arXiv:2602.16904v1 [math.AG] 18 Feb 2026

平移曲面与迭代结式

MATTHEW WEAVER

Abstract. 平移曲面是一种张量积曲面，它由两条空间曲线构造而成，即将一条曲线沿另一条曲线平移。这类曲面在几何建模中十分常见，而且由于它们以参数形式描述，因此求出此类曲面的隐式方程是很有必要的。Goldman 和 Wang 在 [11], 中对这类曲面进行了深入研究，确定了一组特定的合冲，并证明可通过非齐次结式得到隐式方程。由于 [11]方法在参数化存在性质不良的基点时可能失效，本文采用迭代齐次结式提出了一种替代方法。本文给出的算法总体上涉及较小的西尔维斯特矩阵，因而有望加快计算速度；此外，在许多[11]方法无法适用的情况下，该算法仍然有效。

1. 引言

代数几何中的一个经典问题，是求出由有理映射的像所定义的代数簇的隐式方程。近年来，这一所谓的隐式化问题因其在低维情形下的计算机辅助设计（CAD）应用而备受关注，此时此类映射定义一条曲线或一个曲面。本文研究通过将一条有理空间曲线沿另一条同类曲线平移所定义的平移曲面的隐式化。由于这类曲面是几何建模中使用的一些基本建模曲面（例如见 [15, 16, 19]），人们尤其关注能够高效且有效地计算这些曲面隐式方程的方法。

平移曲面在几何建模中的一项显著特性是易于控制。由于此类曲面由有理空间曲线 $\mathbf{f}^*(s)$ 和 $\mathbf{g}^*(t)$ 构造而成，因此可以用定义这些曲线的有理函数来表示其参数化。尽管文献中研究了平移曲面的多种变体，但 [16] 给出了一种自然定义：$\mathbf{h}^*(s,t) = \mathbf{f}^*(s)+\mathbf{g}^*(t)$ 2。按照这一表述，由 $\mathbf{h}^*(s,t)$ 参数化的曲面具有平移不变性，即将曲线 $\mathbf{f}^*(s)$ 和 $\mathbf{g}^*(t)$ 平移一个向量，曲面也会随之平移同一个向量。类似地，由 $\mathbf{h}^*(s,t)$ 参数化的曲面对多种刚体运动具有不变性，因此只需调整其生成曲线，就能操控曲面 $\mathbf{h}^*(s,t)$。

虽然这种设定适用于大多数应用，但为了运用交换代数和代数几何中的工具，通常考虑齐次参数化会更方便。记

$$\mathbf{f}^* = \left(\frac{f_1}{f_0}, \frac{f_2}{f_0}, \frac{f_3}{f_0}\right) \qquad \text{and} \qquad \mathbf{g}^* = \left(\frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_0}, \frac{g_3}{g_0}\right)$$

与之前一样，用来表示有理空间曲线，其中 $\mathbb{K}$ 是一个零特征代数闭域，f_0、f_1、f_2、$f_3 \in \mathbb{K}[s]$ 以及 g_0、g_1、g_2、$g_3 \in \mathbb{K}[t]$ 为多项式。经过齐次化，我们考虑由射影空间曲线 $\mathbf{f} : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 和 $\mathbf{g} : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 生成的曲面，它们分别由齐次多项式 f_0、f_1、f_2、$f_3 \in \mathbb{K}[s,u]$ 和 g_0、g_1、g_2、$g_3 \in \mathbb{K}[t,v]$ 定义。利用这些齐次化以及上文对 $\mathbf{h}^*(s,t)$ 的定义，我们得到由下式给出的张量积曲面参数化 $\mathbf{h} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$:

$$\mathbf{h} = (h_0, h_1, h_2, h_3) = (2f_0g_0, f_0g_1 + f_1g_0, f_0g_2 + f_2g_0, f_0g_3 + f_3g_0) \tag{1.1}$$

由 $R = \mathbb{K}[s,u,t,v]$中的双齐次多项式所定义。事实上，设bideg $s,u = (1,0)$以及bideg $t,v = (0,1)$，若deg $f_i = m$ 且 deg $g_i = n$，则$\mathbf{h}$ 是一个以双次数(m,n)参数化的张量积曲面。

如前所述，双齐次参数化$\mathbf{h}$ 的像 $X_{\mathbf{h}}$ $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 称为 $\mathbb{P}^3$中的张量积曲面。这些曲面已得到深入研究，人们也采用了各种技术来求出它们的隐式方程（例如参见 [1, 3, 8, 20, 24, 25, 27]）。近年来，最有效的隐式化工具源自对*Rees*代数 和合冲的研究。特别是，将这些技术与沿参数化的移动曲线 和移动曲面 这一概念联系起来

已成为解决这一问题的一种有效途径 [5, 6, 21, 22, 23]。这类参数化 **h**的难点在于，其对合模通常有许多生成元，从而增加了复杂性。与射影曲线的情形不同，**syz(h)** 通常远非自由模，因此人们往往致力于找出一组特殊的对合，使其足以完成所需的计算。

对于上述平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$，Goldman 和 Wang 在 [11] 中对 **h** 的合冲进行了广泛研究。他们的研究揭示了 **h**的合冲与其生成曲线 **f** 和 **g**的合冲之间的紧密联系；由于 **syz(f)** 和 **syz(g)** 是自由的，因此可以直接得到它们。特别是，他们确定了一组特殊的合冲，并据此利用三个跟随 **h**的运动平面的结式计算隐式方程。然而，研究表明，若存在一个性质特别糟糕的基点，该方法便会失效；也就是说，在 $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中，参数化 **h** 未定义的点。此外，对于双次数为 (m, n) 的曲面，[11] 的非齐次结式是一个$2mn \times 2mn$ 矩阵的行列式；如果 **f** 和 **g** 的参数化次数较高，该矩阵可能会很大。

本文旨在为 [11]，中提出的方法提供一种替代方案，以求得平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程。我们提出一种方法：在齐次情形下迭代使用经典 Sylvester 结式，并在每一步分析其因子。我们注意到，类似的过程此前已有应用 [2, 4, 17, 18]，；不过，这一策略很适用于此处的双分次设定，并且每一步都会自然地消去一组不定元。尽管该方法也有自身的局限，但与 [11]，中的矩阵相比，涉及的矩阵小得多，因此在许多情况下可以更快地计算。此外，我们还表明，根据任一生成曲线嵌入 $\mathbb{P}^3$ 的方式，这里给出的算法还可以进一步简化。

我们简要介绍本文的组织结构。在第 2 节中，我们回顾 [11]中有关平移曲面、按照其参数化构造的动曲面以及基点刻画的必要背景知识。在第 3 节中，我们介绍一种通过迭代经典 Sylvester 结式来求平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 隐式方程的方法。我们给出该算法能够得到隐式方程的判据，并讨论该判据成立的充分条件。最后，在第4节中，我们考察一些自然的几何情形，在这些情形下，无论哪条生成曲线位于 $\mathbb{P}^3$之中，该判据都会自动成立。特别地，我们证明，如果**f** 或**g** 是 $\mathbb{P}^3$中的平面曲线，则这一过程可以简化；并且当 [12] 是 $X_{\mathbf{h}}$ 一个直纹平移曲面时，我们的方法与 [12] 中提出的方法一致。

2. Properties of translational surfaces

我们从代数几何的角度简要回顾平移曲面的若干方面，并沿用 [11]中的所有约定和记号。我们回顾关于**h**的合冲的一些结果和观察，以及按照这一参数化构造的相关移动平面。此外，我们还讨论并描述**h**的基点。

2.1. 平移曲面与合冲。 记 $\mathbb{K}$ 为一个零特征代数闭域。与前文一样，平移曲面是由两条空间曲线构造而成的有理张量积曲面 **h**： $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$

$$\mathbf{f} : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3 \qquad \text{and} \qquad \mathbf{g} : \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3.$$

假设这些映射由齐次多项式 f_0、f_1、f_2、f_3定义，它们在 $\mathbb{K}[s, u]$ 中的次数为 m；而齐次 g_0、g_1、g_2、g_3在 $\mathbb{K}[t, v]$ 中的次数为 n。并且不妨设 **gcd(f)** $= 1$且 **gcd(g)** $= 1$。由 **f**和 **g**生成的平移曲面 **h**：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$由多项式 h_0、h_1、h_2、$h_3 \in R = \mathbb{K}[s, u, t, v]$给出，其中

$$h_i = f_0 g_i + f_i g_0,$$

因此我们常写作 $\mathbf{h} = f_0\mathbf{g} + g_0\mathbf{f}$。这里 h_0、h_1、h_2、h_3是双齐次 多项式，其中 R上的双分次由双次数 bideg s、$u = (1、0)$和双次数 bideg t、$v = (0、1)$给出。因此，令 deg $f_i = m$且 deg $g_i = n$，我们称 **h** 的像为一个以双次数 $(m、n)$ 参数化的平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$。

如前所述，我们旨在推导关于**h** 及其合冲的同调信息。与其分析完整的合冲模 **syz(h)**，我们更希望描述一个较小的合冲子集，以满足我们的需求。如 [11, 12], 所述，我们可以从生成曲线**f** 和**g**的合冲中推导出此类信息。

考虑矩阵

$$M_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} 2g_0 & g_1 & g_2 & g_3 \\ 0 & g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad N_{\mathbf{g}} = \begin{bmatrix} \frac{g_0}{2} & -\frac{g_1}{2} & -\frac{g_2}{2} & -\frac{g_3}{2} \\ 0 & g_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_0 \end{bmatrix} \tag{2.1}$$

并注意到 $\mathbf{h} = \mathbf{f}M_{\mathbf{g}}$。此外，由于 $M_{\mathbf{g}}N_{\mathbf{g}} = N_{\mathbf{g}}M_{\mathbf{g}} = g_0^2\mathbf{I}$，其中 $\mathbf{I}$ 是 4×4 单位矩阵，我们得到生成曲线 $\mathbf{f}$ 的合冲与$\mathbf{h}$的合冲之间的以下关系。

引理 2.1 ([11,第 79])。 对于$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{h}$ ，如上所述，有如下结论。

(a) 若$\mathbf{a} \in \operatorname{syz}(\mathbf{f})$，则 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{a} \in \operatorname{syz}(\mathbf{h})$。

(b) 若$\mathbf{p} \in \operatorname{syz}(\mathbf{h})$，则 $M_{\mathbf{g}}\mathbf{p} \in \operatorname{syz}(\mathbf{f})$。

同样，利用对称性，可以构造矩阵 $M_{\mathbf{f}}$ 和 $N_{\mathbf{f}}$ ，以将$\mathbf{g}$ 的合冲与$\mathbf{h}$的合冲联系起来。这种方法的优点是，$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$ 的合冲更容易获得。此外，$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$ 的多项式可以用这些合冲来描述。

注 2.2。 我们注意到，生成曲线$\mathbf{f}$和$\mathbf{g}$的合冲模 syz(f) 和 syz(g) 分别是 $A = \mathbb{K}[s,u]$ 和 $B = \mathbb{K}[t,v]$ 上的自由模，这由希尔伯特合冲定理 [9, 19.7] 得出。因此，$\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$ 的理想具有分次自由消解

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{3} A(-m-\mu_i) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{f}}} A(-m)^4 \to (\mathbf{f}) \to 0 \quad \text{and} \quad 0 \to \bigoplus_{i=1}^{3} B(-n-\nu_i) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{g}}} B(-n)^4 \to (\mathbf{g}) \to 0,$$

其中 $\mu_1+\mu_2+\mu_3 = m$ 和 $\nu_1+\nu_2+\nu_3 = n$。此外，根据希尔伯特-伯奇定理 [9, 20.15]，我们有 $f_i = (-1)^i \det(\varphi_{\mathbf{f}})_i$，以及 $g_i = (-1)^i \det(\varphi_{\mathbf{g}})_i$，其中 $i = 0, 1, 2, 3$；$(\varphi_{\mathbf{f}})_i$和 $(\varphi_{\mathbf{g}})_i$分别表示通过删除 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 和 $\varphi_{\mathbf{g}}$的第 i 行得到的子矩阵。

由于曲线 $\mathbf{f}$ 的对合模是自由的，因此通常称 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 的列构成 μ-基，属于 $\mathbf{f}$；对于 $\mathbf{g}$ ，其 $\varphi_{\mathbf{g}}$的列也同理。此外，鉴于这些曲线具有行列式结构，也通常称 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 是其对合矩阵 的外积所得 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 和 $\varphi_{\mathbf{g}}$。然而，$\mathbf{h}$ 不具备这两种性质。根据 定理 2.1 和定理 2.2 ，我们注意到 $N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 的列线性无关，并且$\mathbf{h}$ 是近乎行列式型的。

引理 *2.3.* [11, 2.5] 对于 *(2.1)* 和定理 *2.2* 中的 $N_{\mathbf{g}}$ 和 $\varphi_{\mathbf{f}}$，记 $(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})_i$ 为删除 $N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 的第 i 行后得到的 3×3子矩阵。对于 $i = 0$，*1*、*2*、*3*，我们有 $(-1)^i \det(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})_i = \frac{1}{2}g_0^2 h_i$。

根据 定理 2.3，由 $N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 的各列所对应的合冲在某种意义上是特殊的。尽管 $\mathbf{h}$ 的方程并不与该矩阵的子式完全一致，但只要二者相差一个倍数，在大多数情况下就足够了。特别地，我们注意到，这些合冲与参数化 h 后得到的重要**移动平面**相关。

2.2. **移动平面与曲面**。 我们简要回顾参数化后得到的移动曲面的概念，以及它们与合冲的联系。我们注意到，这种技术已广泛应用于曲线和曲面的隐式化研究 [5, 6, 21, 22, 23]。

定义2.4。 记 $S = \mathbb{K}[w,x,y,z]$ 为 $\mathbb{P}^3$的坐标环，次数为 d的动曲面是 $R \otimes_{\mathbb{K}} S = R[w,x,y,z]$ 中的一个如下形式的多项式

$$L = \sum_{i+j+k+l=d} a_{ijkl} w^i x^j y^k z^l$$

其中 $a_{ijkl} \in R = \mathbb{K}[s,u,t,v]$。此外，若动曲面 L 满足以下条件，则称其跟随参数化$\mathbf{h}$

$$\sum_{i+j+k+l=d} a_{ijkl} h_0^i h_1^j h_2^k h_3^l = 0.$$

请注意，随着参数 s，u，t，v取值不同，系数 $a_{ijkl} \in R$也会随之变化。因此，曲面 $V(L) \subseteq \mathbb{P}^3$ 会随着参数的变化而“移动”，术语由此而来。特别是，当$d = 1$时，可以得到一个运动平面 $L = a_0 w + a_1 x + a_2 y + a_3 z$，它在以下条件下跟随参数化

$$a_0 h_0 + a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 = 0.$$

换言之，当且仅当 $(a_0,\ a_1,\ a_2,\ a_3)$ 是理想的一个合冲时，L 才跟随$\mathbf{h}$。类似地，跟随$\mathbf{h}$ 的 d次曲面，恰好对应于$\mathbf{h}$ 的理想的 d次幂的合冲。

如前所述，根据定理 2.3，$N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 的列是 h 的特殊合冲。令 a、b 和 c 分别表示 $\varphi_{\mathbf{f}}$的列，按照上文的讨论，我们可以由合冲 $N_{\mathbf{g}}$a、$N_{\mathbf{g}}$b 和 $N_{\mathbf{g}}$c 构造三个运动平面。事实上，令 $\mathbf{x} = [w, x, y, z]$ 表示 $\mathbb{P}^3$的坐标，则 $\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}$a、$\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}$b 和 $\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}$c 是随 h 运动的运动平面。注意，由于这些多项式在 h 处为零，随着参数变化，这些动曲面会相交。因此，人们希望用动曲面完整地描绘出 $X_{\mathbf{h}}$，但必须小心避开参数化的基点。

2.3. **基点**。h 的基点 是 $\mathbf{h}$ 中满足以下条件的点：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 参数化在此处无定义，即轨迹 $V(\mathbf{h})$ 满足 $h_0,\ h_1,\ h_2,\ h_3$ 同时为零。由于最大公因式$\mathbf{f}$ =最大公因式 $\mathbf{g} = 1$，可知最大公因式 $\mathbf{h} = 1$[11, pg. 76], 因此，$\mathbf{h}$ 的基轨迹：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 是一个有限点集。对于平移曲面，这组基点有一种特别简单的描述。

引理 2.5 ([11, 2.1])**.** $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ 中的点 (s_0, u_0, t_0, v_0) 是$\mathbf{h}$ 的基点，当且仅当 $f_0(s_0, u_0) = 0$且 $g_0(t_0, v_0) = 0$。

可以看出，平移曲面往往有许多基点。事实上，通过令$u = v = 1$进行非齐次化后，多项式 $f_0(s,\mathbf{1})$ 和 $g_0(t, \mathbf{1})$ 的根数（按重数计）恰好分别为 m和 n。由 定理 2.5可知，$\mathbf{h}$ 至少有 mn 个基点（按重数计）。虽然基点众多往往会使问题变得更加复杂，但一个有用的结果是，由于这些量之间的关系已在 [1] 中确立，平移曲面往往具有较低的隐式次数。

我们注意到，$\mathbf{h}$的基点往往表现不佳，从而带来进一步的限制。此外，我们还确定了一类特别棘手的基点，在这些基点处，合冲 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$、$N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}$ 和 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}$ 同时消失。正如 [11, 3.2], 所指出的，这类基点的存在会导致 [11] 的隐式化方法失效。

引理 2.6 ([11, 3.1–3.2])。若 $p = (s_0, u_0, t_0, v_0)$ 是 $\mathbf{h}$ 的基点，则 秩 $(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})(p) \le 1$。此外，秩$(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})(p) = 0$ 当且仅当存在某个非零的 $\lambda \in \mathbb{K}$，使得 $\mathbf{f}(s_0, u_0) = \lambda\mathbf{g}(t_0, v_0)$。

换言之，$N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 恰好在生成曲线 $\mathbf{f}$ 和$\mathbf{g}$ 于 $\mathbf{h}$ 的某个基点相交时消失。在这种情况下，该基点会膨胀为位于曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 上的一条曲线。正如前文所述，此类基点的存在会导致 [11, 3 中的隐式化方法失效。4], 因此，我们会谨慎地识别它们。

明确了$\mathbf{h}$ 的基点后，我们注意到，除这些基点外，运动曲线 $\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$、$\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}$ 和$\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}$描出曲面 $X_{\mathbf{h}}$。本节最后给出一个判据，用于确定这些运动平面何时沿 $X_{\mathbf{h}}$唯一相交。

命题 2.7. 对于点 $p = (s_0, u_0, t_0, v_0) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，若 $g_0(t_0, v_0) \neq 0$，则平面 $\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})(p)$、$\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})(p)$、$\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})(p)$ 在 $X_{\mathbf{h}}$ 上交于唯一一点。

证明。注意，由于 $g_0(t_0, v_0) \neq 0$，根据定理 2.5，点 p 不是 h 的基点。特别地，根据定理 2.3，由于其至少一个极大子式在 p 处非零，因此 $\mathbf{rank}(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})(p) = 3$。于是，$\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})(p) = 0$ 存在唯一解 (w_0, x_0, y_0, z_0)，相差一个单位倍数；也就是说，在 $\mathbb{P}^3$ 中存在唯一一点，使得 $\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})(p)$、$\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})(p)$、$\mathbf{x}(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})(p)$ 相交。

要看出这样的交点位于 $X_{\mathbf{h}}$上，注意到 $(N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}})(p)$ 是一个秩满的近方阵。因此，根据克莱姆法则，这样的解必为其带符号余子式的单位倍数。于是由定理 2.3，并且由于 $g_0(t_0, v_0) \neq 0$，在相差一个单位倍数的意义下，我们有 (w_0, x_0, y_0, z_0) 与 $\mathbf{h}(p)$ 一致，因此这个唯一的交点位于曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 中 $\mathbb{P}^3$。□

3. Iterated resultants and translational surfaces

现在我们介绍本文的主要设定，并旨在为 [11] 中给出的平移曲面算法提供一种替代方法。我们注意到，先前的方法依赖于三个运动平面 $\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$、$\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}$和 $\mathbf{x}N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}$ 在令 $u = v = 1$之后得到的特化结式，因为隐式方程会作为一个因子出现。然而，如前所述，当存在定理 2.6中所述的任何不良基点时，此方法便会失效，因为此时该结式恒等于零。此外，对于一个双次数为

$(m,\ n)$ 的平移曲面，该结式是通过计算一个 $2mn \times 2mn$ 矩阵的行列式得到的，其大小可能会因生成曲线的次数而变得很大。

我们的目标是利用迭代结式计算隐式方程，且这些结式不恒等于零。此外，整个过程中这些结式所涉及的矩阵行列式要小得多。另外，[11]的方法需要将问题转到仿射坐标中，作为主要消元步骤之一；而我们的目标是始终保持在射影空间中。

设定 3.1。设$\mathbf{f}$和$\mathbf{g}$表示 $\mathbb{P}^3$ 中的两条空间曲线，由次数为 m 的齐次多项式 $f_0, f_1, f_2, f_3 \in \mathbb{K}[s,u]$ 以及次数为 n 的齐次多项式 $g_0, g_1, g_2, g_3 \in \mathbb{K}[t,v]$ 定义，且 $\gcd \mathbf{f} = \gcd \mathbf{g} = 1$。设$\mathbf{h}$表示由$\mathbf{f}$和$\mathbf{g}$生成的相应平移曲面，其双次数为 (m,n)。

如定理 2.2所述，$\mathbf{f}$ 的理想具有如下形式的分次自由消解：

$$0 \to \bigoplus_{i=1}^{3} A(-m-\mu_i) \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{f}}} A(-m)^4 \to (\mathbf{f}) \to 0 \tag{3.1}$$

其中 $A = \mathbb{K}[s,u]$ 且 $\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 = m$。我们可以假设 $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$ 始终成立，并用$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$ 表示$\mathbf{f}$ 的合冲，作为 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 在（3.1）中的有序列。特别地，回想一下，syz(f)是自由的，因此集合 {$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$} 线性无关。

和之前一样，$\mathbf{f}$ 的对合可以根据$\mathbf{h}$ 由下述定理 2.1转换为其对合。然而，我们注意到，乘以 $N_{\mathbf{g}}$ 可能会在每一列的各个条目之间引入公因子，因此我们会谨慎地移除多余因子。为此，我们引入一组约化对合$\mathbf{h}$，所遵循的约定与 [12]中类似。

记号 3.2。 设$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$ 如上，记 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 表示 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$各条目之间的最大公因子。于是，令$\mathbf{A} = {}^{N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}}/_{\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})}$，并注意到这仍然是$\mathbf{h}$上的一个对合，因为 R 是一个整环。类似地，考虑 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})$ 和 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})$，并记 $\mathbf{B} = {}^{N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}}/_{\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})}$ 以及$\mathbf{C} = {}^{N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}}/_{\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})}$。

尽管移除公因子看似无关紧要，但一旦我们根据与这些对合相关的运动平面构造结式，其目的便会显现出来。不过首先，我们注意到一种与第 2 节中所观察到的类似现象，只是现在使用约化对合$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$ 来代替 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$、$N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}$和 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}$。

命题 3.3. 对于 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$、$\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})$和 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})$ 这几个多项式，在 定理 *3.2*中，我们有以下结论。

(a) $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$、$\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})$ 和 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})$ 均整除 g_0。特别地，这些多项式属于$\mathbb{K}[t,v]$。*(b)* $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})$ 的乘积整除 g_0^2。

证明。我们先证明 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 的结论，因为其余多项式的情形可类似证明。回顾定理 2.3，$N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 的子式与 $\frac{1}{2}g_0^2\mathbf{h}$ 一致。因此，对于 $i = 0$ = 1、2、3，$\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 整除$\frac{1}{2}g_0^2 h_i$。然而，由于 $\gcd \mathbf{f} = \gcd \mathbf{g} = 1$，我们注意到 $\gcd \mathbf{h} = 1$ 也整除 $[11, \text{pg。}\ 76]$。因此，$\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 的任何不可约因子都必须整除 g_0，由此通过次数考量可得 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}) \in \mathbb{K}[t,v]$。另一方面，$\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 的每个不可约因子都整除 g_0。记 a 的各个分量为 a_0、a_1、a_2、a_3，则有

$$N_{\mathbf{g}}\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \frac{g_0a_0 - g_1a_1 - g_2a_2 - g_3a_3}{2} \\ g_0a_1 \\ g_0a_2 \\ g_0a_3 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

因此，例如，最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 整除 g_0a_1。然而，由于最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}) \in \mathbb{K}[t,v]$ 和 $a_1 \in \mathbb{K}[s,u]$，可得最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})$ 整除 g_0。同理可得，最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})$ 和最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})$ 整除 g_0，从而证明了 (a)。

对于 (b) 部分，再次回想一下，$N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$ 的带符号余子式恰好是 $\frac{1}{2}g_0^2\mathbf{h}$。由此可得，对于 $i = 0$ = 1, 2, 3，最大公因式($N_{\mathbf{g}}$a)、最大公因式($N_{\mathbf{g}}$b)、最大公因式($N_{\mathbf{g}}$c) 都整除 $g_0^2h_i$。根据前一部分，显然最大公因式($N_{\mathbf{g}}$a)、最大公因式($N_{\mathbf{g}}$b)、最大公因式($N_{\mathbf{g}}$c) 整除 g_0^3。因此，由于 $h_i = f_0g_i + f_ig_0$，可得乘积 最大公因式($N_{\mathbf{g}}$a) 最大公因式($N_{\mathbf{g}}$b) 最大公因式($N_{\mathbf{g}}$c) 整除 $g_0^2f_0g_i$。注意到 $f_0 \in \mathbb{K}[s,u]$ 及涉及的其余多项式都属于 $\mathbb{K}[t,v]$，可得对于 $i = 0$ = 1, 2, 3，最大公因式($N_{\mathbf{g}}$a)、最大公因式($N_{\mathbf{g}}$b)、最大公因式($N_{\mathbf{g}}$c) 都整除 $g_0^2g_i$。现在，如果

最大公因式($N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$)最大公因式($N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}$)最大公因式($N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}$) 不整除 g_0^2，那么 g_0, g_1, g_2, g_3 必须有一个公因子。然而，这是不可能的，因为最大公因式($\mathbf{g}$) $= 1$。□

注记 3.4。根据定理 3.3，注意到，在 $R = \mathbb{K}[s, u, t, v]$的双分次下，合冲$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$ 的项的次数分别为 μ_1、μ_2和 μ_3，其中相对于 s、u，次数至多为 n；相对于 t、v。如前所述，回顾一下，我们假设 $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$。

由定理 3。 3和定理 2.3可知，$[\mathbf{A}\,\mathbf{B}\,\mathbf{C}]$ 的带符号余子式恰好是 $\frac{1}{2}G\mathbf{h}$，其中 – e

$$G = \frac{g_0^2}{\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})} \tag{3.3}$$

并且我们注意到，根据 $\mathbb{K}[t, v]$，这是一个关于定理 3.3的多项式。由此，我们可以为运动平面定理 2.7 给出一个类似结果$\mathbf{xA}$、$\mathbf{xB}$、$\mathbf{xC}$。

命题 3.5。对于一个点 $p = (s_0, u_0, t_0, v_0) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，如果 $g_0(t_0, v_0) \neq 0$，那么平面 $\mathbf{xA}(p)$、$\mathbf{xB}(p)$、$\mathbf{xC}(p)$ 在曲面 $X_{\mathbf{h}} \subseteq \mathbb{P}^3$ 上唯一交于一点。

证明。注意，由于 $g_0(t_0, v_0) \neq 0$, p 根据定理 2.5 不是 h 的基点。如前所述，由定理 2.3 和定理 3.3 可知，[A B C] 的带符号余子式是 $\frac{1}{2}G\mathbf{h}$，其中 G 见 (3.3)。由于 G 整除 g_0^2,⁻若 $g_0(t_0, v_0) \neq 0$，则 $G(t_0, v_0) \neq 0$ 也成立，因此可知 [A BC](p) 的秩为 3。接着，以类似于定理 2.7 证明的方式即可得出该结论。□

如前所述，syz(h) 伴随关系模并非自由模。不过，合冲$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 与其对应项$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$确有相似之处；后者构成 syz(f) 的一组基。

命题 3.6. 合冲 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$、$\mathbf{C}$ 在 $R = \mathbb{K}[s, u, t, v$ 上线性无关].

证明。假设存在多项式 $\alpha, \beta, \gamma \in R$ 使得

$$\alpha\mathbf{A} + \beta\mathbf{B} + \gamma\mathbf{C} = 0.$$

对于 $M_{\mathbf{g}}$ 如式 (2.1) 所示，两边乘以矩阵 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}) \cdot M_{\mathbf{g}}$ 可得 s

$$\alpha\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})g_0^2 \cdot \mathbf{a} + \beta\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c})g_0^2 \cdot \mathbf{b} + \gamma\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a})\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b})g_0^2 \cdot \mathbf{c} = 0,$$

注意到 $M_{\mathbf{g}}N_{\mathbf{g}} = N_{\mathbf{g}}M_{\mathbf{g}} = g_0^2\mathbf{I}$。然而，回想一下，{$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$} 在 $\mathbb{K}[s, u]$ 上线性无关，因此在 R 上也线性无关。此外，由于 $g_0 \neq 0$ 且最大公因子也非零，可知 $\alpha = \beta = \gamma = 0$。□

3.1. **迭代结式**。现在我们开始求 $X_{\mathbf{h}}$ 在 $\mathbb{K}[w, x, y, z]$中的隐式方程，其中该环是 $\mathbb{P}^3$的坐标环。记 $\mathbf{x}$ 为这些坐标，我们可以按照$\mathbf{xA}$、$\mathbf{xB}$和 $\mathbf{xC}$ 第 2 节中的方式构造。由于 $\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$ 是关于 $\mathbf{h}$的合冲，这些移动曲面满足该参数化。

全文中我们均使用齐次结式，即经典西尔维斯特矩阵的行列式。对于整环 A 中次数分别为 m 和 n 的 $A[x, y]$ 中的齐次多项式 f 和 g，记作

$$f = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1}y + \cdots + a_0 y^m$$
$$g = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1}y + \cdots + b_0 y^n.$$

回顾一下，f和 g关于 x，y的西尔维斯特矩阵是一个 $(m+n) \times (m+n)$ 矩阵

$$\mathrm{Syl}_{xy}(f, g) = \begin{bmatrix} a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & & \\ & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & a_m & a_{m-1} & \cdots & a_0 \\ b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & & \\ & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 & & \\ & & \ddots & & & \ddots & \\ & & & b_n & b_{n-1} & \cdots & b_0 \end{bmatrix} \begin{matrix} \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}}\right\} n \\ \left.\vphantom{\begin{matrix}1\\2\\3\\4\end{matrix}}\right\} m \end{matrix} \tag{3.4}$$

而 $\mathrm{Res}_{xy}(f,g) = \det \mathrm{Syl}_{xy}(f,g)$ 是 f和 g关于 x,y的西尔维斯特结式。关于结式的入门介绍，请参阅 [7, 第 3] 章；更一般的理论则见 [10] 。就本文而言，我们注意到，当且仅当 f,g在 $A[x,y]$中有公因子时，$\mathrm{Res}_{xy}(f,g) = 0$成立；换言之，当 f和 g在 $\mathbb{P}^1_L$中有一个公共零点时，其中 L表示商域 Quot(A)的代数闭包。

结式是消元理论中的经典技术，因为它们是所涉及多项式系数的表达式，可以消去其中的不定元。此外，只要不恒等于零，跟随某个参数化的两个移动曲面的结式也将跟随该参数化。因此，我们对移动曲面 $\mathbf{xA}$、$\mathbf{xB}$ 和$\mathbf{xC}$采用这一技术；根据构造，它们没有公因子。

Pr命题 3.7。 多项式 $\mathbf{xA}$、$\mathbf{xB}$ 和$\mathbf{xC}$ 不可约，且两两互素 $e.$

证明。 我们验证$\mathbf{xA}$ 的不可约性，因为其余多项式的结论可类似得到。注意，将 $R[w,x,y,z]$ 视为不定元时，$\mathbf{xA}$ 是线性的。因此，根据次数考量，如果 $\mathbf{xA}$ 可约，那么它必然在 $R = \mathbb{K}[s,u,t,v]$ 中具有一个非平凡因子。然而，由于 $\{w,x,y,z\}$ 是一个 R-线性无关集，这样的因子必然整除 $\mathbf{xA}$ 的每个系数。然而，这些系数恰好是 $\mathbf{A}$ 的各个条目，它们根据构造不具有公因子，因此不可能存在这样的非平凡因子。现在，第二个结论由 定理 3.6 得出，注意到 $\mathbf{xA}$、$\mathbf{xB}$ 和 $\mathbf{xC}$ 均不可约。 □

回想一下，我们假设 $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$ 在（3.1）中，而这些分别是$\mathbf{xA}$、$\mathbf{xB}$、$\mathbf{xC}$ 关于 s的次数， u 根据 定理 3.4。我们先考察它们关于 s、 u的齐次结式，并回忆一下，这些结式是由这些运动平面对应的西尔维斯特矩阵的行列式给出的；这些运动平面被视为关于s、 u 的多项式，其系数属于 $\mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$。

命题 3.8. $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA}, \mathbf{xC})$ 和$\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC})$ 都是关于 $\mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$ 的非零多项式。此外，作为动曲面，Res_{su} ($\mathbf{xA}$,$\mathbf{xC}$) 和Res_{su}($\mathbf{xB}$,$\mathbf{xC}$) 遵循参数化$\mathbf{h}$。

证明。注意，由于 $\mu_1 \le \mu_2 \le \mu_3$，我们有 $\mu_3 \ge 1$。由于这是 $\mathbf{xC}$ 关于 s,u 的次数，因此可知，西尔维斯特矩阵 Syl_{su}(xA, xC) 和 Syl_{su}(xB,xC) 都非空。因此，Res_{su}(xA, xC) $= 0$ ，当且仅当 xA 和 xC 有公因子；但根据定理 3.7，这不可能。类似地，我们有 Res_{su}(xB, xC) $\neq 0$。

既然已知 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA}, \mathbf{xC})$ 是一个非零多项式，那么显然它以$\mathbf{h}$为因子，作为一个动曲面。事实上，由于$\mathbf{hA} = 0$ 和$\mathbf{hC} = 0$，多项式$\mathbf{xA}$ 和 $\mathbf{xC}$在代入$\mathbf{h}$后显然有公因子，因此 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA}, \mathbf{xC})(\mathbf{h}) = \mathrm{Res}_{su}(\mathbf{hA}, \mathbf{hC}) = 0$。同理，$\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC})$ 也以$\mathbf{h}$ 为因子。□

推论 3.9。 定理 *3.8* 中的结式可分解为 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA}, \mathbf{xC}) = E_0F_0$ 以及 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC}) = E_1F_1$对于多项式 E_0， E_1， F_0， $F_1 \in \mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$ 其中 F_0， F_1 是不可约多项式，并以参数化$\mathbf{h}$为因子，作为动曲面。

证明。 如定理 3.8所述，$\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC})$ 和 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC})$ 都是关于$\mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$ 下述 $\mathbf{h}$的非零多项式。由于动曲面沿参数化移动，当且仅当其某个不可约因子如此，因此结论得证。 □

我们注意到，额外因子 E_0 和 E_1 还可能进一步分解。上述结式不可约的情况并不少见，此时 $E_0 = E_1 = 1$；不过， E_0、 E_1 也可能含有对应于$\mathbf{h}$的基点的多余因子。无论哪种情况，我们主要关注沿$\mathbf{h}$移动的不可约因子F_0、 F_1 ，它们分别来自 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC})$ 和 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC})$。

一般而言，去除不必要的因子是贯穿全文的常见主题。这不仅能降低相关多项式的次数，从而得到更小的西尔维斯特矩阵，还能避免不希望出现的消失。事实上，回想一下

$$\mathrm{Res}_{su}(p_1p_2,q) = \mathrm{Res}_{su}(p_1,q)\mathrm{Res}_{su}(p_2,q) \tag{3.5}$$

对于多项式 p_1、 p_2和 q。因此，从所涉及的多项式中去除因子会减少其结式的因子数目，其中之一可能会消失。特别地，这正是在定理 3.2 中表述$\mathbf{A}$、$\mathbf{B}$和$\mathbf{C}$时去除公因子的原因。

命题 3.10. 对于多项式 F_0、$F_1 \in \mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$（见定理 3.9），若 $F_0 \nsim F_1$，则它们的结式$\mathrm{Res}_{tv}(F_0,\ F_1)$是 $\mathbb{K}[w,x,y,z]$中的非零多项式。此外，该结式可分解为$\mathrm{Res}_{tv}(F_0,\ F_1) = EF$，对多项式 E、$F \in \mathbb{K}[w,x,y,z]$成立，其中 F是 $X_{\mathbf{h}}$的隐式方程。

证明。由于 F_0 和 F_1 不可约，我们注意到，$\gcd(F_0,\ F_1) = 1$ 当且仅当 $F_0 \nsim F_1$，也就是说，它们不相差一个单位倍数。在这种情况下，我们有 $\mathrm{Res}_{tv}(F_0,\ F_1) \neq 0$；由于 F_0 和 F_1 都沿着参数化 $\mathbf{h}$，它们的结式 $\mathrm{Res}_{tv}(F_0,\ F_1)$ 也沿着 $\mathbf{h}$。因此，$\mathrm{Res}_{tv}(F_0,\ F_1)$ 存在某个沿着参数化 $\mathbf{h}$ 的不可约因子 F。然而，F 整除 $\mathrm{Res}_{tv}(F_0,\ F_1)$，因此它是 $\mathbb{K}[w,x,y,z]$（即 $\mathbb{P}^3$ 的坐标环）中的一个多项式。由于在 $\mathbb{K}[w,x,y,z]$ 中沿着动曲面 $\mathbf{h}$ 的唯一不可约多项式就是 $X_{\mathbf{h}}$ 本身的隐式方程，故得证。□

如前所述，在消去变量 s，u，t，v 后，$\mathbb{K}[w,x,y,z]$ 中任何在 $\mathbf{h}$ 处为零的不可约多项式都必须是隐式方程，因为 $X_{\mathbf{h}}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的不可约曲面。换言之，隐式方程是沿着 $\mathbf{h}$ 的不会移动的动曲面！

定理定理 3.10 的一个潜在障碍是，在计算之前，很难确定 F_0 和 F_1 是否互素。笔者未能找到任何这样的平移曲面示例：在该曲面 $\mathbf{h}$ 中，这些不可约多项式彼此相伴元。因此，笔者提出以下问题，希望它能成为未来研究的起点。

问题 3.11。什么条件可以保证 $F_0 \nsim F_1$ 在 定理 3.10中？换言之，什么条件可以确保 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC})$ 和 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC})$ 经由 $\mathbf{h}$后具有互不相同的不可约因子?

如前一节所述，曲面 $\mathbf{h}$ 及其生成曲线 $\mathbf{f}$ 和 $\mathbf{g}$ 与合冲以及由此产生的、沿 $\mathbf{h}$ 的运动平面之间存在密切联系。若 $\mathrm{Res}_{tv}(F_0,F_1) = 0$，则在取 $\mathbb{K}[w,x,y,z]$ 的商域后，存在一点 $(t_0,v_0) \in \mathbb{P}^1$，使得 F_0和 F_1 在该点处为零。不难将问题化归到 $g_0(t_0,v_0) \neq 0$ 的情形（例如参见定理 4.6 的证明）；此时$N_{\mathbf{g}}(t_0,v_0)$可逆。注意到 $N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$的列是 $[\mathrm{A\ B\ C}]$, 的列的倍数，因此可以将问题化归为沿曲线 $\mathbf{f}$ 的运动平面。由此，我们提出第二个问题；回答它或许能帮助回答问题 3.11。

问题 3.12. 如 (3.1) 中那样，用 a、b 和 c 表示 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 的列，Res_{su}(xa, xc) 与 Res_{su}(xb, xc) 是否可能具有公因子？若是，曲线 $\mathbf{f}$ 上的哪些条件足以保证最大公因式(Res_{su}(xa, xc), Res_{su}(xb, xc)) $= 1$?

我们注意到 定理 3.12 已在 [14] 中针对以低次数参数化的曲线得到处理，然而作者并不知晓更一般的答案。

我们以一个例子结束本节，说明如何运用定理 3.10 来求出隐式方程，对象为 $X_{\mathbf{h}}$。我们从 [11] 借用一个例子，并将我们的方法与其中所发展的算法的有效性进行比较。

例 3.13 ([11, 3.6])。考虑由曲线 $\mathbf{f}$：$\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 与$\mathbf{g}$：$\mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 所生成的平移曲面，具体由下式给出

$$\mathbf{f} = (s^3, s^2u, su^2, u^3), \qquad \mathbf{g} = (t^2, v^2, tv, tv).$$

相应的平移曲面 $\mathbf{h}$：$\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 为

$$\mathbf{h} = (2s^3t^2,\ s^3v + s^2ut^2,\ s^3tv + su^2t^2,\ s^3tv + u^3t^2).$$

由此，我们计算得出

$$N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & -\frac{v^2}{2} & -\frac{tv}{2} & -\frac{tv}{2} \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u & 0 & 0 \\ -s & u & 0 \\ 0 & -s & u \\ 0 & 0 & -s \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} ut^2 + sv^2 & stv - uv^2 & stv - utv \\ -2st^2 & 2ut^2 & 0 \\ 0 & -2st^2 & 2ut^2 \\ 0 & 0 & -2st^2 \end{bmatrix}.$$

记 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 为 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 的列，我们可以看出 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}) = \gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}) = 1$ 且 $\gcd(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}) = t$。因此，我们可以构造运动平面

$$\begin{aligned}\mathbf{xA} &= ut^2w + sv^2w - 2st^2x\\ \mathbf{xB} &= stvw - uv^2w + 2ut^2x - 2st^2y\\ \mathbf{xC} &= svw - uvw + 2uty - 2stz.\end{aligned}$$

注意到，相对于 s，u，上面的多项式是线性的，这也可由 定理 3.4 得出。结合这一点和 定理 3.8，我们可以将这些运动平面的结式表示为以下 2×2 西尔维斯特矩阵的行列式

$$\mathrm{Syl}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC}) = \begin{bmatrix} v^2w - 2t^2x & t^2w \\ vw - 2tz & 2ty - vw \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Syl}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC}) = \begin{bmatrix} tvw - 2t^2y & 2t^2x - v^2w \\ vw - 2tz & 2ty - vw \end{bmatrix}.$$

因此，我们有

$$\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC}) = -4t^3xy + 2t^3wz - t^2vw^2 + 2t^2vwx + 2tv^2wy - v^3w$$

$$\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC}) = -4t^3y^2 + 4t^3xz - 2t^2vwx + 4t^2vwy - tv^2w^2 - 2tv^2wz + v^3w$$

它们都是不可约多项式。因此 $F_0 = \mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC})$ 和 $F_1 = \mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC})$ 是依照 $\mathbf{h}$（如 定理 3.9所述）得到的动曲面，且显然互非单位倍数。因此根据定理 3.10，我们有

$$\mathrm{Syl}_{tv}(F_0,F_1) = \begin{bmatrix} 2wz-4xy & 2wx-w^2 & 2wy & -w^2 & 0 & 0\\ 0 & 2wz-4xy & 2wx-w^2 & 2wy & -w^2 & 0\\ 0 & 0 & 2wz-4xy & 2wx-w^2 & 2wy & -w^2\\ 4xz-4y^2 & 4wy-2wx & -w^2-2wz & w^2 & 0 & 0\\ 0 & 4xz-4y^2 & 4wy-2wx & -w^2-2wz & w^2 & 0\\ 0 & 0 & 4xz-4y^2 & 4wy-2wx & -w^2-2wz & w^2 \end{bmatrix}$$

其行列式为

$$\mathrm{Res}_{tv}(F_0,F_1) = 8(y-z)w^5F$$

其中

$$\begin{aligned}F = {} & 2w^4x^2 - 2w^3x^3 - w^5y - w^4xy - 12w^3x^2y + 5w^4y^2 + 8w^3xy^2\\ & + 12w^2x^2y^2 - 8w^2xy^3 - 20w^2y^4 - 24wxy^4 + 16y^6 + w^5z + w^4xz\\ & + 8w^3x^2z - 8w^4yz - 12w^3xyz + 8w^3y^2z + 48w^2xy^2z + 24w^2y^3z\\ & + 3w^4z^2 - 4w^3xz^2 - 14w^3yz^2 - 24w^2xyz^2 - 16wy^3z^2 + 6w^3z^3 + 4w^2z^4\end{aligned}$$

是 $X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程。

虽然 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC})$ 和 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC})$ 在定理 3.13中是不可约的，但我们注意到，所涉及的结式通常会有多余因子。例如，在上述例子中，$\mathrm{Res}_{tv}(F_0,F_1)$ 有一个因子 w^5，它源自基点（参见 [11, 3中的讨论4] 及其证明），此外还有因子$y-z$；该因子的出现恰恰是因为曲线 $\mathbf{g}$ 位于平面 $V(y-z)\subseteq\mathbb{P}^3$上，这一点可由其参数化看出。

观察 3.14. 如所指出的，定理 3.13 与所给例子相一致，见于 [11, 3。6], 并且同样得出 $X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程。然而，我们注意到，对于上文以双次数 (3,2) 参数化的平移曲面，[11] 的方法需要一个 12×12 非齐次西尔维斯特矩阵的行列式。相比之下，本文提出的方法涉及两个 2×2 矩阵和一个 6×6 矩阵的行列式，总体上需要更少的中间计算。尽管较大的矩阵见于 [11, 3。6]，该矩阵相当稀疏，因此计算时间的差异可以忽略不计，但两种方法所涉及矩阵规模的差距对于更大的 m 和 n会显著增大。

如前，定理 3.10 给出隐式方程，仅当 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\mathbf{xC})$ 与 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\mathbf{xC})$ 具有不同的因子且这些因子跟随 $\mathbf{h}$。在接下来的一节中，我们说明：取决于任一曲线的几何，该准则可能自动得到满足，并且本文所发展的方法可以进一步简化。特别地，对于曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 在 定理 3.13中，所涉及的西尔维斯特矩阵可以显著变小，注意到曲线 $\mathbf{g}$ 是 平面的，因为它位于平面 $V(y-z)\subseteq\mathbb{P}^3$上。

4. Planar curves and ruled surfaces

如前所述，只要 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xA},\ \mathbf{xC})$ 和 $\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB},\ \mathbf{xC})$ 在 $\mathbf{h}$ 之后具有不同的因子，上一节的算法就能得出 $X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程。本节将说明，在某些情况下，这一条件可能自动满足，具体取决于生成曲线如何嵌入 $\mathbb{P}^3$。我们考虑由参数化其中一条曲线的齐次多项式张成的 $\mathbb{K}$-向量空间，设该曲线为 $\langle f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3\rangle$。特别地，这种向量空间的维数是区分这些情形的一个合适不变量。

注释 4.1。 在 定理 3.1的假设下，我们有 $2\le\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}\le 4$。显然，$\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}\le 4$，并且注意到 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}\neq 0,\ \mathbf{1}$，因为 $f_0,\ f_1,\ f_2,\ f_3$ 并非都恒为零，且 $\gcd\mathbf{f}=1$。

当然，对于由曲线的多项式张成的向量空间，也可以重复这些观察$\mathbf{g}$。特别地，根据对称性，我们不妨假设在整个过程中 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}\le\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{g}$。因此，根据定理 4.1，可以根据由定理 3.1 中的$\mathbf{f}$张成的向量空间的维数，自然地将其分为几种情形。因此，本节余下部分将讨论 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}=2$ 以及 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}=3$的情形，并利用这一设定下曲线的几何性质，证明定理 3.10 的条件自动满足。

注意，由于$\mathbf{f}$ 的多项式是齐次的，$\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}$ 等于理想 $(f_0,f_1,f_2,f_3)\subseteq\mathbb{K}[s,u]$的最小生成元数。因此，$\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}$是该理想的一个最小自由分解中出现的第一个贝蒂数。因此，若 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}<4$，则**定理 2.2** 中的 **(f)** 的自由分解必须包含自由直和项，即 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 必须包含单位元项。根据定理 2.1，显然$\mathbf{h}$ 此时具有单分次合冲；正如 [8, 20, 27]中所指出的，这一现象对于更一般的张量积曲面的隐式化尤为有用。

4.1. 直纹曲面。

在定理 3.1的假设下，我们进一步始终假设 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}=2$。在此情形下，我们证明 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{P}^3$中的一条直线，因此 $\mathbf{h}$是一个直纹平移曲面，类似于[12]的设定。我们验证 定理 3.10 的条件成立，并且 第 3 节 的方法在此设定下可以简化，并与 [12] 针对此类曲面的隐式化方法相一致。

命题 4.2. 在定理 *3.1*的假设下，$\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}=2$ 当且仅当 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{P}^3$中的一条直线。

证明。 由前面的讨论可知，$\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}=2$ 当且仅当 $\mathbf{f}$ 的理想具有两个极小生成元。即，对合矩阵 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 在自由分解（3.1）中有一个由单位元组成、秩为二的子矩阵。由于 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 各列中元素的次数均为常数，因此 $\mathbf{f}$ 的这一自由分解从而为

$$0\to\begin{matrix}A(-m)^2\\ \oplus\\ A(-2m)\end{matrix}\xrightarrow{\varphi_{\mathbf{f}}}A(-m)^4\to(\mathbf{f})\to 0,\tag{4.1}$$

其中 $A=\mathbb{K}[s,u]$，根据 定理 2.2。令 $\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$为 $\varphi_{\mathbf{f}}$的有序列，注意到$\mathbf{a}$ 和$\mathbf{b}$ 的各项都是 $\mathbb{K}$ 中的单位，而 $\mathbf{c}$ 的各项次数为 m。

回顾一下，$\mathrm{syz}(\mathbf{f})$ 是自由的，因此 $\mathbf{f}$ 的合冲线性无关。由于 (4.1) 中的合冲 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的各项属于 $\mathbb{K}$，且 $\mathbf{fa}=\mathbf{fb}=0$，曲线 $\mathbf{f}$ 位于平面 $V(\mathbf{xa})$ 与平面 $V(\mathbf{xb})$ 的交集上。由于这两个平面不同，因此 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的一条直线。反过来，如果 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的一条直线，那么它必定位于两个不同平面的交集上。因此，$\mathbf{f}$ 存在两个各项为单位的线性无关合冲，故根据定理 2.2，$\mathbf{f}$ 具有上述非极小分解。□

由于 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{P}^3$中的一条直线，因此通过沿着 $\mathbf{f}$ 平移 $\mathbf{g}$ 得到的曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 被称为 直纹 平移曲面。这些曲面在 [12] 中得到了广泛研究，并给出了从参数化计算$X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程的方法，其中 $m=1$。注意，如果 $m=1$ 满足 定理 3.1，那么根据 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f}=2$自动有定理 4.1 ，并注意到 $\mathbf{f}$ 是 $\mathbb{K}$的一个子空间 $\left[\mathbb{K}[s,u]\right]_1=\mathbb{K}s\oplus\mathbb{K}u$。

推论 **推论 4.3**。 h 的合冲**A** 和**B** 线性无关，其元素属于 $\mathbb{K}[t,v]$。

证明。 这很容易看出，因为 **a** 和 **b** 在 $\mathbb{K}$ 中具有条目，而 $N_{\mathbf{g}}$ 的条目属于 $\mathbb{K}[t,v]$。此外，回忆一下，gcd($N_{\mathbf{g}}$**a**) 和 gcd($N_{\mathbf{g}}$**b**) 是 $\mathbb{K}[t,v]$ 中的多项式，这由 定理 3.3得出。最后，独立性由 定理 3.6得出。 □

现在我们证明，当 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 2$时，定理 3.10 的条件得到满足，并且第 3 节 的方法与 [12, 3 的主要结果1] 在这种情况下相一致。

命题 4.4。 在 定理 *3.1*的假设下，进一步假设 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 2$。结式$\mathrm{Res}_{tv}(\mathbf{xA},\mathbf{xB})$ 是 $\mathbb{K}[w,x,y,z]$ 中的非零多项式，并且可分解为 $\mathrm{Res}_{tv}(\mathbf{xA},\mathbf{xB}) = EF$，其中 F是 $X_{\mathbf{h}}$的隐式方程。

证明。由定理 4.3 可知，A 和 B 是 h 的合冲，其条目属于 $\mathbb{K}[t,v]$，因此运动平面 xA 和 xB 是 $\mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$ 中的多项式。由定理 3.4 和 (4.1) 可知，xC 关于 s、u 的次数为 m，而 xA 和 xB 关于 s、u 的次数均为 0。因此，根据西尔维斯特矩阵 (3.4) 的构造，有 Res_{su}(xA, xC) =(xA)^m，并且 Res_{su}(xB, xC) =(xB)^m。因此，根据定理 3.9，这些结式中跟随 h 的不可约因子恰好是 F_0 =xA 和 F_1 = xB。由定理 3.10 即得结论，同时注意到 xA 和 xB 由定理 3.7 可知互素。□

特别是，定理 4.4 与 [12, 3的方法相同1]，用于求得直纹平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$的隐式方程；再次注意，当$_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 2$ 时，$m = 1$维数会自动满足。

4.2. **平面曲线**。 直纹平移曲面的情形（其中 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 2$ ）已解决，现在考虑 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 3$的情形。因此，**f** 是平面中的一条曲线 $\mathbb{P}^3$，论证与定理 4.2的证明类似。这种情形对于几何建模应用尤其重要，因为人们通常会考虑由位于正交平面**中的曲线** [26]生成的平移曲面。

命题 4.5。 在定理 *3.1*的假设下，若$\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 3$，则曲线**f** 位于$\mathbb{P}^3$中的一个平面上。

证明。 我们采用与定理 4.2的证明相同的方法。由于 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 3$，**f** 的理想由 3 个元素极小生成。因此，自由分解（ 3.1）中的对合矩阵相对于生成集 f_0，f_1，f_2，f_3必须有一列的元素均为单位。因此 $\mu_1 = 0$，而**f** 的这个非极小分解是

$$0 \to \begin{matrix} A(-m) \\ \oplus \\ A(-m-\mu_2) \\ \oplus \\ A(-m-\mu_3) \end{matrix} \xrightarrow{\varphi_{\mathbf{f}}} A(-m)^4 \to (\mathbf{f}) \to 0, \tag{4.2}$$

其中 $A = \mathbb{K}[s,u]$ 和 $\mu_2 + \mu_3 = m$。令**a**、**b**和**c** 为 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 的有序列，**a** 的元素是 $\mathbb{K}$ 中的单位，而**b** 和**c** 的次数分别为 μ_2 和 μ_3。由于**a** 的元素属于 $\mathbb{K}$，且**fa** $= 0$，因此曲线**f** 位于平面 V(**xa**) $\subseteq \mathbb{P}^3$上。□

如定理 4.3所述，由于a 是**f** 的一个对合，其元素属于 $\mathbb{K}$，因此A 是**h** 的一个对合，其元素属于 $\mathbb{K}[t,v]$。因此，对于涉及运动平面**xA**的结式，我们可以按照定理 4.4 的证明进行处理。

定理 *4.6*。在定理 *3.1* 的假设下，设 $\dim_{\mathbb{K}}\mathbf{f} = 3$。记 F_1 为定理 *3.9* 中 Res_{su}*(xB,xC)* 在 *h* 后面的因子，则结式 Res_{tv} *(xA* F_1*)* 是 $\mathbb{K}[w,x,y,z]$ 中的一个非零多项式，并可分解为 Res_{tv}*(xA* F_1*)* $= EF$，其中 F 是 $X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程。

证明。正如定理 4.5 的证明中所述，(4.2) 中的对合 a 的各项均属于 $\mathbb{K}$。因此，h 的对合 A 的各项均属于 $\mathbb{K}[t,v]$。根据定理 3.4，我们有 Res_{su}(xA, xC) =(xA)$^{\mu_3}$，其中 $\mu_3 \geq 1$ 与 (4.2) 中相同，因此，按照 h，F_0 =xA 是该结式的唯一不可约因子。一旦证明对于定理 3.9 中的 F_1，有 gcd(xA F_1) $= 1$，该结论便可由定理 3.10 得出。反设不然，并假设 xA 整除 Res_{su}(xB, xC)。

注意，对于 V(**xA**) $\subseteq \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^3$ 上的任意一点（t_0，v_0，w_0，x_0，y_0，z_0），由于 **xA** 整除 Res_{su}(**xB**，**xC**)，该结式在此点也为零。因此存在一点（s_0，u_0）$\in \mathbb{P}^1$，使得 **xB** 和

$\mathbf{xC}$ 在（s_0，u_0，t_0，v_0，w_0，x_0，y_0，z_0）处为零。由于 $\mathbf{xA}$ 是 $\mathbb{K}[t,v,w,x,y,z]$ 中的一个多项式，我们注意到它在 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3$ 中该点处也为零。

我们声称，可以假设上面的点满足 $g_0(t_0,v_0)\neq 0$。由于我们只需证明在 $V(\mathbf{xA})$ 上存在一个坐标如上且满足此条件的点，反设对所有点 $(t_0,v_0,w_0,x_0,y_0,z_0)\in V(\mathbf{xA})$，都有 $g_0(t_0,v_0)=0$。由于 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}$、$N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}$ 和 $N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}$ 分别是 A、B 和 C 的倍数，并且运动平面 xA、xB 和 xC 在上面的点处都为零，根据 (3.2)，我们得到以下方程组

$$\begin{cases}(g_0a_0-g_1a_1-g_2a_2-g_3a_3)w_0=0\\(g_0b_0-g_1b_1-g_2b_2-g_3b_3)w_0=0\\(g_0c_0-g_1c_1-g_2c_2-g_3c_3)w_0=0\end{cases}\tag{4.3}$$

在 $(s_0,\ u_0,\ t_0,\ v_0)$ 处取值时，其中系数为$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$的各个分量 .

With (4.3) 上面，注意，若 $w_0=0$，则 $(w_0,\ x_0,\ y_0,\ z_0)$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的一个无穷远点。若 $w_0\neq 0$，则，由于 $g_0(t_0,\ v_0)=0$ b 根据假设，我们有以下矩阵方程

$$\begin{bmatrix}a_1&a_2&a_3\\b_1&b_2&b_3\\c_1&c_2&c_3\end{bmatrix}_{(s_0,u_0)}\begin{bmatrix}g_1\\g_2\\g_3\end{bmatrix}_{(t_0,v_0)}=0.\tag{4.4}$$

由于 $g_0(t_0,v_0)=0$，且 g 是一条曲线，因此没有基点，因为 gcd g $=1$，故 t_0,v_0 处的 g_1、g_2、g_3 至少有一个不为零。因此，(4.4) 中 3×3 矩阵的行列式必为零。然而，根据定理 2.2，该行列式恰好是 $f_0(s_0,u_0)$。由于 $f_0(s_0,u_0)=0$ 且 $g_0(t_0,v_0)=0$，根据定理 2.5，(s_0,u_0,t_0,v_0) 是 h 的一个基点。

由上述讨论可知，若对于每个点 $(t_0,v_0,w_0,x_0,y_0,z_0)\in V(\mathbf{xA})$，都有 $g_0(t_0,v_0)=0$，则 $V(\mathbf{xA})$ 上的每个此类点，要么对应于 h 的一个基点，要么对应于 $\mathbb{P}^3$ 中的一个无穷远点。然而，这是不可能的，因为 xA 整除 Res$_{su}$(xB, xC)，且随 h 而来，因此它不可能是由基点或无穷远处的异常 [24] 所产生的该结式的多余因子。因此，我们可以假设，对于上文所述的点 $(t_0,v_0,w_0,x_0,y_0,z_0)\in V(\mathbf{xA})$，有 $g_0(t_0,v_0)\neq 0$，因为这样一个点必定存在。

由此，固定 (t_0,v_0)，并考虑平面 $V\big(\mathbf{xA}(t_0,v_0)\big)\subseteq\mathbb{P}^3$，注意到 A 的元素属于 $\mathbb{K}[t,v]$。由于 xA 整除 Res$_{su}$(xB, xC)，重复前面的论证可知，对于任意满足 $\in V\big(\mathbf{xA}(t_0,v_0)\big)$ 的点 (w_0,x_0,y_0,z_0)，存在一点 (s_0,u_0)，使得 xA、xB 和 xC 在 $\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^3$ 中的点 $(s_0,u_0,t_0,v_0,w_0,x_0,y_0,z_0)$ 处同时为零。由于 $g_0(t_0,v_0)\neq 0$，由定理 3.5 可知，点 (w_0,x_0,y_0,z_0) 位于曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 上。特别地，由此可知，平面 $V\big(\mathbf{xA}(t_0,v_0)\big)\subseteq\mathbb{P}^3$ 上的每一点都必须位于曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 上。然而，只有当 $V\big(\mathbf{xA}(t_0,v_0)\big)$ 本身就是曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 时，这才可能成立，因此 $\mathbf{xA}(t_0,v_0)$ 是隐式方程。不过，h 参数化了由曲线 f 和 g 生成的平移曲面，而 $X_{\mathbf{h}}=V\big(\mathbf{xA}(t_0,v_0)\big)$ 是 $\mathbb{P}^3$ 中的一个平面。只有当 f 和 g 都是 $\mathbb{P}^3$ 中的直线时，这才可能成立；但根据定理 4.2，这与 dim$_{\mathbb{K}}$f $=3$ 矛盾。□

我们注意到，为了合并定理 4.4 和定理 4.6，也可以改为假设 dim$_{\mathbb{K}}$f ≤ 3。在这种情况下，上述证明过程类似，并且可得 f 和 g 都必须是 $\mathbb{P}^3$中的直线，因此根据定理 4.2，dim$_{\mathbb{K}}$f $=2$。然而，根据定理 4.4 的证明，矛盾随即由 Res$_{su}$(xB, xC) $=$(xB)^m 得出，因此根据定理 3.7，xA 不可能整除 Res$_{su}$(xB, xC)。

注 4.7. 请注意，定理 4.6 的证明表明，$\mathbf{xA}$ 不整除 Res$_{su}$($\mathbf{xB}$,$\mathbf{xC}$)。由于$\mathbf{xA}$ 根据定理 3.7是不可约的，因此也可以计算 Res$_{tv}$($\mathbf{xA}$,Res$_{su}$($\mathbf{xB}$,$\mathbf{xC}$))，由此可知其非零，因此隐式方程 F 必定是它的某个因子。然而，按照结式的性质 (3.5)，先去除 Res$_{su}$($\mathbf{xB}$,$\mathbf{xC}$) 中不必要的因子会更简单。

注记 4.8。如定理 4.3之前所述，我们有 dim$_{\mathbb{K}}$f $=2$ 在 $m=1$时自动成立。类似地，当$_{\mathbb{K}}$ f ≤ 3 如果 $m=2$，则同样可得 dimf 是 $\mathbb{K}$的一个子空间 $\big[\mathbb{K}[s,u]\big]_2=\mathbb{K}s^2\oplus\mathbb{K}su\oplus\mathbb{K}u^2$。特别地，定理 4.4 和定理 4.6 可用于计算任意平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 在双次数为 $(m,n$时的隐式方程，只要满足 $m\leq 2$ 或 $n\leq 2$，这由对称性可知。

为了展示定理 4.6的有效性，我们考虑一个平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$，其参数化为$\mathbf{h}$：$\mathbb{P}^1\times\mathbb{P}^1\dashrightarrow\mathbb{P}^3$，它具有定理 2.6中所述的基点。因此，[11, 3。4] 无法

应用。然而，我们证明定理 4.6 能够成功求出隐式方程，而且计算中所需的矩阵相对较小。

例 4.9 ([11, 3.7])。考虑由以下曲线生成的平移曲面：$\mathbf{f}: \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 和$\mathbf{g}: \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 定义为

$$\mathbf{f} = (s^3, 0, s^2u, u^3), \qquad \mathbf{g} = (t^2, tv, 0, -v^2).$$

相应的平移曲面$\mathbf{h}: \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ 定义为

$$\mathbf{h} = (2s^3t^2, s^3tv, s^2ut^2, -s^3v^2 + u^3t^2).$$

如 [11, 3.7], 中所述，参数化 h 只有一个基点 $p = (1, 0, 1, 0) \in \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$，其重数为 9。此外，由于 $\mathbf{f}(1, 0) = (1, 0, 0, 0) = -\mathbf{g}(1, 0)$，我们看到 p 是定理 2.6 中所述的基点，因此 [11, 3.4] 的隐式化方法会失效。然而，我们证明，定理 4.6 确实能够求出 h 的隐式方程。

我们注意到$\mathbf{f}$ 是一条平面曲线，因为它位于平面 $V(x) \subseteq \mathbb{P}^3$上，这从其参数化可以看出。计算 $N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}}$，我们有

$$N_{\mathbf{g}}\varphi_{\mathbf{f}} = \begin{bmatrix} \frac{t^2}{2} & -\frac{tv}{2} & 0 & \frac{v^2}{2} \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -u & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & s & -u^2 \\ 0 & 0 & s^2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -tv & -ut^2 & s^2v^2 \\ 2t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2st^2 & -2u^2t^2 \\ 0 & 0 & 2s^2t^2 \end{bmatrix}.$$

将$\mathbf{a}$、$\mathbf{b}$和$\mathbf{c}$ 记为上文 $\varphi_{\mathbf{f}}$ 的列，我们看到最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{a}) = t$、最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{b}) = t^2$以及最大公因式$(N_{\mathbf{g}}\mathbf{c}) = 1$。因此，在将每一列除以其各项的最大公因式之后，我们可以构造移动平面

$$\begin{aligned} \mathbf{xA} &= -vw + 2tx \\ \mathbf{xB} &= -uw + 2sy \\ \mathbf{xC} &= s^2v^2w - 2u^2t^2y + 2s^2t^2z. \end{aligned}$$

由上述方程，并且根据定理 3.4，我们注意到$\mathbf{xB}$是次数为1的多项式，关于 s、u。同样，$\mathbf{xC}$ 是次数为2的多项式，关于 s、u。因此它们的西尔维斯特矩阵是 3×3 矩阵

$$\mathrm{Syl}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC}) = \begin{bmatrix} 2y & -w & 0 \\ 0 & 2y & -w \\ v^2w + 2t^2z & 0 & -2t^2y \end{bmatrix}.$$

因此我们有

$$\mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC}) = \det \mathrm{Syl}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC}) = 2t^2w^2z - 8t^2y^3 + v^2w^3$$

它是不可约的。据此，我们可以计算关于 t、v的第二个西尔维斯特矩阵，注意到$\mathbf{xA}$ 关于 t、v 是线性的，而上述多项式关于 t、v的次数为2。因此我们得到3×3 西尔维斯特矩阵

$$\mathrm{Syl}_{tv}(\mathbf{xA}, \mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC})) = \begin{bmatrix} 2x & -w & 0 \\ 0 & 2x & -w \\ 2w^2z - 8y^3 & 0 & w^3 \end{bmatrix}$$

因此

$$\mathrm{Res}_{tv}(\mathbf{xA}, \mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC})) = \det \mathrm{Syl}_{tv}(\mathbf{xA}, \mathrm{Res}_{su}(\mathbf{xB}, \mathbf{xC})) = 2w^2(2wx^2 - 4y^3 + w^2z).$$

分析该结式的因子可知，平移曲面 $X_{\mathbf{h}}$ 的隐式方程为 $F = 2wx^2 - 4y^3 + w^2z$。

我们注意到，定理 4.9 中的曲线 $\mathbf{g}$ 也 是平面的，因为它位于平面 $V(y) \subseteq \mathbb{P}^3$中。因此，也可以改为计算 $N_{\mathbf{f}}\varphi_{\mathbf{g}}$ 并按照上述方法继续进行。在这种情况下，需要先得到一个关于 2×2 的西尔维斯特矩阵，t，v 然后再得到一个关于 4×4 的西尔维斯特矩阵，s，u从而得到隐式方程。如前所述，这种由位于正交平面内的曲线构造平移曲面的情形，在几何建模中十分常见； [26], 因此，定理 4.6 为常见情形下平移曲面的隐式化问题提供了一个简单的解决方案。

Acknowledgements

使用 Macaulay2 [13] 对本文的准备工作很有帮助，它提供了大量示例来支持本文所 प्रस्तुत的结果。

References

[1] W. A. Adkins, J. W. Hoffman, and H. Wang *Equations of parametric surfaces with base points via syzygies*,《符号计算杂志》39 (2005), 73–101. [2] R. M. Benedicto, S. P´erez-Dıaz, and M. Fernandez de Sevilla, *Implicitization of 3D rational surfaces using iterated univariate resultants and avoiding extraneous factors*, Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fıs. Nat. Ser. A Mat. RACSAM 120 (2026), Paper No. 22, 20. [3] N. Botbol, *The implicit equation of a multigraded hypersurface*, J. Algebra 348 (2011), 381–401. [4] L. Bus´e and B. Mourrain, *Explicit factors of some iterated resultants and discriminants*, Math. Comp. 78 (2009), 345–386. [5] D. Cox, *The moving curve ideal and the Rees algebra*, Theoret. Comput. Sci. 392 (2008), 23–36. [6] D. Cox, R. Goldman, M. Zhang, *On the validity of implicitization by moving quadrics for rational surfaces with no basepoints* **29** 2000 419 440 ,《符号计算杂志》( ), – . [7] D. Cox, J. Little, and D. O'shea, *Using algebraic geometry*,《数学研究生教材》185, 施普林格, 纽约, 2005. [8] E. Duarte and H. Schenck, *Tensor product surfaces and linear syzygies*,《美国数学会会刊》144 (2016), 65–72. [9] D. Eisenbud, *Commutative algebra: with a view toward algebraic geometry*,《数学研究生教材》150, 施普林格出版社, 纽约, 1995. [10] I.M. Gelfand, M.M. Kapranov, and A.V. Zelevinsky, *Discriminants, resultants, and multidimensional determinants*, Mathematics: Theory & Applications, Birkh¨auser, 波士顿, 1994. [11] R. Goldman and H. Wang, *Syzygies for translational surfaces*,《符号计算杂志》89 (2018), 73–93. [12] R. Goldman and H. Wang, *Implicitizing ruled translational surfaces*,《计算机辅助几何设计》59 (2018), 98–106. [13] D. R. Grayson and M. E. Stillman, Macaulay2, 一款用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/ [14] J. Hoffman, H. Wang, and X. Jia, *Minimal generators for the Rees algebra of rational space curves of type*$(1, 1, d-2)$,《欧洲纯粹与应用数学杂志》3 (2010), 602–632. [15] H. Liu, *Translation surfaces with constant mean curvature in 3-dimensional spaces*,《几何学杂志》64 (1999), 141–149. [16] M. L´avi˘cka and J. Vr˘sek, *Translation surfaces and isotropic transport nets on rational minimal surfaces*, Mathematical methods for curves and surfaces,《计算机科学讲义》10521 (2017), 186–201. [17] D. Lazard and S. McCallum, *Iterated discriminants*,《符号计算杂志》44 (2009), 1176–1193. [18] S. McCallum, *Factors of iterated resultants and discriminants*,《符号计算杂志》27 (1999), 367–385. [19] S. P´erez-D´ıaz and L. Shen, *Parameterization of rational translational surfaces*, Theoret. Comput. Sci. 835 (2020), 156–167. [20] H. Schenck, A. Seceleanu, and J. Validashti, *Syzygies and singularities of tensor product surfaces of bidegree*$(2, 1)$, Math. Comp. 83 (2014), 1337–1372. [21] T. W. Sederberg and F. Chen, *Implicitization using moving curves and surfaces*, SIGGRAPH会议论文集 (1995), 301–308. [22] T. W. Sederberg, R. N. Goldman, and H. Du, *Implicitizing rational curves by the method of moving algebraic curves*, J. Symb. Comput. 23 (1997), 153–175. [23] T. W. Sederberg, T. Saito, D. Qi, and K. S. Klimaszewksi, *Curve implicitization using moving lines*,《计算机辅助几何设计》11 (1994), 687–706. [24] L. Shen and R. Goldman, *Strong μ-bases for rational tensor product surfaces and extraneous factors associated to bad base points and anomalies at infinity* **1** 2017 328 351 ,《工业与应用数学学会应用代数与几何杂志》( ), – . [25] L. Shen and R. Goldman, *Combining complementary methods for implicitizing rational tensor product surfaces*, Comput.- Aided Des. 104 (2018), 100–112. [26] X. Shi, X. Wang, and R. Goldman, *Using μ-bases to implicitize rational surfaces with a pair of orthogonal directrices*, Comput. Aided Geom. Design 29 (2012), 541–554. [27] M. Weaver, *Tensor product surfaces and quadratic syzygies*,《线性代数及其应用》720 (2025), 350–371.

School of Mathematical and Statistical Sciences, Arizona State University, Wexler Hall, Tempe AZ 85281
Email address: matthew.j.weaver@asu.edu