arXiv:2602.16993v1 [math.AC] 19 Feb 2026

# 通过极化神经理想的同调不变量研究神经码

SELVI KARA 和 ELLIE LEW

Abstract. 对于神经码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，将神经理想 $J_\mathcal{C}$ 的典范形式生成元 $\mathcal{P}(J_\mathcal{C})$ $\subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$ 极化后，得到一个平方自由单项式理想——极化神经理想，以及与之关联的单纯复形 $\Delta_\mathcal{C}$——极化复形。我们通过 $\Delta_\mathcal{C}$ 的拓扑研究分次不变量 pdim($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$)) 和 reg($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$))，并证明汉明立方体的简单几何特征决定了它们的极值行为。我们证明 reg($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$)) $\leq 2n-1$，且当且仅当从 $\mathbb{F}_2^n$ 中删去一对对跖点对可得到 $\mathcal{C}$ 时等号成立。利用 $\Delta_\mathcal{C}$ 的诱导子复形的连通性，我们得到 pdim($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$)) $\leq 2n-3$，并给出一个达到等号的显式码族，其中每个码都由对跖点对组成。另一方面，我们揭示了最小值背后的立方体几何：reg($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$)) $= 1$ 要求 $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{F}_2^n$ 的坐标子立方体，而 pdim($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$)) $= 0$ 则要求 $\mathcal{C}$ 是其补图。最后，我们构造了若干码族，使固定 $n$ 时 (pdim，reg) 图中很大一片区域都能实现。

## 1. Introduction

组合神经码为神经活动模式提供了一种离散模型。神经码$\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 记录了在刺激作用下哪些 $n$ 神经元子集能够同时活跃。神经码不仅仅是观测到的放电模式列表，还隐含地编码了感受野之间的约束，以及更广泛而言，关于不同实现所共有的底层刺激表征的结构信息。提取这种与实现无关的结构并非易事，而代数为此提供了一种系统的方法。具体而言，Curto 等人 [2]引入了神经理想，将其作为感受野基本关系的一种代数编码；另请参阅 [3, 5, 10] 及其中的参考文献。

对于神经码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，可以关联一个神经理想 $J_\mathcal{C} \subset k[x_1, \ldots, x_n]$。理想 $J_\mathcal{C}$可通过其典范形式 $CF$（$J_\mathcal{C}$）进行研究；这是一组特殊的生成集，由编码极小感受野关系的极小伪单项式组成；该集合生成 $J_\mathcal{C}$（但不一定是极小生成集）。由于神经理想通常不是分次的，我们按照 [6] 的做法，通过对典范形式生成元进行极化，将其转入分次环境：把每个因子（$1-x_i$）替换为一个新变量 $y_i$，从而得到一个平方自由单项式理想

$$\mathcal{P}(J_\mathcal{C}) \subset k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n],$$

$\mathcal{C}$的极化神经理想。这是本文研究的主要代数对象。我们的目标是利用 $\mathcal{P}$（$J_\mathcal{C}$）的同调数据来组织神经码。我们重点关注分次不变量 pdim（$\mathcal{P}$（$J_\mathcal{C}$））和 reg（$\mathcal{P}$（$J_\mathcal{C}$））， 即 $\mathcal{P}$（$J_\mathcal{C}$）的投射维数和 Castelnuovo–Mumford 正则性。

由于 $\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$) 是平方自由的，因此它是某个单纯复形 $\Delta_\mathcal{C}$ 的 Stanley–Reisner 理想，我们称之为极化复形（沿用 [6] 的术语）。特别地， $\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$) 的多重分次 Betti 数，以及由此得到的 pdim($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$)) 和 reg($\mathcal{P}$($J_\mathcal{C}$))，都由[1]

Hochster公式所描述的 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 的诱导子复形的拓扑决定。这一对应关系构成了我们对神经码进行同调研究的基础。

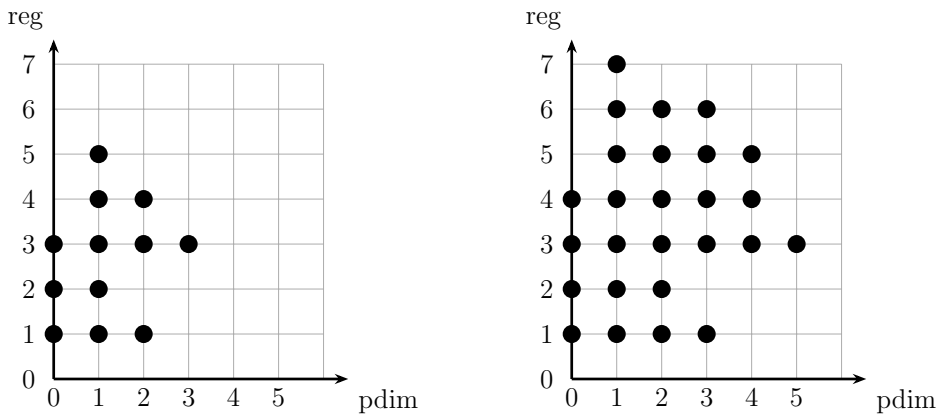
多位作者将单纯复形与神经码联系起来，以研究与本文探讨的同调问题互补的几何和组合性质。例如， [7]引入了极化复形 $\Gamma(\mathcal{C})$，并利用壳性分析稳定超平面码；而 [9] 则定义了因子复形 $\Delta_{\cap}(\mathcal{C})$，以研究区间结构和（极大）交集完备编码。一般而言， $\Gamma(\mathcal{C})$和 $\Delta_{\cap}(\mathcal{C})$均不同于本文所考虑的极化复形 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 。

尽管 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$ 是 $2n$ 个变量上的平方自由单项式理想，但它远非任意：它满足一个背景约束，即没有任何极小生成元可被 $x_i y_i$ 整除。近期， [1] 研究了满足这一条件的平方自由单项式理想的同调性质。我们的方法与 [1]不同，因为我们反复利用了额外的结构： $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$ 是通过极化典范形式生成元得到的，而 [1]中并未施加这一假设。

本文的一个核心主题是，$\mathbf{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}))$ 和 $\mathbf{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}))$ 的极值行为与边界行为受码 $\mathcal{C}$ 所处的汉明立方体 的基本组合特征所支配。全文中，我们所说的汉明立方体 是指顶点集为 $\mathbb{F}_2^n = \{0,1\}^n$ 的 $n$ 维超立方体，并配备汉明距离

$$d(u,v) = |\{i \in [n] : u_i \neq v_i\}|,$$

使得两个 顶点恰好在相差一个坐标时相邻。




(A) $n = 3$ (B) $n = 4$

FIGURE 1. 当 $n$ =3,4 时，极化神经理想的 (pdim,reg) 对可实现。

我们的首批结果从 $\Delta_{\mathcal{C}}$的拓扑出发，给出一般性约束。我们证明，对于每个非空码 $\mathcal{C}$，极化复形 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 都是连通的；更一般地，至少含有 $n+1$ 个顶点的每个诱导子复形都是连通的（定理4.2 和4.3）。这一阈值给出了 $\mathbf{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) \leq 2n-3$ 关于 $n \geq 2$的紧确上界，并且我们展示了多个达到等号的广泛族（定理5.2、5.4 和5.6）。我们还证明了 $\mathbf{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) \leq 2n-1$ 的上界，并对极值情形进行了分类

$$\mathrm{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 2n-1 \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus \{v, \bar{v}\}$$

（定理6.1 和6.6），以及相反的极端情形 reg $= 1$；后者恰好出现在坐标子立方体中（定理 8.1）。

一个反复出现的现象是，汉明立方体几何同时控制着这两个不变量的极值。最小的非零正则性，$\mathrm{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 1$，恰好出现在 $\mathcal{C}$ 为坐标子立方体时（等价地，按定理 7.1 的记号，$\mathcal{C} = Q(\tau, \sigma)$）。相比之下，最小的投射维数 $\mathrm{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 0$，恰好出现在 $\mathcal{C}$ 为非空坐标子立方体的补集时，即 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus Q(\sigma, \tau)$（定理 7.1 和 8.1）。此外，这两个边界族通过亚历山大对偶相关联：$\mathrm{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 1$ 当且仅当$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$由变量生成，而 $\mathrm{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 0$ 当且仅当 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$是主理想；亚历山大对偶会交换这两个类。在另一端，删除一对对跖点会导致正则性达到最大值，而任意对跖对码 $\{v, \bar{v}\}$就足以使投射维数达到最大值。全文中，我们利用固定坐标、取坐标子立方体的补集以及对跖性之间的这种相互作用；这些结果支持了一个更广泛的主题： $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$的同调不变量为研究神经码提供了有用的组织视角。

除了极值分类之外，我们还给出了明确的构造，以实现固定 $n$ 下（*pdim*,reg）图中的大范围区域。我们发展了若干运算（自由神经元扩张和常数神经元扩张），在控制 pdim 和 reg 的同时改变 $n$ （定理 3.6 和 3.7 ）。我们利用汉明立方体中缺失码字的组合模式来控制 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 的拓扑，进而通过 Hochster公式控制贝蒂数。特别地，我们实现了完整区域 $\mathrm{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) + \mathrm{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) \leq n$ （定理 9.2），并对较低的直线 pdim $= 0$,1 和 reg $= 1$, 2,3 上的情形给出了完整的分类与可实现性结果（第 7节和第 8节）。

**文章结构**。 第 2节回顾神经码、神经理想、典范形式、极化和极化复形。第 3节介绍控制 pdim 和 reg 的码运算，第 4 节证明 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 的连通性。第 5 节确立尖锐上界 pdim $\leq 2n - 3$，第 6 节研究正则性，包括最大正则性分类。第 7 节和第 8 节讨论较低的直线 pdim $= 0$、 1 和 reg $= 1$,2、 3，第 9节给出单纯球面构造，实现 pdim $+\mathrm{reg} \leq n$。第 10 节以开放问题作结。

## 2. Preliminaries

本节汇集了全文将用到的背景知识和记号。我们遵循 [2]，的代数框架，该框架引入了神经理想及其典范形式，将其作为感受野（RF）关系的一种极小代数编码。随后，我们回顾神经理想的极化，以及由 [6] 引入的相关极化复形 。

**预备设置 2.1.** 设 $k$ 为一个域。对于 $n \geq 1$，令 $R := k[x_1, \ldots, x_n]$ 且 $S := k[x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n]$，二者均为标准的 $\mathbb{Z}$-分次环，其中 $\deg(x_i) = \deg(y_i) = 1$。记 $[n] = \{1, \ldots, n\}$，并将$\mathbb{F}_2^n = \{0, 1\}^n \subset k^n$视为同一对象。

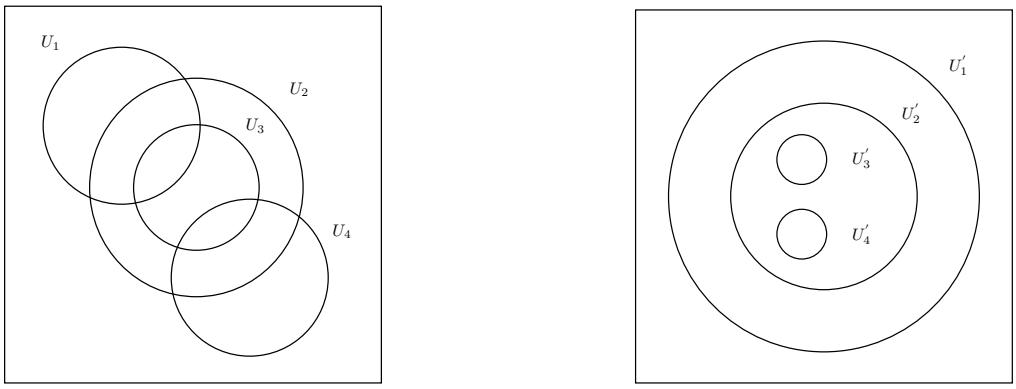
**2.1. 神经码与实现**。 我们研究的许多码都来源于刺激空间 $X$中的一族感受野 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$。由此得到的码记录了哪些放电模式会出现；等价地说，它记录了因某些模式缺失而必然成立的、交集$\bigcap_{i \in \sigma} U_i$ 与并集 $\bigcup_{j \in \tau} U_j$ 之间的哪些集合包含关系。

**定义 2.2**。 由 $n$ 个神经元构成的神经码 是 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 的一个子集，其元素 $\mathbf{c} = (\mathbf{c}_1, \ldots, \mathbf{c}_n)$ 称为码字。第 $i$个坐标 $\mathbf{c}_i$ 表示神经元 $i$ 是否放电：放电时为（$\mathbf{c}_i = 1$），不放电时为（$\mathbf{c}_i = 0$）。

**定义 2.3.** 设 $X \neq \emptyset$ 和 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ 满足 $U_i \subseteq X$。 $\mathcal{U}$的码为

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) := \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n : \left( \bigcap_{\mathbf{c}_i=1} U_i \right) \setminus \left( \bigcup_{\mathbf{c}_j=0} U_j \right) \neq \emptyset \right\}.$$

如果对于某个 $\mathcal{U}$， $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathcal{U})$，我们称 $\mathcal{U}$ 是 $\mathcal{C}$的实现。




(A) 集合 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, U_3, U_4\}$ (B) 集合 $\mathcal{U}' = \{U_1', U_2', U_3', U_4'\}$

FIGURE 2. 在 $\mathbb{R}^2$中的两个感受野集合。

示 **例 2.4.** 对于集合 $\mathcal{U}$ 与 $\mathcal{U}'$ 在图 2中，相应的码为

$$\mathcal{C}(\mathcal{U}) = \{0000, 1000, 0100, 0001, 1100, 1110, 0101, 0111\},$$
$$\mathcal{C}(\mathcal{U}') = \{0000, 1000, 1100, 1101, 1110\}.$$

尽管码 $\mathcal{C}$ 可以有许多实现，该码仍决定了一组必须在每一个实现中成立的受体场关系。这类关系的一个基本族是如下形式的包含关系

$$\bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j, \qquad \sigma, \tau \subseteq [n].$$

2.2. **神经理想与受体场关系**。 神经理想提供了一种以代数方式记录受体场包含关系的方法。我们在多项式环 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 中进行讨论。

**定义 2.5.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 为一个神经码。对于 $v \in \mathbb{F}_2^n$，定义其特征伪单项式

$$\rho_v := \prod_{v_i=1} x_i \prod_{v_j=0} (1 - x_j) \in R.$$

的神经理想 $\mathcal{C}$ 是

$$J_{\mathcal{C}} := \langle \rho_v : v \in \mathbb{F}_2^n \setminus \mathcal{C} \rangle \subseteq R.$$

注释 2.6。 对于每个 $v \in \mathbb{F}_2^n$，伪单项式 $\rho_v$ 满足 $\rho_v(v) = 1$ 且 $\rho_v(w) = 0$，对所有满足 $w \neq v$ 的 $w \in \mathbb{F}_2^n$ 均成立。因此， $J_{\mathcal{C}}$ 在 $\mathbb{F}_2^n$ 上的零点集为

$$V(J_{\mathcal{C}}) = \{w \in \mathbb{F}_2^n : \ f(w) = 0 \text{ for all } f \in J_{\mathcal{C}}\} = \mathcal{C}.$$

另见 [2, 引理 3。2]。

**记号 2.7**。对于 $\sigma \subseteq [n]$， 记作

$$U_\sigma := \bigcap_{i \in \sigma} U_i \qquad \text{and} \qquad x_\sigma := \prod_{i \in \sigma} x_i.$$

下面的定理说明伪单项式如何编码 RF 包含关系。

**定理 2.8**。 [2] 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，并令 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ 为刺激空间$X$中的一个实现。固定 $\sigma$, $\tau \subseteq [n]$，使得 $\sigma \cap \tau = \emptyset$。则

$$x_\sigma \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}} \iff \bigcap_{i \in \sigma} U_i \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j.$$

**记号 2.9.** 我们采用如下约定

$$\bigcap_{i \in \emptyset} U_i = X \qquad \text{and} \qquad \bigcup_{j \in \emptyset} U_j = \emptyset.$$

2.3. **典范形式与第1至第3类关系**。 神经理想由许多特征伪单项式生成，提取一个刻画本质受体场关系的生成集是有用的。在 [2], Curto 等人引入了神经理想的典范形式，并将其关系组织为三类。

**定义 2.10.** 设 $I \subseteq R$ 为一个理想。

- 一个伪单项式 是如下形式的多项式

$$x_\sigma \prod_{j \in \tau} (1 - x_j), \qquad \sigma, \tau \subseteq [n], \ \sigma \cap \tau = \emptyset.$$

- 伪单项式 $f \in I$ 是极小 的，如果 $f$ 的任何真因子都不包含在 $I$中。
- 典范形式 $CF(I)$是 $I$中所有极小伪单项式的集合。

**定理 2.11** ([2, 定理 4。3])。 对于任意神经码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，神经理想 $J_{\mathcal{C}}$ 由其典范形式生成：

$$J_{\mathcal{C}} = \langle CF(J_{\mathcal{C}}) \rangle.$$

此外， $CF(J_{\mathcal{C}})$ 可分解为三种类型的极小关系的不相交并：

- 类型 ***1***： 单项式 $x_\sigma$，编码 $U_\sigma = \emptyset$;
- 类型 ***2***： 伪单项式 $x_\sigma \prod_{i \in \tau}(1 - x_i)$，编码 $U_\sigma \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$;
- 类型 ***3***： 伪单项式 $\prod_{i \in \tau}(1 - x_i)$，编码 $X \subseteq \bigcup_{i \in \tau} U_i$。

注记 2.12。 如果 $f = x_\sigma \prod_{j \in \tau}(1 - x_j) \in CF(J_{\mathcal{C}})$，那么相应的包含关系 $U_\sigma \subseteq \bigcup_{j \in \tau} U_j$ 成立；但若将 $\sigma$ 或 $\tau$ 替换为真子集，则该关系不成立。等价地， $f$ 是 $J_{\mathcal{C}}$ 中关于整除关系极小的伪单项式。参见 [2, 定理 4.3]。

注记 2.13。 典范形式 $CF(J_{\mathcal{C}})$ 是由伪单项式构成的典范生成集：其中的元素在 $J_{\mathcal{C}}$的伪单项式中关于整除关系极小，并且 $J_{\mathcal{C}} = \langle CF(J_{\mathcal{C}})\rangle$。然而，这并不 意味着 $CF(J_{\mathcal{C}})$ 是 $J_{\mathcal{C}}$ 作为通常意义下理想的极小生成集，因为一旦允许使用任意多项式（不一定是伪单项式）， $J_{\mathcal{C}}$ 可能存在元素更少的生成集。

2.4. **极化与极化复形**。 神经理想不一定是齐次的。为了研究分次不变量（分次贝蒂数、正则性、投射维数），需将每个因子 $(1 - x_i)$ 替换为一个新变量 $y_i$，从而得到一个平方自由单项式理想。

**定义 2.14** ([6])。 设 $f = x_\sigma \prod_{j\in\tau}(1 - x_j)$ 是一个伪单项式，其中 $\sigma \cap \tau = \emptyset$。它的极化 是无平方单项式

$$\mathcal{P}(f) := x_\sigma y_\tau \in S.$$

那么，极化神经理想 为

$$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}) := \langle \mathcal{P}(f) : f \in J_{\mathcal{C}} \text{ is a pseudo-monomial } \rangle \subseteq S.$$

**定理 2.15**。 [6, 定理 3。2] 设 $J_{\mathcal{C}} = \langle f_1, \ldots, f_k\rangle$ 是一个典范形式的神经理想，即 $\{f_1, \ldots, f_k\} = CF(J_{\mathcal{C}})$。那么

$$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}) = \langle \mathcal{P}(f_1), \ldots, \mathcal{P}(f_k)\rangle \subseteq S.$$

我们称 当极化神经理想 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$ 按如下方式书写时，它处于典范形式 as

$$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}) = \langle \mathcal{P}(f_1), \ldots, \mathcal{P}(f_k)\rangle.$$

备注 2.16。 [6, 定理 3.5 和推论 4.1] 表明，极化以精确的方式保留了神经理想的代数结构：通过在表示矩阵中代入 $y_i \mapsto (1-x_i)$，可以从 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$ 的极小自由分解恢复出 $J_{\mathcal{C}}$ 的自由分解。

由于 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$ 是平方自由单项式理想，根据斯坦利–赖斯纳理论，它对应于一个单纯复形。

**记号 2.17**。 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$。我们用 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 表示其 Stanley–Reisner 理想为 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}) \subseteq S$ 的单纯复形。我们称 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 为 $\mathcal{C}$ 的极化复形，如 [6] 中所述。

**定义 2.18**。 **</style}平方自由单项式 称为横截**，若对所有 $i \in [n]$ 都有 $x_i y_i \nmid m$ 。等价地，对每个 $i$，单项式 $m$ 至多包含 $x_i$ 和 $y_i$ 中的一个。

对于 $v \in \mathbb{F}_2^n$ 满足 $\sigma(v) = \{i \in [n] : \ v_i = 1\}$，定义相应的横截单项式

$$m_v := x_{\sigma(v)} y_{[n]\setminus\sigma(v)} = \prod_{i\in\sigma(v)} x_i \prod_{i\in[n]\setminus\sigma(v)} y_i.$$

2.5. **分次贝蒂数、投射维数与正则性**。 设 $S$ 为标准 $\mathbb{Z}$-分次多项式环，且 $M$ 为有限生成的 $\mathbb{Z}$-分次 $S$-模。 $M$ 的 极小分次自由分解 具有如下形式

$$0 \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{\ell,j}(M)} \longrightarrow \cdots \longrightarrow \bigoplus_j S(-j)^{\beta_{0,j}(M)} \longrightarrow M \longrightarrow 0,$$

其中整数 $\beta_{i,j}(M)$ 为 分次贝蒂数。等价地，

$$\beta_{i,j}(M) = \dim_k \operatorname{Tor}_i^S(M,k)_j.$$

该 投射 维数 和 ***Castelnuovo–Mumford*** 正则性 的 $M$ 定义为

$$\text{投射维数}(M) := \max\{i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}, \qquad \text{正则性}(M) := \max\{j-i : \beta_{i,j}(M) \neq 0\}.$$

在全文中，若 $I \subseteq S$ 是一个齐次理想，我们将 $I$ 视为一个分次 $S$-模，并将这些定义应用于 $M = I$。

在本文 中，我们利用Hochster公式计算 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$的分次贝蒂数 .

**定理2.19** (Hochster公式). 设 $\Delta$ 是顶点集 $V = \{x_1, \dots, x_m\}$ 上的单纯复形，其***Stanley–Reisner*** 理想为 $I_\Delta \subseteq k[x_1, \dots, x_m]$。则对所有 $i$、 $j$，

$$\beta_{i,j}(I_\Delta) = \sum_{\substack{W \subseteq V \\ |W|=j}} \dim_k \widetilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W; k),$$

~其中 $\Delta_W$ 是 $W$ 上的诱导子复形， $H_*$ 表示约化单纯同调。

我们反复使用下述关于添加新变量的标准事实。

**引理2.20.** 设 $M$ 是有限生成的分次 $S$-模，并设 $z$ 是次数为1的新变量。令 $S' := S[z]$ ，且 $M' := M \otimes_S S'$。则

$$\operatorname{pdim}_{S'}(M') = \operatorname{pdim}_S(M) \qquad \textit{and} \qquad \operatorname{reg}_{S'}(M') = \operatorname{reg}_S(M).$$

此外，对于任意真齐次理想 $J \subsetneq S$，记 $JS' \subseteq S'$ 为它的扩张，则有

$$\operatorname{pdim}_{S'}(JS' + (z)) = \operatorname{pdim}_S(J) + 1, \qquad \textit{and} \qquad \operatorname{reg}_{S'}(JS' + (z)) = \operatorname{reg}_S(J).$$

## 3. Basic operations on codes

本节介绍全文将用到的约定，以及神经码上的两种基本操作。第一种是添加一个 自由神经元（一个可以独立选取的新坐标），第二种是添加一个 常数神经元（一个固定为 0 或 1 的新坐标）。在代数方面，这两种操作分别对应于扩张到新变量，以及（在常数情形下）添加一个新的线性生成元。特别地，这些操作使我们能够在控制（投射维数，正则性）的同时改变神经元的数量。

**设定 3.1.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 为定义在 $n$ 个神经元上的神经码。记 $J_{\mathcal{C}} \subseteq R$ 为其神经理想，并令

$$I = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}) \subseteq S$$

表示极化神经理想。在不会引起混淆时，我们用 $\Delta = \Delta_{\mathcal{C}}$ 表示 $\mathcal{C}$的极化复形，即 $I$的 Stanley–Reisner 复形。

注 3.2. 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 的极化神经理想为 $I = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$，极化复形为 $\Delta = \Delta_{\mathcal{C}}$。

(a) $I$ 的任何极小生成元都不能被 $x_i y_i$整除。

(b) 若 $x_i, y_i \in I$，则去极化得到 $x_i, 1 - x_i \in J_{\mathcal{C}}$。因此 $1 \in J_{\mathcal{C}}$。故 $J_{\mathcal{C}} = R$和 $\mathcal{C} = V(J_{\mathcal{C}}) = \emptyset$。

(c) 理想 $I$ 是平方自由的，且支撑在顶点集 $V(\Delta) \subseteq \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ 上，因此 $|V(\Delta)| \leq 2n$。特别地，对所有 $j > 2n$，$\beta_{i,j}(I) = 0$。

(d) $I$ 的每个极小生成元都是一个横截单项式 $x_\sigma y_\tau$，且满足 $\sigma \cap \tau = \varnothing$。因此，$\deg(x_\sigma y_\tau) = |\sigma| + |\tau| \leq n$，从而 $\beta_{0,\,j}(I) = 0$ 对所有 $j > n$ 均成立。

注 3.3。以下两个退化情形将隐式使用。我们用记号 $2^{[n]}$ 表示定义在 $n$ 个神经元上的所有码字组成的列表。

(a) 若 $\mathcal{C} = 2^{[n]}$，则 $J_\mathcal{C} = (0)$，且 $I = \mathcal{P}(J_\mathcal{C}) = (0)$。

(b) 若 $\mathcal{C} = \varnothing$，则 $J_\mathcal{C} = (1)$，且 $I = \mathcal{P}(J_\mathcal{C}) = S$。因此，$\operatorname{pdim}(I) = 0$，且 $\operatorname{reg}(I) = 0$。事实上，由于每个 $v \in \mathbb{F}_2^n$ 都是非码字，

$$1 = \prod_{i=1}^{n} \big(x_i + (1 - x_i)\big) = \sum_{v \in \mathbb{F}_2^n} \rho_v \in J_\mathcal{C}.$$

注 3.4。当 $n = 1$ 时，非空码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2$ 要么是 $\mathbb{F}_2$、$\{0\}$，要么是 $\{1\}$。若 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2$，则 $I = (0)$。否则，在 $S = k[x_1, y_1]$ 中，

$$\mathcal{P}(J_{\{0\}}) = \langle x_1 \rangle \qquad \text{and} \qquad \mathcal{P}(J_{\{1\}}) = \langle y_1 \rangle,$$

并且在两种情况下，$\operatorname{pdim}(I) = 0$，且 $\operatorname{reg}(I) = 1$。

全文中，我们假设 $n \geq 2$ 且 $\mathcal{C} \neq 2^{[n]}$（等价地，$I \neq (0)$）。

**定义 3.5.** 如果没有任何坐标在 $\mathcal{C}$ 上固定，即对每个 $i \in [n]$，都存在 $c,\ c' \in \mathcal{C}$，使得 $c_i = 1$ 且 $c'_i = 0$，则称 $\mathcal{C}$ 非退化。

等价地，在 的任意实现 $\mathcal{U} = \{U_1, \dots, U_n\}$ 中，$U_i$ 均非空，且不覆盖整个刺激空间 $X$。根据定理 2.8，这等价于要求 $x_i \in J_\mathcal{C}$ 和 $(1 - x_i)$ 均 $\in J_\mathcal{C}$ 不成立。极化后，得到：

$$\mathcal{C} \text{ is nondegenerate} \qquad \Longleftrightarrow \qquad x_i \notin I \text{ and } y_i \notin I \text{ for all } i \in [n].$$

**自由与常数神经元**。设 $R_{n+1} = R[x_{n+1}]$ 和 $S_{n+1} = S[x_{n+1}, y_{n+1}]$。

**引理 3.6.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，并定义自由神经元扩张

$$\mathcal{C}' := \{c0, c1 :\ c \in \mathcal{C}\} = \mathcal{C} \times \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_2^{n+1}.$$

设 $I' = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}'}) \subseteq S_{n+1}$。那么 $\operatorname{pdim}(I') = \operatorname{pdim}(I)$ 且 $\operatorname{reg}(I') = \operatorname{reg}(I)$.

证明。$\mathcal{C}' = \mathcal{C} \times \mathbb{F}_2$ 的非码字恰为 $(\mathbb{F}_2^n \setminus \mathcal{C}) \times \mathbb{F}_2$。因此，神经理想可通过标量扩张得到：

$$J_{\mathcal{C}'} = J_\mathcal{C} \cdot R_{n+1}.$$

因此

$$I' = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}'}) = \mathcal{P}(J_\mathcal{C}) \cdot S_{n+1} = I \cdot S_{n+1}.$$

该等式ualities 投射维数$(I')$ =投射维数$(I)$ and 正则性$(I')$ =正则性$(I)$ follow from Theorem 2.2 0. □

**引理 3.7**。 令 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 并定义常值神经元扩张

$$\mathcal{C}_0' := \{c0 : \ c \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{F}_2^{n+1} \qquad and \qquad \mathcal{C}_1' := \{c1 : \ c \in \mathcal{C}\} \subseteq \mathbb{F}_2^{n+1}.$$

设 $I_0' = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_0'})$ 和 $I_1' = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_1'})$ 属于 $S_{n+1}$。那么

$$\operatorname{pdim}(I_0') = \operatorname{pdim}(I_1') = \operatorname{pdim}(I) + 1 \qquad and \qquad \operatorname{reg}(I_0') = \operatorname{reg}(I_1') = \operatorname{reg}(I).$$

证明。 我们考虑 $\mathcal{C}_0'$; 情形 $\mathcal{C}_1'$ 类似。由于 $\mathcal{C}_0'$ 中的每个码字的最后一个坐标都为 0，因此有 $x_{n+1} \in J_{\mathcal{C}_0'}$。此外，若 $v \notin \mathcal{C}$，则 $(v,0)$ 和 $(v,1)$ 均为 $\mathcal{C}_0'$的非码字。因此 $J_{\mathcal{C}} \cdot R_{n+1} \subseteq J_{\mathcal{C}_0'}$。反过来，若 $w \notin \mathcal{C}_0'$，则要么 $w_{n+1} = 1$ （因此 $\rho_w$ 可被$x_{n+1}$整除），要么 $w =$ （$v$,0），其中 $v \notin \mathcal{C}$ （因此 $\rho_w$ 可被 $\rho_v$整除）。于是

$$J_{\mathcal{C}_0'} = J_{\mathcal{C}} \cdot R_{n+1} + (x_{n+1}).$$

极化后得到

$$I_0' = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_0'}) = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}) \cdot S_{n+1} + (x_{n+1}) = I \cdot S_{n+1} + (x_{n+1}).$$

那么定理 2.20 推出 $\operatorname{pdim}(I_0') = \operatorname{pdim}(I) + 1$ 且 $\operatorname{reg}(I_0') = \operatorname{reg}(I)$。

对于 $\mathcal{C}_1'$，同样的论证表明 $J_{\mathcal{C}_1'} = J_{\mathcal{C}} \cdot R_{n+1} + (1 - x_{n+1})$，而极化将 $(1 - x_{n+1})$ 映射为 $y_{n+1}$，从而得到 $I_1' = I \cdot S_{n+1} + (y_{n+1})$，结论也相同。□

## 4. Polar complex and its connectedness

本节研究极化复形 $\Delta$ 及其诱导子复形的连通性性质。这些关于连通性的结论将被反复用于推出 Hochster公式中某些同调群为零。特别地，我们证明 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 是连通的，并且顶点数足够多的每个诱导子复形都是连通的。

**引理 4.1.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码，其极化复形为 $\Delta$。那么$|V(\Delta)| \geq n$。特别地，若 $|V(\Delta)| = n$，则 $\mathcal{C}$ 仅由一个字组成，且 $\Delta$ 是一个单纯形。

证明. 固定 $i \in [n]$。我们断言， $x_i$ 或 $y_i$ 中至少有一个是 $\Delta$的顶点。事实上，若$x_i$ 和 $y_i$ 都不是顶点，则 $x_i$ 和 $y_i$ 都属于 $I$。根据定理3.2(2)，这将推出$\mathcal{C} = \emptyset$，与假设矛盾。因此 $|V(\Delta)| \geq n$。

现在假设 $|V(\Delta)| = n$。那么对于每个 $i$， $\{x_i, y_i\}$ 中恰有一个是 $\Delta$ 的顶点，因此另一个变量属于 $I$。去极化后可得，对于每个 $i$，要么 $x_i \in J_{\mathcal{C}}$，要么 $(1 - x_i) \in J_{\mathcal{C}}$。由于 $J_{\mathcal{C}}$ 中的每个多项式在 $\mathcal{C}$上都为零，因此对于每个 $i$，第 $i$ 个坐标在 $\mathcal{C}$ 上保持恒定（第一种情况下等于 0，第二种情况下等于 1）。因此， $\mathcal{C}$ 至多包含一个字；又因为 $\mathcal{C} \neq \emptyset$，它恰好由一个字组成。

最后，当 $|V(\Delta)| = n$ 时，理想 $I$ 对每个 $i$都恰好包含 $x_i$， $y_i$ 中的一个，因此由 $n$ 个变量生成。等价地， $\Delta$ 是其顶点集上的单纯形。□

**引理 4.2.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码，其极化复形为 $\Delta$ ，且满足$|V(\Delta)| \geq n + 1$。若 $W \subseteq V(\Delta)$ 满足 $|W| \geq n + 1$，则诱导子复形 $\Delta_W$ 是连通的。

证明。 由于只有 $n$ 个指标，不等式 $|W| \geq n+1$ 意味着 $W$ 至少包含某一对 $\{x_i, y_i\}$中的两个顶点；也就是说，存在 $i \in [n]$ 使得 $x_i, y_i \in W$。因为 $x_i, y_i \in V(\Delta)$，我们有 $x_i$, $y_i \notin I$。此外，没有极化典范形式生成元同时涉及 $x_i$ 和 $y_i$，因此 $x_i y_i \notin I$。于是 $\{x_i, y_i\}$ 是 $\Delta$的一条边，因而也是诱导子复形 $\Delta_W$的一条边。

反设 $\Delta_W$ 不连通，令 $\Gamma$ 为包含边 $\{x_i, y_i\}$的 $\Delta_W$ 的连通分支。选取一个顶点 $u \in W \setminus V$（$\Gamma$）。则 $u$ 在 $\Delta_W$中既不与 $x_i$相邻，也不与 $y_i$相邻。因此，$\{u, x_i\}$ 和 $\{u, y_i\}$ 是 $\Delta_W$的非面，因而也是 $\Delta$的非面。由于 $u$，$x_i$，$y_i \in V$（$\Delta$），单点集是面，所以这些缺失的边是极小非面。因此，二次单项式 $ux_i$ 和 $uy_i$ 属于 $I$。

首先，假设对于某个 $j$，有 $u = x_j$。那么 $x_j x_i \in I$ 和 $x_j y_i \in I$。对 $y_i \mapsto (1 - x_i)$ 进行去极化得到 $x_j x_i \in J_{\mathcal{C}}$ 和 $x_j (1 - x_i) \in J_{\mathcal{C}}$。因此

$$x_j = x_j x_i + x_j(1 - x_i) \in J_{\mathcal{C}}.$$

由于 $x_j$ 是一个伪单项式且 $1 \notin J_{\mathcal{C}}$，它关于整除关系在 $J_{\mathcal{C}}$ 中是极小的。因此，$x_j \in CF(J_{\mathcal{C}})$ 和 $x_j \in I$，这与 $x_j \in V(\Delta)$ 矛盾。

现在假设 $u = y_j$ 对某个 $j$成立。那么 $y_j x_i \in I$ 且 $y_j y_i \in I$。去极化得到 $x_i(1-x_j) \in J_{\mathcal{C}}$以及 $(1 - x_i)(1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}}$。因此

$$(1 - x_j) = x_i(1 - x_j) + (1 - x_i)(1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}}.$$

同样，$(1 - x_j)$ 是 $J_{\mathcal{C}}$ 中极小伪单项式。因此 $(1 - x_j) \in CF(J_{\mathcal{C}})$ 且$y_j \in I$，这与 $y_j \in V(\Delta)$ 矛盾。

因此不存在这样的 $u$，且 $\Delta_W$ 是连通的。 □

**推论 4.3.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码。那么它的极化复形 $\Delta$ 是连通的。

证明。 由定理 4.1 可知 $|V(\Delta)| \geq n$ 和 $\Delta$ 在 $|V(\Delta)| = n$时是连通的。若 $|V(\Delta)| \geq n+1$，应用引理 4.2 于 $W = V(\Delta)$ 可知 $\Delta$ 是连通的。 □

## 5. Maximum Projective Dimension

本节研究极化神经理想的投射维数。我们的首要目标是根据 $n$给出 $\operatorname{pdim}(I)$ 的一个上界，第二个目标则是确定该上界是否是紧的。

注 5.1。 由于 $I \subseteq S$ 是一个由 $2n$ 个变量构成的多项式环中的理想，希尔伯特–Syzygy 定理给出了粗略的上界 $\operatorname{pdim}(I) \leq 2n$。若 $I \neq 0$（即 $\mathcal{C} \neq \mathbb{F}_2^n$），则 $\operatorname{depth}(I) \geq 1$。根据 Auslander–Buchsbaum,

$$\operatorname{pdim}(I) \leq 2n - 1.$$

我们可以如下改进这个上界。

**定理 5.2。** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码。那么

$$\operatorname{pdim}(I) \leq 2n - 3.$$

证明。回忆一下，$V(\Delta) \subseteq V$，其中 $V = \{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$。根据 Hochster公式，如果$\beta_{i,j}(I) \neq 0$，那么存在 $W \subseteq V(\Delta)$，满足 $|W| = j$，使得 $H_{j-i-2}(\Delta_W; k) \neq 0$。

由于 $|V(\Delta)| \leq 2n$，我们有 $j \leq 2n$。若 $i \geq 2n-2$，则 $j - i - 2 \leq 0$。此外，对于 $|W| \geq 1$，诱导复形 $\Delta_W$ 非空。因此，对于所有 $t < 0$，$H_t(\Delta_W; k) = 0$。所以，唯一可能非零的情形是 $(i, j) = (2n-2, 2n)$。

若 $|V(\Delta)| < 2n$，则没有子集 $W \subseteq V(\Delta)$ 满足 $|W| = 2n$，所以 $\beta_{2n-2,2n}(I) = 0$。反之，若 $|V(\Delta)| = 2n$，则唯一这样的子集为 $W = V(\Delta)$，且 $\beta_{2n-2,2n}(I) = \dim_k H_0(\Delta; k)$。由推论 4.3，$\Delta$ 为连通的。因此 $H_0(\Delta; k) = 0$。

因此 $\beta_{i,j}(I) = 0$ 对所有 $i \geq 2n-2$均成立。因此，$\operatorname{pdim}(I) \leq 2n-3$。 □

接下来，我们将极值投射维数与正则性联系起来：达到上界 $\operatorname{pdim}(I) = 2n-3$ 会迫使 $\operatorname{reg}(I)$ 满足一个下界。

**引理5.3**。若 $\operatorname{pdim}(I) = 2n-3$，则 $\beta_{2n-3,2n}(I) \neq 0$。特别地，在此情形下，$\operatorname{reg}(I) \geq 3$。

证明。由于 $\operatorname{pdim}(I) = 2n-3$，存在 $j$，使得 $\beta_{2n-3,j}(I) \neq 0$。根据 Hochster公式，存在一个子集 $W \subseteq V(\Delta)$，满足 $|W| = j$，使得 $H_{j-2n+1}(\Delta_W; k) \neq 0$。

因为 $W \subseteq V(\Delta)$，诱导复形 $\Delta_W$非空。因此，对于 $t < 0$，$H_t(\Delta_W; k) = 0$。所以 $j - 2n + 1 \geq 0$，从而 $j \geq 2n-1$。另一方面，$j \leq |V(\Delta)| \leq 2n$。因此，$j = 2n-1$ 或 $j = 2n$。

如果 $j = 2n-1$，那么 Hochster公式推出 $H_0(\Delta_W; k) \neq 0$，因此 $\Delta_W$不连通。然而 $|W| = 2n-1 \geq n+1$，而定理 4.2 断言，每个至少含有$n+1$ 个顶点的诱导子复形都是连通的，矛盾。因此 $j \neq 2n-1$。所以 $j = 2n$ 并且

$$\beta_{2n-3,2n}(I) \neq 0.$$

因此，$I$ 的正则性 $\geq j - (2n-3) = 3$。 □

接下来，我们确定哪些神经码类别能达到定理 5.2给出的上界。

**定理 5.4**。设 $\mathcal{C}_0 = \{00\cdots0, 11\cdots1\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$。那么

$$\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_0})) = 2n-3 \qquad \textit{and} \qquad \operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_0})) = 3.$$

我们将 $\mathcal{C}_0$ 称为个神经元上的“全或无码”，因为所有神经元要么同时放电，要么都不放电。

证明。设 $J = J_{\mathcal{C}_0}$和 $I = \mathcal{P}(J)$。由于 $\mathcal{C}_0 = \{0^n, 1^n\}$，每个非码字 $w \notin \mathcal{C}_0$至少有一个坐标等于 1，且至少有一个坐标等于 0。因此，对于每个 $w \notin \mathcal{C}_0$，特征伪单项式 $\rho_w$ 都能被某个有序对 $i \neq j$ 对应的 $x_i(1-x_j)$ 整除，其中 $w_i = 1$ 且 $w_j = 0$。于是

$$J = \langle \rho_w : w \notin \mathcal{C}_0 \rangle \subseteq \langle x_i(1-x_j) : i \neq j \rangle.$$

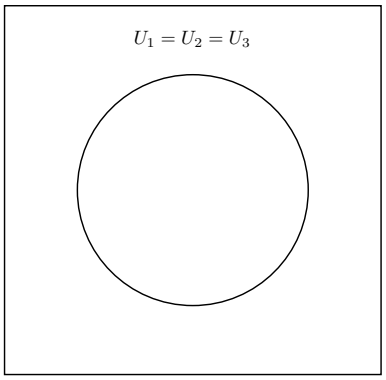



FIGURE 3. 全或无码 $\mathcal{C}_0 = \{000, 111\}$ 的实现，适用于 $n = 3$

对于反向包含，固定 $i \neq j$，并对所有满足 $(w_i,\ w_j) = (1,\ 0)$ 的字求和：

$$\sum_{w:\ w_i=1,\ w_j=0} \rho_w = x_i(1-x_j) \prod_{k\neq i,j} \big(x_k + (1-x_k)\big) = x_i(1-x_j).$$

由于每个加项 $\rho_w$ 都对应一个非码字，因此对于所有 $i \neq j$，$x_i(1-x_j) \in J$。所以

$$J = \langle x_i(1-x_j) : i \neq j \rangle.$$

特别地，这些生成元是极小的：没有线性伪单项式属于 $J$，因为 $\mathcal{C}_0$是非退化的，而 $x_i(1-x_j)$ 仅有线性伪单项式因子。因此，$CF(J) = \{x_i(1-x_j) : i \neq j\}$。极化将 $(1-x_j)$ 映射为 $y_j$，所以

$$I = \mathcal{P}(J) = \langle x_i y_j : i \neq j \rangle.$$

因此，$I$是二分图 $G$在 $\{x_1, \ldots, x_n\} \sqcup \{y_1, \ldots, y_n\}$上的边理想，其中除 $n$ 条匹配边 $\{x_i, y_i\}$外，所有边都存在。等价地，Stanley–Reisner 复形$\Delta = \Delta_{\mathcal{C}_0}$有两个 $(n-1)$-单形 $[x_1, \ldots, x_n]$和 $[y_1, \ldots, y_n]$，还有 $n$条边 $[x_i, y_i]$，它们各自都是极大面。

现在我们证明 $\operatorname{pdim}(I) = 2n-3$。$\operatorname{pdim}(I) \leq 2n-3$的上界由定理 5.2给出。要证明反向不等式，只需证明 $\beta_{2n-3,2n}(I) \neq 0$。根据Hochster公式，

$$\beta_{2n-3,2n}(I) = \dim_k \widetilde{H}_{2n-(2n-3)-2}(\Delta; k) = \dim_k \widetilde{H}_1(\Delta; k).$$

因此，只需在 $\widetilde{H}_1(\Delta; k)$ 中找到一个非零类。

固定互异的 $i, j$，并考虑 $W = \{x_i, x_j, y_i, y_j\}$ 上的诱导子复形。在 $\Delta_W$ 中，边

$$[x_i, x_j],\ [x_j, y_j],\ [y_j, y_i],\ [y_i, x_i]$$

存在，而交叉边 $[x_i, y_j]$ 和 $[x_j, y_i]$ 不存在，因为 $x_i y_j$ 和 $x_j y_i$ 是 $I$的生成元。因此，$\Delta_W$是一个没有 2-面的 4-圈。令 $z \in C_1(\Delta; k)$ 为相应的 1-循环

$$z = [x_i, y_i] + [y_i, y_j] + [y_j, x_j] + [x_j, x_i].$$

于是 $z \in \ker \partial_1$。此外，$\Delta$ 的每个 2-单纯形都完全位于 $x$-单纯形中，或完全位于 $y$-单纯形中。特别地，任意 2-链的边界仅支撑在 $x$之间的边上，或仅支撑在 $y$之间的边上。由于 $z$ 包含混合边 $[x_i, y_i]$和 $[x_j, y_j]$，且其系数非零，因此它不可能属于 $\operatorname{im}(\partial_2)$。于是 $[z] \neq 0$ 属于 $H_1(\Delta;\ k)$。所以 $\beta_{2n-3,\ 2n}(I) \neq 0$，且 $\operatorname{pdim}(I) = 2n-3$。

对于正则性，由于 $I = I(G)$ 是连通二分图的边理想，我们应用 [4,定理 3。1]：有 $\operatorname{reg} I(G) = 3$ 当且仅当补图 $G^c$ 包含长度至少为 4 的诱导圈，且二分补图 $G^{bc}$ 不包含长度至少为 6 的诱导圈。这里 $G^c$ 包含诱导 4-圈

$$x_i - x_j - y_j - y_i - x_i \qquad (i \neq j),$$

且 $G^{bc}$ 恰为完美匹配 $\{\{x_t, y_t\} : \ t \in [n]\}$，因此不含长度为 $\geq 6$ 的诱导圈。因此，$\operatorname{reg}(I) = 3$。□

全有或全无码是对跖点对的一种特殊情形。我们将全有或全无码中观察到的模式推广如下。

**定义 5.5.** 对于 $v \in \mathbb{F}_2^n$，令 $v$ 表示其按位补。我们称

$$\mathcal{C}_v := \{v, \overline{v}\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$$

一个对跖对码。

**推论 5.6**。设 $\mathcal{C}_v = \{v, \bar{v}\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$。则

$$\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_v})) = 2n - 3 \qquad and \qquad \operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_v})) = 3.$$

证明。 固定 $i \neq j$。将 $\mathcal{C}_v = \{v, \bar{v}\}$ 限制到 $\{i, j\}$ 得到 $\{(v_i,\ v_j),\ (1 - v_i,\ 1 - v_j)\}$。因此，$\{i, j\}$ 上恰好缺失两种模式。由定理 2.8，相应的二次伪单项式属于 $J_{\mathcal{C}_v}$，即

$$(\star) \qquad \begin{aligned} v_i = v_j \implies & x_i(1 - x_j),\ x_j(1 - x_i) \in J_{\mathcal{C}_v}, \\ v_i \neq v_j \implies & x_i x_j,\ (1 - x_i)(1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}_v}. \end{aligned}$$

（等价地，每个都可以通过对所有具有相关缺失的二坐标模式的字求和 $\rho_w$ 得到，如定理5.4所示。）

现在令 $w \notin \mathcal{C}_v$。由于 $w \neq v,\ \bar{v}$，取 $i$ 使得 $w_i = v_i$，并取 $j$ 使得 $w_j \neq v_j$。那么，将 $w$ 限制到 $\{i, j\}$，得到上述缺失模式之一。因此，$\rho_w$ 可被 $(\star)$ 中相应的伪单项式整除。于是，$(\star)$ 中这些伪单项式生成$J_{\mathcal{C}_v}$。由于 $\mathcal{C}_v$是非退化的，$J_{\mathcal{C}_v}$中不含线性伪单项式。因此，这个生成集关于整除关系极小，故等于 $CF(J_{\mathcal{C}_v})$。

极化得到，$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_v})$ 由相应的二次单项式 $x_i y_j$、$x_j y_i$、$x_i x_j$、$y_i y_j$ 生成。设 $T = \{i \in [n] : \ v_i = 1\}$。定义

$$a_i = \begin{cases} x_i, & i \notin T, \\ y_i, & i \in T, \end{cases} \qquad b_i = \begin{cases} y_i, & i \notin T, \\ x_i, & i \in T. \end{cases}$$

于是，我们有 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_v}) = \langle a_i b_j : \ i \neq j \rangle$ 因为

$$a_i b_j = \begin{cases} x_i y_j, & i \notin T,\ j \notin T, \\ x_i x_j, & i \notin T,\ j \in T, \\ y_i y_j, & i \in T,\ j \notin T, \\ y_i x_j, & i \in T,\ j \in T. \end{cases}$$

设 $A = \{a_1, \ldots, a_n\}$ 和 $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$。那么 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_v})$ 是 $A \sqcup B$ 上的二分图的边理想，该图包含除匹配边 $\{a_i, b_i\}$以外的所有边，也就是说，它与

定理 5.4 在重新标记顶点后。因此 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_v})$ 与 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_0})$ 具有相同的分次贝蒂数，而 pdim 和 reg 的所述取值可由定理 5.4得出。□

注记 5.7。 有 $2^{n-1}$ 个不同的对跖对码 $\{v, v\}$ 定义在 $n$ 个神经元上。因此，定理 5.6给出了数量呈指数增长的神经码示例，这些神经码的极化神经理想达到最大投射维数 $2n-3$，同时正则性为 3。

我们以以下问题结束本节。

问题 5.8。 对所有定义在 $n$ 个神经元上的神经码进行分类，使其极化神经理想达到最大投射维数 $2n-3$。

## 6. Maximum Regularity

本节研究极化神经理想的正则性。我们的目标是描述 reg($I$) 可能取值的范围，尤其着重于确定一个紧的上界，并刻画达到该上界的神经码。

**引理 6.1.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是定义在 $n$ 个神经元上的神经码。那么

$$\operatorname{reg}(I) \leq 2n-1.$$

证明. 回顾备注 3.2 (b)，当 $\beta_{i,j}(I) \neq 0$时，$j \leq 2n$。因此，当$i \geq 1$时，$j-i \leq 2n-1$。对于 $i=0$，备注 3.2 (c) 给出 $\beta_{0,j}(I)=0$ 对 $j>n$成立。因此，非零贝蒂数不可能出现在 $j-i>2n-1$时。故 reg($I$) $\leq 2n-1$。□

下一个命题明确指出，极值 reg($I$) $=2n-1$ 必须出现在贝蒂表中的位置。

**命题 6.2.** 若 $\operatorname{reg}(I)=2n-1$，则 $\beta_{1,2n}(I) \neq 0$.

证明. 假设 reg($I$) $=2n-1$。那么存在 $i, j$ 使得 $\beta_{i,j}(I) \neq 0$ 且 $j-i=2n-1$。由备注 3.2 (b)，我们有 $j \leq 2n$，因此 $i \leq 1$。若 $i=0$，则 $j=2n-1>n$，这与备注 3.2 (c) 矛盾。因此 $(i, j)$ =(1, 2$n$) 且 $\beta_{1,2n}(I) \neq 0$。□

**Le引理 6.3.** 若正则性($I$) $=2n-1$，则 $\mathcal{C}$ 不包含一对对跖点 $\{v, v\} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ .

证明。 假设正则性($I$) $=2n-1$。由定理6.2 可知 $\beta_{1,2n}(I) \neq 0$。因此存在一个次数为 $2n$ 的无平方单项式 $u$，满足 $\beta_{1,u}(I) \neq 0$。于是，$u=x_1 \cdots x_n y_1 \cdots y_n$。对于单项式理想，同调次数 1 中出现的多重次数 $u$ 是两个极小生成元的最小公倍数。因此存在极小生成元 $m_1, m_2 \in I$，使得$u=\operatorname{lcm}(m_1, m_2)$。

回忆一下，$I$ 的每个极小生成元都是横截的（没有生成元能被 $x_i y_i$ 整除）。因此，对每个 $i \in [n]$，$x_i$, $y_i$ 中恰有一个整除 $m_1$，而 $m_2$ 包含另一个。特别地，deg($m_1$) =deg($m_2$) $=n$，且存在 $\sigma \subseteq [n]$ 使得

$$m_1=x_\sigma y_{[n]\setminus\sigma}, \qquad m_2=x_{[n]\setminus\sigma} y_\sigma.$$

令 $v \in \mathbb{F}_2^n$ 由以下条件定义：$v_i=1$ 当且仅当 $i \in \sigma$。则 $m_1=\mathcal{P}(\rho_v)$ 且 $m_2=\mathcal{P}(\rho_{\bar{v}})$。由于 $\rho_w \in J_{\mathcal{C}}$当且仅当 $w \notin \mathcal{C}$，因此得到 $v, \bar{v} \notin \mathcal{C}$。□

**引理 6.4**。令 $v \in \mathbb{F}_2^n$ 并写作 $\sigma = \{i : \ v_i = 1\}$。假设 $\rho_v = x_\sigma \prod_{j \notin \sigma}(1 - x_j)$ 是 $J_\mathcal{C}$ 中的一个极小伪单项式（即 $\rho_v$ 的任何真因子都不属于 $J_\mathcal{C}$）。则 $v \notin \mathcal{C}$，且与 $v$ 的汉明距离为1 的每个码字都属于 $\mathcal{C}$。

证明。由于 $\rho_v \in J_\mathcal{C}$ 与 $\rho_v(v) = 1$，我们有 $v \notin V(J_\mathcal{C}) = \mathcal{C}$。

固定一个指标 $t \in [n]$。定义

$$f_t := \begin{cases} \rho_v / x_t, & \text{if } t \in \sigma (v_t = 1), \\ \rho_v / (1 - x_t), & \text{if } t \notin \sigma (v_t = 0). \end{cases}$$

于是 $f_t$ 是 $\rho_v$ 的真因子，并且由极小性有 $f_t \notin J_\mathcal{C}$。注意到 $f_t \notin J_\mathcal{C}$ 蕴含存在 $c^{(t)} \in \mathcal{C}$，使得 $f_t$ 在其上取值为1，这意味着 $c$ 满足由 $f_t$编码的坐标约束。等价地，对所有 $i \neq t$都有 $c_i^{(t)} = v_i$。由于 $v \notin \mathcal{C}$，我们有 $c^{(t)} \neq v$，因此 $c^{(t)}$ 与 $v$ 恰好在第 $t$个坐标上不同。故 $c^{(t)}$ 是由$v$ 翻转第 $t$个比特而得到的。从而 $c^{(t)}$ 是 $v$ 的一个汉明邻点，且位于 $\mathcal{C}$中。由于 $t$ 是任意的， $v$ 的每个汉明邻点都属于 $\mathcal{C}$。□

**推论 6.5.** 假设 $\operatorname{reg}(I) = 2n - 1$。那么 $\mathcal{C}$ 不包含对跖点对 $\{v, \bar{v}\}$，且 $v$ 和 $\bar{v}$ 的每个汉明邻点都属于 $\mathcal{C}$。

证明. 由定理 6.3 及其证明可知， $\mathcal{C}$ 不包含对跖点对 $\{v, \bar{v}\}$，并且$\mathcal{P}(\rho_v)$ $\mathcal{P}(\rho_{\bar{v}})$是 $I$的极小生成元。特别地， $\rho_v$ 和 $\rho_{\bar{v}}$ 是 $J_\mathcal{C}$中的极小伪单项式。否则，某个 $f \in CF(J_\mathcal{C})$会真整除 $\rho_v$ （分别是 $\rho_{\bar{v}}$），进而 $\mathcal{P}(f)$会真整除 $\mathcal{P}(\rho_v)$（分别是 $\mathcal{P}(\rho_{\bar{v}})$），这与 $I$中的极小性矛盾。然后对 $\rho_v$ 和 $\rho_{\bar{v}}$ 应用定理 6.4，即完成证明。□

我们现在证明定理 6.1 中的上界是紧的，并对所有达到该上界的码进行分类。

**定理 6.6**。设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码。那么以下各条件等价 *t:*

*(1)* 正则性$(I) = 2n - 1$;

*(2)* $I$ 由两个互补的 $n$ 次单项式极小生成

$$I = \langle x_\sigma y_{\sigma^c}, x_{\sigma^c} y_\sigma \rangle$$

对某个 $\sigma \subseteq [n]$;

*(3)* $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus \{v, \bar{v}\}$ 对某个 $v \in \mathbb{F}_2^n$。

特别地，如果 $\operatorname{reg}(I) = 2n - 1$，那么 $\operatorname{pdim}(I) = 1$。

证明。令 $V = \{x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n\}$。

(2) $\Rightarrow$ (1): 假设 $I = \langle m_1, \ m_2 \rangle$ 且 $m_1 = x_\sigma y_{\sigma^c}$ 以及 $m_2 = x_{\sigma^c} y_{\sigma^c}$。则 $\gcd(m_1, \ m_2) = 1$, 并且 $I$ 的泰勒分解是极小的。因此， $\operatorname{reg}(I) = \max\{n, 2n - 1\} = 2n - 1$ 且 $\operatorname{pdim}(I) = 1$。

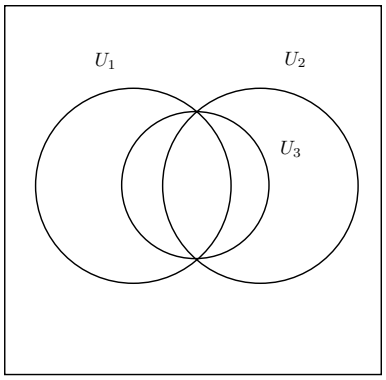



FIGURE 4. $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^3 \setminus \{001, 110\}$的实现

(1) $\Rightarrow$ (2): 假设 $\mathrm{reg}(I) = 2n-1$。根据定理 6.2，我们有 $\beta_{1,\,2n}(I) \neq 0$，并且根据定理 6.3 存在互补的极小生成元

$$m_1 = x_\sigma y_{\sigma^c}, \qquad m_2 = x_{\sigma^c} y_\sigma$$

对于某个 $\sigma \subseteq [n]$。令 $A = \mathrm{supp}(m_1)$ 和 $B = \mathrm{supp}(m_2)$。则 $V = A \sqcup B$ 且 $|A| = |B| = n$。特别地，对于具有 $I = I_\Delta$ 的 Stanley–Reisner 复形 $\Delta$，$V(\Delta) = V$。由于 $m_1$ 和 $m_2$是极小生成元，$A$ 和 $B$ 是 $\Delta$的极小非面。因此，$\Delta$ 的任何面都不能包含全部的 $A$，也不能包含全部的 $B$。等价地，

$$\Delta \subseteq \Delta_0 := \{F \subseteq V : A \nsubseteq F, B \nsubseteq F\}.$$

令 $\Delta_A$ 和 $\Delta_B$ 分别为以 $A$ 和 $B$为顶点集的满单形。则

$$\Delta_0 = \partial(\Delta_A) * \partial(\Delta_B),$$

$\Delta_A$和 $\Delta_B$的边界球面的连接。其极大面恰为 $F_{a,\,b} := V \setminus \{a, b\}$，其中$a \in A$ 且 $b \in B$。特别地，$\Delta_0$ 是一个单纯（$2n-3$）-球面，因此 $H_{2n-3}(\Delta_0; k) \cong k$。

**断言6.7**。$\Delta_0$ 中每个带有 $k$系数的$(2n-3)$-圈都是$\sum_{a\in A, b\in B} F_{a,b}$的一个标量倍。特别地，$\Delta_0$ 中任何非零$(2n-3)$-圈在每个极大面$F_{a,b}$上的系数都非零。

断言6.7的证明。给单纯球面 $\Delta_0$固定一个定向，使得每个脊都包含在两个极大面中，且它们诱导的定向相反。将一个（$2n-3$）-链写作 $z = \sum_{a\in A, b\in B} c_{a,b} F_{a,b}$。固定 $b \in B$和互不相同的 $a, a' \in A$。脊 $R = V \setminus \{a, a', b\}$ 恰好位于两个极大面$F_{a,b}$ 和$F_{a',b}$中，且它们在 $R$ 上诱导的定向相反。因此，$\partial z$ 中 $R$ 的系数是 $\pm(c_{a,b} - c_{a',b})$。若 $\partial z = 0$，则$c_{a,b} = c_{a',b}$。因此，对于固定的 $b$，系数$c_{a,b}$ 与 $a$无关。对称地（固定 $a$并改变 $b$）可得，系数也与 $b$无关。因此，所有$c_{a,b}$ 都等于同一个标量 $\lambda$，断言得证。□

如果 $\Delta \neq \Delta_0$，则 $\Delta$ 遗漏了 $\Delta_0$的某个面$F_{a,\,b}$。设 $z$ 为 $\Delta$中的任意一个$(2n-3)$-圈。将$z$ 视为 $\Delta_0$ 中的一个$(2n-3)$-链（通过对 $\Delta_0 \setminus \Delta$的每个面赋予系数0），我们得到 $\Delta_0$ 中的一个$(2n-3)$-圈，其在$F_{a,\,b}$上的系数为0。由断言6.7，这迫使 $z = 0$。因此$H_{2n-3}(\Delta; k) = 0$。在$(i, j) = (1, 2n)$处应用Hochster公式，并利用唯一的

满足 $|W| = 2n$ 的子集 $W \subseteq V$是 $W = V$，我们得到

$$\beta_{1,2n}(I) = \dim_k \widetilde{H}_{2n-3}(\Delta; k) = 0,$$

与 $\beta_{1,2n}(I) \neq 0$ 矛盾。因此 $\Delta = \Delta_0$。所以 $A$ 和 $B$ 是 $\Delta$的仅有的极小非面。等价地， $I$ 恰有两个极小生成元 $m_1, m_2$，由此证明了 (2)。

(2) $\Rightarrow$ (3)：假设 $I = \langle x_\sigma y_{\sigma^c}, x_{\sigma^c} y_\sigma \rangle$ 是极小的，并记 $m_1 = x_\sigma y_{\sigma^c}$, $m_2 = x_{\sigma^c} y_\sigma$。根据极化和典范形式的定义， $I = \langle \mathcal{P}(f) : f \in CF(J_\mathcal{C}) \rangle$，且每个 $\mathcal{P}(f)$ 都是次数至多为 $n$ 的横截平方自由单项式。由于 $m_1, m_2$是 $I$的仅有的极小单项式生成元，每个 $\mathcal{P}(f)$ 都能被 $m_1$ 或 $m_2$ 整除。次数界 $\deg \mathcal{P}(f) \leq n = \deg(m_i)$ 强制得出 $\mathcal{P}(f) \in \{m_1, m_2\}$。因此 $\underline{C}F(J_\mathcal{C}) = \{\rho_v, \rho_v\}$，其中 $v_i = 1$当且仅当 $i \in \sigma$。

现在令 $w \notin \mathcal{C}$。那么 $\rho_w \in J_\mathcal{C}$。在 $J_\mathcal{C}$ 中整除 $\rho_w$ 的伪单项式因子里，选取一个关于整除关系极小的因子。这个因子属于 $CF(J_\mathcal{C})$，因此它是 $\rho_v$ 或 $\rho_v$，特别地，它整除 $\rho_w$。由于特征伪单项式在每个坐标中恰好包含来自 $\{x_i, 1 - x_i\}$ 的一个因子，整除关系 $\rho_u \mid \rho_w$ 蕴含 $u = w$。因此 $w \in \{v, v\}$，且 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus \{v, v\}$。

(3) $\Rightarrow$ (2)：若 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus \{v, v\}$，则 $CF(J_\mathcal{C}) = \{\rho_v, \rho_v\}$，而极化得到 $I = \langle \mathcal{P}(\rho_v)\ \mathcal{P}(\rho_v) \rangle = \langle x_\sigma y_{\sigma^c}, x_{\sigma^c} y_\sigma \rangle$, 其中 $\sigma = \{i : v_i = 1\}$。

最后的陈述投射维数$(I) = 1$ 由(2) $\Rightarrow$(1)推出。 □

## 7. Small projective dimension: 投射维数$(I) \leq 1$

在本节中，我们研究投射维数较小的极化神经理想。我们首先对码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 进行分类，其中投射维数$(I) = 0$，然后给出一族投射维数$(I) = 1$ 且其正则性取值遍及 $[1, 2n-1]$的码。

**7.1. 投射维数为0的神经码分类**。我们首先对神经码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 进行分类，其极化神经理想 $I$ 的投射维数为0。

**定理 7.1.** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 为一个神经码。则下列各项等价：

*(1)* 投射维数$(I) = 0$; *(2)* $I$ 是主理想；*(3)* 存在不相交子集 $\sigma$、$\tau \subseteq [n]$，且 $\sigma \cup \tau \neq \emptyset$，使得

$$I = \langle x_\sigma y_\tau \rangle;$$

(4) 第 处存在不相交的 $\sigma$、$\tau \subseteq [n]$，使得 $\sigma \cup \tau \neq \emptyset$，其中 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus Q$（$\sigma$、$\tau$)e

$$Q(\sigma, \tau) := \{v \in \mathbb{F}_2^n : v_i = 1\ (i \in \sigma),\ v_j = 0\ (j \in \tau)\}.$$

此外，记作 $r := |\sigma| + |\tau|$，我们有 $1 \leq r \leq n$，且 正则性$(I) = r$。

证明。(1) $\Leftrightarrow$ (2)：有限生成的分次 $S$–模的投射维数为 0，当且仅当它是自由模，即对某个 $d$，有 $I \cong S(-d)$，这等价于 $I$ 是主理想。

(2) $\Leftrightarrow$ (3)：假设 $I = \langle m \rangle$ 是主理想。那么，唯一的极小单项式生成元 $m$按定理 2.18 （平方自由且 $x_i y_i \nmid m$ 对所有 $i \in [n]$）的意义是横截的。记

$$\sigma := \{i : x_i \mid m\}, \qquad \tau := \{j : y_j \mid m\},$$

我们有 $m = x_\sigma y_\tau$ 和 $\sigma \cap \tau = \emptyset$。显然，蕴含关系 (3) $\Rightarrow$ (2) 成立。

(3) $\Rightarrow$ (4)：若 $I = \langle x_\sigma y_\tau \rangle$，则去极化得到

$$J_{\mathcal{C}} = \langle f \rangle \qquad \text{where} \qquad f = x_\sigma \prod_{j \in \tau} (1 - x_j).$$

对于 $v \in \mathbb{F}_2^n$，我们有

$$f(v) = \prod_{i \in \sigma} v_i \cdot \prod_{j \in \tau} (1 - v_j) \in \{0, 1\}.$$

因此，$f(v) = 1$ 当且仅当 $v \in Q(\sigma, \tau)$，否则 $f(v) = 0$。由于 $V(J_{\mathcal{C}}) = \mathcal{C}$，我们得到

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{F}_2^n : f(v) = 0\} = \mathbb{F}_2^n \setminus Q(\sigma, \tau).$$

(4) $\Rightarrow$(3)：假设 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus Q(\sigma, \tau)$，并令 $f = x_\sigma \prod_{j \in \tau}(1 - x_j)$。如果 $v \in Q(\sigma, \tau)$，则 $\rho_v$ 可被 $f$ 整除。因此 $J_{\mathcal{C}} \subseteq \langle f \rangle$。反之，

$$\sum_{v \in Q(\sigma,\tau)} \rho_v = x_\sigma \prod_{j \in \tau} (1 - x_j) \prod_{\ell \notin \sigma \cup \tau} \big(x_\ell + (1 - x_\ell)\big) = f.$$

因此 $f \in J_{\mathcal{C}}$，从而 $J_{\mathcal{C}} = \langle f \rangle$。此外，$f$ 在 $J_{\mathcal{C}}$ 中的伪单项式里关于整除关系极小（去掉任一因子都会得到一个在某个码字上不取零的伪单项式）。因此 $CF(J_{\mathcal{C}}) = \{f\}$，且 $J_{\mathcal{C}} = \langle f \rangle$处于典范形式。极化得到$I = \langle x_\sigma y_\tau \rangle$。

最后，若 $I = \langle x_\sigma y_\tau \rangle$为主理想且在次数 $r$生成：$= |\sigma| + |\tau|$，则其极小自由分解为 $0 \to S(-r) \to I \to 0$，因此正则性$(I) = r$。由于 $\sigma \cap \tau = \varnothing$ 且 $I \neq 0$，我们有$1 \leq r \leq n$。□

7.2. **该投射维数**$(I) = 1$ **情形**。现在我们转而考察投射维数$(I) = 1$这一情形。在我们所构造的族中，极化神经理想由两个平方自由单项式生成，因而其分解仅有一个第一合冲。此时，正则性由这两个生成元的最小公倍数的次数所决定，而这可以直接借助相应缺失词之间的汉明距离加以解释。利用定理3.6中的自由神经元扩张，我们实现每一对$(1, r)$，其中 $r \in [1, 2n - 1]$。

**命题7.2**。固定 $n \geq 3$，并令 $r$ 为满足 $1 \leq r \leq 2n - 1$的整数。存在一个神经码 $\mathcal{C}_r \subseteq \mathbb{F}_2^n$，使得对于 $I_r = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_r})$，有

$$(\operatorname{pdim}(I_r), \operatorname{reg}(I_r)) = (1, r).$$

此外，如果 $r \geq 3$，则可以选择码 $\mathcal{C}_r$ 为非退化码。

证明。对于 $r = 1$，令

$$\mathcal{C}_1 = \{c \in \mathbb{F}_2^n : c_1 = 0, \ c_2 = 1\}.$$

则 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_1}) = \langle x_1, y_2 \rangle$ 且 (投射维数,正则性) $= (1, 1)$。

对于 $r=2$，令

$$\mathcal{C}_2=\{c\in\mathbb{F}_2^n:\ c_1=0 \text{ and not } (c_2=c_3=1)\}.$$

那么 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_2})=\langle x_1,\ x_2x_3\rangle$。因此 (投射维数，正则性) $=(1,\ 2)$。（也可以用一个非退化单纯码实现 (1，2)；相关构造见第8.2 节。）

现在假设 $r\geq 3$。选取整数

$$m:=\left\lceil\frac{r+1}{2}\right\rceil\leq n,\qquad d:=r-m+1,$$

使得 $2\leq d\leq\ m$ 且 $m+d-1=r$。选取互不相同的 $v,\ w\in\mathbb{F}_2^m$，使得 $d_H(v,\ w)=d$ 并定义 e

$$\mathcal{C}^{(m)}:=\mathbb{F}_2^m\setminus\{v,w\}.$$

由于 $\mathcal{C}^{(m)}$ 的非码字恰为 $v$ 和 $w$，我们有 $J_{\mathcal{C}^{(m)}}=\langle\rho_v,\ \rho_w\rangle$。我们断言，$\rho_v$和 $\rho_w$恰好是 $CF(J_{\mathcal{C}^{(m)}})$ 的元素。事实上，$d_H(v,\ w)\geq 2$ 意味着，对于 $v$ 和 $w$ 中的每一个，都存在一个与其汉明距离为 1、且仍为码字的字（例如，翻转 $v$的一个坐标；所得结果既不是 $v$ 也不是 $w$，因为 $w$ 与 $v$ 至少有两个坐标不同）。因此，若 $f$ 是 $\rho_v$ 的一个真伪单项式因子（故 $\deg(f)<m$），则 $f$ 在该相邻码字处不为零，因而 $f\notin J_{\mathcal{C}^{(m)}}$。所以，$\rho_v$ 是 $J_{\mathcal{C}^{(m)}}$中关于整除关系极小的伪单项式；$\rho_w$也同理。因此 $CF(J_{\mathcal{C}^{(m)}})=\{\rho_v,\rho_w\}$。由此可得

$$I_{(m)}:=\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}^{(m)}})=\langle m_v,m_w\rangle,$$

其中 $m_v=x_{\sigma(v)}y_{[m]\setminus\sigma(v)}$ 和 $m_w=x_{\sigma(w)}y_{[m]\setminus\sigma(w)}$ 是次数为 $m$的横截单项式。由于 $m_v$ 和 $m_w$ 次数相同且互不相同，因此二者都不整除对方，所以 $I_{(m)}$由这两个单项式极小生成。因此，$\operatorname{pdim}(I_{(m)})=1$，而由双生成单项式理想的极小分解可得

$$\operatorname{reg}(I_{(m)})=\deg\operatorname{lcm}(m_v,m_w)-1.$$

此外，$\deg\operatorname{lcm}(m_v,\ m_w)=m+d_H(v,\ w)=m+d$：对于 $v$和 $w$相同的每个坐标，$\operatorname{lcm}(m_v,\ m_w)$恰好包含 $\{x_i,y_i\}$中的一个；而对于二者不同的每个坐标，它包含二者。因此，$\operatorname{reg}(I_{(m)})=(m+d)-1=r$。

最后，定义 $\mathcal{C}_r:=\mathcal{C}^{(m)}\times\mathbb{F}_2^{n-m}\subseteq\mathbb{F}_2^n$ 并令 $I_r=\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_r})$。反复应用定理3.6可知，添加自由坐标不会改变投射维数和正则性。因此，$\operatorname{pdim}(I_r)=1$ 且 $\operatorname{reg}(I_r)=r$。

关于非退化性，注意到当从 $\mathbb{F}_2^m$ 中删除两个字时，$m\geq 2$ 无法固定任何坐标：每个坐标在 $\mathbb{F}_2^m$ 上都取两个值，而仅移除两个字后，每个坐标上仍至少有一个码字取 0，且至少有一个码字取 1。因此，$\mathcal{C}^{(m)}$ 是非退化的，其自由扩张 $\mathcal{C}_r$ 也是如此。□

注 7.3. 定理 7.2 中的假设 $n\geq 3$ 之所以必要，仅仅是因为所述范围 $1\leq r\leq 2n-1$ 在 $n=2$ 时包含 $r=2$。在我们针对 $n\geq 3$ 的构造中，我们删除了两个字 $v$、$w\in\mathbb{F}_2^m$，它们满足 $d_H(v、\ w)\geq 2$，这迫使 $\operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathbb{F}_2^m\setminus\{v,w\}}))=m+d_H(v、\ w)-1$。对于 $n=2$，条件 $m\leq n$ 迫使 $m=2$，进而由 $d_H(v、\ w)\geq 2$ 可得 $d_H(v、\ w)=2$。因此，该构造得到 $\operatorname{reg}(I)=3$（删除一对对跖点），但无法得到满足 $I=\mathcal{P}(J_{\mathbb{F}_2^m\setminus\{v,w\}})$ 的 $\operatorname{reg}(I)=2$。若尝试得到 $r=2$，就需要删除汉明邻点（$d_H(v、\ w)=1$），这会迫使出现一个固定坐标，进而使 $I$ 中存在一个线性生成元。因此，根据定理 8.1，$\operatorname{reg}(I)=1$。所以，对于 $n=2$，$(\operatorname{pdim}(I),\operatorname{reg}(I))=(1,2)$ 不会出现。

## 8. Small regularity: 正则性$(I) \leq 3$

本节研究低正则性范围 $\mathrm{reg}(I) \leq 3$ 内的极化神经理想。我们依次讨论 $\mathrm{reg}(I) = 1$，2、3 的情形。对于 $\mathrm{reg}(I) = 2$，我们结合 Hochster公式与极化复形的诱导子复形的连通性判据，得到每个非零真极化神经理想的尖锐上界 $\mathrm{pdim}(I) \leq n-2$，并构造出在此范围内实现每个取值的族。对于 $\mathrm{reg}(I) = 3$，我们给出一个能够实现 $[0, 2n-3]$ 中每个投射维数的族。

**8.1. 正则性为 1 的神经码分类。** 假设 $\mathrm{reg}(I) = 1$。那么 $I$ 具有 1-线性分解，因此由变量生成。对于极化神经理想，这些生成元记录了固定坐标：$x_i \in I$（分别为 $y_i \in I$）表示第 $i$ 个坐标在 $\mathcal{C}$上恒为 0（分别为 1）。这迫使 $\mathcal{C}$ 成为 $\mathbb{F}_2^n$ 的一个坐标子立方体，它由将某些坐标固定为 0、并将另一些不相交的坐标固定为 1 得到。下一个定理将精确说明这种对应关系，并根据固定坐标的数量计算 $\mathrm{pdim}(I)$。

**定理 8.1。** 设 $\mathcal{C} \subset \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码。则以下条件等价：

*(1)* 正则性$(I) = 1$;

*(2)* $I$ 由变量生成，并且在重新标记后，

$$I = \langle x_i : i \in \sigma \rangle + \langle y_j : j \in \tau \rangle \qquad \textit{for some disjoint } \sigma, \tau \subseteq [n];$$

*(3)* $\mathcal{C}$ 是 $\mathbb{F}_2^n$ 的一个子立方体，它通过将某些坐标固定为$0$ ，并将一些不相交的坐标固定为1得到，即

$$\mathcal{C} = \{v \in \mathbb{F}_2^n : v_i = 0 \ \forall i \in \sigma, \ \ v_j = 1 \ \forall j \in \tau\}$$

对于某些不相交的 $\sigma$、 $\tau \subseteq [n]$。

此外，若这些条件成立且 $t := |\sigma| + |\tau|$，则

$$\mathrm{pdim}(I) = t - 1 \leq n - 1,$$

当且仅当 $t = n$时，且$\mathrm{pdim}(I) = n-1$；等价地，当且仅当 $\mathcal{C}$ 由单个码字组成。

证明。$(1) \Rightarrow (2)$: 若 $\mathrm{reg}(I) = 1$，则的每个极小单项式生成元的次数均为 1。因此由变量生成。由于是真理想，它不能同时包含 $x_i$ 和 $y_i$，对任意 $i$ 由定理3.2(2)可知。因此

$$I = \langle x_i : i \in \sigma \rangle + \langle y_j : j \in \tau \rangle$$

对于某些不相交的 $\sigma$，$\tau \subseteq [n]$。

(2) $\Rightarrow$ (1): 反之，任何由变量生成的理想都有 1-线性分解，且 $\mathrm{reg}(I) = 1$。

(2) $\Rightarrow$ (3): 假设 $I = \langle x_i : i \in \sigma \rangle + \langle y_j : j \in \tau \rangle$ with $\sigma \cap \tau = \varnothing$，并令

$$Q := \{v \in \mathbb{F}_2^n : v_i = 0 \ \forall i \in \sigma, \ v_j = 1 \ \forall j \in \tau\}.$$

由于 $x_i \in I$，因此 $x_i \in J_{\mathcal{C}}$。所以对于所有 $c \in \mathcal{C}$，$x_i(c) = c_i = 0$。类似地，$y_j \in I$ 意味着 $(1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}}$。所以对于所有 $c \in \mathcal{C}$，$(1-x_j)(c) = 1 - c_j = 0$。因此 $\mathcal{C} \subseteq Q$。

为了证明相等，假设 $\mathcal{C} \subsetneq Q$，并选择 $u \in Q \setminus \mathcal{C}$。那么 $u$ 是一个非码字，因此 $\rho_u \in J_{\mathcal{C}}$。选择一个整除 $\rho_u$ 的极小伪单项式 $f \in J_{\mathcal{C}}$。根据定义，$f \in CF(J_{\mathcal{C}})$。

我们断言，$\deg(f) \geq 2$。事实上，由于 $u \in Q$，对每个 $i \in \sigma$，都有 $u_i = 0$，因此 $\rho_u$ 可被 $(1 - x_i)$ 整除，但不能被 $x_i$ 整除；而对每个 $j \in \tau$，都有 $u_j = 1$，因此 $\rho_u$ 可被$x_j$ 整除，但不能被 $(1 - x_j)$ 整除。因此，线性伪单项式 $x_i\,(i \in \sigma)$ 或 $(1 - x_j)\,(j \in \tau)$ 均不能整除 $\rho_u$。若 $k \notin \sigma \cup \tau$，则 $x_k$和 $(1 - x_k)$ 均不属于 $J_{\mathcal{C}}$，否则第$k$个坐标在 $Q$上将固定，这与 $Q$的描述相矛盾。因此，$J_{\mathcal{C}}$ 中不存在能整除 $\rho_u$ 的一次伪单项式。故 $\deg(f) \geq 2$。

注意，$\mathcal{P}(f) \in I$。另一方面，(2) 中 $I$ 的变量生成元都不整除 $\mathcal{P}(f)$：如上所述进行同样的整除性检验可知，$x_i (i \in \sigma)$ 和 $y_j (j \in \tau)$ 均不整除 $\mathcal{P}(f)$。这与假设 $I$ 由 $\{x_i$ 生成相矛盾：$i \in \sigma\} \cup \{y_j \colon j \in \tau\}$。因此 $\mathcal{C} = Q$。

(3) $\Rightarrow$(2)：假设 $\mathcal{C}$ 如 (3) 所示，其中 $\sigma$ 和 $\tau$ 分别是固定为 0 和 1 的坐标集合。每个非码字至少违反一个固定坐标，因此每个特征伪单项式$\rho_v$ 都被某个 $x_i\,(i \in \sigma)$ 或某个 $(1 - x_j)\,(j \in \tau)$ 整除。因此

$$J_{\mathcal{C}} \subseteq \langle x_i : i \in \sigma,\ (1 - x_j) : j \in \tau \rangle.$$

反过来，对于 $i \in \sigma$，有

$$\sum_{v : v_i = 1} \rho_v = x_i \prod_{k \neq i} \big(x_k + (1 - x_k)\big) = x_i \in J_{\mathcal{C}},$$

而对于 $j \in \tau$,

$$\sum_{v : v_j = 0} \rho_v = (1 - x_j) \prod_{k \neq j} \big(x_k + (1 - x_k)\big) = 1 - x_j \in J_{\mathcal{C}}.$$

Thus

$$J_{\mathcal{C}} = \langle x_i : i \in \sigma \rangle + \langle (1 - x_j) : j \in \tau \rangle,$$

进行极化可得

$$I = \langle x_i : i \in \sigma \rangle + \langle y_j : j \in \tau \rangle.$$

最后，如果 $I$ 由 $t = |\sigma| + |\tau|$ 个变量生成，那么这些变量上的泰勒分解给出一个长度为 $t - 1$ 的 $I$ 极小自由分解。因此 $\operatorname{pdim}(I) = t - 1 \leq n - 1$。此外，$t = n$ 当且仅当每个坐标都固定，也就是说，当且仅当 $\mathcal{C}$ 只包含一个码字。□

注 8.2. 坐标子立方体决定了投射维数$(I)$ 和正则性$(I)$ 的两种边界行为，具体取决于码本身是否为子立方体或某个子立方体的补集。由定理 8.1，正则性$(I) = 1$ 当且仅当 $\mathcal{C}$ 是通过将某些坐标固定为 0、将某些与之不相交的坐标固定为 1 得到的；等价地，按照定理 7.1 的记号，存在某些互不相交的$\sigma$、$\tau \subseteq [n]$，使得 $\mathcal{C} = Q(\tau, \sigma)$，此时 $I$ 由变量生成。由定理 7.1，投射维数$(I) = 0$ 当且仅当对于某些非空且互不相交的 $\sigma$、$\tau$，有 $\mathcal{C} = \mathbb{F}_2^n \setminus Q(\sigma, \tau)$，此时 $I$为主理想。从这个意义上说，子立方体（及其补集）在（正则性，投射维数）边界上的组织作用，与对跖点对在定理 5.6 和 6.6 所描述的极端角点上的作用相同。

8.2. **正则性** $\operatorname{reg}(I) = 2$ **线。** 现在我们考虑 $\mathbf{reg}(I) = 2$的情况。根据 Hochster公式，贝蒂表仅支撑在线性条带和二次条带上，因此只有极化复形的诱导子复形为空或不连通时才会产生贡献。定理4.2 中的连通性阈值是关键，它决定了何时会出现这种不连通性。

**命题 8.3。** 设 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 是一个非空神经码。若 正则性$(I) = 2$，则

$$\operatorname{pdim}(I) \leq n - 2.$$

证明。 设 $F := \{t \in [n] : \ x_t \in I$ 或 $y_t \in I\}$ 且 $f := |F|$。对于极化神经理想，依据定理 $x_t$ 和 $y_t$ 不能同时属于 $I$ 3.2(2)。因此 $f \leq n$。
设 $S' := \Bbbk[\{x_i, y_i : i \in [n] \setminus F\}]$ 并进行分解

$$I = L + I', \qquad L := \langle x_t : x_t \in I\rangle + \langle y_t : y_t \in I\rangle, \qquad I' \subseteq S',$$

其中 $I'$ 由 $I$ 的其余极小生成元生成。由于正则性$(I) = 2$，我们有$I' \neq 0$。

由定理 2.20 可知

$$\operatorname{reg}_{S'}(I') = 2 \qquad \text{and} \qquad \operatorname{pdim}_S(I) = \operatorname{pdim}_{S'}(I') + f.$$

由于 $I'$ 没有线性生成元，且 $\mathbf{reg}_{S'}(I') = 2$，因此 $I'$ 的所有极小生成元的次数均为 2，且 $I'$ 具有 2-线性分解；等价地，$I'$ 唯一可能非零的贝蒂数位于二次条带上 $j - i = 2$。

令 $\Delta'$ 表示与 $I'$ 相关联的极化复形（等价地，表示从 $\mathcal{C}$ 中删除 $F$中的坐标后得到的限制码的极化复形；事实上，$F$ 中的每个坐标在 $\mathcal{C}$上都是常数）。该限制码是非退化的，因为 $I'$ 不含变量。根据 Hochster公式，若 $\beta_{a,\ a+2}(I') \neq 0$，则存在 $W \subseteq V(\Delta')$，其中 $|W| = a+2$，使得

$$\widetilde{H}_0(\Delta'_W; \Bbbk) \neq 0,$$

即 $\Delta'_W$ 是不连通的。将定理 4.2 应用于定义在 $n - f$ 个神经元上的非退化码可知，只要 $\Delta'_W$， $|W| \geq (n - f) + 1$， $W$就连通。因此，任何能够证明其不连通的 $|W| \leq n - f$都必须满足 $a \leq (n - f) - 2$。由此可得

$$\operatorname{pdim}_S(I) = \operatorname{pdim}_{S'}(I') + f \leq ((n - f) - 2) + f = n - 2,$$

至此，证明完成。 □

注 8.4. 定理 8.3 解释了我们在图 1 中沿着正则性$(I) = 2$ 线观察到的现象。特别是，这解释了为什么对于 $n = 3$，(投射维数$(I)$, 正则性$(I)$) =(3,2) 以及对于 $n = 4$，(投射维数$(I)$,正则性$(I)$) $= (2, 2)$ 都不可能出现。

定理 8.3 描述了沿着正则性 $= 2$ 直线的投射维数允许范围。接下来，我们给出一个显式的码族，实现该直线上的每个 $0 \leq$ 投射维数$(I) \leq n - 2$ 值。

**命题 8.5。** 固定 $n \geq 2$。对于每个满足 $p \in [0, n - 2]$的整数 $p$，存在一个神经码 $\mathcal{C}_{n,\ p} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 使得对于 $I_{n,\ p} := \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_{n,\ p}}) \subseteq S$ 我们有

$$(\operatorname{pdim}(I_{n,p}), \operatorname{reg}(I_{n,p})) = (p, 2).$$

证明。 固定 $p \in \{0,1,\dots,n-2\}$ 并定义

$$\mathcal{C}_{n,p} := \{v \in \mathbb{F}_2^n : \ v_1 = \cdots = v_p = 0 \ \text{ and not } (v_{p+1} = v_{p+2} = 1)\}.$$

回顾可知，$J_{\mathcal{C}_{n,p}}$ 由$v \in \mathbb{F}_2^n \setminus \mathcal{C}_{n,p}$的特征伪单项式生成

$$\rho_v = \prod_{i:v_i=1} x_i \prod_{j:v_j=0} (1 - x_j),$$

并且 $CF(J_{\mathcal{C}_{n,p}})$由$J_{\mathcal{C}_{n,p}}$ 中关于整除关系极小的伪单项式组成。

我们首先证明，对于 $i = 1,\dots,p$，$x_i \in J_{\mathcal{C}_{n,p}}$成立。事实上，$\mathcal{C}_{n,p}$中的每个码字都满足 $v_i = 0$。因此，第 $i$个坐标为1的每个字都是非码字。将它们的特征伪单项式相加，得到

$$\sum_{v:v_i=1} \rho_v = x_i \prod_{k \neq i} \big(x_k + (1 - x_k)\big) = x_i \in J_{\mathcal{C}_{n,p}}.$$

此外，每个 $x_i$ 都是极小的。

接下来我们证明$x_{p+1}x_{p+2} \in J_{\mathcal{C}_{n,p}}$。由于$\mathcal{C}_{n,p}$ 不含任何具有 $v_{p+1} = v_{p+2} = 1$的字，故每个具有 $v_{p+1} = v_{p+2} = 1$ 的字都是非码字，将它们的特征伪单项式求和，即得

$$\sum_{v:v_{p+1}=v_{p+2}=1} \rho_v = x_{p+1}x_{p+2} \prod_{k \notin \{p+1,p+2\}} \big(x_k + (1 - x_k)\big) = x_{p+1}x_{p+2} \in J_{\mathcal{C}_{n,p}}.$$

该伪单项式是极小的，因为$\mathcal{C}_{n,p}$ 包含带有$(v_{p+1}, v_{p+2})$ = (1,0)以及带有(0,1)的字，因此 $x_{p+1}$ 和 $x_{p+2}$ 都不在$J_{\mathcal{C}_{n,p}}$中。

现令$v \notin \mathcal{C}_{n,p}$。则要么对某个 $i \le p$有 $v_i = 1$，此时 $\rho_v$ 可被 $x_i$整除，要么$v_1 = \cdots = v_p = 0$ 且 $v_{p+1} = v_{p+2} = 1$，此时 $\rho_v$ 可被 $x_{p+1}x_{p+2}$整除。因此每个$\rho_v$ 都可被 $x_1,\dots,x_p,x_{p+1}x_{p+2}$之一整除。于是这些伪单项式生成$J_{\mathcal{C}_{n,p}}$，并且根据上述极小性陈述，它们恰好是典范形式。因此

$$I_{n,p} = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_{n,p}}) = \big\langle x_1,\dots,x_p,\ x_{p+1}x_{p+2} \big\rangle.$$

令 $G(I_{n,p}) = \{x_1,\dots,x_p,u\}$，其中 $u := x_{p+1}x_{p+2}$。对任意子集 $A \subseteq G(I_{n,p})$,

$$\operatorname{lcm}(A) = \begin{cases} \prod_{x_i \in A} x_i, & u \notin A, \\ x_{p+1}x_{p+2} \prod_{x_i \in A} x_i, & u \in A. \end{cases}$$

特别地，不同的子集会得到不同的最小公倍数，因此 $I_{n,p}$ 的泰勒分解是极小的，长度为 $p$。因此，$\operatorname{pdim}(I_{n,p}) = p$。

对于大小为 $s$ 的子集 $A$，对应的泰勒基元素位于同调次数 $s-1$。如果 $u \notin A$，则 $\deg(\operatorname{lcm}(A)) = s$；如果 $u \in A$，则 $\deg(\operatorname{lcm}(A)) = s+1$。因此 $\operatorname{reg}(I_{n,\ p}) = 2$。□

8.3. **沿着** $\mathrm{reg}(I) = 3$ **这条直线**。在本小节中，我们通过构造一个灵活的例子族，沿着 $\mathbf{reg}(I) = 3$ 这条直线展开讨论。我们从一个定义在 $m$ 个坐标上的全或无码开始；根据定理 5.4 ，其极化理想满足 $\mathbf{reg}(I) = 3$ 且 $\mathbf{pdim}(I) = 2m - 3$。接着，我们固定 $t$个额外坐标，这会添入 $t$ 个线性生成元，它们涉及的变量与全或无部分中的变量互不相同。此操作在保持正则性的同时，以可控的方式调整投射维数。

**构造 1.** 固定 $n \geq 3$。选取一个划分

$$[n] = A \sqcup B \sqcup F \qquad \text{with} \qquad |A| = m,\ |B| = t,\ |F| = n - m - t,$$

使得 $2 \leq m \leq n$ 和 $0 \leq t \leq n - m$。进一步将 $B = B_0 \sqcup B_1$ 拆分（坐标固定为 **0** 和 **1**）。

通过以下要求定义一个码 $C \subseteq \mathbb{F}_2^n$：

在 $A$ 上，只出现以下两种模式 $0^A$ 和 $1^A$；

在 $B_0$ 上施加条件 $v_i = 0$，并在 $B_1$ 上施加条件 $v_j = 1$;

- 上 $F$ 所有比特都是自由的。

等价地，

$$\mathcal{C} = \left(\{0^A, 1^A\} \times \{0\}^{B_0} \times \{1\}^{B_1} \times \mathbb{F}_2^F\right) \subseteq \mathbb{F}_2^n.$$

注记 8.6。 当 $t > 0$ 时，这种构造含有固定坐标（因此按照我们的定义，该码是退化的），但这对于我们下面计算的同调不变量并无妨碍。

**命题 8.7.** 设 $\mathcal{C}$ 如构造 *1*所示。那么

$$I = \langle x_i y_j : i, j \in A,\ i \neq j \rangle + \langle x_i : i \in B_0 \rangle + \langle y_j : j \in B_1 \rangle,$$

*and*

$$(\mathrm{pdim}(I), \mathrm{reg}(I)) = ((2m - 3) + t, 3).$$

证明。 设 $S = S_A \otimes_k S_B \otimes_k S_F$，其中

$$S_A = k[x_i, y_i : i \in A], \qquad S_B = k[x_i, y_i : i \in B], \qquad S_F = k[x_i, y_i : i \in F].$$

Set

$$I_A := \langle x_i y_j : i, j \in A,\ i \neq j \rangle \subseteq S_A, \qquad L := \langle x_i : i \in B_0 \rangle + \langle y_j : j \in B_1 \rangle \subseteq S_B.$$

变量 出现在 $I_A$ 和 $L$ 中的 s 互不相交，且 $L$ 由 $t$ 个变量生成 .

我们首先确定 $I$的生成元。由于 $\mathcal{C}$ 在 $A$上的限制是两个字 $0^A$ 和 $1^A$，对于互不相同的 $i$, $j \in A$，没有码字会同时包含 $v_i = 1$ 和 $v_j = 0$。因此 $x_i(1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}}$；它是极小的，因为 $A$ 的每个坐标中都出现了两个值。极化后，对于所有 $i \neq j \in A$，得到 $x_i y_j \in I$。在 $B_0$ 上，每个码字都包含 $v_i = 0$，因此 $x_i \in J_{\mathcal{C}}$ 是极小的，从而 $x_i \in I$ 适用于 $i \in B_0$。类似地，在 $B_1$ 上，每个码字都包含 $v_j = 1$，因此 $(1 - x_j) \in J_{\mathcal{C}}$ 是极小的，极化后得到$y_j \in I$。

反之，任一非码字要么违反 $B$ 中的一个固定坐标（从而被 $L$的某个生成元整除），要么在 $A$ 上与 $0^A$ 和 $1^A$ 均不相同，此时它包含一个 $1/0$

$A$ 各坐标之间的不匹配，并且可被某个满足 $i \neq j$的 $x_i(1-x_j)$整除。因此，这些恰好就是极小生成元，并且

$$I = I_A \cdot S + L \cdot S.$$

由于 $I_A$ 是 $m = |A|$ 坐标上的全有或全无理想，定理 5.4 给出

$$(\mathrm{pdim}(I_A), \mathrm{reg}(I_A)) = (2m-3, 3).$$

每次添加一个 $t$生成元 $L$，定理 2.20 表明投射维数每一步都增加 1，而正则性保持不变。因此

$$(\mathrm{pdim}(I), \mathrm{reg}(I)) = ((2m-3)+t, 3). \qquad \square$$

命题 8.7 将在线 $\mathrm{reg} = 3$上实现投射维数的问题归结为选择参数 $(m,t)$，使得 $(2m-3)+t=p$。现在我们证明，对每个 $0 \le p \le 2n-3$，这都是可能的。

**定理 8.8。** 固定 $n \ge 3$。对于每个整数 $p \in [0, 2n-3]$，存在一个神经码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，使得

$$(\mathrm{pdim}(I), \mathrm{reg}(I)) = (p, 3).$$

证明。若 $p=0$，取互不相交的 $\sigma$，$\tau \subseteq [n]$，满足 $|\sigma|+|\tau|=3$，并令 $C = \mathbb{F}_2^n \setminus Q(\sigma, \tau)$。则 $I = \langle x_\sigma y_\tau \rangle$ 是 3 次主理想。因此，$\mathrm{pdim}(I) = 0$，且 $\mathrm{reg}(I) = 3$。

现在假设 $1 \le p \le 2n-3$。若 $1 \le p \le n-1$，应用构造 1，取 $m = 2$ 和$t = p-1$。则命题 8.7 给出

$$\mathrm{pdim}(I) = (2\cdot 2 - 3) + (p-1) = p \qquad \text{and} \qquad \mathrm{reg}(I) = 3.$$

若 $n \le p \le 2n-3$，令

$$m := p - n + 3 \quad \text{and} \quad t := 2n - 3 - p.$$

则 $3 \le m \le n$ 和 $0 \le t \le n-m$，因此构造 1 适用。命题 8.7 推出

$$\mathrm{pdim}(I) = (2m-3)+t = \big(2(p-n+3)-3\big) + (2n-3-p) = p, \qquad \mathrm{reg}(I) = 3. \qquad \square$$

## 9. Constructions of neural codes below the line $p + r \le n$

本节我们构造非退化神经码，其极化神经理想实现区域 $p+r \le n$中的每一对$(p,r) = (\mathrm{pdim}(I), \mathrm{reg}(I))$，其中 $0 \le p \le n-1$ 与 $1 \le r \le n$。我们的主要依据是，单纯形码具有完全由1 型关系生成的神经理想，因此极化理想是Stanley–Reisner 理想 [2, 引理 4.4]。事实上，仅含 $x$-变量的任意平方自由单项式理想都是由1 型关系生成的极化神经理想。通过聚焦于单纯复形，我们利用Auslander–Buchsbaum与Cohen–Macaulay性来控制投射维数，并借助Hochster公式经由顶维同调检测正则性。最后，添加自由神经元可将构造从 $m = p + r$ 推广到任意 $n$，而不改变投射维数或正则性。

**引理 9.1.** 设 $\Delta$ 为 $[m]$ 上的单纯复形，并令

$$\mathcal{C}_\Delta := \{c \in \mathbb{F}_2^m : \mathrm{supp}(c) \in \Delta\}.$$

于是，神经理想就是 *Stanley–Reisner* 理想，

$$J_{\mathcal{C}_\Delta} = I_\Delta \subseteq k[x_1, \ldots, x_m],$$

因此

$$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_\Delta}) = I_\Delta \cdot T, \qquad T := k[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m].$$

此外，极化复形 $\Delta_{\mathcal{C}_\Delta}$ 在 $x$–顶点 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ 上的诱导子复形是 $\Delta$。

证明。 根据构造，$\mathrm{supp}(\mathcal{C}_\Delta) = \Delta$。由于 $\Delta$ 是一个单纯复形，文献 [2]证明了典范形式 $CF(J_{\mathcal{C}_\Delta})$ 不含类型 2 或类型 3 关系，并且 $J_{\mathcal{C}_\Delta}$ 由 1 型关系生成，即由对应于 $\Delta$ [2, 引理 44] 的极小非面的平方自由单项式生成。因此 $J_{\mathcal{C}_\Delta} = I_\Delta$ 在 $k[x_1, \ldots, x_m]$中，而极化得到 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_\Delta}) = I_\Delta \cdot T$。

最后，由于 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}_\Delta})$ 由关于 $x$–变量的单项式生成， $\Delta_{\mathcal{C}_\Delta}$ 在 $\{x_1, \ldots, x_m\}$ 上的诱导子复形恰好以满足 $x_F \notin I_\Delta$ 的那些 $F \subseteq [m]$ 为面，即 $F \in \Delta$。因此 $(\Delta_{\mathcal{C}_\Delta})|_{\{x_1,\ldots,x_m\}} = \Delta$。□

现在，我们实现区域 $p + r \leq n$中的所有二元组（$\mathrm{pdim}(I)$，$\mathrm{reg}(I)$)。由于 $\mathrm{reg} = 1$、2、3 的情形已在第 8.1 节至 8.3节中处理，以下始终假设 $r \geq 4$。

**定理 9.2**。 固定整数 $n \geq 4$、 $p \in [0, n-1]$ 和 $r \in [4, n]$，满足 $p + r \leq n$。则存在一个非退化神经码 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$，使得

$$(\mathrm{pdim}(I), \mathrm{reg}(I)) = (p, r).$$

证明。 令 $m := p + r$，于是 $m \leq n$ 且 $m \geq r$。选取一个定义在顶点集 $[m]$ 上的（$r-2$）维单纯球面 $\Delta$；例如，可以取一个具有 $m$ 个顶点的堆叠（$r-2$）球面。

定义单纯码

$$\mathcal{C}' = \mathcal{C}_\Delta = \{c \in \mathbb{F}_2^m : \mathrm{supp}(c) \in \Delta\}.$$

由于 $\emptyset \in \Delta$，我们有 $0 \cdots 0 \in \mathcal{C}'$。此外，由于 $\Delta$ 的顶点集为 $[m]$（没有幽灵顶点），每个单点集 $\{i\}$ 都包含于 $\Delta$ 中，因此支撑为 $\{i\}$ 的字属于 $\mathcal{C}'$。所以，对于每个 $i \in [m]$， $\mathcal{C}'$ 中都有码字使得第 $i$ 个坐标分别等于 0 和 1，并且 $\mathcal{C}'$ 是非退化的。现在添加 $n - m$ 个自由坐标，并令

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}' \times \mathbb{F}_2^{n-m} \subseteq \mathbb{F}_2^n.$$

这保持了非退化性，因为最后的 $n - m$ 个坐标都能取到 $\mathcal{C}$ 中的两个值。

令 $S_m := k[x_1, \ldots, x_m]$，令 $T := k[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_m]$。由引理 9.1，

$$\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}'}) = I_\Delta \cdot T.$$

反复应用定理3.6 以计入 $n - m$ 自由坐标，可得

$$I = \mathcal{P}(J_{\mathcal{C}'}) \cdot S = I_\Delta \cdot S.$$

特别是，添加这些额外变量不会改变投射维数或正则性，因此只需在 $S_m$ 上计算 $I_\Delta$ 的投射维数和 $I_\Delta$ 的正则性。

由于 Δ是一个单纯球面，Stanley–Reisner 环 $S_m/I_\Delta$ 是 Cohen–Macaulay 的（根据 Reisner 判据；另见例如 [8, 定理 5.1。9]），并且

$$\dim(S_m/I_\Delta) = \dim \Delta + 1 = r - 1.$$

因此，$\operatorname{depth}(S_m/I_\Delta) = r-1$，而 Auslander–Buchsbaum 给出

$$\operatorname{pdim}_{S_m}(I_\Delta) + 1 = \operatorname{pdim}_{S_m}(S_m/I_\Delta) = m - \operatorname{depth}(S_m/I_\Delta) = m - (r-1) = p + 1.$$

由此可得 $\operatorname{pdim}_{S_m}(I_\Delta) = p$。

对于正则性，将 Hochster公式应用于 $I_\Delta$。由于 $\Delta$ 是一个以 $m$ 个顶点为顶点集的 $(r-2)$–球面，$\tilde{H}_{r-2}(\Delta;\, k) \cong k$。取 $W = V(\Delta)$（于是 $|W| = m$ 且 $\Delta_W = \Delta$）可得

$$\beta_{p,m}(I_\Delta) = \dim_k \widetilde{H}_{m-p-2}(\Delta; k) = \dim_k \widetilde{H}_{r-2}(\Delta; k) = 1,$$

因此 $\operatorname{reg}(I_\Delta) \geq m - p = r$。反过来，若 $\beta_{i,\,j}(I_\Delta) \neq 0$，则 Hochster公式给出 $\tilde{H}_{j-i-2}(\Delta_W; k) \neq 0$，其中某个 $W$满足 $|W| = j$。因此

$$j - i - 2 \leq \dim(\Delta_W) \leq \dim(\Delta) = r - 2,$$

因此，对每个非零分次 Betti 数都有 $j - i \leq r$。于是 $\operatorname{reg}(I_\Delta) \leq r$，从而得出 $\operatorname{reg}(I_\Delta) = r$。

最后，由于 $I = I_\Delta \cdot S$ 是通过添加变量从 $I_\Delta$ 得到的，定理 3.6 表明投射维数和正则性保持不变。因此，$\operatorname{pdim}(I) = p$ 且 $\operatorname{reg}(I) = r$。 □

**例 9.3**。设 $n = 8, p = 3, r = 4$。这里 $m = p + r = 7$ 且 $r - 2 = 2$，因此我们需要一个以顶点 $[7]$ 为顶点集的 2-球面 $\Delta$。我们从顶点集为 $\{1, 2, 3, 4\}$ 的四面体边界 $\partial\Delta_3$ 开始，依次在极大面 123、124 和 134 上进行堆叠，引入新顶点 5、6、7，从而将 $\Delta$ 构造为以 $[7]$ 为顶点集的堆叠 2-球面。于是其极大面（三角形）为

$$\mathcal{F}(\Delta) = \{234, 125, 235, 135, 126, 246, 146, 137, 347, 147\}.$$

直接检查可知，$\Delta$的极小非面为

$$27, 36, 45, 56, 57, 67, 123, 124, 134.$$

定义 $\mathcal{C}' = \mathcal{C}_\Delta \subseteq \mathbb{F}_2^7$，使 $\operatorname{supp}(c) \in \Delta$，然后设

$$\mathcal{C} := \mathcal{C}' \times \mathbb{F}_2 \subseteq \mathbb{F}_2^8.$$

根据引理 9.1，极化神经理想由这些极小非面生成（现在将其视为 $k[x_1, \ldots, x_8, y_1, \ldots, y_8]$）：

$$\mathcal{P}(J_\mathcal{C}) = \langle x_2x_7, x_3x_6, x_4x_5, x_5x_6, x_5x_7, x_6x_7, x_1x_2x_3, x_1x_2x_4, x_1x_3x_4 \rangle.$$

根据定理 9.2，该理想满足

$$\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_\mathcal{C})) = 3 \qquad \text{and} \qquad \operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_\mathcal{C})) = 4.$$

等价地（作为对该码的描述），$\mathcal{C}$ 由 $\mathbb{F}_2^8$ 中所有满足以下条件的字组成：它们在前 7 个坐标上的支撑不包含任何禁集

$$\{2, 7\}, \{3, 6\}, \{4, 5\}, \{5, 6\}, \{5, 7\}, \{6, 7\}, \{1, 2, 3\}, \{1, 2, 4\}, \{1, 3, 4\},$$

第 8 个坐标任意。

## 10. Conclusion and Further directions

上述结果表明，哈明立方体的基本特征与极化神经理想 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$的同调数据之间，似乎正在形成一套对应关系。全文中，我们借助 Hochster公式，将 $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 的组合学转化为极化复形 $\Delta_{\mathcal{C}}$ 的诱导子复形的拓扑。特别刚性的立方体结构会带来若干显著的边界现象：坐标子立方体及坐标子立方体的补图控制 $\operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 1$ 和 $\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 0$，而对跖性则控制 $\operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 2n-1$ 和 $\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})) = 2n-3$的极端取值。这些规律让我们看到一种可能：可实现的 (pdim，reg) 取值区域，乃至贝蒂表形状等更精细的不变量，或许都能用少量组合数据来描述；此外，对 $\mathcal{C}$ 施加额外的几何限制（例如凸性或超平面结构），也可能大幅约束可能出现的情形。最后，我们围绕这一观点整理了若干问题。

问题 10.1. 对 $(\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})),\operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})))$ 而言， $\mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n$ 的汉明立方体几何在多大程度上起着决定作用？边界分类（子立方体／余子立方体和对跖构型）是整个可实现的 (pdim,reg) 区域具有更广泛立方体理论组织结构的投影，还是说远离边界时会出现真正新的行为？

问题 10.2. 对于固定的 $n$，确定集合

$$\mathcal{R}_n := \big\{(\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})), \operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}))) : \mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n\big\}.$$

问题 10.3. 用 $\mathcal{C}$ （或其补图 $\mathbb{F}_2^n \setminus \mathcal{C}$）的汉明立方体结构，对 $\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})$ 的多重分次贝蒂数给出组合描述。

问题 10.4. 对于一类 $\mathfrak{F}$ 码（例如凸码、稳定超平面码），确定

$$\mathcal{R}_n(\mathfrak{F}) := \{(\operatorname{pdim}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}})), \operatorname{reg}(\mathcal{P}(J_{\mathcal{C}}))) : \mathcal{C} \in \mathfrak{F},\ \mathcal{C} \subseteq \mathbb{F}_2^n\}.$$

$\mathcal{R}_n(\mathfrak{F})$与 $\mathcal{R}_n$相比如何?

**致谢**。 我们感谢 Rebecca R. G. 和 Hugh Geller 为本项目带来的启发，以及与我们进行的许多有益交流。本研究的部分内容源自第二作者 E. Lew 的硕士论文，该论文于 2025 年 5 月在布林莫尔学院完成；此后，第一作者于 2025 年 6 月访问 Fields研究所，参加交换代数与应用主题项目期间，研究内容得到了进一步发展。作者感谢布林莫尔学院和 Fields研究所的支持。第一作者（Kara）获得了美国国家科学基金会 DMS-2418805 号资助。

## References

[1] T. Chau. 从神经码到同调不变量：极化神经理想的正则性与投射维数。 *arXiv* 预印本 *arXiv:2511.19043*，2025。 2[2] C. Curto、V. Itskov、A. Veliz-Cuba 和 N. Youngs. 神经环：分析神经码内在结构的代数工具。 数学生物学通报，75(9):1571–1611，2013。 1，3，5，25，26[3] C. Curto、A. Veliz-Cuba 和 N. Youngs. 组合神经码分析：一种代数方法。见 代数与组合计算生物学，数学科学与工程系列，第 213–240 页。Academic Press，伦敦，2019。1[4] O. Fern´andez-Ramos 和 P. Gimenez. 二分图关联边理想中的正则性 3。 代数组合学杂志，39(4):919–937，2014。 13

[5] H. Geller 和 R. R. G. 神经理想的典范形式。Matematica，3(2):721–752，2024。1[6] S. G¨unt¨urk¨un、J. Jeffries 和 J. Sun. 神经环的极化。J. Algebra Appl.，19(8):2050146，17，2020。1、3、6[7] V. Itskov、A. Kunin 和 Z. Rosen. 超平面神经编码与极化复形。见《拓扑数据分析——阿贝尔研讨会 2018》，阿贝尔研讨会丛书第 15 卷，第 343–369 页。Springer，Cham，[2020]©2020。2[8] E. Miller 和 B. Sturmfels.《组合交换代数》，数学研究生教材第 227 卷。Springer-Verlag，纽约，2005。27[9] A. Ruys de Perez、L. F. Matusevich 和 A. Shiu. 神经码与因子复形。Adv. in Appl. Math.，114:101977，16，2020。2[10] N. Youngs.《神经环：用代数几何分析神经码》。博士论文，内布拉斯加大学，林肯，2014。1

Department of Mathematics, Bryn Mawr College, 906 New Gulph Rd, Bryn Mawr, PA 19010,USA

电子邮件地址：skara@brynmawr.edu

Department of Mathematics, University of California, One Shields Avenue, Davis, CA 95616-8633, USA

电子邮件地址：ejlew@ucdavis.edu