arXiv:2602.16854v1 [math.LO] 18 Feb 2026

PFA中的更多导出模型

Derek Levinson，*Nam Trang，†和 Trevor Wilson‡

2026年2月20日

摘要

本文在解决一个关于强迫公理（如 PFA）与 Woodin 基数极限处的导出模型 κ 之间关系的猜想方面取得了重大进展。具体而言，我们运用一种称为覆盖矩阵的概念，证明在若干情形下，导出模型在 κ 处的 Θ 严格小于 κ^+；特别是，这表明若 κ 是共尾性为 ω 的 Woodin 基数极限，且导出模型不满足 LSA，则在 PFA 下该结论成立。假设某种形式的鼠捕获成立，我们证明当 κ 是 Woodin 基数的正则极限时，导出模型在 PFA 下满足 $AD_{\mathbb{R}}$。若 κ 是一个不可破坏的（κ，κ^+）弱紧致 Woodin 基数极限，则导出模型直接满足 $AD_{\mathbb{R}}$。

1 引言

导出模型是现代集合论学家广泛研究的一类重要模型。它们是由大基数构造出的 AD^+ 的模型；反之，若 AD^+ 成立，则可以证明 $L(P(\mathbb{R}))$是一个导出模型。这些由H. W. Woodin得到的开创性结果本质上表明，理论 AD^+ 是 AD的一个完备化。强迫公理是贝尔纲定理的推广，并在集合论中有许多应用。过去30年集合论中的深入工作已经确立了强迫公理与确定性之间的紧密联系，例如[Woo10；Ste05；ST24]。

一个自然的问题是，强力迫公理如何影响AD^+的内模型，例如导出模型。Woodin 提出的一个著名猜想（[Woo10，问题 8]）断言：若 $MM(c)$ 成立，且 M是 AD^+的一个内模型，使得 $\Theta^M = \omega_3$，则 $M \models AD_{\mathbb{R}}$。下面的猜想沿同一思路，但我们转而询问

*北德克萨斯大学数学系，美国德克萨斯州Denton。电子邮箱：Derek.Levinson@unt.edu。

†北德克萨斯大学数学系，美国德克萨斯州Denton。电子邮箱：Nam.Trang@unt.edu。Nam Trang部分得到美国国家科学基金会通过CAREER资助DMS-1945592以及西蒙斯基金会通过西蒙斯学者计划的支持。

‡美国俄亥俄州牛津市迈阿密大学数学系。电子邮箱：twilson@miamioh.edu。

若像 PFA这样的全局力迫公理成立，关于导出模型的基本问题。下文中，我们用 $D(V,\kappa)$ 表示 κ 处的“新”导出模型（精确定义见 [LT25] ），而 Θ 是序数 α 的上确界，使得存在从 $\mathbb{R}$ 到 α的满射。

猜想 1.1 (PFA)。 假设 κ是 *Woodin* 基数的极限。则以下结论成立。

1. $\Theta^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$.
2. $D(V,\kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$.

本文在解决猜想 1.1 方面取得了一些进展。猜想 1.1 是 Wilson 猜想的推广；Wilson 猜想已由[LT25] 的工作在额外的鼠捕获假设下部分解决。本文试图在更一般的框架下研究强力迫公理（例如 PFA）或大基数下的导出模型。第 2 节的主要定理是 2.4；若 κ的共尾性为 ω，且导出模型不满足LSA，则该定理蕴含猜想的第 (1) 部分。证明运用了一个称为覆盖矩阵的组合对象。第 2 节也讨论了 κ 取其他值时的第 (1) 部分，但假设覆盖矩阵具有某些组合性质；目前尚不知这些性质能否由 PFA 推出（尽管已知它们可由大基数推出， [Via08]）。目前尚不清楚，在假设 PFA的情况下，Woodin 基数的任何极限处的导出模型是否都能满足 LSA。

在第3节中，我们证明：如果 κ 是 Woodin 基数的极限，且 κ 是 $Col(\kappa, \kappa^+)$-不可摧毁的弱紧，那么 $D(V, \kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$ （推论 3.8）。我们指出，Woodin 已证明，如果 κ 是 Woodin 基数和 $< \kappa$-强基数的极限，那么 $D(V, \kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$；而在我们的情形中， κ 不必是 $< \kappa$-强基数的极限。

第4节中，我们运用第3节的技巧，在 PFA 的条件下部分处理猜想的第（2）部分。本节的主要定理是 4.2 和 4.11。我们指出，第4节的工作虽然比 [LT25], 更一般，但仍假设某种形式的鼠捕获。我们希望在未来的发表成果中，探讨导出模型是否总是在 PFA 下满足 $AD_{\mathbb{R}}$，且不需要额外的内模型论假设。

2 覆盖矩阵

Wilson 使用相干覆盖矩阵证明了：

定理 2.1 (Wilson). 假设 κ 是共尾性为 ω 的 *Woodin* 基数的极限，并且 κ^+不存在相干覆盖矩阵。那么 $\Theta_0^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$。

我们的下一个定理推广了 Wilson 的结果。Wilson 论证中所用的相干覆盖矩阵不存在这一结论，是 Viale 在 [Via08] 中引入的一种覆盖性质的特例。

定义 2.2 (Viale)。 设 $\lambda < \kappa$ 为正则基数。若满足以下条件，我们称 $K = \langle K(\alpha, \beta) : \alpha < \lambda, \beta < \kappa \rangle$ 是一个适用于 κ 的 λ-覆盖矩阵：

1. $\beta = \bigcup_{\alpha<\lambda} K(\alpha, \beta)$ 对所有 $\beta < \kappa$成立。 *2.* 对所有 $\beta < \kappa$ 和 $\alpha < \eta < \lambda$， $K(\alpha, \beta) \subseteq K(\eta, \beta)$。此外，对所有充分大的 $\beta < \kappa$ 以及所有 $\alpha < \lambda$，存在 $\eta < \lambda$ 使得 $K(\alpha, \beta) \subsetneq K(\eta, \beta)$。[1] *3.* 对所有 $\gamma < \beta < \kappa$ 以及所有 $\alpha < \lambda$，存在 $\eta < \lambda$ 使得 $K(\alpha, \gamma) \subseteq K(\eta, \beta)$。 *4.* 对所有 $X \in [\kappa]^{\leq\lambda}$，存在 $\gamma_X < \kappa$ 使得对所有 $\beta < \kappa$ 和 $\eta < \lambda$，存在$\alpha < \lambda$使得 $K(\eta, \beta) \cap X \subseteq K(\alpha, \gamma_X)$。

定义 2.3 (Viale)。 我们称 κ 具有 λ-覆盖性质，记作 $CP(\kappa, \lambda)$，如果对于每个 K，存在一个针对 κ的 λ-覆盖矩阵，并且存在一个无界集 $A \subseteq \kappa$，使得$[A]^\lambda$ 被 K覆盖。[2]

定理 2.4。 假设 κ是 *Woodin* 基数的极限， $cof(\kappa) = \lambda$, $CP(\kappa^+, \lambda)$成立，[3] 且 $D(V, \kappa) \nvDash LSA$。那么 $\Theta^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$。

证明。 反设不然。令 $D = D(V, \kappa)$ 为由泛型 $G \subseteq Col(\omega, < \kappa)$ 在 κ 处构造的导出模型。如果 $D \models AD_{\mathbb{R}}$，那么 $\Theta^D < \kappa^+$,[4] 因此我们可以假设，对某个 ι，有 $D \models \Theta = \Theta_{\iota+1}$。由于 $D \nvDash LSA$， D 中的任意 Wadge 秩为 Θ_ι 的实数集在 D中都是苏斯林-余苏斯林集，因此也在 Hom^*中。接着取某个 $\gamma < \kappa$ 和 $A \in Hom^{V[G\restriction\gamma]}_{<\kappa}$,$A \subseteq \mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma]}$，使得 $D(V, \kappa) \models w(A^*) = \Theta_\iota$.[5]

设 T、$U \in V[G \restriction \gamma]$ 为见证 $A \in Hom^{V[G\restriction\gamma]}_{<\kappa}$ 的树。固定 A、T 和 U 的 $Col(\omega, \gamma)$-名 $\dot{A}$、$\dot{T}$ 以及 $\dot{U}$。我们可以假定，上文所提及的 A、T 和 U 的全部性质均由强迫 $Col(\omega, \gamma)$ 中的平凡条件强迫成立。此外，我们可以假定，对某个 $\zeta \in On$，平凡条件强迫 $D \models l(A^*) = \check{\zeta}$。[6] 对 $q \in Col(\omega, \gamma)$，令 $A_q = A_{H_q}$、$T_q = T_{H_q}$和 $U_q = U_{H_q}$，其中 $H_q = q \cup G \restriction (\gamma \setminus dom(q))$。注意 $\emptyset \Vdash D(V, \kappa) \models l(A^*_q) = \check{\zeta}$，因此 $A^*_q \leq_l A^*$。[7]

命题 2.5. 对于任意 $q \in Col(\omega, \gamma)$，存在利普希茨 $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}^*$，使得$f^{-1}(A^*) = A^*_q$，且 f 由 $V[G \restriction \gamma]$ 中的一个实数编码。[8]

[1]这与 [Via08] 的定义 4 并不完全相同。 [Via08] 还应该说明，只有当 β 足够大时，才有真包含，以避免 $\beta < \lambda$ 的平凡情形。我们的另一处改动同样只是表面上的——由于 λ 是正则的，如果一个序列 $\langle K(\alpha, \beta) : \alpha < \lambda \rangle$ 满足我们的条件，我们可以用一个长度为 λ 且严格递增的子序列来代替它。[2]也就是说，对任意 $X \in [A]^\lambda$，存在 $\alpha < \lambda$ 和 $\beta < \kappa$，使得 $X \subseteq K(\alpha, \beta)$。[3]根据 [Via08] 的引理 14，这意味着 $\lambda < \kappa$。[4]参见 [LT25] 的定理 4.12。[5]$A^* \subseteq \mathbb{R}^*$ 是唯一满足以下条件的集合：每当 $T, U \in V[G \restriction \gamma]$ 是见证 $A \in Hom^{V[G\restriction\gamma]}_{<\kappa}$ 的树时， $A^* = \rho[T]$。[6]$l(A)$ 是 A 的利普希茨秩。[7]也就是说， A^*_q 利普希茨可约到 A^*。[8]注意，显然存在一个由 $\mathbb{R}^*$ 中的实数编码的此类利普希茨 f ——该断言的实质在于，我们可以令它属于 $V[G \restriction \gamma]$。这将用于把集合 A^*_q 汇集成 D 中的一个集合。证明这一断言时，我们会用到 $D \nvDash LSA$。没有这一假设，对于每个 q，我们仍然可以找到某个 $\gamma_q < \kappa$，使得 $V[G \restriction \gamma_q]$ 中的一个实数编码了从 A^*_q 到 A^* 的归约，但我们不知道如何将 γ_q 严格限制在 κ 以下。

证明。由于 $A^*_q \leq_l A^*$ 属于 D，存在利普希茨 $f: \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}^*$，使得 $f^{-1}(A^*) = A^*_q$，且 f 由 $\mathbb{R}^*$ 中的一个实数编码。于是，根据 [Ste07]，的定理 2.2，存在利普希茨 $f: \mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma]} \to \mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma]}$，由 $\mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma]}$ 中的一个实数编码，使得 $f^{-1}(A) = A_q$。

由于 f 是利普希茨的，我们可以将 f 视为函数 $f: 2^{<\omega} \to 2^{<\omega}$，满足$lh(t) = t$，对任意 $t \in 2^{<\omega}$均成立。令 $f^{-1}(T) = \{(t, s) \in \omega^{<\omega} \times On^{<\omega}: (f(t)\ s) \in T\}$。类似地定义$f^{-1}(U)$。只需证明 $\rho[f^{-1}(T)] \cap \mathbb{R}^* = A^*_q$。显然，$\rho[f^{-1}(T)] \cap \mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma]} = A_q$。由于 A^*_q是 $\mathbb{R}^*$的唯一子集，使得对于 $V[G\restriction\gamma]$中的某些 $< \kappa$-互补树 T'和 U'，有 $A^*_q = \rho[T'] = \rho[U']^c$成立，因此只需证明$\rho[f^{-1}(T)] \cup \rho[f^{-1}(U)] = \mathbb{R}^*$。假设 $a \in \mathbb{R}^*$。要么 $f(a) \in A^*$，要么 $f(a) \in (A^*)^c$。如果$f(a) \in A^*$，那么存在 $\vec{s} \in On^\omega$，使得$(f(a)\ \vec{s}) \in [T]$。但这样一来，$(a, \vec{s}) \in [f^{-1}(T)]$，因此 $a \in \rho[f^{-1}(T)]$。同样，如果 $f(a) \in (A^*)^c = \rho[U]$，那么 $a \in \rho[f^{-1}(U)]$。 □

由命题 2.5，对于每个 $q \in Col(\omega, \gamma)$，都存在 $x_q \in \mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma]}$，它编码了从 A^*_q 到 A^* 的一个利普希茨归约。于是存在 $\gamma' < \kappa$ 和 $y \in \mathbb{R}^{V[G\restriction\gamma']}$，使得 y 编码了函数 $q \mapsto x_q$，其定义域为 $Col(\omega, \gamma)$。令 $B = \{(x, z) \in \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}^*:\ x$编码 $H_q \wedge z \in A^*_q\}$。于是 B 属于 D，因为 $A^* \in D$，且映射 $q \mapsto x_q$ 和 $q \mapsto H_q$ 属于 D。显然，$w(B) \geq \Theta_\iota$。因此，对每个 $\beta < \kappa^+$，都存在一个满射 $f_\beta: \mathbb{R}^* \mapsto \beta$，它在 D中可由 B 序数定义。我们可以选取 f_β，使得 $\vec{f} = \langle f_\beta : \beta < \kappa^+\rangle$ 在 D中可由 B 序数定义。取 $g: \lambda \to \kappa$ 属于 V，使得 g 在 κ中递增且共尾。对于 $\alpha < \lambda$和 $\beta < \kappa^+$，令 $K(\alpha, \beta) = f''_\beta[\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}]$。令 $K = \langle K(\alpha, \beta): \alpha < \lambda, \beta < \kappa^+\rangle$。

我们要证明 $K \in V$。令 $\dot{B}$ 是 B 的一个自然名称。也就是说，我们可以令 $\dot{B}$ 为有序对集合 (σ, p)，其中 $p \in Col(\omega, < \kappa)$，且 σ 是一个实数的标准$Col(\omega, < \kappa)$-名称，使得 p强迫存在 $q \in Col(\omega, \gamma)$，满足

1. σ_1对 $\dot{H}_q$ 进行编码，
2. $\sigma_2 \in \dot{A}_q$。[9] [10]

断言 2.6。若 $\alpha < \lambda$且 $\epsilon < \beta < \kappa^+$，则要么 $\emptyset \Vdash^V_{Col(\omega,<\kappa)} \check{\epsilon} \in f_\beta[\mathbb{R}^{V[\dot{G}\restriction g(\alpha)]}]$，要么 $\emptyset \Vdash^V_{Col(\omega,<\kappa)} \check{\epsilon} \notin f_\beta[\mathbb{R}^{V[\dot{G}\restriction g(\alpha)]}]$。[11]

证明。反设不然。于是固定 $p, q \in Col(\omega, < \kappa)$，使得 $p \Vdash^V_{Col(\omega,<\kappa)} \check{\epsilon} \in f_\beta[\mathbb{R}^{V[\dot{G}\restriction g(\alpha)]}]$ 且 $q \Vdash^V_{Col(\omega,<\kappa)} \check{\epsilon} \notin f_\beta[\mathbb{R}^{V[\dot{G}\restriction g(\alpha)]}]$。如有必要，扩充 p和 q，我们可以假设$dom(p) = dom(q)$ 且 $p \in G$。令 $G_q = q \cup G \restriction (\kappa \backslash dom(q))$。注意 $G_q \in D$。

子断言 2.7。$B_G = B_{G_q}$

证明。假设 $(x_1, x_2) \in B_G$。那么存在 $r \in Col(\omega, \gamma)$，使得 x_1编码了 H_r和 $x_2 \in A^*_r = \rho[T_{H_r}] \cap \mathbb{R}^*$。但存在 $r' \in Col(\omega, \gamma)$，使得 $r' \cup G_q \restriction (\gamma \backslash dom(r')) = H_r$。因此，$x_1$ 编码了 $r' \cup G_q \restriction (\gamma \backslash dom(r'))$，且 $x_2 \in \rho[T_{r' \cup G_q \restriction (\gamma \backslash dom(r'))}] \cap \mathbb{R}^*$。考察 B的定义，可明显看出 $(x_1, x_2) \in B_{G_q}$。 □

[9] σ_1 而且 σ_2 是由 σ 编码的这对实数的一些自然名称。[10]其中 $\dot{H}_q$ 和 $\dot{A}_q$ 分别是 H_q 和 A_q的名称，并且空条件强迫 $H_q = q \cup G \restriction (\gamma \backslash dom(q))$ 和 $A_q = \rho[T_{H_q}] \cap \mathbb{R}^*$。[11]这里的 f_β实际上指的是 B中的定义 D 以及序数参数。

由于 G和 G_q仅在有限多个取值上不一致，因此 $\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}=\mathbb{R}^{V[G_q\restriction g_{(\alpha)}]}$。但根据 $f_\beta\restriction\mathbb{R}^{V[\dot{G}\restriction g_{(\alpha)}]}$的定义（由 B和序数组成）， $V[G]$ 和 $V[G_q]$中得到的是同一个函数。矛盾。 □

断言 2.8。 $K\in V$

证明。 由断言 2.6 立即得到。 □

断言 2.9。 K 是 κ^+的 λ-覆盖矩阵。

证明。 我们必须检查定义 2.2 的条件。

1. 对于任意 $\beta<\kappa^+$, $\beta=f''_\beta[\mathbb{R}^*]=\bigcup_{\alpha<\lambda}f''_\beta[\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}]=\bigcup_{\alpha<\lambda}K(\alpha,\beta)$。 2. 第一部分成立，因为 g 是递增的。对于第二部分，假设$\kappa\leq\beta<\kappa^+$ 且 $\alpha<\lambda$。注意， β 在 D中是不可数的，而 $\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}$ 在 D中是可数的。因此， $K(\alpha,\beta)=f''_\beta[\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}]\subsetneq\beta$。于是根据 1，存在某个$\eta<\lambda$，使得 $K(\alpha,\beta)\neq K(\eta,\beta)$。 3. 固定 $\xi<\beta<\kappa^+$ 和 $\alpha<\lambda$。注意， $\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}$ 是 D中的一个可数实数集，且 $f_\xi\in D$，所以 $f''_\xi[\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}]$是 D中的一个可数序数集。由于D满足可数选择，我们可以选取 $\langle y_i:\ i<\omega\rangle$，使得 $f''_\beta[\langle y_i\rangle]=f''_\xi[\mathbb{R}^{V[G\restriction g(\alpha)]}]$。选取足够大的 $\eta<\lambda$，使得 $\langle y_i\rangle\subseteq V[G\restriction\eta]$。然后 $K(\alpha,\xi)\subseteq K(\eta,\beta)$。 4. 实际上，我们可以从 [通过08]证明更强的性质 (iv')：与性质 3 的证明相同，对于所有 $\xi<\beta<\kappa^+$ 以及所有 $\eta<\lambda$，存在 $\alpha<\lambda$，使得 $K(\eta,\beta)\cap\xi\subseteq K(\alpha,\xi)$。

□

断言 2.10. 对于所有的 $\alpha<\lambda$ 和 $\beta<\kappa^+$, $o.t.(K(\alpha,\beta))<\kappa$。

证明. $K(\alpha,\beta)$ 是 D中 f_β下一个可数实数集的像。因此， $K(\alpha,\beta)$ 在 D中是可数的，而 $\kappa=\omega_1^D$。 □

由于 $K\in V$， $CP(\kappa^+,\lambda)$ 给出了一个无界的 $A\subseteq\kappa^+$，使得 $[A]^\lambda$ 被 K 覆盖。取 $\tau<\kappa^+$ 使得 $o.t.(A\cap\tau)\geq\kappa$。根据断言 2.10，对于每个 $\alpha<\lambda$，存在 $\xi_\alpha\in A\cap\tau\backslash K(\alpha,\tau)$。令 $X=\{\xi_\alpha:\ \alpha<\lambda\}$。 $X\in[A]^\lambda$，因此下面的断言导出矛盾。

断言 2.11. 对于任何 $\alpha<\lambda$、 $\beta<\kappa^+$， X 都不被 $K(\alpha,\beta)$ 覆盖。

证明。 首先假设 $\beta\leq\tau$。由于 K 是一个覆盖矩阵，因此存在 $\eta<\lambda$ 使得$K(\alpha,\beta)\subseteq K(\eta,\tau)$。于是 $\xi_\eta\in X\backslash K(\alpha,\beta)$。

现在假设 $\tau<\beta$。应用我们在断言 2.9 中证明的性质 (iv')，存在$\eta<\lambda$使得 $K(\alpha,\beta)\cap\tau\subseteq K(\eta,\tau)$。因此 $\xi_\eta\in X\backslash K(\alpha,\beta)$。 □

□

推论 2.12。 假设 κ 是 *Woodin* 基数的极限， τ 是强紧致的，$\kappa \geq \tau$， $cof(\kappa) = \lambda < \tau$，且 $D(V, \kappa) \nvDash LSA$。那么 $\Theta^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$。

证明。 [的定理 10 经由08] 蕴含 $CP(\kappa^+, \lambda)$。然后应用定理 2.4。 □

推论 2.13。 假设 PFA。若 κ 是共尾性为 ω的 *Woodin* 基数的极限，且 $D（V, \kappa）\nvDash LSA$，则 $\Theta^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$。

证明。 根据 [经由08]， PFA蕴含 $CP(\kappa^+, \omega)$。然后应用定理 2.4。 □

定理 2.4 是否是证明猜想 1.1 第（1）部分全部内容的可行方法，仍有待观察——除了能解决 $D(V, \kappa) \models LSA$ 的情形外，尚不清楚如果 $cof(\kappa) > \omega$， PFA（甚至 MM）是否蕴含 $CP(\kappa^+, cof(\kappa))$。

3 弱紧致基数

以下定理出自 Wilson 的学位论文（[Wil12]）。下一节将用到该定理的证明；为方便读者，我们在此更详细地给出证明。

定理 3.1 (Wilson). 假设 κ 是弱紧致的，且 κ 是 *Woodin* 基数的极限。若 $D(V, \kappa) \nvDash AD_{\mathbb{R}}$，则 $\Theta^{D(V,\kappa)} = \kappa^+$。

证明。 假设不然。取 $N \prec V$使得 N是传递的， $|N| = \kappa$， $\Theta^{D(V,\kappa)} \subset N$，且 ${}^{<\kappa}N \subset N$。由 κ 的弱紧致性，存在初等嵌入 $j : N \to M$，使得 M 是传递的， $|M| = \kappa$， ${}^{<\kappa}M \subset M$ 且 $crit(j) = \kappa$。

令 $G \subseteq Col(\omega, < \kappa)$ 对 V 是泛型的（特别地， G对 N 是泛型的）。令 D为用 G构造的 N 在 κ 处的导出模型。由于我们假设该定理不成立， $D \nvDash AD_{\mathbb{R}}$。于是 D 有一个最大的 Suslin 点类 $\mathbf{\Gamma}$，以及相应的最大 Suslin 基数 δ。令 $T \in D$ 为 $\omega \times \delta$ 上的一棵树，它是万有 $\mathbf{\Gamma}$-集上一个尺度的树。我们可以假设 $T \in V$。

我们可以将 j扩展为一个映射 $j : N[G] \to M[G * H]$，其中 H的选取使得 $G * H \subseteq Col(\omega, < j(\kappa))$在 V上是泛型的。注意此时 $j(D)$是 M中位于 $j(\kappa)$处的导出模型。

令 $\sigma = j''((meas^{\mathbf{\Gamma}}(\delta^{<\omega}))^D)$。

断言 3.2. $\sigma \in HOD^{M[G*H]}_{M \cup \mathbb{R}^*_{G*H}}$ 并且在 $HOD^{M[G*H]}_{M \cup \mathbb{R}^*_{G*H}}$ 中是可数的。

证明。 显然 $\sigma \subset j(D) \subset HOD^{M[G*H]}_{M \cup \mathbb{R}^*_{G*H}}$。由于我们假设 $\Theta^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$， $\Theta^D < (\kappa^+)^N$，因此在 $N[G]$中存在一个满射 $f : \kappa \to (meas^{\mathbf{\Gamma}}(\delta^{<\omega}))^D$。于是，由于$crit(j) = \kappa$， $j(f) \restriction \kappa$是 $M[G * H]$中从 κ到 σ的一个满射。而 κ在$M[G * H]$中是可数的，因此 σ在 $M[G * H]$中是可数的。

将 σ 在 $M[G * H]$ 中枚举为 $\sigma = \langle A_i : i \in \omega \rangle$。选取 $x_i \in \mathbb{R}^*_{G*H}$，使得 A_i 可由 $M \cup \{x_i\}$ 中的参数在 $M[G * H]$ 中定义。由于 $M^\omega \subset M$，将用于定义 A_i的 M 中的参数取并后，存在一个单一集合 $X \in M$，使得对于任意 $i \in \omega$， A_i 都可由 X 和 x_i在 $M[G * H]$ 中定义。

设 $x = \bigoplus_{i \in \omega} x_i$。由于 $j(\kappa)$ 在 M 中是正则的， $cof(j(\kappa))^{M[G*H]} > \omega$，因此 $x \in \mathbb{R}^*_{G*H}$。并且 σ在 $M[G * H]$ 中可由 X和 x可定义，因此 $\sigma \in HOD^{M[G*H]}_{M \cup \mathbb{R}^*_{G*H}}$。□

˜设 $T = j(T)$。考虑 [Wil12] 的定义 3.6.3 中的博弈 $G^{\sigma}_{\tilde{T}}$

断言 3.3. 玩家 *II* 在 $HOD^{M[G*H]}_{M\cup\mathbb{R}^*_{G*H}}$ 中对博弈 $G^{\sigma}_{\tilde{T}}$拥有获胜策略。

证明. 我们按如下方式修改博弈 $G^{\sigma}_{\tilde{T}}$，从而在 V 中得到一个等价博弈。根据 [Wil12], 的命题 3.5.5，存在 $j((meas^{\mathbf{\Gamma}}(\delta)^{<\omega})^D)$ 的一个良序 $\leq^* \in j(D)$，它在 $V[G*H]$ 中可由 T˜可定义。并且 σ 在 $V[G*H]$ 中也可由 $j\restriction N$可定义，因此相对于良序 $\leq^*$ 为 σ 中的集合编码的那些序数所成的集合 Z 属于 V。设 $G_{\leq^*}$ 是与 $G^{\sigma}_{\tilde{T}}$以相同方式进行的博弈，区别仅在于玩家 II 下出 Z 中为 σ 里某个测度编码的元素，而不是该测度本身。于是 $G_{\leq^*}$ 同时属于 V 和 $HOD^{M[G*H]}_{M\cup\mathbb{R}^*_{G*H}}$。 $G_{\leq^*}$是一个闭博弈，因此玩家 II 在 $HOD^{M[G*H]}_{M\cup\mathbb{R}^*_{G*H}}$ 中对 $G_{\leq^*}$ 拥有获胜策略，当且仅当玩家 II 在 V中对 $G_{\leq^*}$ 拥有获胜策略。显然，在 $HOD^{M[G*H]}_{M\cup\mathbb{R}^*_{G*H}}$ 中进行 $G_{\leq^*}$ 与进行 $G^{\sigma}_{\tilde{T}}$是等价的，因此只需证明玩家 II 在 V中对 $G_{\leq^*}$ 拥有获胜策略。

我们按如下方式定义游戏 $G_{\leq^*}$ 中玩家 II 的获胜策略 $\tau \in V$。设 $\langle (n_j、\ \alpha_j、\ h_j、\ \zeta_j) : j \leq i\rangle$ 是 $G_{\leq^*}$的一个部分对局，其中 ζ_j 编码了某个 $\mu_j \in \sigma$。对于 $A \in P(\delta)^D$，令 $A \in \bar{\mu}_{i+1}$ 当且仅当 $\langle \alpha_0、\ .....、\ \alpha_i\rangle \in j(A)$。令 $\mu_{i+1} = j(\bar{\mu}_{i+1})$。

子断言 3.4。 $\bar{\mu}_{i+1} \in (meas^{\mathbf{\Gamma}}(\delta^{<\omega}))^D$ （因此 $\mu_{i+1} \in \sigma$）。

证明。显然，$\bar{\mu}_{i+1}$ 是可数完备的——我们需要证明的是 $\bar{\mu}_{i+1} \in D$。由于 κ 是正则的，$\mathbb{R}^{V[G]} = \mathbb{R}^*_G$。于是 $\mathbf{\Gamma}$ 也是 $V[G]$ 的一个归纳型点类，并且$V[G] \models \mathbf{\Delta}_{\mathbf{\Gamma}}$ 是可决定的。然后根据 [Wil12] 的引理 3.5.4（应用于 $V[G]$），$\bar{\mu}_{i+1}$的编码集属于$\mathbf{Env(\Gamma)}^{V[G]}$。但是$\mathbf{Env(\Gamma)}^{V[G]} = \mathbf{Env(\Gamma)}^D$，[12]因此 $\bar{\mu}_{i+1} \in D$。 □

子断言 3.5。 $proj_{i+1,\ i}(\mu_{i+1}) = \mu_i$

证明。只需证明 $proj_{i+1,\ i}(\bar{\mu}_{i+1}) = \bar{\mu}_i$。但是[13]

$$\begin{aligned} A \in \bar{\mu}_i &\implies \langle \alpha_0, ..., \alpha_{i-1}\rangle \in j(A) \\ &\implies \langle \alpha_0, ..., \alpha_i\rangle \in ext_{i,i+1}(j(A)) \\ &\implies \langle \alpha_0, ..., \alpha_i\rangle \in j(ext_{i,i+1}(A)) \\ &\implies ext_{i,i+1}(A) \in \bar{\mu}_{i+1}. \end{aligned}$$

□

˜**子断言 3.6**。 μ_{i+1} 集中于 $T_{(n_0,...,n_i)}$。

[12]由 [Wil12], 中的命题3.2.5可知，$\mathbf{Env(\Gamma)}$中的任意集合都可由一个通用 $\mathbf{\Gamma}$-集和 $\mathbb{R}^*_G$中的一个实数序数可定义，因此$\mathbf{Env(\Gamma)} \subseteq V(\mathbb{R}^*_G)$。根据包络的定义，任意两个具有相同实数和序数、且都包含 $\mathbf{\Gamma}$ 的传递模型，对于$\mathbf{Env(\Gamma)}$都会有相同的看法。由此立即得到$\mathbf{Env(\Gamma)}^D = \mathbf{Env(\Gamma)}^{N[G]}$。要得到$\mathbf{Env(\Gamma)}^{N[G]} = \mathbf{Env(\Gamma)}^{V[G]}$，我们利用了反证假设 $\Theta^{D(V,\kappa)} < \kappa^+$。由于我们选取了 N 使得 $\Theta^{D(V,\kappa)} \subset N$，$\mathbf{Env(\Gamma)}^{N[G]}$ 是$\mathbf{Env(\Gamma)}^{V[G]}$ 的一个Wadge初始段，且具有相同的Wadge 秩，因此二者相等。[13]关于 $proj$ 和 ext的定义，见 [Wil12]中的定义3.5.6。

˜证明。我们必须证明 $\{(\xi_0, ..., \xi_i) : ((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in T\} \in \mu_{i+1}$。但是 $\{(\xi_0, ..., \xi_i) : \tilde{}((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in T\} = j(\{(\xi_0, ..., \xi_i) : ((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in T\})$。因此，只需证明 $\{(\xi_0, ..., \xi_i) : ((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in T\} \in \bar{\mu}_{i+1}$，也就是 $(\alpha_0, ..., \alpha_i) \in j(\{(\xi_0, ..., \xi_i) : ((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in T\})$。但是 $j(\{(\xi_0, ..., \xi_i) : ((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in_{\sim} \sim T\}) = \{(\xi_0, ..., \xi_i) : ((n_0, ..., n_i), (\xi_0, ..., \xi_i)) \in T\}$，并且$(\alpha_0, ..., \alpha_i) \in T_{(n_0,...,n_i)}$，由 $G_{\leq^*}$的规则可知。 □

令 $\tau(\langle(n_j, \alpha_j, h_j, \zeta_j) : j \leq i\rangle) = \zeta_{i+1}$，其中 ζ_{i+1}是相对于 $\leq^*$编码 μ_{i+1}的唯一序数。子断言 3.4-3.6 表明，τ 在 $G_{\leq^*}$中为玩家 II 下出了有效的棋步。如果双方都遵守 $G_{\leq^*}$ 的规则，那么玩家 I 获胜。因此，为了证明 τ 是一个获胜策略，我们假设 $\langle n_i, \alpha_i, h_i, \zeta_i : i \in \omega\rangle$ 是 $G_{\leq^*}$ 的一局，其中玩家 II 按照 τ 行棋，而玩家 I 遵循 $G_{\leq^*}$ 的规则行棋，并由此导出矛盾。

根据玩家 I 的规则，$j_{\mu_i,\mu_{i+1}}(h_i) > h_{i+1}$。由 M的可数闭包，$\langle\zeta_i : i < \omega\rangle \in M$，因此 $\vec{\mu} = \langle\mu_i : i \in \omega\rangle \in M[G * H]$。同样，由 M的可数闭包，$\langle h_i : i \in \omega\rangle \in M$。于是 $\langle h_i : i \in \omega\rangle$ 证明 $\vec{\mu}$在 $M[G * H]$中是非良基的。

断言 3.7。 $\bar{\mu} = \langle\bar{\mu}_i : i \in \omega\rangle$ 在 $N[G]$ 中是非良基的。

证明。</style}若 $\bar{\mu} \in N[G]$，则 $j(\bar{\mu}) = \vec{\mu}$（因为 $j(\bar{\mu}_i) = \mu_i$ 对每个 i 都成立），由 j 的初等性即可推出该断言。因此，只需证明 $\bar{\mu} \in N[G]$。

由于 $j(\bar{\mu}_i) = \mu_i$，存在 $\zeta_i \in N$ 使得 $j(\zeta_i) = \zeta_i$，且 ζ_i 相对于 $j^{-1}(\leq^*)$ 编码 $\bar{\mu}_i$。但是 $\langle\zeta_i : i < \omega\rangle \in V$，所以 $\langle\bar{\zeta}_i : i < \omega\rangle \in V$，并且由 N 的可数闭包，$\langle\zeta_i : i < \omega\rangle \in N$。由此可得 $\bar{\mu} \in N[G]$。 □

另一方面，假设 $\langle X_i : i \in \omega\rangle \in N[G]$ 满足 $X_i \subseteq P(\delta^i)$ and$X_i \in \bar{\mu}_i$。为了证明 $\bar{\mu}$ 在 $N[G]$中是良基的，我们需要证明在 $N[G]$ 中存在 $f \in \delta^\omega$，使得对每个 $i \in \omega$，都有 $f \restriction i \in X_i$。再次利用初等性，只需证明在 $M[G * H]$ 中存在 $f \in j(\delta)^\omega$，使得对每个 $i \in \omega$，都有 $f \restriction i \in j(X_i)$。 $f(i) = \alpha_i$可行，因为 $\langle\alpha_i : i \in \omega\rangle \in M[G * H]$，这是由 M的可数闭包所致。但这样一来，$\bar{\mu}$ 在 $N[G]$中是良基的，矛盾。 □

由断言 3.3以及 [Wil12], 的引理 3.6.4，存在一棵树 $S \in HOD^{M[G*H]}_{M\cup\mathbb{R}^*_{G*H}}$，使得 $\rho[S] = \rho[\tilde{T}]^c$。于是，利用 j的初等性，$HOD^{N[G]}_{N\cup\mathbb{R}^*_G}$ 满足存在一棵树S，使得 $\rho[S] = \rho[T]^c$。于是存在 $\gamma < \kappa$，使得 $S \in V[N \restriction \gamma]$。但这样一来，在$D$中，$\rho[T]^c$ 是苏斯林的，矛盾。 □

推论 3.8 (Wilson). 如果 κ 是 *Woodin* 基数的极限，且 κ 是 $Col(\kappa, \kappa^+)$-不可摧毁的弱紧，则 $D(V, \kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$。

4 $AD_{\mathbb{R}}$ 来自 PFA

上一节中，我们看到，在 κ 上的充分大基数假设可以推出 $D(V, \kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$。这里我们提供了一些证据，表明假设 PFA 后，对 κ 作较弱的假设应当可以得到 $D(V, \kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$。我们不知道如何证明这些结果

，除非假设导出模型中成立某种形式的鼠捕获。具体来说，我们将假设导出模型中存在一个 hod 对 $(P,\ \Sigma)$，使得导出模型满足

1. $V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}))$ 以及

2. 超小型 Γ-Σ^*-鼠捕获在某个锥上成立（按照 [ST24], 的定义 5.25，其中 $\mathbf{\Gamma}$ 是导出模型中最大的苏斯林点类）。

注 4.1. 假设（1）和（2）可能是冗余的。假设某些小性假设成立（见 *[SS15]*），则（1）可由（2）推出。另一方面，注4.10 表明，如果我们在超强基数以下工作，那么在定理 4.2 的证明中，可以用再次应用（1）来代替使用（2）。

定理 4.2. 假设 κ 是 *Woodin* 基数的正则极限，并且存在一个 *hod* 对 (P,Σ)，属于 $D(V,\kappa)$，使得 $D(V,\kappa)$ 满足 $V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}^*))$，并且 “超小型 Γ-Σ^*- 鼠捕获在某个锥上成立 ”。那么 $cof(\Theta^{D(V,\kappa)}) \geq \kappa$。

注 4.3。注意，$V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}))$ 意味着任意实数集都是某个 $OD(\Sigma, x)$，其中$x \in \mathbb{R}$。特别地，我们的假设意味着 $D(V,\kappa) \not\models AD_{\mathbb{R}}$。如果 κ 是 *Woodin* 基数的正则极限且 $D(V,\kappa) \models AD_{\mathbb{R}}$，那么 $cof(\Theta^{D(V,\kappa)}) = \kappa$。

定理 4.2 的证明。设 $D = D(V,\kappa,G)$且 $\Theta = \Theta^D$。设 $\mathbb{R}^* = \mathbb{R}^D = \bigcup_{\zeta<\kappa} \mathbb{R}^{V[G\restriction\zeta]}$。假设定理不成立。因此，$D \not\models AD_{\mathbb{R}}$ 且 $cof(\Theta) < \kappa$。令 $\mathbf{\Gamma}$ 为 D 的最大苏斯林点类，并令 δ 为 D 的最大苏斯林基数。令 $T \in D$ 为一棵投影到通用 $\mathbf{\Gamma}$-集 U的树。令(P,Σ)为 D中的一个 hod 对，使得$D \models V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}))$。对于某个 $\zeta < \kappa$，$T, P, \Sigma \in V[G\restriction\zeta]$；不过，如有必要，通过压缩 ζ，我们可以假设 $T, P, \Sigma \in V$。考虑满足以下条件的 $X \prec V_{\kappa^{++}}$

1. $X \cap \kappa = \kappa_X \in On$,
2. $X^{<\kappa_X} \subset X$，3. X
在 Θ 中是共尾的，以及
4. $T \in X$。

称 $X \prec V_{\kappa^{++}}$ 是好的，如果它满足上述性质。令 $\pi_X\colon N_X \to X \prec V$为反坍缩嵌入。由于 κ 是正则的，π_X 可以延拓为一个映射$\pi_X\colon N_X[G\restriction\kappa_X] \to V_{\kappa^{++}}[G]$。令 $D_X = \pi_X^{-1}(D)$、$\Theta_X = \pi_X^{-1}(\Theta)$、$\mathbf{\Gamma}_X = \pi_X^{-1}(\mathbf{\Gamma})$、$T_X = \pi_X^{-1}(T)$ 以及 $\delta_X = \pi_X^{-1}(\delta)$。令 $\mathbb{R}_X = \pi_X^{-1}(\mathbb{R}^*) = \bigcup_{\zeta<\kappa_X} \mathbb{R}^{V[G\restriction\zeta]}$。注意 $D_X|\Theta \trianglelefteq (Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X))^{V[G]}$。

引理 4.4。$D_X|\Theta_X = (Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X))^{V[G]}$

证明。假设不然。设 M_X 为 $(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X))^{V[G]}$ 的最小初始段，使得 $\rho(M_X) = \mathbb{R}_X$ 且 $M_X \triangleright D_X|\Theta_X$。注意 $M_X \models AD^+$。设 E_X 为从 π_X 导出的长度为 Θ 的延伸器，并设 $M_X^* = Ult(M_X, E_X)$。

设 $\mathcal{H}_X = \mathcal{H}^{M_X}$。即，设 $Th \subset \Theta_X$ 为 M_X 的带有 $\Theta_X \cup \{P\}$ 中参数的 Σ_1-理论，则 $\mathcal{H}_X$ 是 M_X 中在 Th 上（相对于 Σ）的 S-构造。[14]由 [ST16]的定理 4.10， $\mathcal{H}_X$ 在 Θ_X 之上（在 $V[G]$ 中）是可数可迭代的。

令 $\mathcal{H}^*_X = Ult(\mathcal{H}_X, E_X)$。$\mathcal{H}^*_X$是良基的，因为 $H_X \in V$，所以 $\mathcal{H}^*_X$嵌入到$\pi_X(\mathcal{H}_X)$中。但 $On \cap \mathcal{H}^*_X = On \cap M^*_X$，因此这意味着 M^*_X是良基的。

命题 4.5。M^*_X 在 $V[G]$ 中是可数可迭代的（作为一个 Σ-鼠标）。

证明。令 $Y \prec V_{\kappa^{++}}$ 为良好的。选取 $Z \prec V_{\kappa^{++}}$，使得 $\{\mathcal{H}^*_X, \mathcal{H}^*_Y, P, \Sigma\} \subset Z$ 且 $|Z| < min(\kappa_X, \kappa_Y)$。令 $\pi_Z\colon N_Z \to Z$ 为反塌缩嵌入。令$\mathcal{H}^*_{X,\,Z} = \pi_Z^{-1}(\mathcal{H}^*_X)$，并令 $\mathcal{H}^*_{Y,\,Z} = \pi_Z^{-1}(\mathcal{H}^*_Y)$。

子断言 4.6。$H^*_{X,\,Z}$ 和$H^*_{Y,\,Z}$ 在 $\Theta_Z = \pi_Z^{-1}(\Theta)$ 之上是可数可迭代的（作为 $V[G]$ 中的 Σ- 鼠标）。

证明。我们证明关于 $\mathcal{H}^*_{X,Z}$ 的子断言。由于 $X^{<\kappa_X} \subset X$, E_X 是 $< \kappa_X$-完备的。因此，对于任意满足 $|U| < \kappa_X$ 的初等子结构 $U \prec \mathcal{H}^*_X = Ult(\mathcal{H}_X, E_X)$，若$f$：$N_U \to U \prec \mathcal{H}^*_X$ 是反塌缩嵌入，则存在 $\tau\colon N_U \to \mathcal{H}_X$，使得只要 $x \in N_U$ 满足 $f(x) \in range(\pi_{E_X})$，就有 $\pi_{E_X} \circ \tau(x) = f(x)$。[15]特别地，由于 $|Z| < \kappa_X$，存在 τ: $\mathcal{H}^*_{X,Z} \to \mathcal{H}_X$，使得 $\tau(\Theta_Z) = \Theta_X$。于是，由于 $\mathcal{H}_X$ 在 Θ_X 之上（在 $V[G]$ 中）是可数可迭代的，$\mathcal{H}^*_{X,Z}$ 在 Θ_Z 之上是可数可迭代的。 □

$\mathcal{H}^*_X|\Theta = \mathcal{H}^*_Y|\Theta$，因此 $\mathcal{H}^*_{X,\,Z}|\Theta_Z = \mathcal{H}^*_{Y,\,Z}|\Theta_Z$。根据子断言，要么 $\mathcal{H}^*_{X,\,Z} \trianglelefteq \mathcal{H}^*_{Y,\,Z}$，要么 $\mathcal{H}^*_{Y,\,Z} \trianglelefteq \mathcal{H}^*_{X,\,Z}$。由 π_Z 的初等性， $\mathcal{H}^*_X \trianglelefteq \mathcal{H}^*_Y$ 或 $\mathcal{H}^*_Y \trianglelefteq \mathcal{H}^*_X$。

令 Vop_ω 为 [Ste08] 第3节中描述的沃普恩卡代数版本。令 R 为 [Ste08] 第185页上定义的对象。注意， Vop_ω 和 R 属于 $\mathcal{H}^*_X \cap \mathcal{H}^*_Y$。令 F为同时在 $\mathcal{H}^*_X$ 和 $\mathcal{H}^*_Y$ 上泛型的 Vop_ω，且满足 $\dot{R}^F = \mathbb{R}^*$。[16]

假设对于某个 ξ，有 $\mathcal{H}^*_X = \mathcal{H}^*_Y|\xi$。根据 [ST16] 中的引理4.8， M^*_X 可由 F通过某个定义在 $\mathcal{H}^*_X[F]$ 上定义，而 $M^*_Y|\xi$则可由 F通过同一定义在 $\mathcal{H}^*_Y|\xi[F]$ 上定义。[17]因此， $M^*_X \trianglelefteq M^*_Y$。类似地，$\mathcal{H}^*_Y \trianglelefteq \mathcal{H}^*_X$蕴含 $M^*_Y \trianglelefteq M^*_X$。

我们已经证明了 $M^*_X \trianglelefteq M^*_Y$或 $M^*_Y \trianglelefteq M^*_X$。但是， M^*_X中没有任何延伸至 D的真初始段投影到 Θ（ M^*_Y的情形也类似），因此 $M^*_X = M^*_Y$。

假设 N是 M^*_X的一个可数胚（在 $V[G]$中）。选取 $Y \prec V_{\kappa^{++}}$，使得$X \in Y$，$X \subset Y$，且 Y是好的。我们还可以选择 Y，使得 N 在$N_Y[G \restriction \kappa_Y]$中是可数的。由于 $M^*_Y = M^*_X$， N是 M^*_Y的一个可数胚。因此，根据初等性以及 $\pi_Y(N) = N$，N是 M_Y的一个可数胚。 M_Y在 $V[G]$中是可数可迭代的，因此 N 也是。 □

断言4.7。设 $A \subset \mathbb{R}^*$ 在 M^*_X上可定义，且 $A \notin M^*_X$。则 $L(A, \mathbb{R}^*) \models AD^+$。

[14]具体定义见 [ST16]中的定义4.6。[15]这基本上是 [SZ10]中的引理8.12。[16] [Ste08] 中的引理3.4和3.5表明这样的 F 存在。[17]这些模型中 M^*_X和 $M^*_Y|\xi$的定义相同，这一点在引理4.8中并未明确说明，但从证明中可以清楚看出。

证明。 在 $V[G]$中进行。命题 4.5意味着 $M_X^* \triangleleft Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$。因此，只需证明：如果$A \in Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$, 那么 $L(A,\ \mathbb{R}^*) \models AD^+$。我们分两种情况讨论，尽管我们将证明第一种情况不可能发生。

情况 1：$\mathbf{Env(\Gamma)} \subsetneq Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*) \cap P(\mathbb{R}^*)$。

令 β 为极小的，使得存在 $A \subset \mathbb{R}^*$，其可定义于 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta$ 上，从而 $A \notin \mathbf{Env(\Gamma)}$。根据 [Wil12] 的定理 3.2.4，$Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta \models AD$。令 β_0 满足：$[\delta, \beta_0]$ 是 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$ 中的一个 Σ_1-间隙。

如果 $\beta_0 < \beta$，那么 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta_0+1 \models AD$，且 β_0+1 开始一个 Σ_1-间隙。随后，[ST16] 的第 5.1 节表明，$Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta_0+1 \models r\Sigma_1^{Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*|\beta_0+1)}$ 是经缩放的。[18] 特别地，存在一个在 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$ 上可定义的 U^c 的尺度 $|\beta_0+1$。

如果 $\beta_0 = \beta$，那么 $[\delta, \beta]$ 是一个可容许的 Σ_1-间隙，且 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta \models AD$。令 n 为满足 $\rho^{Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*|\beta)} = \omega$ 的极小元素。若 $[\delta, \beta]$ 是弱间隙，则根据 [ST16] 的定理 5.26，$Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta \models r\Sigma_{n+1}^{Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*|\beta)}$ 是有尺度的。特别地，U^c 的一个尺度可在 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta$ 上定义。$[\delta, \beta]$ 不可能是强间隙，因为这将推出 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta+1 \cap P(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbf{Env(\Gamma)}$，这与我们对 β 的定义相矛盾。

同样，如果 $\beta_0 > \beta$，那么 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta_0 \cap P(\mathbb{R}^*) \subseteq \mathbf{Env(\Gamma)}$，这与我们对 β 的选择相矛盾。

我们已经证明，存在一个尺度，它在 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$ 的某个初始段上可定义 U^c。特别地，存在一棵树 $S \in V(\mathbb{R}^*)$，使得 $\rho[S] = U^c$。由于 S由一个序数集编码，且 $S \in V(\mathbb{R}^*)$，因此存在 $\gamma < \kappa$，使得 $S \in V[G \restriction \gamma]$。于是，$T$和 S证明了 $U \in Hom^*$。这意味着 U 在 D中是苏斯林-余苏斯林的，这就导致矛盾。

情形 2：$\mathbf{环境(\Gamma)} = Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*) \cap P(\mathbb{R}^*)$。

$\mathbf{Env(\Gamma)}$ 中的每个集合都是决定的（参见 [Wil12] 的定理 3.2.4）。但是，$L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)) \cap P(\mathbb{R}^*) = Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*) \cap P(\mathbb{R}^*)$，因此 $L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)) \models AD$。而且，$L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*))$ 满足“Σ_1-反射到苏斯林-余苏斯林”。[21] 但是，AD^+ 等价于 $ZF + AD + V = L(P(\mathbb{R})) +$“$\Sigma_1$-反射到苏斯林-余苏斯林”，因此 $L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)) \models AD^+$。包含其所有实数的 AD^+ 模型的任何内模型也满足 AD^+，因此，对于每个 $A \in P(\mathbb{R}^*) \cap Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$，都有 $L(A, \mathbb{R}^*) \models AD^+$。

□

令 $A \subset \mathbb{R}^*$如上面的断言所述。注意到 $M_X^* \in V(\mathbb{R}^*)$，因为 $M_X^* \triangleleft Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)$。因此，该断言意味着 $A \in D$。但是 $A \notin M_X^*$且 $M_X^* \supseteq D \cap P(\mathbb{R}^*)$，矛盾。

□

[18]这是根据 [ST16] 的定理 5.1，若 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta_0+1$ 是被动的，以及根据定理 5.9，在 $Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|\beta_0+1$ 为“P-主动”的情形下。[ST16] 忽略了提及间隙起点为“E-主动”的情形，但这可由定理 5.1 的证明得出。[19]显然定理 5.26 的假设得到满足。注意在此情形下 β 结束了 Σ_1-间隙$[\delta, \beta]$ 以及 $\Sigma \in Lp^\Sigma|\delta$，因为 Σ 是苏斯林-余苏斯林的。[20]参见 [Wil12]第 46 页。该页上的（$2'$）给出了 J-层级某一层的结果，但该证明对 Lp^Σ 同样适用。[21]因为假设 $\phi(u, v)$是一个 Σ_1 公式，且 $L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}))$ $\models \exists C \subseteq P(\mathbb{R}^*)\phi(C, \mathbb{R}^*)$。则存在$C \in Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)|(\delta_1^2)^{Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)}$，使得 $L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*)) \models \psi(C, \mathbb{R}^*)$。这样的 C 是苏斯林-余苏斯林的（再次根据 [ST16]的尺度分析）。

令 $\sigma = \pi''_X((meas^{\mathbf{\Gamma}_X}(\delta_X^{<\omega}))^{D_X}) \subset (meas^{\mathbf{\Gamma}}(\delta^{<\omega}))^D$。注意 σ 在 $V[G]$中是可数的。于是我们可以考虑游戏 G_T^σ。

断言 4.8. 玩家 *II* 在 $HOD_{V\cup\mathbb{R}^*}^{V[G]}$ 中有一个针对游戏 G_T^σ 的获胜策略。

证明. 我们按照定理 3.1 的断言 3.3 的证明来论证。设 $\langle (n_j, \alpha_j, h_j, \mu_j) : j \leq i\rangle$ 是 G_T^σ 的一个部分对局。对于 $A \in P(\delta_X)^D$，令 $A \in \bar{\mu}_{i+1}$ 当且仅当 $\langle \alpha_0, ..., \alpha_i\rangle \in \pi_X(A)$。令 $\mu_{i+1} = \pi_X(\bar{\mu}_{i+1})$。

子断言 4.9. $\bar{\mu}_{i+1} \in (meas^{\mathbf{\Gamma_X}}(\delta_X^{<\omega}))^{D_X}$ （因此 $\mu_{i+1} \in \sigma$）。

证明. 为简化记号，我们证明 $\bar{\mu}_1 \in (meas^{\mathbf{\Gamma_X}}(\delta_X^{<\omega}))^{D_X}$ 这一情形。显然，$\bar{\mu}_1$是可数完备的，因此只需证明 $\bar{\mu}_1 \in D_X$。

令 $f\colon\ \mathbb{R}_X \to \delta_X$ 是在 D_X 中可定义的、从 Σ_X 和某个 $x \in \mathbb{R}_X$ 到[22]的满射。注意，$\pi_X(f)\colon\ \mathbb{R}^* \to \delta$ 随即是在 D 中从 Σ 和 x 可定义的。对于 $A \in P(\delta_X)^{D_X}$，令 G_A^f 为 [Kan09] 的定理 28.15 证明中使用的博弈（在 D_X 中）。类似地，对于 $B \in P(\delta)^D$，令 $G^{\pi_X(f)}{}_B$ 为在 D 中进行的对应博弈，该博弈是相对于满射 $\pi_X(f)\colon\ \mathbb{R}^* \to \delta$ 定义的。

如果 $y \in \mathbb{R}_X$ 是 G_A^f 中玩家 I（玩家 II）的获胜策略，那么根据 π_X 的初等性，y 也是 $G^{\pi_X(f)}{}_{\pi_X(A)}$ 中玩家 I（玩家 II）的获胜策略。而且，$\pi_X(A)$ 是 D 中 $P(\delta)$ 的唯一子集，使得 y 是 $G^{\pi_X(f)}{}_{\pi_X(A)}$ 中的获胜策略。[23] 因此，$\pi_X(A) = B$ 当且仅当存在 $y \in \mathbb{R}_X$，使得 y 是 G_A^f 中 A 的获胜策略，同时也是 $G^{\pi_X(f)}{}_B$ 中 B 的获胜策略。因此，$\pi_X \restriction P(\delta_X)^{D_X}$ 在 D 中从 $\{\mathbb{R}_X, \pi_X(f)\ f\}$ 序数可定义。由于 $D \models V = L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*))$，$f \in (Lp^\Sigma(\mathbb{R}_X)))^D$，所以 f 在 D 中可由 $\{\mathbb{R}_X, \Sigma\} \cup \mathbb{R}_X$ 中的参数序数可定义。因此，$\pi_X \restriction P(\delta_X)^{D_X}$，故 $\bar{\mu}_1$ 在 D 中可由 $\{\mathbb{R}_X, \Sigma\} \cup \mathbb{R}_X$ 中的参数序数可定义。接着由 [ST16] 的引理 5.24，$\bar{\mu}_1 \in C_\Gamma(\mathbb{R}_X)$。然后，超小型 Γ-Σ^* 鼠捕获推出 $\bar{\mu}_1 \in Lp^\Sigma(\mathbb{R}_X)$。再由引理 4.4，$\bar{\mu}_1 \in D_X$。 □

该断言证明的其余部分与断言 3.3 的证明相同。 □

该断言与定理 3.1 的证明一样，导出矛盾。 □

注 *4.10.* 在超强基数以下，定理 *4.2* 中的假设 *(2)* 并非必需。事实上，令 U 为图灵度上的马丁测度（在 D 中）。令 T^* 为 $Ult(D, U)$ 中由 $[x \mapsto T]_U$ 表示的树。于是 $D = L(T^*, \mathbb{R}^*)$。[24] 由假设 *(1)*，$L(T^*, \mathbb{R}^*) \models V = L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}^*))$。因此，对测度为 U 的一类 $x \in \mathbb{R}^*$，有 $L(T, \sigma_x) \models V = L(Lp^\Sigma(\sigma_x))$（其中 $\sigma_x = \{y \in \mathbb{R}^* : y <_T x\}$）。固定 $y_0 \in \mathbb{R}^*$，使得 $x \geq_T y_0 \implies L(T, \sigma_x) \models V = L(Lp^\Sigma(\sigma_x))$。

设 X 与定理 4.2 的证明中相同。我们可以假设 $y_0 \in \mathbb{R}_X$。设 $x \in \mathbb{R}^*$是关于 D_X 的萨克斯泛型。[25] 那么 $\mathbb{R}_X = \sigma_x$ 且 $L(T, \mathbb{R}_X) \models V = L(Lp^\Sigma(\mathbb{R}_X))$。它

[22] D 中的任意集合都可由 Σ 和某些 $x \in \mathbb{R}^*$序数定义。由初等性可知，D_X 中的任意集合都可在D_X 中由 Σ_X 和某些 $x \in \mathbb{R}_X$序数定义。将定义中的序数参数取到最少，我们就能找到这样一个 f，它可在 D_X 中由 Σ_X 和 x定义。[23]另见 [Kan09]的定理 28.15 的证明。[24]$\supseteq$ 显然。$\subseteq$ 由 [Ste], 的定理 2.3 的断言 4，以及 $D \models V = L(P(\mathbb{R}))$得出。$\mathbb{R}^*$ 中存在这样一个 x，因为 D_X 在 $V[G]$中是可数的。

可得 $L(T, \mathbb{R}_X) \cap P(\mathbb{R}_X) \subseteq (Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X))^D$。[26] $C_\Gamma(\mathbb{R}_X) = L(T, \mathbb{R}_X)$ 由 *[Ste16],* 的定理 *3.4* 可知，因此 $C_\Gamma(\mathbb{R}_X) \subseteq Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X)$。这就是我们在子主张4.9中对假设 *(2)* 的运用。

定理 4.11。 假设 $PFA + \kappa$ 是 *Woodin* 基数的正则极限。那么，对于 $D(V, \kappa)$中的任意 *hod* 对(P, Σ)， $D(V, \kappa)$ 不满足 $V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}^*))$ + "在某个锥上成立超小 Γ-Σ^*-鼠捕获"。

注记 4.12。 如果 $D(V, \kappa)$ 足够"小"且不满足 $AD_{\mathbb{R}}$，那么$D(V, \kappa)$ 满足 $V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}^*))$ + "在某个锥上成立超小 Γ-Σ^*-鼠捕获"。因此，该定理意味着导出模型要么是大的，要么满足 $AD_{\mathbb{R}}$。

定理 4.11 的证明。 反设不然。令 $D = D(V, \kappa)$ 和 $\Theta = \Theta^D$。对于某个 hod 对 $(P, \Sigma) \in D$，我们有 $D = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}^*))$。与 [LT25], 中一样，我们可以选取 (P, Σ)，使得 $P \in V$，并且存在一个关于 Σ 的对称项，它属于 V。

根据 [TZ], 的主要结果，存在一个闭无界集 $S \subseteq \Theta$ 和 $\vec{C} = \langle C_\alpha : \alpha \in S \rangle$，使得

1. $C_\alpha \subseteq S$ 和 C_α 是包含于 α 中的极限序数的闭子集。
2. $cof(\alpha) > \omega \implies C_\alpha$ 在 α 中无界。
3. $\beta \in C_\alpha \implies C_\beta = C_\alpha \cap \beta$。

[TZ] 的证明还给出了更多结论。首先， $\vec{C}$ 在 D 中相对于 Σ 是序数可定义的，因此 $\vec{C} \in V$。其次，该构造为每个 $\alpha \in C$ 指定了某个 $\gamma_\alpha < \Theta$，使得对于任意 $\beta \in C_\alpha$，都存在一个（精细结构）嵌入 $\sigma_{\beta,\,\alpha} : D|\gamma_\beta \to D|\gamma_\alpha$。如果另外还有 $\eta \in C_\beta$，那么 $\sigma_{\eta,\,\alpha} = \sigma_{\beta,\,\alpha} \circ \sigma_{\eta,\,\beta}$。

由于我们假设 $D \models V = L(Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}))$， [LT25] 给出 $\Theta < \kappa^+$。接着由定理 4.2， $cof(\Theta) = \kappa$。令 $f : \kappa \to S$ 在 Θ中严格递增、连续且共尾。对于极限序数 $\alpha < \kappa$，令 $C'_\alpha = f^{-1}(C_{f(\alpha)})$。考虑具有不可数共尾性（在 V中）的 $\alpha < \kappa$。由于 f连续， $f''\alpha$是 $f(\alpha)$中的闭无界集，因此 $f''\alpha \cap C_{f(\alpha)}$在 $f(\alpha)$中无界。于是 C'_α是 α中的闭无界集。对于满足 $cof(\alpha) = \omega$的 $\alpha < \kappa$，若 C'_α在 α中不共尾，则将 C'_α 替换为某个在 α中共尾且序型为 ω 的序列。现在，对于极限 $\alpha < \kappa$，我们有C'_α 是 α 中的闭无界集。

假设 β 是 C'_α的极限点。我们必定处于 $C'_\alpha = f^{-1}(C_{f(\alpha)})$这种情形。于是$f(\beta)$是 $C_{f(\alpha)} \cap f''\beta$ 的极限点，因此 $C_{f(\beta)} = C_{f(\alpha)} \cap f(\beta)$。接着 $f''\beta \cap C_{f(\beta)} = f''\beta \cap C_{f(\alpha)}$在 $f(\beta)$中共尾，因此 $C'_\beta = f^{-1}(C_{f(\beta)})$。所以$C'_\beta = C'_\alpha \cap \beta$。

根据 [Tod84], 的定理1，存在一个闭无界集 $C' \subset \kappa$，使得若 α 是C'的极限点，则 $C' \cap \alpha = C'_\alpha$。令 $C = f''[C']$。显然， C是 Θ中的闭无界集，并且 $C \subseteq S$。假设α 和 β 是 C的极限点，且 $\beta < \alpha$。存在 β'， $\alpha' < \kappa$ 是 C' 的极限点，使得 $\beta = f(\beta')$ 和 $\alpha = f(\alpha')$。于是$C'_\alpha \cap \beta = (C' \cap \alpha) \cap \beta = C' \cap \beta = C'_{\beta}$。因此$C_\alpha \supseteq f''C'_{\alpha'} \supseteq f''C'_{\beta'}$，所以 C_α在 β中共尾。因此 β是 C_α的极限点。特别地， $\beta \in C_\alpha$。

[26]为什么？我们需要证明，如果 $N \triangleleft (Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X))^{L(T, \mathbb{R}_X)}$，那么 N在 D中是可数可迭代的，从而$N \triangleleft (Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}_X))^D$。但由超幂映射 j_U的初等性可知： $L(T, \mathbb{R}_X) \to L(T^*, \mathbb{R}^*)$， $j_U(N)$在 $D = L(T^*, \mathbb{R}^*)$中是可数可迭代的。由于 N嵌入到 $j_U(N)$中， N在D中也可数可迭代。

我们构造了一个闭无界集 $C \subset \Theta$，使得对于 C的 $\eta < \beta < \alpha$ 个极限点，$\sigma_{\eta,\ \alpha} = \sigma_{\beta,\ \alpha} \circ \sigma_{\eta,\ \beta}$。令 N 为嵌入系统$\langle \sigma_{\beta,\ \alpha}$ 的直接极限：$\beta < C\rangle$的极限点。对于 C的一个极限点 β，令 $\sigma_\beta : D|\gamma_\beta \to N$ 为直接极限嵌入。 N 是 $\mathbb{R}^*$ 上的一个 Σ-预鼠，并投影到 $\mathbb{R}^*$。由于任意可数的 $R \prec N$ 都包含于足够大的 β 的 $range(\sigma_\beta)$ 中，且 $D|\gamma_\beta$ 在 $V[G]$中是可数可迭代的，因此[27] N 在 $V[G]$中是可数可迭代的。

我们已经证明 $N \triangleleft (Lp^{\Sigma}(\mathbb{R}^*))^{V[G]}$。由于 $N \cap On > \Theta$， $N \notin D$。这恰好如断言4.7的证明中那样给出一个矛盾。 □

参考文献

[Kan09] Akihiro Kanamori。《更高的无穷》。Springer 数学专著。Springer Berlin，2009 年。[LT25] Derek Levinson 和 Nam Trang。《PFA中的导出模型》。2025 年。URL： https://arxiv.org/abs/2501.05954。[SS15] Grigor Sargsyan 和 John Steel。“实数集的鼠集猜想”。载于：《符号逻辑杂志》80.2（2015），第 671–683 页。[ST16] Farmer Schlutzenberg 和 Nam Trang。“ $\mathbb{R}$ 上的混合鼠的尺度”。2016 年。URL: https://sites.math.unt.edu/~ntrang/scales_frame.pdf。[ST24] Grigor Sargsyan 和 Nam Trang。《最大Suslin公理》。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2024 年。[Ste] John Steel。“ $AD_{\mathbb{R}}$的一个最优一致性强度下界”。[Ste05] John R Steel。“PFA 蕴含 $AD^{L(\mathbb{R})}$”。载于：《符号逻辑杂志》70.4（2005），第 1255–1296 页。[Ste07] John R. Steel。“无需平稳塔的导出模型定理证明”。载于：《逻辑进展》。Su Gao、Steve Jackson 和 Yi Zhang 编。《当代数学》。美国数学会，2007 年，第 1–8 页。[Ste08] John R. Steel。“K(ℝ)中的尺度”。载于：《博弈、标度与Suslin基数：Cabal研讨班，第一卷》。Alexander S. Kechris、Benedikt L¨owe 和 John R. Steel 编。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2008 年，第 176–208 页。[Ste16] John R. Steel。“伍丁关于鼠集的一个定理”。载于：《序数可定义性与递归理论：Cabal研讨班，第三卷》。Alexander S. Kechris、Benedikt L¨owe 和 John R. Steel 编。第 3 卷。逻辑讲义。剑桥大学出版社，2016 年，第 243–256 页。DOI：10。1017/CBO9781139519694.009。

[27]这是因为 σ_β 足够初等，而这直接由嵌入$\sigma_{\beta,\ \alpha}$ 足够初等得出，这一点在 [TZ]中构造相干序列时也已表明。

[SZ10] Ralf Schindler 和 Martin Zeman。“精细结构”。载于：集合论手册。Matthew Foreman 和 Akihiro Kanamori 编。多德雷赫特：Springe r
荷兰，2010年，第605–656页。[Tod84] Stevo Todorcevic。《关于适当强迫公理的注记》。载于：公理化集合论。James Baumgartner 和 Donald Martin 编。第31卷。《当代数学》。美国数学会，1984年。[TZ] Nam Trang 和 Martin Zeman。《关于 $Lp^{G\Sigma}(\mathbb{R})$中的一个相干序列》。《 URL》：https://math.unt.edu/~ntrang/CoherentKR.pdf。[Via08] Matteo Viale。《一族覆盖性质》。载于：数学研究快报 15.2（2008年），第221–238页。[Wil12] Trevor Wilson。《对描述性内模型理论的贡献》。博士论文。加州大学伯克利分校，2012年。[Woo10] W Hugh Woodin。决定性公理、强迫公理与非平稳理想。第1卷。Walter de Gruyter，2010年。