要求这两个映射一致：

$$\mathrm{Tr}_{\mathscr{O}_X}(b) = \mathrm{Tr}_{\mathcal{M}}(b) \quad \text{for all } b \in B.$$

也就是说，对每一个 $b \in B$，算子 $x \mapsto bx$ 在 B 上的迹等于算子$m \mapsto bm$ 在 M上的迹。

引理 2.26. 若 $q\colon\ E \to L$ 是一个二元二次型，则克利福德双模 $C_1(E,q,L)$ 是一个可迹的 $C_0(E,q,L)$-模。

证明. 由定理 2.23，我们可不失一般性地假设对应于二元二次型 (E,q,L) 的克利福德双模与原来的向量丛重合，即

$$C_1(E,q,L) = E.$$

我们旨在证明 $C = C_0(E,q,L)$ 与 E 诱导相同的迹映射 $C \to \mathscr{O}_S$。要证明两个 $\mathscr{O}_S$-模的层之间的两个映射相等，只需在 S 的开子集上局部验证它们一致。局部地，我们可以假设 C、E 和 L 是 R 上的自由模，从而简化计算。设 E 是以 $\{e_1,e_2\}$ 为基的秩为 2 的自由 R-模。二次型 q 由下式给出：

$$q(xe_1 + ye_2) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

其中 $a,b,c \in R$ 是定义该二次型的系数。偶克利福德代数 $C_0(E,q,L)$ 是以 $\{1,\tau\}$ 为基的自由 R-模，其中 $\tau = e_1 \cdot e_2$。C 中的乘法满足如下关系：

$$\begin{aligned} \tau^2 &= b\tau - ac, \\ \tau e_1 &= be_1 - ae_2, \\ \tau e_2 &= ce_1. \end{aligned}$$

回顾迹映射是 R-线性的，因此只需考察 C 的生成元所给出的左乘作用。C 的生成元为 1 和 τ。由于 1 的作用是平凡的（乘以 1 不会改变该模），我们重点考察 τ。在 C 中，基为 $\{1,\tau\}$。τ 的作用由下式给出：

$$\tau \cdot 1 = \tau, \quad \tau \cdot \tau = b\tau - ac.$$

这对应于矩阵：

$$\begin{pmatrix} 0 & -ac \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

在 E 中，基为 $\{e_1,e_2\}$。利用关系式 $\tau e_1 = be_1 - ae_2$ 和 $\tau e_2 = ce_1$，τ 的作用表示为：

$$\begin{pmatrix} b & c \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

矩阵的迹是其对角线元素之和。对于这两个矩阵，由于它们的迹相等，因此由 C 和 E 诱导的迹映射一致。

□

2.1. 标准对合与四元数代数。以下定义源自 [15], ，最初是在环的语境下提出的；然而，它们可以自然地推广到任意基概形 S 的情形。

定义 2.27 (**对合**)。设 R 是一个环。环 R 上的对合是一个映射

$$\sigma : R \to R$$

对所有 a、$b \in R$ 满足以下性质：

(*1*) 反同态：

$$\sigma(ab) = \sigma(b)\sigma(a).$$

(*2*) 可加性：

$$\sigma(a+b) = \sigma(a) + \sigma(b).$$

(3) 对合性：

$$\sigma^2(a) = a.$$

如果 R 是含么环1，那么对合还必须满足 $\sigma(1) = 1$。一对(R, σ) 称为带对合的环。

设 R 是带对合 σ_R的交换环。一个 R带对合的代数 是一个 R-代数 A，带有一个对合 σ_A，它延拓了 R 的对合：

$$\sigma_A(ra) = \sigma_R(r)\sigma_A(a) \quad \text{for } a \in A,\, r \in R.$$

设 (A, σ_A) 与 (B, σ_B) 为带对合的环。一个带对合的环的态射

$$\varphi\colon (A, \sigma_A) \to (B, \sigma_B)$$

是环同态 $\varphi\colon\ A \to B$ 使得

$$\sigma_B(\varphi(a)) = \varphi(\sigma_A(a)), \quad a \in A.$$

定义 2.28 (**标准对合**). 设 R 是交换环。对任意带对合 σ的 R-代数 A，我们相对于该对合定义迹 tr 与范数 n 为

$$\mathrm{tr}(x) = x + \sigma(x), \quad n(x) = x\sigma(x), \quad x \in A.$$

我们称 σ 为标准对合，如果

- R 在 σ下不变，即 $\mathrm{Fix}(\sigma) \supseteq R$。
- $\mathrm{tr}(x) \in R$ 以及 $n(x) \in R$ 对所有 $x \in A$均成立。

命题 2.29。 [15, 命题 1.3。4] 设 A 是一个 R-代数，且是有限生成投射 c-且忠实的 自由 R-模。那么， A 上至多存在一个标准对合。

注 2.30。 由于标准对合的唯一性，其定义自然可以推广到一般概形上的代数的局部自由层。这一推广得益于如下事实：可以先在局部定义对合，再将这些局部定义唯一地粘合起来。为使这一构造形式化，我们按如下方式进行：

(1) 局部数据：对于每个仿射开子集 $U \subset X$，定义 $\sigma_U\colon\ \mathcal{A}(U) \to \mathcal{A}(U)$为 $\mathcal{A}(U)$上的唯一标准对合。*(2)* 重叠部分上的相容性：设 U 和 V 是 X 的仿射开子集，且 $U \cap V \neq \emptyset$。由于标准对合是唯一的， σ_U 和 σ_V 在 $U \cap V$ 上的限制必须一致。因此：

$$\sigma_U|_{U\cap V} = \sigma_V|_{U\cap V}.$$

(3) 粘合：根据 $\mathcal{A}$的层性质，局部映射 σ_U 粘合在一起，定义出一个全局映射$\sigma\colon\ \mathcal{A} \to \mathcal{A}$。*(4)* 全局对合的性质：全局映射 σ 继承了局部对合的性质：

- σ^2 =恒等映射，
- σ 是 $\mathscr{O}_S$-线性的，
- σ 满足任何附加的结构性质（例如，反乘法性）。

定义 2.31 (**四元数代数**)。 我们称一个 R-代数 A为四元数代数，如果

(1) A 是一个秩 *4* 的射影 R-模，*(2)* A 带有一个标准对合。

定义 2.32 (**概形上的四元数代数** S)。 设 S 为一个一般概形。概形 S 上的四元数代数是一个 $\mathscr{O}_S$-代数层 $\mathcal{A}$，满足以下性质：

(1) 秩为 *4* 的局部自由：层 $\mathcal{A}$ 是一个秩为 *4* 的局部自由凝聚 $\mathscr{O}_S$-模，这意味着对每个点 $s \in S$，都存在一个开邻域 $U \subseteq S$，使得：

$$\mathcal{A}|_U \simeq \mathscr{O}_U^{\oplus 4}$$

作为 $\mathscr{O}_U$-模。

(2) 标准对合的存在性：存在一个全局的 $\mathscr{O}_S$-线性对合：

$$\sigma : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$$

称为标准对合，并满足以下性质，对所有局部截面 $a \in \mathcal{A}(U)$均成立：

$$\sigma(a)a = a\sigma(a) \in \mathscr{O}_S(U) \cdot 1_{\mathcal{A}}$$
$$a + \sigma(a) \in \mathscr{O}_S(U) \cdot 1_{\mathcal{A}}$$

这使我们能够定义：

- 约化迹：$\mathrm{tr}(a) = a + \sigma(a) \in \mathscr{O}_S(U)$
- 约化范数：$\mathrm{n}(a) = a \cdot \sigma(a) \in \mathscr{O}_S(U)$

每个元素 $a \in \mathcal{A}(U)$ 满足其特征多项式

$$a^2 - \mathrm{tr}(a) \cdot a + \mathrm{n}(a) \cdot 1 = 0$$

式：

(3) 局部结构：在 S 上局部地，$\mathcal{A}$ 具有一种表示，其形式类似于环上的经典四元数代数。也就是说，对于任意仿射开子集 $U =$谱$(R) \subseteq S$，我们有：

$$\mathcal{A}(U) \simeq R\langle i, j\rangle/(i^2 - a,\ j^2 - b,\ ij + ji)$$

对于某些 a、$b \in R^\times$。记作 $(a, b)_R$，称为 R上的符号代数或四元数代数。

例 2.33。若 q: $E \to \mathscr{O}_S$ 是一般概形 S上的二元二次型，则完整克利福德代数 $C(E, q, \mathscr{O}_S)$ 自然地具有 S上的四元数代数结构。

注记 *2.34. Venkata Balaji* 在其著作 [18] 中证明，每个四元数代数都可以实现为某个三元二次型的偶克利福德代数。具体而言，对于任意概形 S上的四元数代数 $\mathcal{A}$，存在一个秩 *3* 向量丛 V，其上有一个取值于线丛 L 的二次型 $q := det^{-1}(\mathcal{A})$，以及代数丛的一个同构 $\mathcal{A} \cong C_0(V, q, L)$，其中 $C_0(V, q, L)$表示与三元组 (V, q, L)相关联的偶克利福德代数。另见 [19]和 [8]。

3. Classification of binary quadratic forms using Clifford pairs

本节证明本文的主要结果。

定理 3.1. 对于任意概形 S，自然映射

$$(E, q, L) \mapsto (C_0(E, q, L), C_1(E, q, L))$$

诱导出一个保判别式（至多相差一个符号）的；具体而言，满足

$$\Delta(q) = -\Delta(C_0(E, q, L)),$$

双射

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Similarity classes of binary quadratic} \\ \textit{forms } (E,\ q,\ L) \textit{ over } S \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Isomorphism classes of pairs } (C, E), \\ \textit{with } C \textit{ a quadratic algebra over } S, \\ \textit{and } E \textit{ a traceable } C\textit{-module} \end{array} \right\},$$

它关于 S具有函子性。

对(C, E)与(C', E')的同构由 $\mathscr{O}_S$-代数的同构 $C \cong C'$，以及保持 C 和 C' 模结构的 $\mathscr{O}_S$-模同构 $E \cong E'$ 给出。此处，对于任意二元二次型 q: $E \to L$，对象 $C_0(E, q, L)$和 $C_1(E, q, L)$分别表示与二元二次型 q相关联的广义克利福德代数的零次和一次分量。

证明。为使论述清晰严谨，我们将证明分为一系列相互依赖的阶段。

验证定理 *3.1* **中映射的良定义性**。考虑一个二元二次型 $q \in \Gamma(S,\ \mathscr{Q}uad(E,\ L))$。令 $C = C_0(E,\ q,\ L)$ 表示与 q相关联的偶克利福德代数。一个经典结果表明 C 具有二次代数的结构，而 E 自然继承了一个 C-模的结构。此外，由引理2.26 可知，E 是一个可追踪 C-模。

现在，假设两个二元二次型（$E,\ q,\ L$）和（$E',\ q',\ L'$）相似。由命题 2.16和命题 2.22可知，相关的对（$C_0(E,\ q,\ L)\ E$）和（$C_0(E',\ q',\ L')\ E'$）作为对同构。因此，定理 3.1陈述中的映射是良定义的。

定理 3.1 中映射的满射性。反过来，给定一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数 C 和一个可迹C-模 E，我们可以构造一个秩 1 的 $\mathscr{O}_S$-模 $L = \wedge^2 E \otimes (C/\mathscr{O}_S)^\vee$ 以及一个二次型 (E, q, L)，使得存在同构 $C_0(E, q, L) \cong C$ 作为 $\mathscr{O}_S$-代数，$C_1(E, q, L) \cong E$ 作为 $\mathscr{O}_S$-模；这些同构与 C-模 E 以及 $C_0(E, q, L)$-模 $C_1(E, q, L)$ 相容。我们将此证明分为两种情况：

情形 *1*：若 C和 E是自由 $\mathscr{O}_S$-模：在此情形下，引理 2.9 允许我们选取基 $\{1, \tau\}$作为 C的基，以及 $\{e_1, e_2\}$ 作为 E的基。由于 τe_1和 τe_2是 E中的元素，而该模是秩为 2 的自由 R-模，因此我们可以将它们表示为

$$\tau e_1 = s e_1 - t e_2 \quad \text{and} \quad \tau e_2 = d e_1 + m e_2. \tag{1}$$

其中 $s,\ t,\ d,\ m \in \Gamma(S,\ \mathscr{O}_S)$。由此立即得到关系

$$(\tau - m) e_2 = d e_1.$$

为了便于计算 进行基变换，替换 $\{1, \tau\}$ 为 $\{1, \tau - m,$ 以便在 C 中 $\}$. 这一变换 对应的基变换矩阵为

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -m \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

因此，不失一般性，我们可以假设

$$\tau e_1 = b e_1 - a e_2 \quad \text{and} \quad \tau e_2 = c e_1 \tag{2}$$

其中新的系数 $a,\ b,\ c$是 $\Gamma(S,\ \mathscr{O}_S)$ 的元素，通过基的修改得到。

若 $\tau^2 = m\tau + r$ 满足 $m,\ r \in \mathscr{O}_S$，则由 (左) 乘法 τ 在 C 和 E 上给出的 $\mathscr{O}_S$-线性自同态的矩阵分别为

$$\begin{pmatrix} 0 & r \\ 1 & m \end{pmatrix} \quad and \quad \begin{pmatrix} b & c \\ -a & 0 \end{pmatrix}.$$

那么，可迹性条件告诉我们 $m = b$。因此我们有 $\tau^2 = b\tau + r$。现在将（2）乘以 τ，得到

$$\begin{aligned} \tau^2 e_1 &= b\tau e_1 - a\tau e_2 \\ \Rightarrow (b\tau + r) e_1 &= b\tau e_1 - ace_1 \end{aligned}$$

现在，比较 e_1的系数，得到 $r = -ac$。因此，最后我们有

$$\tau^2 = b\tau - ac \qquad \tau e_1 = b e_1 - a e_2 \qquad \tau e_2 = c e_1 \tag{3}$$

对于这个 $(C,\ E)$，考虑由下式定义的二元二次型 $q:\ E \to \mathscr{O}_S$

$$q(x e_1 + y e_2) = a x^2 + bxy + c y^2,$$

其中 $a,\ b,\ c$来自（3）和 $x,\ y \in \Gamma(S,\ \mathscr{O}_S)$。

我们声称 C同构于偶克利福德代数 $C_0(E,\ q,\ \mathscr{O}_S)$，作为 $\mathscr{O}_S$-代数。此结论通过援引**偶克利福德代数的泛性质**得以确立，正如命题 2.14所述。

为此，考虑 $\mathscr{O}_S$-线性映射 $\phi:\ E \otimes E \to C$，定义为

$$\phi(e_i \otimes e_i) = q(e_i) \cdot 1_C \quad \text{for} \quad i = 1, 2;$$
$$\phi(e_1 \otimes e_2) = \tau;$$
$$\phi(e_2 \otimes e_1) = b_q(e_1, e_2) \cdot 1_C - \tau.$$

我们需要验证 ϕ 满足以下条件:

$$\phi(x \otimes x) = q(x) \cdot 1_C \quad and \quad \phi(x \otimes y) \cdot \phi(y \otimes z) = q(y)\phi(x \otimes z) \tag{4}$$

其中 x, y, $z \in E$。不过，只需在基向量上验证即可。

Now

$$\begin{aligned}
&\phi(e_1 \otimes e_2) \cdot \phi(e_2 \otimes e_1) \\
&= \tau \cdot \{b_q(e_1, e_2) - \tau\} \\
&= \tau \cdot \{q(e_1 + e_2) - q(e_1) - q(e_2) - \tau\} \\
&= \tau \cdot \{a + b + c - a - c - \tau\} \\
&= b\tau - \tau^2 \\
&= b\tau - b\tau + ac \\
&= ac
\end{aligned}$$

此外,

$$q(e_2)\phi(e_1 \otimes e_1) = q(e_2)q(e_1) = ac.$$

于是，根据偶克利福德代数的泛性质，存在唯一的 $\mathscr{O}_S$-代数态射

$$\psi : C_0(E, q, \mathscr{O}_S) \to C.$$

由于 $\{1, \tau\}$ 中的每个基向量在映射 ψ下都有原像，因此 ψ是满射。此外， ψ是 $\mathscr{O}_S$-代数的同构，因为 $C_0(E,\ q,\ O_S)$ 和 C都是秩相同的自由 $\mathscr{O}_S$-模。

情形 2: 如果 C 或 E 不是自由的 $\mathscr{O}_S$-模。 在这种情况下，对于给定的 $(C,\ E)$ 对，考虑该层 f

$$L = \wedge^2 E \otimes (C/\mathscr{O}_S)^\vee. \tag{5}$$

这是一个线丛，由引理 2.9 可知。

根据引理 2.3 ，要构造一个二次型，只需给出一个 $\mathscr{O}_S$-线性态射

$$\alpha : \mathrm{Sym}_2 E \to L,$$

其中，$\mathrm{Sym}_2 E$ 是由所有形如（$v \otimes v$）的截面生成的 $\mathscr{O}_S$-子模的层化。此外，只需定义一个从（$C/\mathscr{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_2 E$）到 $\wedge^2 E$的 $\mathscr{O}_S$-线性态射。

考虑映射 α： $C/\mathscr{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_2 E \to \wedge^2 E$ ，它在 $U \subseteq S$ 上的截面上定义为

$$\alpha_U(\bar{\gamma} \otimes (e_1 e_2)) = \gamma e_2 \wedge e_1.$$

其中 $\bar{\gamma} \in \Gamma(U, C/\mathscr{O}_S)$和 $e_1, e_2 \in \Gamma(U, E)$。

这是一个良定义的 $\mathscr{O}_S$-线性态射，因此它对应于一个二元二次型 q；考虑该二元形式。

我们旨在证明，与二次型 q 相关联的偶克利福德代数 $C_0(E,\ q,\ L)$ 与 C 作为 $\mathscr{O}_S$-代数同构。为建立这一同构，我们利用偶克利福德代数 $C_0(E,\ q,\ L)$ 所满足的泛性质。

接下来，我们固定 S 的一个开覆盖 $\{U_i\}$ ，使得限制到每个 U_i 上时，向量丛$E|_{U_i}$ 平凡化为 $\mathscr{O}_{U_i} x_i \oplus \mathscr{O}_{U_i} y_i$，线丛 $L|_{U_i}$ 平凡化为 $\mathscr{O}_{U_i} z_i$。

在每个这样的开集 U_i上，我们定义一个态射

$$\theta_{U_i} : E|_{U_i} \otimes E|_{U_i} \otimes L^\vee|_{U_i} \to C|_{U_i}$$

规定它在基元素上的作用，并通过 $\mathscr{O}_{U_i}$-线性将其延拓：

$$\begin{aligned}
\theta_{U_i}(x_i \otimes y_i \otimes z_i^\vee) &= (0, (x_i \wedge y_i) \otimes z_i^\vee) \\
\theta_{U_i}(x_i \otimes x_i \otimes z_i^\vee) &= (z_i^\vee(q(x_i)),\ 0)\,; \\
\theta_{U_i}(y_i \otimes x_i \otimes z_i^\vee) &= (z_i^\vee(b_q(x_i, y_i)),\ -(x_i \wedge y_i) \otimes z_i^\vee)\,.
\end{aligned}$$

根据备注 2.18 和（5），θ_{U_i} 定义良好。局部态射 θ_{U_i} 以典范方式粘合为整体态射 θ：$E \otimes E \otimes L^\vee \to C$；完整验证见 [16, 定理 3。1]。

现在，为了运用命题2.14中陈述的偶克利福德代数的泛性质，需要验证映射 θ 是否满足以下条件：

$$\begin{aligned}
&\theta(v \otimes v \otimes f) = f(q(v)) \cdot 1_C \qquad \text{and} \\
&\theta(u \otimes v \otimes f) \cdot \theta(v \otimes w \otimes g) = f(q(v))\,\theta(u \otimes w \otimes g),
\end{aligned}$$

由于 $\theta \in \Gamma(S, E^\vee \otimes E^\vee \otimes L \otimes C)$，因此只需检查其局部性质，而这已在情形 1 中验证。

因此，根据偶克利福德代数的泛性质，存在唯一的 $\mathscr{O}_S$-代数态射

$$\psi : C_0(E, q, L) \to C.$$

我们已经看到，在局部（情形 1）下，ψ 是一个同构；这意味着 ψ 是一个同构 .

定理 3.1**中的映射是单射**。还需证明（C，E）对的同构类与二元形式的相似类相对应。我们将把这一证明分为两种情形：

情形 *1*：若 C和 E是自由 $\mathscr{O}_S$-模：令 $E = e_1\mathscr{O}_S \oplus e_2\mathscr{O}_S$和 $C = \mathscr{O}_S \oplus \tau\mathscr{O}_S$，其中 $\tau = e_1 \cdot e_2$。对 (C, E) 与二次型 $q : E \to \mathscr{O}_S$ 相关联，其定义如下：

$$q(xe_1 + ye_2) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

其中 $x, y, a, b, c \in \mathscr{O}_S$，且关系 $\tau^2 = b\tau - ac$成立。

现在，假设 (C, E) 和 (C', E') 是 S 上模的同构对。这意味着存在 t:

- 一个 $\mathscr{O}_S$-代数同构 φ: $C \to C'$，
- 一个 $\mathscr{O}_S$-线性同构 ψ : $E \to E'$，

使得对于任意开子集 $U \to S$ 上的截面，相容条件成立：

$$\psi_U(c \cdot x) = \varphi_U(c) \cdot \psi_U(x),$$

其中 $c \in \Gamma(U, C)$ 和 $x \in \Gamma(U, E)$。

根据这一设定，我们可以写出：

$$E' = \psi_S(e_1)\mathscr{O}_S \oplus \psi_S(e_2)\mathscr{O}_S,$$

and

$$C' = \mathscr{O}_S \oplus \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2)\mathscr{O}_S,$$

其中 $e_1, e_2 \in \Gamma(S, E)$。我们的目标是证明：

$$\varphi_S(\tau) = d \cdot \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2),$$

对于某个单位元 $d \in \mathscr{O}_S{}^*$。

我们已经证明了 $C \cong C_0(q)$ 和 $C' \cong C_0(q')$，其中 $C_0(q)$ 表示与二次型 q 相关联的偶克利福德代数。接下来，假设：

$$\varphi_S(e_1 \cdot e_2) = d \cdot \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2) + e,$$

对某个 d，$e \in \mathscr{O}_S$。根据 φ 和 ψ的相容性，我们必须满足以下关于截面的恒等自同构：

$$\psi_S((e_1 \cdot e_2)e_2) = \phi_S(e_1 \cdot e_2)\psi_S(e_2). \tag{6}$$

利用 E 的模结构以及 q的定义，我们计算得：

$$\psi_S((e_1 \cdot e_2)e_2) = \psi_S(e_1 e_2^2).$$

由于二次型 q， $e_2^2 = q(e_2)$，因此可得：

$$\psi_S(e_1 e_2^2) = \psi_S(e_1 q(e_2)).$$

根据 ψ 的线性性质，我们有：

$$\psi_S(e_1 q(e_2)) = q(e_2)\psi_S(e_1).$$

So

$$\psi_S((e_1 \cdot e_2)e_2) = q(e_2)\psi_S(e_1) \tag{7}$$

将 $\varphi_S(e_1 \cdot e_2) = d \cdot \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2) + e$ 代入式（6）的右端，得到 ：

$$\varphi_S(e_1 \cdot e_2)\psi_S(e_2) = \big(d \cdot \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2) + e\big)\psi_S(e_2).$$

展开此表达式：

$$\varphi_S(e_1 \cdot e_2)\psi_S(e_2) = d \cdot \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2)^2 + e \cdot \psi_S(e_2).$$

在 E' 中利用性质 $\psi_S(e_2)^2 = q'(\psi_S(e_2))$，可得：

$$\varphi_S(e_1 \cdot e_2)\psi_S(e_2) = d \cdot \psi_S(e_1) \cdot q'(\psi_S(e_2)) + e \cdot \psi_S(e_2). \tag{8}$$

由式（6）、（7）和（8），令 $\psi_S((e_1 \cdot e_2)e_2)$ 的两个表达式相等：

$$q(e_2)\psi_S(e_1) = d \cdot q'(\psi_S(e_2))\psi_S(e_1) + e \cdot \psi_S(e_2).$$

由于 $\psi_S(e_1)$ 和 $\psi_S(e_2)$ 在 E' 中线性无关，因此 $\psi_S(e_1)$ 和 $\psi_S(e_2)$ 的系数必须分别为零。这意味着：

$$e = 0.$$

因此，我们得出：

$$\varphi_S(e_1 \cdot e_2) = d \cdot \psi_S(e_1) \cdot \psi_S(e_2).$$

现在，$d \in \mathscr{O}_S{}^*$ 可由 φ_S 是一个同构这一事实推出。

计算表明：

$$\varphi(\tau) = d \cdot \psi(e_1) \cdot \psi(e_2), \text{ where } d \in \mathscr{O}_S{}^*.$$

为简便起见，记 $\psi(e_1) \cdot \psi(e_2) = \tau'$，则 $\phi(\tau) = d\tau'$.

Now

$$\begin{aligned}
&\tau^2 - b\tau + ac = 0 \\
&\Rightarrow \phi(\tau^2) - b\phi(\tau) + ac = 0 \\
&\Rightarrow \phi(\tau)^2 - b\phi(\tau) + ac = 0 \\
&\Rightarrow d^2\tau'^2 - bd\tau' + ac = 0 \\
&\Rightarrow \tau'^2 - b/d \cdot \tau' + a/d \cdot c/d = 0
\end{aligned}$$

考虑由 $E' \to \mathscr{O}_S$ 定义的二元形式 q'：

$$q(x\psi(e_1) + y\psi(e_2)) = a/d \cdot x^2 + b/d \cdot xy + c/d \cdot y^2$$

其中 $x, y, a, b, c, d \in \mathscr{O}_S$ 来自上文。

于是，容易看出下图是交换的。

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{\ q\ } & \mathscr{O}_S \\
{\scriptstyle\psi}\downarrow & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle\cdot 1/d} \\
E' & \xrightarrow{\ q'\ } & \mathscr{O}_S
\end{array}$$

这表明 q 和 q' 相似。

情况 2：若 C 或 E 不是自由的 $\mathscr{O}_S$-模：设 (C,E) 和 (C',E') 是同构对，即存在

$$\begin{aligned} &\phi : C \to C', && \mathscr{O}_S\text{-algebra isomorphism and} \\ &\psi : E \to E', && \mathscr{O}_S\text{-linear isomorphism} \end{aligned}$$

使得在截面上 $U \subseteq S$, $\psi_U(c \cdot x) = \varphi_U(c) \cdot \psi_U(x)$，其中 $c \in \Gamma(U,C)$ 和 $x \in \Gamma(U,E)$。

现在，配对 (C,E) 与二元形式 $q : E \to L$ 相关联，该形式对应于如下 $\mathscr{O}_S$-线性映射$\alpha : C/\mathscr{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_2 E \to \wedge^2 E$，它定义在 $U \subseteq S$ 上的截面上：

$$\alpha_U(\bar{\gamma} \otimes (e_1 e_2)) = \gamma e_2 \wedge e_1.$$

其中 $\bar{\gamma} \in \Gamma(U, C/\mathscr{O}_S)$、$e_1, e_2 \in \Gamma(U,E)$ 和 $L = (C/\mathscr{O}_S)^\vee \otimes \wedge^2 E$.

同样，配对 (C',E') 与二元形式 $q' : E' \to L'$ 相关联，该形式对应于如下 $\mathscr{O}_S$-线性映射 $\beta :$ $C'/\mathscr{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_2 E' \to \wedge^2 E'$，它定义在 $U \subseteq S$ 上的截面上：

$$\beta_U(\bar{\gamma}' \otimes (e_1' e_2')) = \gamma' e_2' \wedge e_1'.$$

其中 $\bar{\gamma} \in \Gamma(U, C'/\mathscr{O}_S)$、$e_1', e_2' \in \Gamma(U,E')$ 和 $L' = (C'/\mathscr{O}_S)^\vee \otimes \wedge^2 E'$.

$$\begin{array}{ccc} C/\mathscr{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_2 E & \xrightarrow{\alpha} & \wedge^2 E \\ \downarrow{\scriptstyle \bar{\phi} \otimes \mathrm{Sym}_2(\psi)} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \wedge^2 \psi} \\ C'/\mathscr{O}_S \otimes \mathrm{Sym}_2 E' & \xrightarrow{\beta} & \wedge^2 E' \end{array}$$

前述　交换图由于以下等式序列而呈现交换性：

$$\begin{aligned} (\wedge^2\psi \circ \alpha)(\bar{\gamma} \otimes e_1 e_2) &= \wedge^2\psi(\gamma e_2 \wedge e_1) \\ &= \psi(\gamma e_2) \wedge \psi(e_1) \\ &= \phi(\gamma)\psi(e_2) \wedge \psi(e_1). \end{aligned}$$

此外，考虑如下合成：

$$\begin{aligned} \beta \circ (\overline{\varphi} \otimes \mathrm{Sym}_2(\psi))(\overline{\gamma} \otimes e_1 e_2) &= \beta(\overline{\varphi}(\overline{\gamma}) \otimes \psi(e_1)\psi(e_2)) \\ &= \phi(\gamma)\psi(e_2) \wedge \psi(e_1). \end{aligned}$$

利用 Hom–张量伴随性质，我们得到如下交换图。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sym}_2 E & \xrightarrow{q} & \mathscr{H}om(C/\mathscr{O}_S, \wedge^2 E) = L \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Sym}_2(\psi)} & \circlearrowleft & \downarrow{\scriptstyle \wedge^2\psi \circ - \circ \bar{\phi}^{-1}} \\ \mathrm{Sym}_2 E' & \xrightarrow{q'} & \mathscr{H}om(C'/\mathscr{O}_S, \wedge^2 E') = L' \end{array}$$

由于 φ 和 ψ 是同构，合成 $\left(\wedge^2\psi \circ - \circ \varphi^{-1}\right)$ 在 L 与 L'之间诱导出一个 $\mathscr{O}_S$-模同构。因此，二次型 q 和 q' 相似。

判别式保持性质（至多相差一个符号）：在引理2.19中，我们确立了恒等自同构

$$\Delta(q) = -\Delta(C_0(E,q,L)).$$

这证实了上述双射在符号意义下保持判别式。

因此，证明完毕。 □

注3.2。这里，我们说明定理*3.1*中所假设条件的依据。人们可能会很自然地想知道，二元二次型的相似类是否能够完全由其对应的偶克利福德代数刻画。事实上，对于定义在秩为 *3* 的向量丛上的三元二次型，已知这一点成立，正如 [18]和 [19]所示。然而，我们通过一个例子说明，仅有偶克利福德代数的同构，并不足以保证两个二元二次型相似。

代数的同构不足以保证两个二元二次型相似。详细构造见 [16,例 A.1，附录 A] 。

对于任意二元二次型 q，克利福德代数的零次部分，记作 $C_0(q)$，构成一个二次代数；而克利福德代数的一次部分 $C_1(q)$ 则自然具有可迹的 $C_0(q)$-模结构（如引理 *2.26* 所述）。此外，*Max-Albert Knus* 的著作《环上的二次型与厄米型》（[15, 第四章第 §7] 节中的命题 *7.1.1*）有一条关键命题指出：若两个二元二次型 q 和 q' 相似，则 $C_0(q)$ 与 $C_0(q')$ 之间存在唯一的 R-代数同构。此外，$C_1(q)$ 与 $C_1(q')$ 之间还存在唯一的 R-模同构，该同构保持相应的 $C_0(q)$-模结构和 $C_0(q')$-模结构。

注 3.3. 文献中通常将二元二次型的判别式$q(x,y) = ax^2+bxy+cy^2$局部地定义为 $\Delta(q) = b^2-4ac$；例如，参见 [3]。然而，本文采用另一种约定 $\Delta(q) = 4ac-b^2$。因此，定理 *3.1* 所建立的对应仅在相差一个符号的意义下保持判别式。

如果我们改为采用经典定义 $\Delta(q) = b^2-4ac$，则该对应关系将精确保持判别式。

推论 3.4。设 $q_1: E_1 \to L_1$ 和 $q_2: E_2 \to L_2$ 是概形 S 上的两个二元二次型。若存在：

(1) 一个 $\mathscr{O}_S$-代数之间的同构：$C_0(E_1、q_1、L_1)$ 与 $C_0(E_2、q_2、L_2)$；以及 *(2)* 一个 E_1 与 E_2 之间作为 $\mathscr{O}_S$- 模的同构，并且与 $C_0(E_1、q_1、L_1)$- 模（或 $C_0(E_2、q_2、L_2)$- 模）结构相容，

那么 q_1 与 q_2 相似。反之，q_1 与 q_2 的相似性意味着存在这样的同构。

证明。这由前一个定理的步骤 1 和步骤 3 得出。 □

现在我们要分类二元形式的等距类。

推论 3.5。对于任意 $L \in \mathrm{Pic}(S)$，两个二元二次型 $q_1: E_1 \to L$ 和 $q_2: E_2 \to L$等距，当且仅当对 $(C_0(E_1, q_1, L)\ E_1)$ 和 $(C_0(E_2, q_2, L)\ E_2)$ 同构，并满足以下条件：

$$(C_0(E_1,q_1,L)/\mathscr{O}_S)^\vee \otimes \wedge^2 E_1 = L = (C_0(E_2,q_2,L)/\mathscr{O}_S)^\vee \otimes \wedge^2 E_2,$$

and

$$\bar{\phi}^{-1} \otimes \wedge^2 \psi = Id,$$

其中 φ 和 ψ 是与相应的对相关的同构。

证明。“若”部分由 [15, 第四章，命题 7.1.1，§7] 得出。反之由定理 3.1 得出。 □

定义 3.6。我们将与二元二次型 (E, q, L)相关联的对 $(C_0(E, q, L)\ C_1(E, q, L))$ 称为克利福德对 。

推论 3.7。伍德对是克利福德对；反过来，克利福德对也是伍德对，且基概形任意。

证明。在定理 3.1中，我们已经证明，在基概形 S上，每个 Wood 对（C，E），其中 C 是一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数，而 E是一个可迹 C-模，都可表示为某个克利福德对（C_0（E，q，L） C_1（E，q，L）），其中二元二次型 q: $E \to L$ 在 S 上。

反过来，如果（$C_0(E$，q，$L)$ $C_1(E$，q，$L)$) 是一个克利福德对，那么根据引理 2.26 它也满足定义 Wood 对的条件。

因此，当 S 是任意概形时，Wood 对与克利福德对的概念一致：二者可以自然地相互对应，且这种对应构成范畴等价。□

注记 3.8. 给定一个二元二次型 $q\colon\ E \to L$ 在经典意义下，先验地并不存在典范方法，用以在对偶模 $E^\vee$ 上于同一框架内构造一个二元二次型。然而，借助 *Wood* 构造以及本文的主要结果，即定理 *3.1*，我们能够以自然且良定义的方式建立这样的构造。我们将在定理 *5.4* 中回到这一点。

为了研究本原二元二次型在几何情形中的行为，我们现在将定理 3.1 的双射限制到定义在任意基概形 S 上的此类形式。

定义 3.9（本原形式）。 二次型 $q\colon\ E \to L$ 称为在点 $p \in S$ 处局部本原，如果存在 p 的开邻域 U，使得限制 $E|_U$ 与 $L|_U$ 作为向量丛是平凡的，并且理想

$$(q|_U)$$

由 q 在 U 上的限制的取值所生成者与整个结构层 $\mathscr{O}_U$ 重合。换言之，我们要求

$$(q|_U) = \mathscr{O}_U.$$

若对每个点 $p \in S$都满足此条件，则称形式 q 为本原形式。

命题 3.10. 二元形式 $q : E \to L$ 是本原二元形式，当且仅当 E 是秩 *1* 的局部自由 $C_0(E, q, L)$-模。

证明. 对于交换环 R，取值于其自身的本原二元二次型的证明见 R 。如定义3.9 所示，本原性是一个局部条件；因此， [14] 中给出的论证可自然推广到取值于任意基概形上的线丛的本原形式 S。这一推广的详细论述见 [16,命题 4.14]。 □

引理 3.11. 任意局部自由秩 *1* C-模都是可迹的 C-模。

证明. 由于可迹性是一个可在局部验证的性质，我们可以假设该模在某个适当的开子集上同构于 C 。在这种情况下， C 上的典范代数乘法与其作为自身模的结构一致。因此，相应的迹映射无需进一步处理便完全相同。□

定理 3.12。 我们可以将定理 *3.1* 中的双射限制为一个双射

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Similarity classes of primitive binary} \\ \textit{quadratic forms } (E,\ q,\ L) \textit{ over } S \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Isomorphism classes of pairs } (C, E), \\ \textit{with } C \textit{ a quadratic algebra over } S, \\ \textit{and } E \textit{ a locally free rank 1 } C\textit{-module} \end{array} \right\}.$$

证明。 该结果可由命题 3.10、引理 3.11和定理 3.1得出。 □

4. Clasification of Primitive Binary Quadratic Forms using Universal Norm Form

虽然定理3.12 基于定理 S的结果，对任意基概形上的本原二元二次型进行了分类 3.1，但我们在此提出一种替代方法，将 Kneser 所发展的合成与结构理论推广开来 [14] ，并进一步采用 Bichsel 和 Knus 的改进成果 [5]。在 [5], Bichsel 和 Knus 借助泛范数形式（见 R例 4 [5, ），对取值于可逆 2]- 模的任意环上的非退化本原二元二次型进行了分类。在本文中，我们从几个重要方面扩展并推广了他们的框架。具体而言，我们考虑：

(1) 一般基概形 S，而非仿射基；(2) 取值于 S 上任意线丛的二元二次型；以及 (3) 不一定非退化的二次型——也就是说，我们允许二次型可能退化。

本工作的主要目标之一，是将高斯合成推广到定义在任意基概形上的本原二元二次型这一情形。通过采用以下替代构造，我们不仅成功地将经典高斯合成律扩展到这一更广泛的几何背景，也对合成运算的行为获得了更清晰的概念认识。具体而言，这一方法清楚地表明，当在同一基概形上定义的两个本原二元二次型（E_1，q_1，L_1）和（E_2，q_2，L_2）进行合成时，所得二次型自然取值于相应线丛的张量积，即$L_1 \otimes L_2$。这一关于合成二次型所关联线丛的结构性认识，自然而然地源自我们的框架。相比之下，定理 3.1 中给出的方法虽然有效，却无法立即显现这一性质，也不具备同等程度的几何自然性。关于这一结果的详细阐述与证明，请参阅命题 4.12。

Let

- S 是一个概形,
- C 是一个带有范数映射的二次 $\mathscr{O}_S$-代数
$$n_C : C \longrightarrow \mathscr{O}_S,$$
- E 是一个左 C-模（即带有左 C-作用的拟凝聚 $\mathscr{O}_S$-模），
- J 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$-模。

定义 4.1。一个 $\mathscr{O}_S$-模的态射
$$q : E \longrightarrow J$$
若满足以下条件，则称为范数形式（其值取于 J）：

(1)（与标量乘法的相容性）对于每个开集 $U \subseteq S$、每个 $x \in E(U)$，以及$a \in C(U)$，我们有
$$q_U(a \cdot x) = q_U(x) \cdot n_C(a).$$

(2)（二次性）极化形式
$$b_q(x, y) := q(x + y) - q(x) - q(y)$$
定义了一个双线性映射
$$b_q : E \times E \longrightarrow J$$
$\mathscr{O}_S$-模。

范数形式的态射
$$(E, q, J) \longrightarrow (E', q', J')$$
是一对态射
$$(\alpha, \varphi), \quad \alpha \in \mathrm{Hom}_C(E, E'), \quad \varphi \in \mathrm{Hom}_{\mathscr{O}_S}(J, J'),$$
使得下图交换:
$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{q} & J \\ {\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varphi} \\ E' & \xrightarrow{q'} & J' \end{array}$$
i.e.
$$q' \circ \alpha = \varphi \circ q.$$

命题 4.2. 设 S 是一个概形，设 C 是一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数，并配备其范数态射n_C： $C \longrightarrow \mathscr{O}_S$，设 E 是一个拟凝聚左 C-模。则存在一个三元组 $(E, j_E, J(E))$，其中：

- $J(E)$ 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$-模，
- $j_E:\ E \to J(E)$ 是一个 $\mathscr{O}_S$-态射，

对于任意范数形式 (E, q, J)，存在唯一的态射

$$p : J(E) \longrightarrow J$$

with

$$q = p \circ j_E.$$

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j_E} & J(E) \\ & \searrow^{q} & \downarrow{\scriptstyle p} \\ & & J \end{array}$$

证明。任意交换环 R 上的证明见 [5, 命题 2。3]，相关内容还在 [15, 第 3] 章的命题 7.1.1 中作了进一步阐述。现在我们概述几何情形下的相应构造，该构造适用于一般基概形 S。

设 E 是一个拟凝聚 $\mathscr{O}_S$-模。我们先定义 $\mathscr{R}_E^{\mathrm{pre}}$ 上的一个预层 S，具体而言，对每个开子集 $U \subseteq S$,

$$\mathscr{R}_E^{\mathrm{pre}}(U) := \bigoplus_{x \in E(U)} \mathscr{O}_S(U) \cdot e_x,$$

由集合 $E(U)$ 生成的自由 $\mathscr{O}_S(U)$-模。对此预层进行层化，可得自由 $\mathscr{O}_S$-模层

$$\mathscr{R}_E := \widetilde{\mathscr{R}_E^{\mathrm{pre}}}.$$

接下来，考虑直和层

$$\mathscr{F} := \mathscr{R}_E \oplus (E \otimes_{\mathscr{O}_S} E),$$

它仍然是拟凝聚的。

现在我们如下定义一个 $\mathscr{Q}^{\mathrm{pre}}$ $\mathscr{O}_S$-子模的预层：对于每个开集 $U \subseteq S$，令$\mathscr{Q}^{\mathrm{pre}}(U) \subseteq \mathscr{F}(U)$ 为由以下元素生成的 $\mathscr{O}_S(U)$-子模：

$$(e_{ax} - n_C(a)e_x,\ 0),$$
$$(e_{x+y} - e_x - e_y,\ -x \otimes y),$$

对于所有 $x,\ y \in E(U),\ a \in C(U)$。

这些关系确保与范数映射相容，并保证极化形式的双线性。

令 $\mathscr{Q} \subseteq \mathscr{F}$ 为将 $\mathscr{Q}^{\mathrm{pre}}$ 层化后得到的 $\mathscr{O}_S$-模子层。这定义了 $\mathscr{F}$ 的一个良定义的$\mathscr{O}_S$-模层。表达式 $\mathscr{F}(U)/\mathscr{Q}(U)$ 定义了一个 $\mathscr{O}_S$-模预层。然而，这个商未必是层。我们将这个预层的层化定义为泛范数层：

$$J(E) := (U \mapsto \mathscr{F}(U)/\mathscr{Q}(U))^{\sim}.$$

这确保 $J(E)$ 是一个拟凝聚的 $\mathscr{O}_S$-模。

定义态射

$$j_E : E \longrightarrow J(E)$$

将局部截面 $x \in E(U)$ 映至类 $[e_x, 0] \in J(E)(U)$。直接计算可得，j_E 是一个取值于 $J(E)$ 的范数形式，并且满足所需的泛性质。对此的完整论述见 [16, 命题 3.6]。

□

命题 4.3。设$(E, j_E, J(E))$ 是对应于左 C-模E 的泛范数形式，则

(a) 泛范数形式 j_E: $E \to J(E)$ 的像作为 $\mathscr{O}_S$-模生成 $J(E)$；也就是说，

$$J(E) = \langle j_E(E) \rangle_{\mathscr{O}_S}.$$

(b) 设 $f : T \to S$ 是概形态射。则存在一个典范同构的$\mathscr{O}_T$-模：

$$f^*J(E) \xrightarrow{\cong} J(f^*E)$$

它与泛范数映射相容，即下图交换：

$$\begin{array}{ccc} f^*E & \xrightarrow{j_E \otimes 1} & f^*J(E) \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\ f^*E & \xrightarrow[j_{f^*E}]{} & J(f^*E) \end{array}$$

或者等价地：

$$j_{f^*E}(x \otimes 1) = j_E(x) \otimes 1.$$

证明。 根据泛范数形式的定义，验证是直接的；详细内容见 [16, 引理 3.7 和引理 3。8]□

对于泛范数形式 j_E : $E \to J(E)$，其目标 $J(E)$ 通常不一定是线丛。然而，我们关注的是 $J(E)$ 是线丛的情形。特别地，我们将证明，若 E 是秩为一的局部自由 C- 模，则 $J(E)$ 确实是线丛。

命题 4.4。 设 C 是一个带有范数态射的二次 $\mathscr{O}_S$-代数

$$n_C : C \to \mathscr{O}_S,$$

并令 j_C： $C \to J(C)$ 为与左 C-模 $E = C$ 相关联的泛范数形式。于是 :

$$(C, j_C, J(C)) \cong (C, n_C, \mathscr{O}_S)$$

作为范数形式三元组。

证明。 这一验证是泛性质的直接推论；详情见 [16, 命题 3.11]。□

注 4.5。 前述命题4.4 表明，若 E 是一个局部自由 C-模，且秩为 *1*，则$J(E)$ 是一个线丛。从现在起，除非另有说明， E 始终表示一个局部自由C-模，且秩为 *1*。

鉴于 E 是一个局部自由 C-模，且秩为 1，相应的泛范数形式取值于一个线丛。事实上，由于 C 是一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数，该形式明确地是一个取值于线丛的二元二次型。因此，偶克利福德代数是良定义的，我们的目标是明确确定与该泛范数形式相关联的偶克利福德代数。

引理 4.6. 设 C 是概形 S上的二次 $\mathscr{O}_S$-代数，配备范数映射 $n_C : C \to \mathscr{O}_S$。那么，与范数形式 n 相关联的偶克利福德代数与$\mathscr{O}_S$-代数 C 典范同构：

$$C_0(C, n_C, \mathscr{O}_S) \xrightarrow{\cong} C.$$

证明。 验证可由偶克利福德代数的泛性质（命题 2.14）直接推出；完整论证见 [16, 引理 3。10] □

命题 4.7. 设 C 是概形 S上的二次 $\mathscr{O}_S$-代数，且设 E 是秩 *1* 的局部自由左C-模。设 $j_E : E \to J(E)$ 为泛范数形式。那么：

$$C_0(E, j_E, J(E) \cong C$$

作为 $\mathscr{O}_S$-代数。

证明。 该结论由偶克利福德代数的泛性质推出，详见命题2.14。完整且详细的论证见 [16, 命题 3。14]。

□

本节的主要目标是借助克利福德不变量，对取值于线丛的任意基概形 S 上的本原二元二次型 按相似关系进行分类。

引理 4.8. 设(E, q, L) 是概形 S 上的一个本原二元二次型。那么(E, q, L)与泛范数形式$(E, j, J(E))$相似，其中 E 是二次 $\mathscr{O}_S$-代数 C, j 上的秩为 *1* 的局部自由左模； $E \to J(E)$ 是泛范数形式， $J(E)$ 是泛范数模。

证明。 给定本原二元二次型 $q : E \to L$，其广义克利福德代数为：

$$C(E, q, L) = C_0(E, q, L) \oplus C_1(E, q, L),$$

其中：

- $C_0(E, q, L)$ =: C 是二次 $\mathscr{O}_S$-代数，
- $C_1(E, q, L)$ 是一个局部自由秩 1 的右 C-模。

我们可以通过规范的 C_1（E， q， L）与 E之间的 $\mathscr{O}_S$-模同构来识别它们；详情请参见定理 2.23。由于 q ： $E \to L$是一个范数形式，根据 j的泛性质，存在唯一的态射：

$$\phi : J(E) \to L$$

使得：

$$q = \phi \circ j.$$

也就是说，以下图表是交换的：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{j} & J(E) \\ & \searrow^{q} & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ & & L \end{array}$$

现在， L 和 $J(E)$ 是可逆的 $\mathscr{O}_S$-模，并且 q 是本原的， j 在 ϕ 下的像生成 L。因此， ϕ 是线丛的满射态射，因而是一个同构：

$$\phi : J(E) \xrightarrow{\cong} L.$$

由于 $q = \phi \circ j$ 和 ϕ 是同构，我们得到（E， q， L）与（E， j， $J(E)$）相似，即它们的差别仅在于通过一个同构改变目标线丛。因此，

$$(E, q, L) \sim (E, j, J(E)).$$

□

引理 4.9。 设 S 是一个概形。假设：

- C、 C' 是二次 $\mathscr{O}_S$-代数，
- E 是拟凝聚左 C-模，
- E' 是拟凝聚左 C'-模。

Let:

- $j : E \to J(E)$ 是相对于固定态射$n_C : C \to \mathscr{O}_S$与 E 相关联的泛范数形式，
- $j' : E' \to J'(E')$ 是相对于 $n'_{C'} : C' \to \mathscr{O}_S$的 E' 的泛范数形式。

假设给定：

(1) 一个准相干 $\mathscr{O}_S$-模之间的态射 $f : E \to E'$ ， 且它是一个同构。*(2)* 一个准相干 $\mathscr{O}_S$-代数之间的态射 $g : C \to C'$， 也为同构。

(3) 相容性：对于每个开集 $U \subseteq S$，以及局部截面 $x \in E(U)$ $a \in C(U)$，我们有 *e:*

$$f(a \cdot x) = g(a) \cdot f(x).$$

在这些假设下，存在唯一的拟相干 $\mathscr{O}_S$-模同构 *:*

$$F : J(E) \xrightarrow{\cong} J'(E')$$

使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & E' \\ \downarrow{\scriptstyle j} & & \downarrow{\scriptstyle j'} \\ J(E) & \xrightarrow{F} & J'(E') \end{array}$$

证明。 这是泛范数形式的泛性质的直接推论。详细而严谨的验证见 [16, 引理 3。16]。 □

命题 4.10。 设 (E, q, L) 和 (E', q', L') 是任意基概形 S 上取值于线丛的两个相似的本原二元二次型。那么，它们对应的泛范数形式也相似。

证明。 已知二次型 (E, q, L) 和 (E', q', L') 相似，由此可知，它们关联的泛范数形式满足引理 4.9的所有假设。因此，根据引理 4.9，这些泛范数形式也相似。

□

定理 4.11。 对于任意概形 S，自然映射

$$(E, q, L) \mapsto (C_0(E, q, L), C_1(E, q, L))$$

诱导出一个保持判别式（至多相差一个符号）的——具体而言，满足

$$\Delta(q) = -\Delta(C_0(E, q, L)),$$

双射

$$\left\{ \begin{array}{c} \textit{Similarity classes of primitive binary} \\ \textit{quadratic forms } (E,\ q,\ L) \textit{ over } S \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} \textit{Isomorphism classes of pairs } (C, E), \\ \textit{with } C \textit{ a quadratic algebra over } S, \\ \textit{and } E \textit{ a locally free rank 1 } C\textit{-module} \end{array} \right\},$$

其关于 S是函子性的。

对 (C, E) 和 (C', E') 的同构由一个 $\mathscr{O}_S$-代数的同构 $C \cong C'$，以及一个尊重 C 和 C' 模结构的 $\mathscr{O}_S$-模同构 $E \cong E'$ 给出。这里，对于任意二元二次型 $q\colon E \to L$，对象 $C_0(E, q, L)$ 和 $C_1(E, q, L)$ 分别表示与二元二次型 q相关联的广义克利福德代数的零次和一次分量。

证明。 我们将逐步进行。

逆映射的构造与良定义性. 对于一对（C， E），我们考虑与（C， E）相关联的泛范数形式，它是任意基概形 S上的二元二次型。根据命题4.10，此赋值是良定义的。

定理 4.11 中映射的良定义性与单射性。设（E， q， L）和（E'， q'， L'）是相似的二元二次型。那么，根据命题 2.22，诱导对（C $=C_0$（E， q， L） C_1（E， q， L） $= E$）和（$C' = C_0$（E'， q'， L'） C_1（E'， q'， L'） $= E'$）是同构的。这证明了该映射是良定义的。

现在我们证明单射性。设（E， q， L）和（E'， q'， L'）是两个本原二元二次型，且其诱导对

$$(C = C_0(E, q, L),\ C_1(E, q, L) = E) \quad \text{and} \quad (C' = C_0(E', q', L'),\ C_1(E', q', L') = E')$$

同构。于是，由引理4.8 和4.9，并利用相似性的传递性，可知（E， q， L）和（E'， q'， L'）相似。

定理*4.11*中的映射的满射性。给定一对（C， E），其中 C 是一个二次代数， E是一个秩为 1 的局部自由 C-模，则相应的泛范数形式 j： $E \to J(E)$定义了一个取值于线丛的本原二元二次型。

定理*4.11*中的映射的函子性及判别式保持性质（差一个符号）。这由命题4.3和引理2.19可得。

□

本研究的目标之一，是将高斯合成的经典理论推广到任意基概形 S 上。这一推广将在后续章节中展开，并以细致分析二元二次型背后的代数与几何结构为基础。下文的命题为从更具概念性且在几何上更有意义的角度理解合成律提供了关键的一步。

命题 4.12. 设 S 为一个概形， C 为一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数，其范数映射为 n_C： $C \to \mathscr{O}_S$，并设 E_1、 E_2 为秩 *1* 局部自由 C-模。分别记 $J(E_1)$和 $J(E_2)$为 E_1 和 E_2的万有范数模，其对应的万有范数形式为

$$j_{E_1} \colon E_1 \to J(E_1), \quad j_{E_2} \colon E_2 \to J(E_2).$$

设 E ： $= E_1 \otimes_C E_2$。则张量积 E 是一个秩 *1* 局部自由 C-模，并且存在一个典范万有范数型

$$j_E \colon E \to J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2),$$

由合成定义

$$j_E(x \otimes y) = j_{E_1}(x) \otimes j_{E_2}(y),$$

对于局部截面 $x \in E_1$、 $y \in E_2$。

证明。 这里我们概述证明，重点介绍关键构造和逻辑脉络。完整细节见 [16, 命题 3.19]。

定义映射

$$j_E : E_1 \otimes_C E_2 \to J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2), \quad m_1 \otimes m_2 \mapsto j_{E_1}(m_1) \otimes j_{E_2}(m_2).$$

容易看出这是一个范数形式。现在我们证明 j_E 满足泛性质。设$q : E \to J$ 是任意一个范数形式。我们将构造一个唯一的 $\mathscr{O}_S$-线性映射

$$p : J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2) \to J$$

使得 $q = p \circ j_E$。现在

(1) 对固定的 $m_2 \in E_2(U)$，定义 q_{m_2}： $E_1 \to J$，使得 $q_{m_2}(m_1) = q(m_1 \otimes m_2)$。这是一个范数形式。(2) 根据 j_{E_1}的泛性质，存在唯一的 p_{m_2}： $J(E_1) \to J$，使得 $q_{m_2} = p_{m_2} \circ j_{E_1}$。(3) 赋值 $m_2 \mapsto p_{m_2}$ 定义了一个范数形式 $E_2 \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(J(E_1)\ J)$。(4) 根据 j_{E_2}的泛性质，存在唯一的 ϕ： $J(E_2) \to \mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(J(E_1)\ J)$，使得$\phi(j_{E_2}(m_2)) = p_{m_2}$。

(5) Define $p : J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2) \to J$ by $p(t_1 \otimes t_2) = \phi(t_2)(t_1)$. Then

$$p(j_E(m_1 \otimes m_2)) = \phi(j_{E_2}(m_2))(j_{E_1}(m_1)) = p_{m_2}(j_{E_1}(m_1)) = q(m_1 \otimes m_2).$$

唯一性成立，因为 $j_E(E)$ 生成 $J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2)$。因此，$E$ 的泛范数模为

$$J(E) = J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2).$$

这是因为 j_E 是一个取值于该层的范数形式，而泛性质确保它在所有关于 E的范数形式中是初始的。关于 $E_1 \otimes_C E_2$ 的泛范数形式为

$$j_E : E_1 \otimes_C E_2 \to J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2), \quad j_E(m_1 \otimes m_2) = j_{E_1}(m_1) \otimes j_{E_2}(m_2),$$

其泛范数模为 $J(E_1) \otimes_{\mathscr{O}_S} J(E_2)$。 □

5. Applications

5.1. **与 Wood 工作的关系。** 本节将说明我们当前的工作与 Wood 的重要工作相比有何不同 [21]。我们首先回顾 [21]中的主要思想。正如我们将看到的，Wood 的方法与我们的方法之间有两点主要区别：Wood 使用线性二元二次型，而我们使用经典二元形式；此外，在概念上，我们明确采用了 Clifford 观点，而 Wood 的处理没有这一视角。

定义 5.1。 概形 S 上的线性二元二次型是一个三元组 (V, L, f)，其中 V 是秩为 2 的局部自由 $\mathscr{O}_S$-模，L 是秩为 1 的局部自由 $\mathscr{O}_S$-模（即线丛），而 f 是 $\mathscr{O}_S$-模 $\mathrm{Sym}^2 V \otimes L$ 的一个整体截面。

设 $U \subseteq S$ 是一个开子集，在其上限制 $V|_U$ 和 $L|_U$ 是自由的。设 $\{x, y\}$ 是 $V|_U$ 在 $\mathscr{O}_U$ 上的一组基，$\{z\}$ 是 $L|_U$ 在 $\mathscr{O}_U$ 上的一组基。稍微滥用一下记号，省略张量积，二次型 q 可在 U 上局部表示为

$$q = ax^2 z + bxyz + cy^2 z,$$

对于某些 $a, b, c \in \Gamma(U, \mathscr{O}_S)$。这一表达有时简洁地记作 $[a, b, c]$，省略对所选基的明确说明。

定义 5.2 (线性二元二次型的同构**)。**如果存在 $\mathscr{O}_S$-模的同构 (V, L, q) 与 (V', L', q')，使得

$$f : V \xrightarrow{\simeq} V', \quad g : L \xrightarrow{\simeq} L'$$

使得诱导映射

$$\mathrm{Sym}^2 f \otimes g$$

将 q 映至 q'。这种等价关系可理解为群 $\mathrm{GL}_2(V) \times \mathrm{GL}_1(L)$的右作用，我们称之为$\mathrm{GL}_2 \times\mathrm{GL}_1$作用。

在局部上，这个作用可以明确地描述。设 $U \subseteq S$ 是一个开子集，在该子集上 $V|_U$ 和 $L|_U$ 都是自由的。由于每个截面 $q \in \Gamma(U, \mathrm{Sym}^2 V \otimes_{\mathscr{O}_S} L)$ 都可以表示为简单张量的线性组合，因此只需计算作用在形如 $x_1 \otimes x_2 \otimes z$ 的元素上的结果，其中

$$x_1, x_2 \in \Gamma(U, V), \quad z \in \Gamma(U, L).$$

给定一对 $(\mu, \varepsilon) \in \Gamma(U, \mathrm{GL}_2(\mathscr{O}_S) \times \mathrm{GL}_1(\mathscr{O}_S))$，其作用由下式给出

$$(\mu, \varepsilon) \cdot (x_1 \otimes x_2 \otimes z) := (\mu x_1) \otimes (\mu x_2) \otimes (\varepsilon z).$$

这描述了在 V 和 L中的基变换下，$\mathrm{GL}_2 \times\mathrm{GL}_1$-作用 如何变换线性 二元二次型。

根据Wood的著作中的定理 1.4 [21], 存在一个函子性的保判别式双射:

$$\left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes of } \textit{linear} \text{ binary} \\ \text{quadratic forms over } S\end{array}\right\} \longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c}\text{Isomorphism classes of } (C,E), \\ \text{with } C \text{ a quadratic algebra over } S, \\ \text{and } E \text{ a traceable } C\text{-module}\end{array}\right\}.$$

给定(C, M) 以及相应的 $f \in$ 对称代数$^2V \otimes L$，我们有 $M \cong V$作为 $\mathscr{O}_S$-模，且

$$C/\mathscr{O}_S \cong \Lambda^2 V^* \otimes L^*$$

作为 $\mathscr{O}_S$-模。对 (C, M) 与 (C', M') 的同构由一个 $C \cong C'$ $\mathscr{O}_S$-代数同构，以及一个 $M \cong M'$ 作为 $\mathscr{O}_S$-模的同构给出，该同构保持 C (或C') 模结构。

这里，我们简要回顾上述双射的局部版本；关于全局表述，请读者参阅 [21]。

给定一个线性二元二次型 $f \in \mathrm{Sym}^2 V \otimes L$，我们按如下方式构造 $\mathscr{O}_S$ 上的模 C 和 M：

$$C = \mathscr{O}_S \oplus \wedge^2 V^\vee \otimes L^\vee, \quad M = V.$$

为了完整定义 C 的代数结构和 M 的模结构，我们现在必须指定它们各自的运算。首先，考虑 V 和 L 都是自由的情形，使得$V = \mathscr{O}_S x \oplus \mathscr{O}_S y$ 和 $L = \mathscr{O}_S z$。重新选取基，令 C 中的 (1, 0) 和 (0, $(x^* \wedge y^*) \otimes z^*$) 分别对应于 1 和 τ。给定二次型 $f = ax^2z + bxyz + cy^2z$，我们将 1 指定为 C 的乘法单位元，并通过以下关系定义其余的代数结构和模结构:

$$\tau^2 = -b\tau - ac, \quad \tau x = -cy - bx, \quad \tau y = ax.$$

这些结构关系赋予 M 一个可迹 C-模的性质。

给定一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数 C 以及一个可迹 C-模 M，我们可以构造 $\mathscr{O}_S$-模 $V = M$ 和

$$L = \Lambda^2 V^* \otimes (C/\mathscr{O}_S)^*.$$

在 C与 M均为自由 $\mathscr{O}_S$-模的情形下，我们可以为 C选取基 $\{1, \tau\}$，为 M选取基 $\{x, y\}$，并使其满足如下结构关系:

$$\tau x = -cy - bx, \quad \tau y = ax,$$

对某些系数 a， b， $c \in \mathscr{O}_S$。必要时，可用 $\mathscr{O}_S$中的一个元素调整 τ，从而确保τy是 a的标量倍，并将这样的基 $\{1, \tau\}$称为规范化的。

如果二次关系

$$\tau^2 = -q\tau - r$$

对某个 q， $r \in \mathscr{O}_S$成立时，可迹性 条件施加了约束 $q = b$，而要求

$$\tau^2 = -q\tau - r$$

给出附加条件 $r = ac$。因此，根据 (C， M) 的数据，我们可以构造二次型

$$ax^2z + bxyz + cy^2z,$$

其中 $z = x^* \wedge y^* \otimes \bar{\tau}^*$，且 $\bar{\tau}$表示 τ在 $C/\mathscr{O}_S$中的像。

对于任意一对 (C， M)，在 C 和 M 为自由 $\mathscr{O}_S$-模的情形下，此构造在 S 上局部确定了一个元素 $f \in \mathrm{Sym}^2 V \otimes L$。为了确认 f的局部定义在交叠处彼此相容，只需验证：对于 M 的任意另一种基选择及相应的 C 规范化基，所得二次型相同。

上述构造互为逆映射，因为它们的局部定义被明确构造为互逆。这就确立了 [21]中的定理 1.4 所述双射。

线性二元二次型与经典意义上的二元二次型有所区别，例如 Kneser 的著作中所研究的二元二次型。Kneser 考虑的二元二次型

为 q： $M \to N$，其中 M 是一个秩 2 的局部自由 R-模，而 N 是一个秩 1 的局部自由 R-模。这些映射满足以下性质：对于所有 $r \in R$ 和 $m \in M$，

$$q(rm) = r^2 q(m),$$

并且该表达式

$$q(x+y) - q(x) - q(y)$$

在 $M \times M$ 上定义了一个双线性形式。

命题5.3。 如前所述，*Kneser* 意义下的二次映射 q： $M \to N$ 与线性二元二次型 $f \in$对称 $^2M^* \otimes N$之间存在双射，其中 M和 N是R-模，分别为秩 2 和 1 的局部自由模。

证明。 请参见 [21, 命题6。1]中的证明。 □

二元型上的对合与对偶。

定理 5.4。 E 是秩 *2* 的局部自由模， L 是一般概形 S上的秩 *1* 的局部自由模。那么我们有

- 经典的 L 值二元二次型在 E 与 $E^\vee$ 之间的对偶；
- *Wood* 的线性二元 L 值二次型在 E 与 $E^\vee$ 之间的对偶；
- 克利福德对空间及 *Wood* 对空间上的对合。

证明。 设 S 是一个一般概形。设 E 是 S 上的秩 2 局部自由层，且设 L 是 S 上的线丛（即秩 1 局部自由层）。

我们考虑 S 上的两个重要局部自由层，其整体截面为 :

$$\Gamma(S, \mathscr{Q}uad(E,L)) : \{\text{classical binary quadratic forms on } E \text{ with values in } L\}$$

$\Gamma(S,\ \mathscr{W}lbf(E,\ L)) = \Gamma(S,\ \mathrm{Sym}^2(E)\otimes L)$: {取值于 L}.的 E 上的 Wood 线性二元二次型

我们首先考察局部情形，即 S=Spec(R)。

- **步骤 1**：设 R 是一个环， $E = Re_1 \oplus Re_2$ 是一个自由的秩为 2 R 的模。考虑由下式定义的二元二次型 $q : E \to R$：

  $$q(xe_1 + ye_2) = ax^2 + bxy + cy^2,$$

  其中 $x,\ y,\ a,\ b,\ c \in R$。偶克利福德代数 $C_0(M,\ q,\ R)$ 由 $< 1,\ e_1 \cdot e_2 >$作为R-模生成。记 $\tau = e_1 \cdot e_2$。那么有以下关系：

  $$\tau^2 = b\tau - ac \qquad \tau e_1 = be_1 - ae_2 \qquad \tau e_2 = ce_1.$$

- **步骤 2**：
  记 $C = C_0(E,\ q,\ R)$。对于满足以下条件的对 $(C,\ E)$,

  $$\tau^2 = b\tau - ac \qquad \tau e_1 = be_1 - ae_2 \qquad \tau e_2 = ce_1.$$

  与之对应的 Wood 二元线性二次型 q_W： $E \to R$ 由下式定义：

  $$q_W(xe_1 + ye_2) = cx^2 - bxy + ay^2.$$

  其中 $x,\ y,\ a,\ b,\ c \in R$。

- **步骤 3**：
  现在，我们可以按照 Kneser 的意义，将 Wood 型视为定义在 $E^\vee$ 上的二次型。将其记为 $(q_W)_K$： $E^\vee \to R$，其中

  $$(q_W)_K(xe_1^\vee + ye_2^\vee) = cx^2 - bxy + ay^2.$$

其中 x， y， a， b， $c \in R$。那么以下关系成立：

$$\tau^2 = -b\tau - ac \qquad \tau e_1^\vee = -be_1^\vee - ce_2^\vee \qquad \tau e_2^\vee = ae_1^\vee.$$

- **步骤 4**：
  现在，将具有以下关系的数对 $(C, E^\vee)$

  $$\tau^2 = -b\tau - ac \qquad \tau e_1^\vee = -be_1^\vee - ce_2^\vee \qquad \tau e_2^\vee = ae_1^\vee.$$

  视为 Wood 对，我们得到与之关联的 Wood线性 二元二次型，定义在 $E^\vee$ 上，$((q_W)_K)_W$：$E^\vee \to R$，其定义如下：

  $$((q_W)_K)_W(xe_1^\vee + ye_2^\vee) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

  其中 $x, y, a, b, c \in R$。
- **步骤 5**：
  同样，这个 Wood线性 二元二次型，按照 Kneser 的意义，对应于定义在 $(E^\vee)^\vee \cong E$ 上的一个二元二次型。我们将其记为 $(((q_W)_K)_W)_K$：$E \to R$，定义为

  $$(((q_W)_K)_W)_K(xe_1 + ye_2) = ax^2 + bxy + cy^2.$$

  其中 $x, y, a, b, c \in R$。

因此，我们有 $q = (((q_W)_K)_W)_K$.

由于所有构造在本质上都是局部的——它们以环上的模来定义——且层$\mathscr{Q}uad(E, L)$ 和 $\mathrm{Sym}^2(E) \otimes L$ 都是相干的，并且与限制到开子集相容；又由于向量丛上的 Wood 线性二元二次型与对偶丛上的经典二次型之间存在全局定义的双射，这些构造自然可以推广到概形 S上。

E $E^\vee$ 与 E 上的型之间的对偶。 我们已经证明：

- 给定 E 上的一个经典二元二次型 q，我们可以通过涉及 Wood 型的中间步骤，在 $E^\vee$ 上构造出与之对应的一个二次型。
- 这一构造给出了经典二元二次型的层之间一个自然的集合论同构：

  $$\Gamma(S, \mathscr{Q}uad(E, L)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S, \mathscr{Q}uad(E^\vee, L))$$

  由以下赋值显式定义：

  $$q \mapsto (q_W)_K$$

类似地，对于 Wood 线性二元二次型，我们得到相应的自然集合论同构：

$$\Gamma(S, \mathscr{W}lbf(E, L)) \xrightarrow{\sim} \Gamma(S, \mathscr{W}lbf(E^\vee, L))$$

由以下给出：

$$Q \mapsto (Q_K)_W$$

对上的对合. 前述计算表明，克利福德对上存在一个对合。采用类似的方法，也可以在 Wood 对上构造一个对合。□

注 5.5。 给定一个二元二次型 q： $E \to L$，没有自然的方法可以直接定义与之对应的二元二次型 q' *on* $E^\vee$。不过，按照上述步骤，我们可以构造一个二元二次型 q' *on* $E^\vee$，它与 E上的二元形式 q 相关联。

对偶二元形式与 Wood 的 线性二元形式。 射影对偶是射影几何的一项基本原理，体现了互补维数几何对象之间深刻的对称性，最显著的例子是点与超平面。在平面上，这表现为点与直线之间的对应关系；在一种交换二者角色的对合下，关联关系保持不变。这种对偶自然延伸到更高次的对象，尤其是圆锥曲线，由此产生了对偶圆锥曲线的概念，它将给定圆锥曲线的切线集合参数化。正如 [10, 第 8], 所阐明的，对偶圆锥曲线可以理解为原曲线的切线包络；从代数角度看，对于非退化圆锥曲线，它对应于定义该圆锥曲线的对称矩阵的逆（相差一个标量因子）。本文将这一经典框架调整并推广到二元二次型的情形。我们证明，Wood 对线性二元二次型的表述——该表述是在轨道参数化和高次合成律的背景下引入的——恰好是在一种定义明确的意义下，作为经典二元二次型的对偶而产生的。

设 K 是特征为 $\neq 2$ 的代数闭域。设 $E = \langle e_1, e_2 \rangle$ 是一个自由秩 2K-模。二元二次型 $q : E \to K$ 定义如下:

$$q(xe_1 + ye_2) = ax^2 + bxy + cy^2, \quad a, b, c, x, y \in K.$$

这可以写成矩阵形式:

$$q(x, y) = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

其中 $C = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{pmatrix}$。

零点集为 $Z(q) = \{(x, y) \mid q(x, y) = 0\}$。

对于 $p = (p_0, p_1) \in Z(q)$, 切线 l_p 为:

$$\nabla q(p) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0,$$

其中梯度为:

$$\nabla q(p) = (2ap_0 + bp_1, bp_0 + 2cp_1) = 2C \cdot p.$$

因此，切线方程为:

$$l_p : (C \cdot p) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0.$$

非退化的对偶形式 $q_\circ$ 假设 q 是非退化的（$\det(C) \neq 0$）。设 $\xi = C \cdot p_\circ$ 将 $p = C^{-1}\xi$ 代入 $p^T C p = 0$:

$$p^T C p = 0 \implies (C^{-1}\xi)^T C (C^{-1}\xi) = 0 \implies \xi^T C^{-1} \xi = 0.$$

对偶形式为:

$$q^*(u, v) = \begin{pmatrix} u & v \end{pmatrix} C^{-1} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}.$$

对偶形式：逆矩阵为:

$$C^{-1} = \frac{1}{\det(C)} \begin{pmatrix} c & -b/2 \\ -b/2 & a \end{pmatrix}.$$

因此,

$$q^*(u, v) = \frac{1}{\det(C)} \left(cu^2 - buv + av^2 \right).$$

这是与经典二元二次型 q 相关联的 Wood 的线性二元形式的一个相似类。

退化情形： $q(x,\ y) = (\alpha x + \beta y)^2$。给定一个退化二元二次型 ：

$$q(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2$$

我们的目标是定义它的对偶。尽管 q 是退化的（即有一个重根），我们仍可以用邻近的非退化形式来逼近它，并取这些形式的对偶的极限。

这种方法遵循代数几何的理念：将奇异对象理解为光滑对象的极限。

退化形式。 设：

$$q(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2 = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2$$

这是一个二次二元形式，其系数为：

$$[a : b : c] = [\alpha^2 : 2\alpha\beta : \beta^2]$$

它是退化的，因为它的判别式为零：

$$\Delta = b^2 - 4ac = (2\alpha\beta)^2 - 4(\alpha^2)(\beta^2) = 0$$

因此，我们无法直接应用标准的对偶运算。相反，我们将用非退化形式来逼近这个形式。

构造一个单参数族。 定义一个二元二次型族：

$$q_t(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2 + t \cdot g(x,y)$$

其中：

$$g(x,y) = \gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2$$

是一个非退化二元二次型，即：

$$\delta^2 - 4\gamma\varepsilon \neq 0$$

现在展开 q_t：

$$q_t(x,y) = \alpha^2 x^2 + 2\alpha\beta xy + \beta^2 y^2 + t(\gamma x^2 + \delta xy + \varepsilon y^2)$$

合并同类项：

$$q_t(x,y) = (\alpha^2 + t\gamma)x^2 + (2\alpha\beta + t\delta)xy + (\beta^2 + t\varepsilon)y^2$$

因此记为：

$$q_t(x,y) = a(t)x^2 + b(t)xy + c(t)y^2$$

其中：

$$\begin{aligned} a(t) &= \alpha^2 + t\gamma \\ b(t) &= 2\alpha\beta + t\delta \\ c(t) &= \beta^2 + t\varepsilon \end{aligned}$$

注意：

$$\lim_{t\to 0} q_t(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2 = q(x,y)$$

因此， q_t 是一族在 $t \to 0$ 时趋近于 q 的二元二次型。

每个非退化形式的对偶。 对于每个 $t \neq 0$，由于 q_t 是非退化的，我们可以将其对偶定义为：

$$q_t^*(x,y) = c(t)x^2 - b(t)xy + a(t)y^2$$

代入表达式：

$$q_t^*(x,y) = (\beta^2 + t\varepsilon)x^2 - (2\alpha\beta + t\delta)xy + (\alpha^2 + t\gamma)y^2$$

现在取 $t \to 0$ 的极限：

$$q^*(x,y) = \lim_{t\to 0} q_t^*(x,y) = \beta^2 x^2 - 2\alpha\beta xy + \alpha^2 y^2$$

因式分解：

$$q^*(x,y) = (\beta x - \alpha y)^2$$

最终结果。 如果：

$$q(x,y) = (\alpha x + \beta y)^2$$

那么它的对偶是：

$$q^*(x,y) = (\beta x - \alpha y)^2$$

这再次是与经典二元二次型 q 相关联的 Wood 线性二元型的一个相似类。

这一结果证实，在两种情形下，对偶形式都是与经典二元二次型 q 相关联的 Wood 的线性二元形式的一个相似类。

因此：

“在特征不为 2 的代数闭域上，代数对偶蕴含几何对偶，反之亦然。”

5.2. **Wood 对象上的四元数结构。** 对于一个 Wood 的 [21] 对（C， E），容易看出 $W = C \oplus E$ 带有秩为 4 $\mathscr{O}_S$ 的模结构。于是自然产生一个问题：在何种条件下， W 容许四元数代数结构?

命题 5.6. 对于 *Wood* 对 （C， E），其中 C 与 E 均为自由 $\mathscr{O}_S$ 模， W 带有四元数代数结构。

证明。 在此情形下，利用定理 3.1，我们有 $C \cong C_0$（q）与 $E = C_1$（q），其中 q: $E \to \mathscr{O}_S$ 是与对（C， E）相关联的二元二次型。因此， $W \cong C_0$（q） $\oplus C_1$（q）。现在，由例 2.33 可知， C_0（q） $\oplus C_1$（q）带有四元数代数结构；因此， W也继承四元数代数结构。

□

命题 5.7。 对于一个 *Wood* 对(C, E)，若 $C/\mathscr{O}_S \cong \wedge^2 E$，则 W 具有四元数代数结构。

证明。 在这种情况下，与该对 (q 相关联的二元二次型 C, E取值于平凡线丛 $\mathscr{O}_S$。如例 2.33所述，对于取值于结构层 $\mathscr{O}_S$的二元二次型，分次代数 $C_0(q) \oplus C_1(q)$ 自然带有 S上的四元数代数结构。在定理 3.1的证明中，已证明 $C \cong C_0(q)$ 和 $E = C_1(q)$。因此，由此分解构造的对象 W继承了基概形上的四元数代数结构 S。 □

命题 5.8. 设(C, E) 是任意基概形 S 上的一个 *Wood* 对。那么，经过适当的忠实平坦基变换后， W 具有四元数代数结构。

证明. 在定理 3.1 中，我们证明了存在一个定义在基概形 S 上的二元二次型 $q\colon E \to L$，使得相应的偶克利福德代数 $C_0(E,q,L)$ 与给定代数 C 同构，并且克利福德双模 $C_1(E,q,L)$ 在定理 2.23 所提供的典范同一之下与 E 一致。然而，一般而言，当二次型取值于非平凡线丛 L 时，直和 $C_0(E,q,L) \oplus C_1(E,q,L)$ 并不会自然地继承代数结构。这一微妙之处源于 L 的扭曲，它阻碍了通常的乘法规则在各个分次分量之间相容地延伸；详细说明请参见 [5]。

为规避这一问题，我们考虑与 L 相关联的劳朗代数，记为

$$\mathcal{L}(L) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} L^{\otimes n},$$

它在自然张量积下构成一个分次 $\mathscr{O}_S$-代数。通过将标量扩张到该劳朗代数，我们定义

$$W' = W \otimes_{\mathscr{O}_S} \mathcal{L}(L),$$

其中 W直和 $C_0(E,q,L)\oplus C_1(E,q,L)$ 与 (E,q,L) 相关联。根据 [5, 引理 3.1 与引理 3.2], ，该扩张代数 W' 变得同构于二元二次型 q' 取值于平凡线丛的经典克利福德代数。在克利福德代数理论中，一个公认的结果是：此类经典克利福德代数——即与平凡扭曲线丛上的二次型相关联者——自然具有四元数代数的结构。□

5.3. **恢复皮卡群——与 Dallaporta 工作的关系。** 设 S 为一个概形，且 C 为一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数。一个自然的问题随之出现：是否存在一个秩为 2 的局部自由$\mathscr{O}_S$-模 E，它同时也是一个可取迹 C-模?

命题 5.9. 给定任意二次代数 C，存在一个可追迹的 C-模 E。

证明。 由引理 3.11可知，每个秩为 1 的局部自由 C-模都是可追迹的。因此，任意可逆的 C-模——即任意对象 $E \in \mathrm{Pic}(C)$——都是可追迹的 C-模。□

另一个自然的问题是：给定任意二次代数 C，是否存在一个二元形式 q，使其广义偶克利福德代数与 C 同构?

定理 5.10. 给定任意基概形 S 上的二次 $\mathscr{O}_S$-代数 C，存在一个取值于适当线丛的二元二次型，其广义偶克利福德代数与 C 同构。

证明。 令 $E \in \mathrm{Pic}(C)$。由引理 3.11， E 是一个可追迹的 C-模。考虑这一对 (C,E)。由定理 3.1，可得一个二元形式 $q\colon E \to L$，其取值于适当的线丛 L 上， S 使得 $C_0(E,q,L) \cong C$。或者，也可以采用定理 4.11 中概述的方法，使用泛范数形式。□

鉴于定理 5.10 的证明，一个自然的问题随之而来：给定基概形 C 上的二次代数 S，如何用二次型系统地参数化其皮卡群? 这一问题引出了对C 的代数结构与和 S相关的二次型所编码的代数性质之间相互作用的探究。在他的论文 [9,定理 3。24], 中，William Dallaporta 给出了与给定二次代数 C相关的皮卡群的一种参数化。然而，他的方法依赖于 Wood 的著作[21] （另见 [9, 定义 3。12]）中发展的构造，而这些构造并未纳入克利福德理论框架。一个根本区别在于，Wood 的表述使用的是线性 二元二次型，而非 Kneser 等人所定义的经典二元二次型；更多细节见命题[21, 命题 6。1]。因此，Dallaporta 的参数化基于线性 二元二次型，这与我们采用经典二元二次型的观点大相径庭。此外，Dallaporta 和 Wood 都没有采用克利福德理论视角，而这正是我们方法的核心。

定理 5.11. 设 S 是一般概形， C 是其上的二次代数。自然映射

$$(E,q,L)\to C_1(E,q,L)$$

诱导出 $\left\{\begin{array}{l}\text{偶克利福德代数 } C_0(E,q,L) \text{ 同构于 } \mathrm{Pic}(C)/\sim \text{ 的 } C \\ \end{array}\right. \quad S \Big\} \longleftrightarrow$ 本原二元二次型 (E,q,L) 的相似类，

对于 $E,E'\in\mathrm{Pic}(C)$， $E\sim E'$ 当且仅当存在一个 φ 的自同构 C，使得 S 上有 $E'\cong\varphi^*E$，且它们作为 C-模同构。这里， φ^*E 表示 C-模 E，其结构局部由$\alpha\cdot e=\varphi(\alpha)e$给出，而 $\mathrm{Pic}(C)/\sim$ 表示 $\mathrm{Pic}(C)$ 中的 $\sim$-等价类集合。

证明。 我们将逐步进行。

步骤 *1*：映射的良定义性。 设我们从一个 $E,q,L)$ 上的本原二元二次型开始， S其偶克利福德代数同构于 C。根据命题 3.10，模 $C_1(E,q,L)=E$是一个局部自由的秩 1 C-模。因此， $E\in$Pic(C)。

现在，考虑域 S 上两个相似的本原二元二次型 (E_1， q_1， L_1) 和 (E_2， q_2， L_2)，它们的偶克利福德代数 C 同构。根据定理 3.1，数对 (C， E_1) 和 (C， E_2) 作为数对同构。根据同构对的定义，可得 $E_1\sim E_2$ 属于 Pic(C)。

步骤 *2*：映射的满射性。反过来，设 $E\in$属于 Pic(C)。那么 E 是秩为 1 的局部自由C-模。根据引理 3.11， E 是一个可取迹的 迹可追踪 C-模。对于数对 (C， E)，我们可以利用定理 3.1 构造一个二元二次型。或者，也可以采用定理 4.11 中概述的方法。此外，如命题 3.10 所示，相应的二元二次型是本原的。

步骤 *3*：映射的单射性。现在，若 $E_1\sim E_2$ 属于 Pic(C，那么根据等价关系 $\sim$的定义，对 C、 E_1) 和对 (C、 E_2) 同构。根据定理 3.1，相应的本原二元二次型相似。

由此，我们建立了所需的双射。 □

给定一个二次代数 C，定理 5.11 几乎对其皮卡群进行了参数化，主要障碍在于 C 存在非平凡自同构。为了解决这一问题，我们引入二次代数的刚化，通过定向的概念消除这些自同构。当 2 不是 $\Gamma(S,\mathscr{O}_S)$ 中的零因子时，这种方法足以完整地恢复定理 5.11 中所述的皮卡群。

定义 5.12 (**定向二次代数**)。 遵循 [9, 定义 3。2]，设 N 表示基概形 S 上的一个秩为 *1* 的局部自由 $\mathscr{O}_S$- 模。一个 N- 定向二次代数定义为一对 (C,θ)，其中：

(1) C 是一个二次 $\mathscr{O}_S$-代数，这意味着 C 是一个 $\mathscr{O}_S$-代数，并配备了一个结构，使得自然映射 $\mathscr{O}_S\to C$ 令 C 成为秩 *2* 的有限生成局部自由 $\mathscr{O}_S$-模。*(2)* θ： $C/\mathscr{O}_S\xrightarrow{\simeq}N^\vee$ 是 $\mathscr{O}_S$-模的一个同构，称为 C的定向。这里，$N^\vee=\mathscr{H}om_{\mathscr{O}_S}(N、\mathscr{O}_S)$表示 N的对偶模，而 $C/\mathscr{O}_S$表示将结构态射 $\mathscr{O}_S\to C$的像商掉后得到的商模。

定向 θ 通过将商 $C/\mathscr{O}_S$ 与秩 1 模 N的对偶相识别，为 C 提供了额外的结构，从而体现了 C 与 N的代数结构之间的相容性。

给定两个 N-定向二次代数（C,θ）和（C',θ'），定向二次代数的同构是一个 $\mathscr{O}_S$-代数同构 ψ： $C\xrightarrow{\simeq}C'$，满足 $\theta=\theta'\circ\psi$，其中 ψ： $C/\mathscr{O}_S\xrightarrow{\simeq}C'/\mathscr{O}_S$ 是由 ψ 导出的商上的诱导映射。这个相容条件确保定向 θ 和 θ' 在同构 ψ 下保持不变。

命题 5.13。 [9, 命题 3。6] 设 S 是一个概形，满足 2 不是 $\Gamma(S,\mathscr{O}_S)$中的零因子，并设 $N\in \mathrm{Pic}(S)$。那么，概形 N上的 S -定向二次代数的自同构群是平凡的。

定义 5.14 (**扭曲二次型**)。 设 $N\in \mathrm{Pic}(S)$。一个 N-扭曲二元二次型，表示为一对 (E,q)，是将定义 $L=\Lambda^2E\otimes_{\mathscr{O}_S}N$*2.2* 中的 设为 q后得到的二元二次型，它是 $\mathscr{Q}uad(E,\Lambda^2E\otimes_{\mathscr{O}_S}N)$ 的整体截面。

定义 5.15 (**扭曲本原二元型**)。 设 $N\in \mathrm{Pic}(S)$。若一个 N-扭曲二元二次型作为二元二次型来看是本原的，则称其为本原。

定理 5.16。 设 $N\in\mathrm{Pic}(S)$。存在一个函子性双射

$$\left\{\begin{array}{c}\textit{Similarity classes of}\\ \textit{primitive } N\textit{-twisted binary}\\ \textit{quadratic forms over } S\end{array}\right\}\longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}\textit{Isomorphism classes of } (C,\theta,E),\\ \textit{with } (C,\theta) \textit{ an } N\textit{-oriented}\\ \textit{quadratic algebra over } S,\\ \textit{and } E \textit{ an invertible } C\textit{-module}\end{array}\right\}.$$

一个同构 $(C,\theta,E)\cong(C',\theta',E')$ 是一对 (ψ,ϕ)，其中 : $(C,\theta)\cong(C',\theta')$ 是 N-定向代数的一个同构，而 ϕ : $E\otimes_C C'\cong E'$ 是 C'-模的一个同构。

证明。 该结果可直接由命题2.17 和定理 3.1得出。 □

定理 5.17。 设 S 为一般概形，且 2 不是 $\Gamma(S,\mathscr{O}_S)$ 中的零因子。设 C 为 S 上的二次代数。以下两者之间存在集合论双射:

$$\left\{\begin{array}{l}S \text{ 上本原 } N\text{-扭曲二元二次型的相似类，其偶克利福德代数同构于 } C\text{，且保持固定的 } N\text{-定向}\end{array}\right\}\longleftrightarrow \mathrm{Pic}(C)。$$

证明。 令 N 为同构类 $(C/\mathscr{O}_S)^\vee$的一个选定代表。偶克利福德代数同构于 C 且保持固定的 N-定向的二元型相似类诱导出 N-定向的 C自同构。由命题 5.13可知， N-定向的二次代数 over S 的唯一自同构是恒等自同构。

因此，如果 (E、 q、 L) 和 (E'、 q'、 L') 是两个相似的 N-扭曲二元型，那么根据定理 5.11 的意义，$E\sim E'$ 当且仅当 E 和 E' 作为 C-模同构。证明的其余部分直接 follows from 定理 5.11证明中确立的推理。□

5.3.1. 与 *Kneser* 工作的关系。设 R 为含幺交换环，且设 C 为一个二次 R-代数。在 R 上的二元二次型定义为一个秩为 2 的射影 R-模 M ，以及一个二次型 $q:M\to R$。这类形式的复合理论与偶克利福德代数 $C_0(M)$的结构密切相关，而后者自然地获得二次 R-代数的结构。

在其开创性工作中， [14], Kneser 引入并研究了与 C相关的两个基本群。此处给出的所有定义均直接取自 [14]。

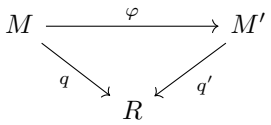
定义 5.18 (**C 型二元二次模**)。二元二次模 (M,q) 称为 C 型，当且仅当:

- M 是秩 *1* 的投射 C-模，
- 该二次型满足 $q(cx)=n_C(c)\cdot q(x)$ 对所有 $c\in C$、 $x\in M$ 都成立，其中 $n_C:\ C\to R$ 是范数映射。

定义 5.19 (G(C) 中的同构)。 $G(C)$ 中的两个元素 (M, q) 和(M', q') 之间的同构是一个 C-线性同构：

$$\varphi : M \to M'$$

使得下图交换：



这意味着对于所有的 $x \in M$，我们有：

$$q'(\varphi(x)) = q(x)$$

换句话说， φ 保持二次结构——它是一个 C-线性等距映射。

定义 5.20 (群 G(C))。 群 $G(C)$ 定义为类型为 C 的同构类本原二元二次模 (M, q) 的集合，其中 C 是一个固定的二次 R- 代数。群运算由关于 C 的张量积诱导，定义如下：对于两个这样的模 (M_1, q_1) 和 (M_2, q_2)，它们在群 $G(C)$ 中的乘积为

$$(M_1, q_1) \cdot (M_2, q_2) := (M_1 \otimes_C M_2,\, q_1 \otimes q_2),$$

其中 $q_1 \otimes q_2$ 表示张量积模 $M_1 \otimes_C M_2$ 上的二次型，它由 q_1 和 q_2 自然诱导而来。

该群的单位元是这一对(C, n_C)的同构类，其中 n_C 是 C 上的范数形式，定义为 $n_C(c) = c \cdot \bar{c}$，其中 $\bar{c}$ 是 c 在 C 的对合下的像。

$G(C)$ 中的逆元由对合给出。具体而言，由(M, q) 表示的元素的逆元是共轭模(M, q)的等价类，其中：

- $\overline{M}$ 是与 M相同的底层 R-模，但通过对合 $\sigma : C \to C$赋予了一个扭曲的 C-模结构，该对合定义为 $\sigma(c) = \bar{c}$。也就是说，对于所有 $c \in C$、 $x \in M$， C 在 M 上的作用由$c \cdot x = \sigma(c)x = \bar{c}x$ 给出。
- 在 M 上的二次型 q 定义为 $q(x) = q(x)$；也就是说，它与 q是同一个函数，只不过现在是在对合模M上考察。

虽然转到 M后， C-模结构发生了变化，但 q 的取值仍属于 R，且该二次型仍满足相容条件：

$$\overline{q}(c \cdot x) = n_C(c) \cdot \overline{q}(x),$$

这成立是因为：

$$\overline{q}(c \cdot x) = q(\bar{c} \cdot x) = n_C(\bar{c}) \cdot q(x) = n_C(c) \cdot q(x) = n_C(c) \cdot \overline{q}(x),$$

利用范数在共轭下不变这一事实： $n_C(c) = n_C(\bar{c})$。

R请回想，由于 C 是一个二次 R-代数，它自带唯一的对合：

$$\sigma : C \to C, \quad \sigma(c) = \bar{c},$$

满足以下恒等式：

$$c + \bar{c} = \mathrm{tr}_C(c), \quad c \cdot \bar{c} = n_C(c),$$

对于所有 $c \in C$，其中 tr_C 和 n_C 分别表示与代数 C相关联的迹映射和范数映射。

Kneser 在 [14, 第 6 节，定理 3] 中指出，这种结构确保了 C 上的本原二元二次模的同构类集合在张量积运算下构成一个定义良好的阿贝尔群，记作 $G(C)$。此外，Kneser 给出了一个自然的正合列：

$$1 \to R^\times/N(C^\times) \xrightarrow{\alpha} G(C) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Pic}(C) \xrightarrow{\gamma} \mathrm{Pic}(R).$$

然而，从 $G(C)$ 到 $\mathrm{Pic}(C)$ 的同态一般来说既非单射也非满射。为解决这一问题，Kneser 在 [14, 第 6 节命题2], 中引入了一个新的群，记为 $H(C)$，以便得到与 $\mathrm{Pic}(C)$ 的同构。

定义 5.21 （三元组于 $H(C)$）。 $H(C)$ 的一个元素是三元组 (M, q, N) 的一个同构类，其中：

- M 是一个可逆的 C-模，
- N 是一个可逆的 R-模，
- $q : M \to N$ 是一个满足以下条件的二次映射：

$$q(ax) = a^2 q(x), \quad b(x, y) = q(x + y) - q(x) - q(y) \text{ is } R\text{-bilinear},$$

and

$$q(cx) = n_C(c) \cdot q(x), \quad \forall c \in C, x \in M.$$

定义 5.22 （同构于 $H(C)$）。 两个三元组 (M, q, N) 与 (M', q', N') 在$H(C)$ 中同构，如果存在 C-线性同构 $\varphi\colon M \to M'$ 以及 R-线性同构 $\psi\colon N \to N'$，使得下列图表交换：

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{q} & N \\ {\scriptstyle\varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ M' & \xrightarrow{q'} & N' \end{array}$$

定义 5.23 （ $H(C)$ 中的群运算）。对于$(M_1,\ q_1,\ N_1)$，$(M_2,\ q_2,\ N_2) \in H(C)$，定义：

$$(M_1, q_1, N_1) \cdot (M_2, q_2, N_2) = (M_1 \otimes_C M_2,\ q_1 \otimes q_2,\ N_1 \otimes_R N_2).$$

为了确立我们的工作与 Kneser 的工作的关系，我们先澄清二元二次型如何与类型为 C 的二元二次模相关联。

命题 5.24. 设 q： $M \to N$ 是环 R 上的本原二元二次型。那么 q 属于类型 $C_0(M, q, N)$。

证明。 由命题3.10， M 是偶克利福德代数 C 上的秩 1 投射模：$=C_0(M,\ q,\ N)$。

现在考虑 C 通过克利福德乘法对 M 的作用。对于任意 $c \in C$ 和 $x \in M$，我们计算：

$$q(cx) = (cx)^2 = cx \cdot cx = cxcx.$$

利用偶克利福德代数上的典范对合 σ_C，可得：

$$c\sigma_C(c) \cdot x^2 = c\sigma_C(c) \cdot q(x) = n_C(c) \cdot q(x),$$

其中 $n_C(c) := c\sigma_C(c)$ 表示与 C 相关联的范数映射。

因此，二次型 q 满足定义5.18所要求的相容条件，这表明二元二次模（M， q， N）确实是类型 C_0（M， q， N）。证明至此完成。□

在其开创性著作 [14, 定理 3，节 6], 中，Kneser 证明，与给定类型 C相关联的集合 $G(C)$ 在合成运算下构成一个群。然而，在该情形下，他具体考虑的是同一类型的本原二元二次型的合成；也就是说，他考察了类型为 C_1 和 C_2 且满足 $C_1 = C_2 = C$的两个型的合成。

在 [14, 命题 2，节 6], 中，他简要指出，集合 $H(C$也具有群结构，理由与 [14, 定理 3，节 6]中所用的相同。为了与 Kneser 的工作 [14], 建立联系，我们在此考虑一种更一般的合成概念：即在类型 C_1 和 C_2满足以下条件时，对它们进行合成：两者 C_1 和 C_2 都与一个固定类型 C同构。需要注意的是，这种同构不必是恒等映射；而在 Kneser 原先的处理方式中，他默认了这一点。

我们的方法沿两个重要方向推广了 Kneser 的构造：

- 明确纳入同一类型 的二次代数之间的同构，以及
- 允许使用任意基概形。

定义 5.25。 我们将定理 *5.17* 左侧出现的集合定义为 $H(C)$。

命题 5.26。 $H(C)$ 构成一个阿贝尔群。

证明。 这直接由定理 5.17 得出。 □

与我们所定义的相似性之比较。与 Kneser 的方法不同，我们的工作考察二次型的相似类。对于 R 上的二元二次型 (M_1, q_1, N_1) 和 (M_2, q_2, N_2)，若存在一对 (ϕ, μ_ϕ)，使得存在 R-模同构

$$\phi : M_1 \to M_2 \quad \text{and} \quad \mu_\phi : N_1 \to N_2$$

使得下列 R-模图表交换:

$$\begin{array}{ccc} M_1 & \xrightarrow{q_1} & N_1 \\ {\scriptstyle\phi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mu_\phi} \\ M_2 & \xrightarrow{q_2} & N_2 \end{array}$$

也就是说，等式

$$\mu_\phi \circ q_1 = q_2 \circ \phi$$

成立。

此外，Max-Albert Knus 所著《环上的二次型与厄米型》中的一个关键命题（[15, 命题 7.1.1, 第四章，§7]）断言，若两个二元二次型 q_1和 q_2 相似，则选择一个相似关系会诱导出 $C_0(q_1)$ 与$C_0(q_2)$ 作为代数之间的唯一同构。此外， $C_1(q_1)$ 与 $C_1(q_2)$ 之间存在唯一的 R- 模同构，该同构保持相应的 $C_0(q_1)$-模结构和 $C_0(q_2)$-模结构。关于基概形 S上的相应论证，请参阅命题 2.16 和命题 2.22。

对于二元形式，我们有 $C_1(q_1) = M_1$ 和 $C_1(q_2) = M_2$，而上述R-模 $C_1(q_1)$ 与 $C_1(q_2)$ 之间的同构，恰好与 ϕ 一致。同样的推理也适用于任意基概形 S。

因此，在我们的情形中，模之间的同构 ϕ 是 R-线性且半线性的，但不一定是 C-线性的；而后者是 $H(C)$ 定义所要求的。在基概形 S 上的相对情形中，同样的说明也成立。

弥合差距：相容条件与自同构。为了使我们的方法更贴近 Kneser 在 $H(C)$ 中的分类，我们对二次代数结构进行刚化。具体而言，我们施加一个条件，将偶克利福德代数的自同构群限制为平凡群。在此假设下，任何满足半线性条件的 R-线性同构 ϕ: $M_1 \to M_2$ 都自动是 C-线性的。同样的推理也适用于任意基概形 S。

这种刚性有效地迫使同构 ϕ交织偶克利福德代数 $C_0(M_1)$ 和 $C_0(M_2)$ 的作用，从而将相似性归结为 Kneser 意义下的同构。

结论。 Kneser 对 $H(C)$ 中同构的定义内在地假设了 C-线性，这与将二次型视为其偶克利福德代数上的模相一致。在我们的工作中，我们从一种更广义的概念出发——相似，它通过满足半线性条件的 R-线性映射 来定义。然而，当我们对底层偶克利福德代数的结构施加刚性以消除非平凡自同构时，这种相似条件便等价于 Kneser 在$H(C)$ 中定义的三元组同构。

因此，在适当条件下——具体而言，当偶克利福德代数的自同构群是平凡群时，我们的相容同构恰好化为 C-模同构，即 Kneser 所采用的同构。这表明，定理 5.17 可视为对其构造的推广；当基代数 C 具有足够的刚性时，Kneser 的框架便成为一个特例。

5.4. **任意基上的高斯合成。** 二元二次型的合成是数论中由来已久的课题。自 Gauss 在其开创性著作《算术研究》 [17], 中提出这一概念以来，人们一直致力于简化和推广它。Martin Kneser 在其影响深远的著作 [14], 中引入了二次模的概念 E，将其定义为偶克利福德代数上的模 $C_0(E)$，并将合成律定义为关于 $C_0(E)$ 的张量积。值得注意的是，Kneser 成功地在仿射概形上建立了这一合成律，且未对基环的特征施加任何条件。本着 [14], 的精神，文献 [13]系统地研究了四元二次型的复合理论。在本文中，我们从两个重要方面拓展了 Kneser 的工作 [14]：

- 我们考虑本原二元二次型 在任意基概形 S上的情形。
- 我们允许这些型取值于 S上的任意线丛，而不局限于平凡丛。

~设 C 是任意基概形 S上的一个给定二次代数。我们用 $H(C)$表示所有本原二元二次型的相似类的集合，这些型的广义偶克利福德代数与 C同构。

~**命题 5.27.** 集合 $H(C)$具有阿贝尔群结构。

证明。我们定义如下群运算。设(E_1, q_1, L_1)和(E_2, q_2, L_2)是基概形 S上的两个本原二元二次型。根据引理 4.8，与对$(C_0(E_1, q_1, L_1)\ C_1(E_1, q_1, L_1) = E_1)$和$(C_0(E_2, q_2, L_2)\ E_2)$相关联的万有范数型分别与型$(E_1, q_1, L_1)$和$(E_2, q_2, L_2)$相似。群运算定义如下：

$$(C_0(E_1, q_1, L_1), E_1) \cdot (C_0(E_2, q_2, L_2), E_2) = (C, E_1 \otimes_C E_2),$$

其中，C 是给定的二次 $\mathscr{O}_S$代数，同构于 $C_0(E_1,\ q_1,\ L_1)$和 $C_0(E_2,\ q_2,\ L_2)$，而$E_1 \otimes_C E_2$ 是关于 C的张量积。

结合性和交换性都是张量积运算规则的直接结果。单位元是 $E = C$，其范数为 $q = n_C$。给定类$(E,\ q,\ L)$的逆元由与对$(C_0(E,\ q,\ L)\ E)$相关联的泛范数形式给出，其中 E 上的自然 $C_0(E,\ q,\ L)$作用被$(c,\ x) \mapsto \bar{c}x$取代，其中 $\bar{c}$ 表示 c 在广义偶克利福德代数 $C_0(E,\ q,\ L)$的典范对合下的像。有关这些论断的全面论述和详细证明，参见~ [16, 命题4.25]。因此，$H(C)$具有阿贝尔群结构。□

定理 5.28。 在任意基概形 S 上，所有广义偶克利福德代数彼此同构的本原二元二次型构成的集合具有阿贝尔群结构。

证明。 此结果直接由命题 5.27得出。 □

这些推广将经典理论拓展到了一个更灵活、几何上更稳健的框架中。

在她的研究中， [21], Wood 建立了线性二元二次型与皮卡群商集的不交并之间的集合论双射，但仅限于本原情形。她主要受到模空间理论考量的推动，并未定义群律，也未明确指出该双射与某个特定皮卡群之间存在同构。随后，Dallaporta [9] 为某些本原二元二次型的类引入了群结构；然而，他的构造同样局限于线性二元二次型。此外，该构造还要求整体截面 $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$ [9, 中的 2 不是零因子，参见定理 3。24]。Wood 和 Dallaporta 研究的都是线性二元二次型，其理论框架完全没有涉及克利福德代数视角；而我们研究的是任意基概形上的经典意义下的二元二次型 S，并融入克利福德理论观点，从而使理论的表述更加内在且在代数上更加稳健。

定理 5.28 给出了基概形 S上取值于线丛的本原二元二次型相似类的合成律。

注 5.29. 将高斯合成推广到任意基概形 S 上的本原二元二次型，无须对 S施加任何额外条件。然而，在将高斯合成与$\mathrm{Pic}(C)$（二次代数 C 的皮卡群）联系起来时，则有必要对基概形 S施加某些技术性假设。具体而言，如定理 *5.17*所述，我们要求 2 是整体截面 $\Gamma(S, \mathscr{O}_S)$中的非零因子，从而得到一个定义良好的集合论映射， $H(C)$ 到 $\mathrm{Pic}(C)$。因此，尽管合成律本身不附带任何条件，但能否自然地与皮卡群进行比较，关键取决于基的几何性质。

References

[1] Asher Auel. 总克利福德不变量的满射性与布劳尔维数。 *J. Algebra*，443:395–421，2015。8，9，10[2] Asher Auel、Marcello Bernardara 和 Michele Bolognesi。二次超曲面完全交的纤维化、克利福德代数、导出范畴与有理性问题。 *Journal de Mathématiques Pures et Appliquées*, 102 1 249 291, 2014 6 ( ): – 2011年7月。Manjul Bhargava。高次合成律及其应用。载于[3] *Proceedings of the international congress of mathematicians (ICM) Madrid Spain August 22–30 2006. Volume II: Invited lectures* 271 294 ¨ , , , , , 第–页。苏黎世：欧洲数学会（EMS）, 2006 20 。Bhargav Bhatt。正特征下的导出碎片。[4] *Compositio Mathematica* 148 6 1757 1786, 2012 7 , ( ): –。W. Bichsel 和 M.-A. Knus。取值于线丛的二次型。载于[5] *Recent advances in real algebraic geometry and quadratic forms. Proceedings of the RAGSQUAD year Berkeley CA USA 1990-1991* 293 , , , , 第–306页。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1994。1，2，8，21，23，35[6] *Quadratische raeume mit werten in invertierbaren moduln* 1985 8 Walter Bichsel。。博士论文，苏黎世联邦理工学院，。[7] Stefaan Caenepeel 和 Freddy Van Oystaeyen。取值于可逆模的二次型。 *K-Theory*，7 1 23 40，1993 ( ): –。[8] Daniel Chan 和 Colin Ingalls。圆锥曲线丛与克利福德代数。 *Contemporary Math* 562 53 76, 2012 14 , : –。William Dallaporta。从 Wood 的二元二次型中恢复二次代数的皮卡群。[9] *Int.* , ( ): –。 *J. Number Theory* 21 4 739 767, 2025 4, 7, 35, 36, 37, 42[10] David Eisenbud 和 Joe Harris。 *3264 and all that—a second course in algebraic geometry*。剑桥大学出版社，剑桥，2016。32[11] Daniel Erman 和 Melanie Matchett Wood。二元二次型的高斯合成，以及赫尔维茨空间双覆盖的泛雅可比簇。 *J. Algebra* 470 320 352, 2017 11 : –。William B. Jacob、Tsit-Yuen Lam 和 Robert O. Robson，编。[12] *Recent advances in real algebraic geometry and quadratic forms. Proceedings of the RAGSQUAD year Berkeley CA USA 1990-1991* 155 *Contemp.* , , , , , *Math.* 卷。罗得岛州普罗维登斯：美国数学会，1994。8[13] M. Kneser、M.-A. Knus、M. Ojanguren、R. Parimala 和 R. Sridharan。四元二次型的合成。*Compos. Math.* 60 133 150, 1986 41 : –。Martin Kneser。二元二次型的合成。 *Journal of Number Theory*，15(3):406–413，1982。2，3，4，21，37，39，40，41[14] Max-Albert Knus。 *Quadratic and Hermitian forms over rings*， *Grundlehren Math. Wiss.* 第294卷。柏林等地：施普林格出版社，1991。1，2，7，9，12，13，20，23，40[15] Soham Mondal。利用克利福德对对二元二次型进行相似分类及其在一般概形上高斯合成中的应用。 *IIT Madras: dissertation*，2025。7，8，9，10，11，17，20，21，23，24，25，26，27，41[16] Olaf Neumann。卡尔·弗里德里希·高斯，《算术研究》（ 1801 *Landmark Writings in Western Mathematics 1640-1940* 303 315 2005 4, 41）。载于，第–页。爱思唯尔，。[17] Thiruvalloor Eesanaipaadi Venkata Balaji。概形上的线丛值三元二次型。[18] *J. Pure Appl.* , ( ): –。 *Algebra* 208 1 237 259, 2007 14, 19

[19] John Voight。刻画任意基上的四元数环。 *J. Reine Angew. Math.*, 657:113–134, 2011年。14, 19
[20] 55 3 1135 1154, 2011 7 John Voight。
[21] *Adv. Math.* 226 2 1756 1771, 2011
带标准对合的低秩环。 *Illinois J. Math.*, (): –。Melanie Matchett Wood。任意基上的高斯合成。, (): –。1, 3, 4, 28, 29, 30, 34, 35, 42

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai 600036, India
Email address: getsoham1@gmail.com

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Madras, Chennai 600036, India
Email address: tevbal@iitm.ac.in