标题：四色定理的构造性证明

作者：：Dagong Ding

摘要

本文提出了一种不同于传统“可约构形”方法的四色定理证明思路。通过引入“外边界”“原始

关键词：四色定理；平面图着色；外边界；原始集；构造性证明

1. 引言

四色定理断言，任何平面图都可以用四种颜色着色，使得相邻区域具有不同的颜色。自

本文受Kempe链思想的启发，但摒弃了复杂的构形分析。我们提出一种直接的构造性方法：

2. 预备知识

2.1 基本设定

由于任何平面图都可以视为球面图的一部分，我们可以将任意给定的图视为球面图。图中

我们假设给定图中的每个顶点的度都为3。如果给定图中存在一些度大于3的顶点，我们可

原图中添加小区域后仍然相邻。因此，原图中的所有区域也可以用四种颜色着色。

由于每个顶点的度为3，外边界上的每个顶点还有一条边，连接到内部或外部。我们将外边

2.2 原始集

给定一个外边界，考虑所有满足四色着色条件的内部区域着色方案，在所有这些内部方案

外边界的原始集是此后对边界外侧区域进行所有着色操作的基础。

2.3 添加区域操作

在外边界的一个区间上添加一个n顶点区域，是指添加一个仅通过该区间与外边界相连、且

我们将添加一个0顶点区域和添加一个1顶点区域统称为添加一个简单区域。添加简单区域

在一个区间上添加一个0顶点区域，会将与其相邻的两个区间合并为新边界上的一个区间；

当外边界恰好有三个区间时，这三个区间的颜色两两不同。因此，只能在其中任意一个区

2.4 两个基本性质

设有一个外边界。我们定义以下两个性质：

定义 1
假设给定外边界的原始集非空。我们在此外边界上任取一个区间，并在其上添加一个简单

四色定理要求，在外边界区间上添加的 *n* 顶点区域必须能够用四种颜色着色。性质 A 只

定义 2
如果给定外边界上的所有区间都可以用三种颜色着色，并且任意添加简单区域任意多次后，

设想外边界上的所有区间都代表边界外的沿海区域；那么这些区间的颜色都必须与海洋的

这里有一点需要解释：考虑一个满足性质A和性质B的外边界，它有三个连续区间，如图

3. 主要定理

定理1 任何多边形外边界都满足性质A和性质B。（多边形基本定理）

证明。对于二边形或三角形，该定理显然成立。假设对于所有 m ＜ n，任意 m 边形外边

考虑一个 n 边形。如果我们在其外边界的某个区间上添加一个1顶点区域，图中就会出现

。

如果我们在一个区间上添加一个0顶点区域，图中就会出现一个二边形。类似地，这个二边

因此，在向一个 n 边形添加一个简单区域之后，所得新外边界上各区间的着色与一个

定理2设某外边界满足性质A和性质B。那么，在该外边界的任一区间上添加一个2顶点区域

证明。图2展示了在外边界的区间 BC 上添加一个2顶点区域后得到的图。添加该2顶点区域

如果在图2的边界区间 AP 上添加一个0顶点区域，就会得到图 3。如果在图4的边界区间

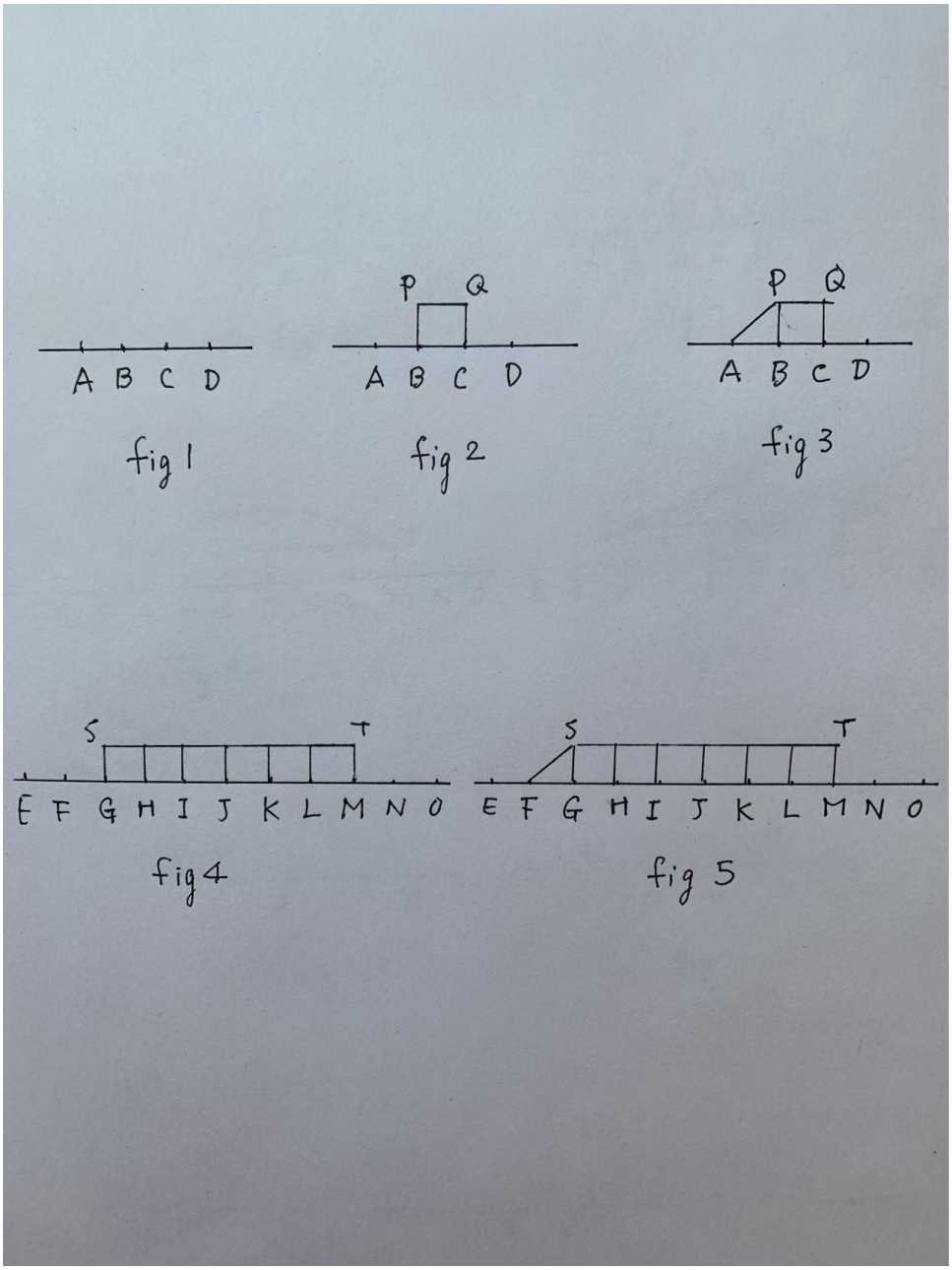
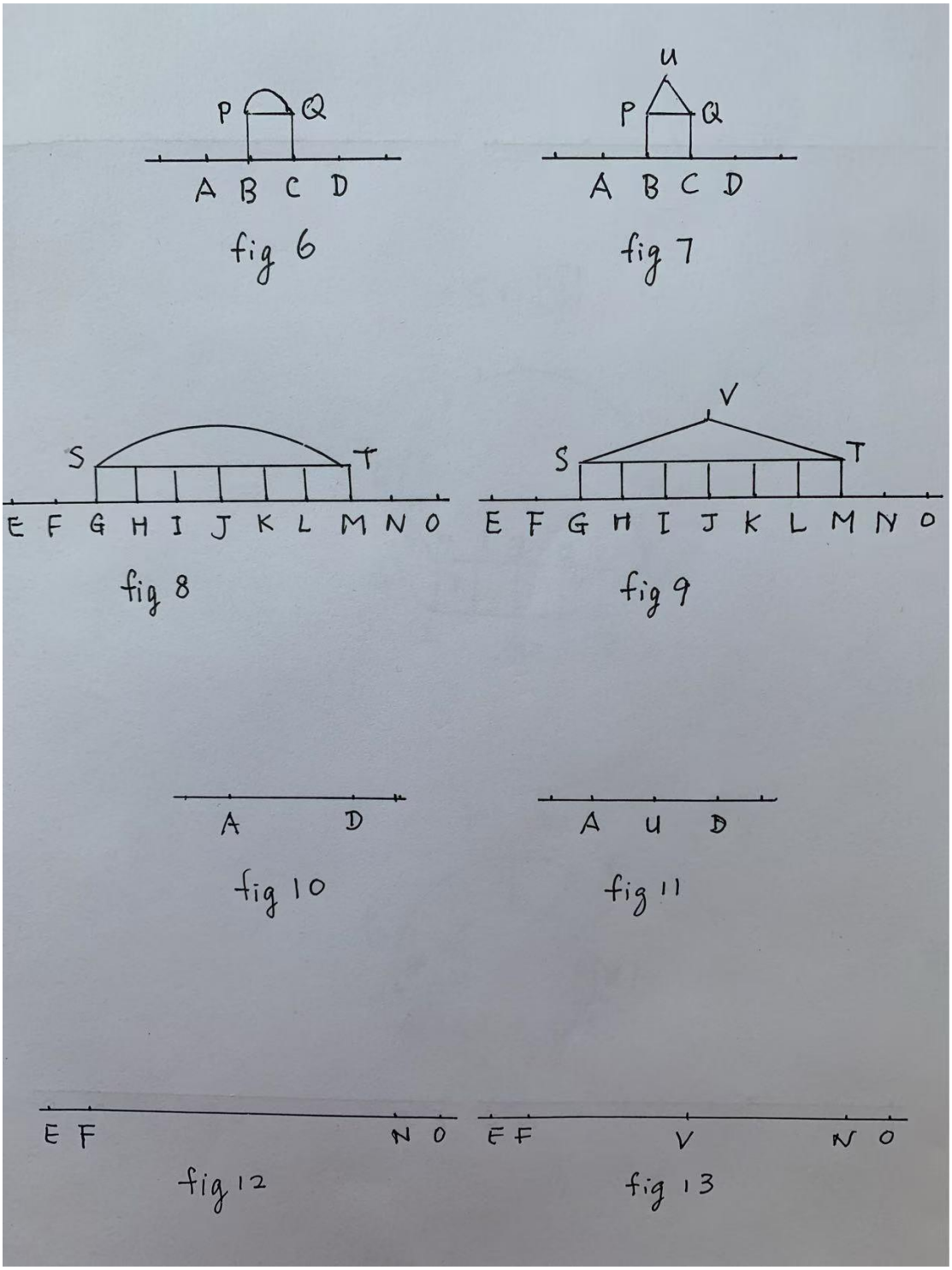


fig 1 fig 2 fig 3

fig 4 fig 5

如果我们在图2或图4中的一个旧区间上添加一个简单区域，由于该旧区间位于满足性质A



如果我们在新区间PQ（图2）或ST（图4）上添加一个0-顶点或1顶点区域，从而得到图6、

图13中，我们注意到其外边界上的区间一一对应。由于图10、图11、图12和图13都是通过

现在我们来考察图2和图4的外边界上的所有区间是否都能用三种颜色着色。图2和图4的共

如果新区间的长度为1（图2）：我们可以先在原始外边界的区间 BC 上添加一个0顶点区域（图2）。这会迫使与原始边界上的两个边界区间对应的两个区间（AB和CD）使用相同的颜色。由于原始边界满足性质B，添加这个0顶点区域后得到的外边界可以用三种颜色着色。现在，新的区间PQ只需使用与BC和边界区间不同的颜色。因此，PQ有两种颜色可选，我们总能从三种颜色中选出一种（具体而言，即BC和边界区间未使用的颜色），从而使外边界可以用三种颜色着色。

如果新区间的长度大于 1 且为偶数，并且旧区间的数量大于 1（例如图4）：我们考察图4的外边界能否用三种颜色着色。首先，我们在旧区间上添加简单区域，使区间 FG 和 MN（对应原始边界上的两个边界区间）成为同一种颜色。设该颜色为颜色1。设区间 LM（位于原始边界一侧，与 MN 相邻）为颜色2。由于这种构形是通过在满足性质B的外边界上添加简单区域得到的，因此此时这些区间可以用三种颜色着色。随后，可以用第四种颜色（4）为新区间着色。注意，如果一个区间序列只用两种颜色着色，那么区间数量为偶数时，两端区间的颜色不同。这里，总长度（新区间长度 + 两个边界区间）为偶数，但两个边界区间颜色相同。因此，在对应区间（两个边界区间之间）中，必定至少有一个区间被染成颜色3。找到距离区间 LM 最近的那个，例如图14中的区间 IJ。

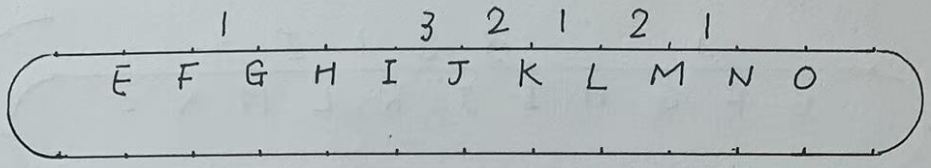


fig 14

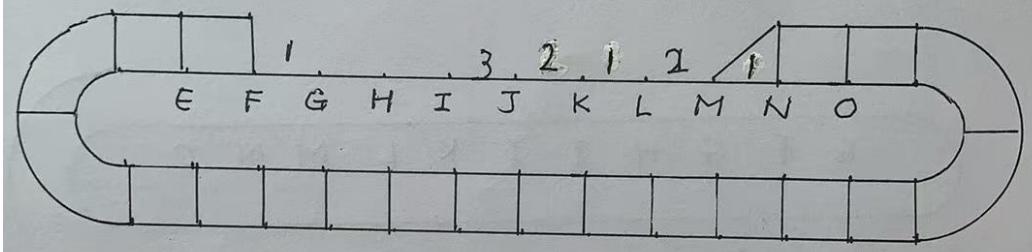


fig 15

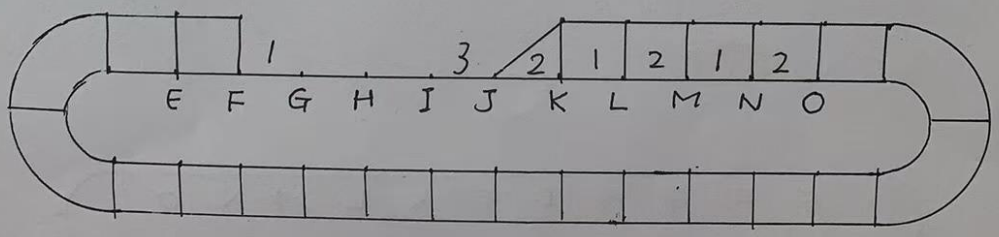
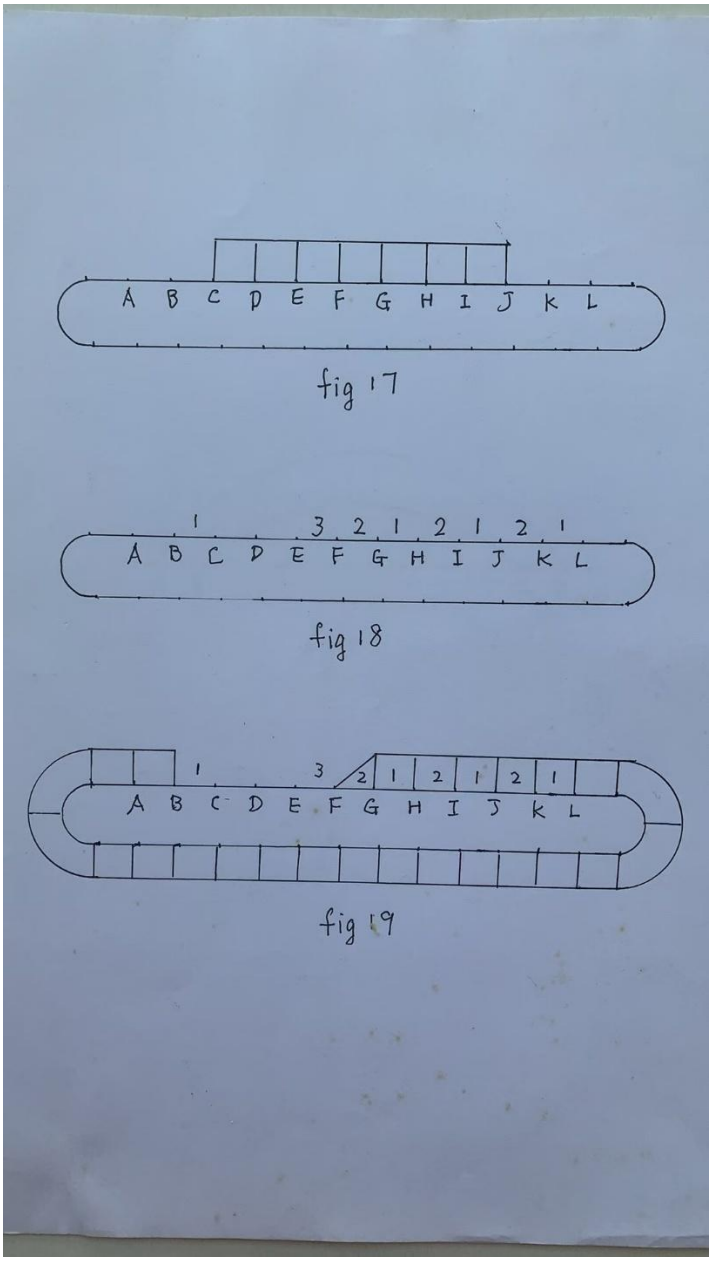


fig 16

如果图14中的区间NO不是颜色2，我们可以在区间MN上添加一个1顶点区域。这个1顶点区域是根据区间LM、MN和NO的颜色添加的，因此移除该1顶点区域后，区间LM、MN和NO的颜色保持不变。然后，依次在边界区间上添加1顶点区域，直到到达区间FG（另一个边界区间所对应的区间）之前为止。见图15。从图15可以看出，新区间、边界区间和旧区间的颜色都不是颜色2。

如果图14中的区间NO是颜色2，我们可以先在区间JK上添加一个1顶点区域。然后，依次在边界区间上添加1顶点区域，直到到达区间FG之前为止。见图16。由于图16中最初添加的四个1顶点区域是根据相关区间的颜色添加的，移除这四个1顶点区域后，区间IJ、JK、KL、LM、MN和NO的颜色保持不变。从图16可以看出，新区间、边界区间和旧区间的颜色都不是颜色3。



如果新区间的长度大于 1 且为奇数（例如图17，长度为 7）：我们可以在旧区间上添加简单区域，使一个对应于边界区间的区间（BC）与另一个旧区间 KL（与另一个边界区间所对应的区间相邻）颜色相同。设其颜色为颜色1。设区间 JK 的颜色为颜色2。由于这一构形是在满足性质B的边界上添加简单区域得到的，因此这些区间可以用三种颜色着色。图17中的新区间可以着色为颜色4。由于新区间的长度为奇数，图17中 BC 与 KL 之间的区间数为偶数，因此它们之间必定至少有一个颜色为颜色3的区间。找出距离 JK 最近的那个区间，例如图18中的区间 EF。我们可以先在图18的区间FG上添加一个1顶点区域，然后沿着边界区间依次添加1顶点区域，直到到达区间 BC 之前为止。见图19。由于最初添加的五个1顶点区域是根据相关区间的颜色确定的，移除它们后，区间 EF、FG、GH、HI、IJ、JK、KL 的颜色保持不变。从

图19，显然，新区间、边界区间和旧区间的颜色都不同于颜色3。

当旧区间的数量为 1 时：在这种情况下，对应区间、原始边界上与边界区间对应的区间，以及这个唯一的旧区间，共同构成一个外边界；该外边界是在最初的外边界上添加简单区域后得到的。因此，其区间可以用三种颜色着色。如果现在在一个边界区间上添加一个1顶点区域，则新产生的区间可以用颜色4着色。此时，已没有剩余的旧区间；外边界仅由三个区间（新区间和两个边界区间？）组成，因此该外边界满足性质A和性质B。

如果改为在剩余的旧区间上添加一个简单区域，由于该旧区间位于一个满足性质A和性质B的外边界上，因此总是可以这样做。添加简单区域后，外边界将仅有两个或三个区间，因此满足性质A和性质B。

总之，在满足性质A和性质B的外边界上添加一个2顶点区域后，无论随后如何添加简单区

定理3在满足性质A和性质B的外边界的任意区间上添加一个n顶点区域后，所得的新外边界

证明。如果外边界只有两个或三个区间，那么在任意区间上添加一个n顶点区域后，得到的

当外边界上的区间数量大于三时：我们已经知道，在满足性质A和性质B的外边界的任意区

如果我们在所得外边界的新区间上添加一个简单区域，新顶点的数量就会减少。这相当于在满足性质A和性质B的原始外边界上添加一个顶点数少于m的区域。根据归纳假设，所得外边界满足性质A和性质B。

如果我们在新边界的边界区间 AD 上添加一个 0顶点区域（见图 20）。图 20 是先在原始边界的区间 BC 上添加一个 m顶点区域，再在边界区间 AD 上添加一个 0顶点区域得到的。也可以将其

理解为先在原始边界的区间 AB 上添加一个 1顶点区域，再在由此得到的新边界的边界区间 DC 上添加一个 (m-1) 顶点区域。由于原始边界满足性质A和性质B，添加 1顶点区域后，新边界仍满足性质A和性质B。根据归纳假设，在此边界上添加一个 (m-1) 顶点区域后，得到的边界满足性质A和性质B。因此，图 20 中的构形满足性质A和性质B。

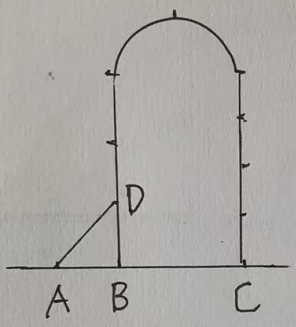


fig 20

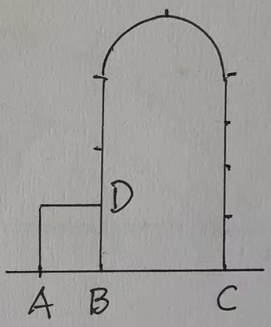


fig 21

如果我们在新边界的一个边界区间 AD 上添加一个 1顶点区域（见图21）。图21 是先在原始边界的区间 BC 上添加一个 m顶点区域，然后再在边界区间 AD 上添加一个 1顶点区域得到的。也可以将其视为：先在原始边界的区间 AB 上添加一个 2顶点区域，然后再在所得新边界的边界区间 DC 上添加一个 (m-1) 顶点区域。根据定理2，添加 2顶点区域后，边界满足性质A和性质B。根据归纳假设，在此边界上添加一个 (m-1) 顶点区域后，所得边界满足性质A和性质B。因此，图21中的构形满足性质A和性质B。

如果我们只在旧区间上添加简单区域，由于这些旧区间位于满足性质A和性质B的初始外边界上，问题仍然是：在满足性质A和性质B的边界的一个区间上添加一个 m顶点区域，是否会得到一个仍然满足性质A和性质B的边界？只有旧区间的数量会减少。由于旧区间的数量是有限的，因此最终可以将其减少为零。当不再有旧区间时，新外边界上的区间颜色可以与多边形外边界上的区间颜色建立一一对应关系（该多边形表示所添加的 n顶点区域）。因此，这个最终的外边界满足性质A和性质B。

总之，在满足性质A和性质B的外边界的某个区间上添加一个m顶点区域之后，无论我们随

因此，由归纳法可知，在满足性质A和性质B的外边界的任意区间上添加一个n顶点区域之

也就是说，定理3成立。

4. 任意给定图的着色

在着色之前，我们先陈述一个事实：以图中的任意一条简单闭曲线作为外边界，总能在其

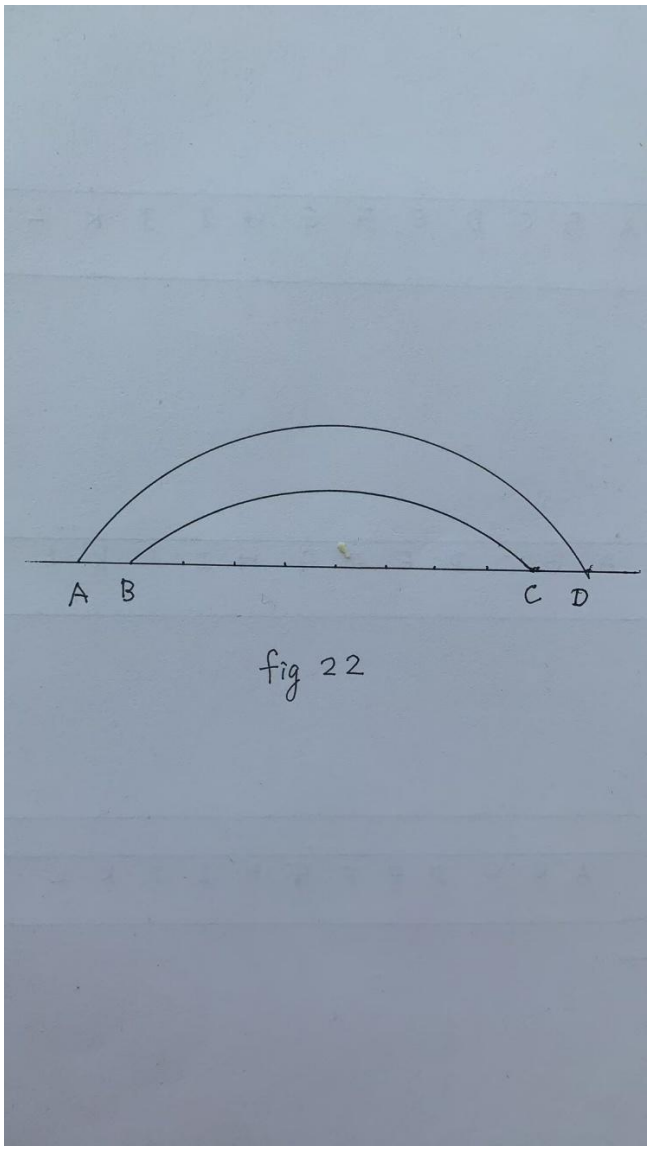


fig 22

见图22。如果外边界上与区间 AB 对应的区域还有另一条边 CD 位于同一外边界上，那么

现在，我们给定图着色。首先，任选图中的一个区域。区域本质上是一个多边形。根据定

区域，直到给定图中的所有区域都已纳入。注意，每添加一个区域，其颜色实际上就在这

如果图包含岛屿（被另一区域完全包围的区域，例如湖泊），我们可以先对主体部分着色，

因此，任意给定的平面图都可以用四种颜色着色，即四色定理成立。

5. 讨论与结论

本文提出的方法为证明四色定理提供了一个构造性非枚举框架。其核心优势在于：

概念清晰： 通过利用外边界、区域添加操作和两个关键性质，将复杂的全局着色问题分解为一系列易于处理的局部步骤。

逻辑严谨： 这三个定理构成了完整的逻辑链，确保着色过程具有可持续性和正确性。

普适性强： 该方法能够处理结构复杂的平面图，包括岛屿和嵌套岛屿。

6. 参考文献

[1] Appel, K., & Haken, W. (1977). Every planar map is four colorable. 《伊利诺伊数