arXiv:2602.17075v1 [math.OA] 19 Feb 2026

$C(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1))$作为 $C(\mathbb{T})$的迭代扭曲量子双悬挂

BIPUL SAURABH

2026年2月20日

摘要

设 A是一个含幺 C^*-代数，并令 $\Sigma^2_m A$表示 A的 m-扭曲量子双悬挂。对于 $q \in (0,1)$ 和 $n \geq 1$，我们证明，与商空间$SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)$对应的 C^*-代数同构于 $\Sigma^{2(n-1)}\Sigma^2_2\Sigma^{2(n-1)}C(\mathbb{T})$。由此可得，这些空间与变形参数 q无关。

AMS主题分类编号： 19K33, 46L80, 58B34.

关键词。 C^*-扩张，齐次扩张，冠因子分解性质， m-挠量子双重悬挂。

1 引言

Hong 和 Szymanski 在 [5] 中为含单位元的 C^*代数引入了量子双重悬挂（QDS）的概念。这一构造使我们能够以系统的方式从经典紧空间过渡到非交换空间。当一个非交换空间是通过对紧空间 X 迭代应用 QDS 得到时，它的许多拓扑和几何性质通常都可以根据X的性质来理解。例如，这种构造简化了 K-群的计算，并根据经典空间的几何性质构造出非交换几何的实例（见 [4]）。与 QDS 类似，对于任意含单位元的 C^* 代数 A， m扭量子双重悬挂（记作 $\Sigma^2_m A$）定义于 [1]。当 $m = 1$ 时，这一构造便化为通常的 QDS。与 QDS 的情形一样，我们希望将给定的C^*代数表示为某个紧空间X的迭代 m扭量子双重悬挂 $C(X)$ 。文献 [1], 证明了 C^*代数 $C(SO_q(3))$ 同构于 $\Sigma^2_2 C(\mathbb{T})$。本文旨在推广这一结果，并证明与量子齐性空间 $SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)$ 相关的 C^*代数可由 $C(\mathbb{T})$ 通过按适当顺序依次应用 QDS 和 2-扭量子双重悬挂得到。更确切地说，我们建立了以下对象之间的同构：

$C\left(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)\right)$ 与 $\Sigma^{2(n-1)}\Sigma_2^2\Sigma^{2(n-1)}C(\mathbb{T})$。这一描述立即表明，底层 C^*代数的拓扑类型独立于变形参数 q。

现在我们简要概述主要思路。对于核 C^*-代数 A 和有限维紧致度量空间 Y（即某个 $n \in \mathbb{N}$的闭子集 S^n），Pimsner、Popa 和 Voiculescu [9]引入了一个群 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A)$，其元素为 A 被 $C(Y) \otimes \mathcal{K}$扩张所得的齐次扩张的强酉等价类。该群的一个重要特征使其区别于通常的 Ext 群：任何表示同一类的两个元素，其中间C^*-代数必定同构。这一性质在本文中起着关键作用。我们首先在对 A 和 Y施加较弱假设的条件下，建立 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A)$ 与 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma_m^2 A)$之间的同构。取 $Y = \mathbb{T}$后，我们证明 K_0 是以下一类 C^*-代数的完全不变量：它们是 $\Sigma_2^2\Sigma^{2(n-1)}C(\mathbb{T})$ 被 $C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{K}$齐次扩张后所得的中间代数。通过比较 K-群可得出这一结果，然后再利用 [10]的主要结果将其推广。

本文安排如下。在第2节中，我们回顾 m-挠量子双悬挂的构造、商空间 $SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)$以及一些相关结果。在第3节中，我们建立 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, A)$ 与 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, \Sigma_m^2 A)$之间的同构。利用这一点，我们证明 $C\left(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)\right)$ 与 $\Sigma^{2(n-1)}\Sigma_2^2\Sigma^{2(n-1)}C(\mathbb{T})$同构。

现在固定一些记号。下文中，符号 q 表示区间 $(0, 1)$内的一个实数。希尔伯特空间 $\ell^2(\mathbb{N})$ 和 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 的标准正交基分别记为 $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$和 $\{e_n : n \in \mathbb{Z}\}$。在 $\ell^2(\mathbb{N})$ 和 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的左移算子都用同一符号 S表示。对于 $m < 0$，表达式 $(S^*)^m$ 表示算子 S^{-m}。令p_{ji} 表示将 e_i 映到e_j 的秩一算子。我们将 p_{ii} 简记为 p_i，将 p_{00} 简记为 p。符号 $p_{<m}$ 表示投影$\sum_{i=0}^{m-1} p_i$。我们分别用 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$ 和 $\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 表示希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的所有有界线性算子和所有紧算子，并用 $\mathcal{K}$ 表示紧算子的 C^*-代数。对于 C^*-代数 A，我们分别用 $M(A)$ 和 $Q(A)$ 表示其乘子代数和冠代数。映射 π 表示从 $M(A)$ 到 $Q(A)$ 的典范同态；对于 $a \in M(A)$，符号 $[a]$ 表示其在 π 下的像。对于群 G，令 G^{Tor} 表示 G的挠子群。

2 预备知识

我们首先回顾 m-挠量子双重悬垂与商空间 $SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)$的定义及若干已知结果，这些内容将在后续各节中使用。

2.1 m-挠量子双重悬垂

定义 2.1. 设 A 是一个含单位元的 C^*-代数。对于 $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$，我们将其 m-扭转量子双重悬垂定义为满足以下条件的含单位元 C^*-代数：$\Sigma_m^2 A$ 存在一个本质扩张

$$0 \to A \otimes \mathcal{K} \to \Sigma_m^2 A \to C(\mathbb{T}) \to 0$$

使得相应的 Busby 不变量 $\beta : C(\mathbb{T}) \to Q(A \otimes \mathcal{K})$ 映射到 $\beta(t) = [1 \otimes (S^*)^m]$。等价地，$\Sigma_m^2 A$ 可定义为由 $A \otimes \mathcal{K}$ 和 $1 \otimes (S^*)^m$ 生成的 $\mathcal{T} \otimes A$ 的 C^*-子代数。$\Sigma_m^{2n} A$ 表示将 Σ_m^2 作用于 A 后迭代 n 次，即 $\underbrace{\Sigma_m^2 \Sigma_m^2 \cdots \Sigma_m^2 A}_{n\text{-个副本}}$.

下面的命题确立了 m-扭曲量子双重悬挂的泛性质。

命题2.2。 ([1]) 令 $\phi : A \longrightarrow B$ 为一个同态，且满足 $\phi(1) = P$。令 $T \in B$ 为一个等距算子，其缺陷投影为 P，并令 $\nu : M_m(\mathbb{C}) \to B$ 为一个 $*$-同态，满足

$$\nu(1) = P \text{ and } \quad \nu(D)\phi(a) = \phi(a)\nu(D), \text{ for all } a \in A \text{ and } D \in M_m(\mathbb{C}). \tag{2.1}$$

则存在唯一的 $*$-同态$\Sigma_m^2(\phi, \nu, T) : \Sigma_m^2 A \to B$，使得

$$\Sigma_m^2(\phi, \nu, T)(a \otimes p_{ij}) = \phi(a)\nu(p_{ij}), \text{ for } 0 \le i, j \le m-1$$

and

$$\Sigma_m^2(\phi, \nu, T)(1 \otimes (S^*)^m) = T.$$

反过来，令 $\psi : \Sigma_m^2 A \to B$ 为任意一个含单位元的 $*$-同态。定义 $T = \psi(1 \otimes (S^*)^m)$ 和 $P = 1 - TT^*$。则存在同态 $\phi : A \longrightarrow B$和 $\nu : M_m(\mathbb{C}) \to B$，以及等距算子 T满足方程（2.1），使得

$$\psi = \Sigma_m^2(\phi, \nu, T).$$

命题2.3。 $\Sigma_m^2 A$ 的任意闭理想 J 要么具有 $I \otimes \mathcal{K}$的形式，其中 I 是 A中的一个闭理想；要么包含 $A \otimes \mathcal{K}$。

证明：给定一个作用在希尔伯特空间 $\mathcal{H}$上的 A 表示 ρ，可以如下定义一个 $\Sigma_m^2 A$ 的表示 $\Sigma_m^2 \rho$，作用在 $\mathcal{H} \otimes \ell^2(\mathbb{N})$ 上（见 [1]）。

$$\Sigma^2\rho\,(1 \otimes S^*) = 1 \otimes S^* \text{ and } \Sigma_m^2 \rho\,(a \otimes p) = \rho(a) \otimes p, \text{ for all } a \in A.$$

不难验证 $\ker \Sigma_m^2 \rho = \ker \rho \otimes \mathcal{K}$。利用这一点以及 [1], 中的定理5.7，即可得出结论。□

命题2.4。 设 $\phi : \Sigma_m^2 A \to B$ 是一个 $*$-同态，且对任意 $a \in A$ 和$k \in \mathcal{K}$都有 $\phi(a \otimes k) \neq 0$。那么 ϕ 是单射。

证明：由于 $\phi(a \otimes k) \neq 0$ 对于任意 $a \in A$ 和 $k \in \mathcal{K}$，由命题 2.3 可知，唯一可能的情况是 $\ker \phi = 0$。 □

定理 2.5. ([1]) 设 $K_0(A)$和 $K_1(A)$是有限生成阿贝尔群，且分别具有 $\mathbb{Z}$-线性无关的生成元 $\{[P_i]\}_{i=1}^r$ 和 $\{[U_i]\}_{i=1}^s$。假设 $[1] = [P_1]$。则 $K_0(\Sigma_m^2 A)$同构于 $K_0(A) \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$。生成元 $[1]$、$\{[P_i \otimes p]\}_{i=2}^r$ 生成了 $K_0(A)$ 的子群$K_0(\Sigma_m^2 A)$，而 $[1 \otimes p]$ 生成了 $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ 的分量 $K_0(\Sigma_m^2 A)$。此外，群 $K_1(\Sigma_m^2 A)$ 同构于 $K_1(A)$，其生成元为 $\{[U_i \otimes p + 1 - 1 \otimes p]\}_{i=1}^s$。

2.2 商空间 $SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)$

Let

$$B_k^{2n+1}(q)=\begin{cases}C(\mathbb{T}) & \text{if } k=1,\\ \phi_{\omega_k}(C(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1))) & \text{if } 1<k\le 2n.\end{cases}$$

现在我们回顾 [1], 中的一些结果，这些结果是证明主要论断所必需的。

引理 2.6. ([1]) 对于 $1<k\le 2n$，短正合列

$$\chi_k:\quad 0\longrightarrow C(\mathbb{T})\otimes\mathcal{K}\xrightarrow{i} B_k^{2n+1}(q)\xrightarrow{\rho_{k+1}} B_{k-1}^{2n+1}(q)\longrightarrow 0.$$

是从 B_{k-1}^{2n+1} 到 $C(\mathbb{T})\otimes\mathcal{K}$ 的含幺齐性扩张。

定理 2.7. ([1]) 对于 $1\le k\le 2n$，定义 $u_k=t\otimes p^{\otimes(k-1)}+1-1\otimes p^{\otimes(k-1)}$。则有

$$K_0(B_k^{2n+1})=\begin{cases}\langle[1]\rangle\cong\mathbb{Z}, & \text{if } 1\le k\le n,\\ \langle[1]\rangle\oplus\langle[1\otimes p^{\otimes(n)}\otimes 1^{\otimes(k-n-1)}]\rangle\cong\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, & \text{if } n+1\le k\le 2n,\end{cases}$$
$$K_1(B_k^{2n+1})=\langle[u_k]\rangle\cong\mathbb{Z}.$$

2.3 C^*-代数扩张

设 A，且 B 是含幺可分核 C^*-代数。若存在酉元 $U\in M(B\otimes\mathcal{K})$ 使得 $a,b\in Q(B\otimes\mathcal{K})$，则称它们强酉等价

$$[U]\,a\,[U^*]=b,$$

并记为 $a\sim_{su}b$。若存在酉元 $U\in M(B\otimes\mathcal{K})$ 使得，则称两个 C^*-扩张 α，$\beta:A\to Q(B\otimes\mathcal{K})$ 强酉等价，记为 $\alpha\sim_{su}\beta$

$$,[U]\,\alpha(a)\,[U^*]=\beta(a)\quad\text{for all } a\in A.$$

C^*-代数 A 中的元素 a 称为范数满，如果它不属于 B的任何真闭理想。一个扩张

$$\tau:A\to Q(B\otimes\mathcal{K})$$

称为范 数满，如果对于每个非零元素 $a\in A$，元素 $\tau(a)$ 在 $Q(B\otimes\mathcal{K})$中范数满 .

定义 2.8. 设 B 是一个可分稳定 C^*-代数。则称 B 具有冠因子分解性质，如果 $M(B)$中的每一个范数满投影都与 $M(B)$的单位元 Murray-von Neumann 等价。

容易看出，若一个 C^*-代数 B 具有冠因子分解性质，则 $Q(B)$ 中的任一范数满投影都与 $Q(B)$的单位元 Murray-von Neumann 等价。此外，可以证明，对于有限维紧致度量空间 Y，代数 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$ 具有冠因子分解性质（见 [9]）。

假设 Y 是一个有限维紧致度量空间。换言之，对于某个 $n\in\mathbb{N}$， Y 同胚于欧几里得球面 S^n 的一个闭子集。令

$$M(Y) := M(C(Y)\otimes\mathcal{K}), \quad Q(Y) := M(C(Y)\otimes\mathcal{K})/(C(Y)\otimes\mathcal{K}),$$

并令 $Q := \mathcal{L}(\mathcal{H})/\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 表示 Calkin 代数。容易看出， $M(Y)$ 可视为从 Y到 $\mathcal{L}(\mathcal{H})$的所有 $*$-强连续函数的集合。若 A 由 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$ 扩张而成，则称扩张 τ 为齐次，如果对每个 $y\in Y$，映射

$$\mathrm{ev}_y\circ\tau : A\to Q$$

是单射，其中 $\mathrm{ev}_y : Q(Y)\to Q$ 表示在 y处的求值映射。令 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)$ 表示 A 由 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$ 扩张而成的含幺齐性扩张的酉等价类集合。Pimsner、Popa 和 Voiculescu [9] 证明，对于核 C^*代数 A， $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)$ 是一个群。我们用 $[\tau]_{su}$表示 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)$ 中扩张 τ 的等价类。用 $[\tau]$ 表示群 $\mathrm{Ext}(A,C(Y)) = KK^1(A,C(Y))$中扩张 τ 的稳定等价类。

命题 2.9。 ([10]) 设 A 是一个满足普适系数定理的含单位可分核 C^*-代数。假设 Y 是一个有限维紧致度量空间。则映射

$$i : \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)\longrightarrow KK^1(A,C(Y)), \qquad [\tau]_{su}\longmapsto[\tau]$$

是一个单同态。

3 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)$ 与 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma^2_m A)$之间的同构

本节首先证明，在对空间 Y 以及含单位、核且可分的 C^*-代数 A作适当假设的条件下，群 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)$ 与 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma^2_m A)$ 同构。随后利用这一点建立本文的主要结果。不失一般性，我们假设希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 是 $\ell^2(\mathbb{N})$。在本节中， Y 始终是一个有限维紧致度量空间。

定义 3.1。 设 $m\geq 0$和 $\ell\geq 2$。一个 $*$-同态

$$\nu : M_m(\mathbb{C})\longrightarrow Q\left(C(Y)\otimes\mathcal{K}^{\otimes\ell}\right), \quad \nu(1) = [1^{\otimes\ell}\otimes p_{<m}]$$

称为长度为 ℓ的 m-挠系统。定义

$$\Delta^{\ell}_m = \left\{\nu : M_m(\mathbb{C})\to Q\left(C(Y)\otimes\mathcal{K}^{\otimes\ell}\right)\;\middle|\;\nu(1) = [1^{\otimes\ell}\otimes p_{<m}]\right\}.$$

注记 3.2. 注意，任意 $\nu \in \Delta_m^{\ell}$ 都是 $M_m(\mathbb{C})$ 通过 $Q(C(Y)\otimes\mathcal{K}$的本质范数满扩张。其稳定等价类 $[\nu]$ 是群 $\mathrm{Ext}(M_m(\mathbb{C}), C(Y))$中的一个元素。

令 τ 为 $C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})$ 对 A 的含幺齐性扩张。我们定义

$$\tilde{\tau} : A \longrightarrow Q\big(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\big), \qquad \tilde{\tau}(a) = [\tau(a)_y \otimes p_{<m}]_{y\in Y}.$$

取 $\nu \in \Delta_m^2$。定义扩张 $\Sigma_m^2(\tau,\nu) := \Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1\otimes 1\otimes S^m])$。等价地，也可以将 $\Sigma_m^2(\tau,\nu)$ 写成由下式给出的 $*$-同态:

$$\Sigma_m^2(\tau,\nu) : \Sigma_m^2 A \longrightarrow Q\big(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\big) \tag{3.2}$$

使得

$$\Sigma_m^2(\tau,\nu)(a\otimes p_{<m}) = \tilde{\tau}(a) = [\tau(a)_y \otimes \mathcal{P}_{<m}]_{y\in Y}, \quad \Sigma_m^2(\tau,\nu)(1\otimes S^m) = [1\otimes S^m]_{y\in Y}$$

and

$$\Sigma_m^2(\tau,\nu)(1\otimes p_{ij}) = [1\otimes \nu(p_{ij})_y]_{y\in Y}, \text{ for } 0\le i,j\le m-1.$$

由于 τ 是齐次的，可以验证

$$\mathrm{ev}_y\circ\Sigma_m^2(\tau,\nu)(a\otimes k) \neq 0$$

对任意 $a\in A$ 和 $k\in\mathcal{K}$。由命题2.4可知，扩张$\Sigma_m^2(\tau,\nu)$是齐次的。如果 $\nu=0$，则记$\Sigma_m^2(\tau,\nu)$为$\Sigma_m^2\tau$。如果 $m=1$，则将 $\Sigma_m^2(\tau,\nu)$和$\Sigma_m^2\tau$ 分别记为 $\Sigma^2(\tau,\nu)$ 和 $\Sigma^2\tau$。注意，扩张$\Sigma_m^2\tau$ 就是映射 $\Sigma^2\tau$ 在子代数$\Sigma_m^2 A$上的限制。由引理2.8 中的 [10] 可知，映射

$$\beta : \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma^2 A); \quad [\tau]_{su} \longmapsto [\Sigma^2\tau]_{su}$$

是一个同构。令

$$i : \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma^2 A) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^2 A); \quad [\Sigma^2\tau]_{su} \mapsto [\Sigma_m^2\tau]_{su}.$$

容易看出， i是良定义的同态。因此，将它与 β复合，可得一个同态

$$\Psi_m : \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^2 A); \qquad \phi = i\circ\beta.$$

引理 3.3。 设 $m\ge 1$，并设 A 是一个含单位元的、核的、可分的 C^*代数。设 Y 是一个有限维紧致度量空间。那么映射

$$\Psi_m : \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A) \to \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^2 A), \quad [\tau]_u \mapsto [\Sigma_m^2\tau]_u$$

是一个单同态。

证明：假设 $\Psi_m([\tau]_{su}) = [\Sigma_m^2\tau]_{su} = 0$。那么存在一个 $*$-同态 $\Sigma_m^2\tau : \Sigma_m^2 A \to M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}))$，使得

$$\Sigma_m^2\tau(b) = (\pi\circ\overline{\Sigma_m^2\tau})(b) \text{ for all } b \in \Sigma_m^2 A.$$

设 $P_0 = 1\otimes 1\otimes p$。于是我们有

$$P_0 \sim_{MVN} 1 - P_0 \sim_{MVN} 1.$$

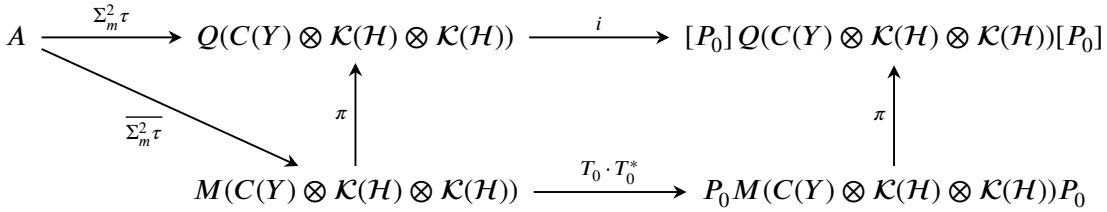
因此，存在一个等距算子 $T_0 \in M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}))$，使得

$$T_0T_0^* = P_0.$$

这诱导出如下同构：

$$T_0\cdot T_0^* : M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})) \to P_0M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}))P_0; \quad a\mapsto T_0aT_0^*.$$

因此我们有



注意 $P_0M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}))P_0 = M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}))\otimes p$。利用这一点以及交换图，我们得到一个 $*$-同态

$$\tau' : A \to M(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H}));\ \tau'(a) = \pi\circ\tau.$$

这证明了 $[\tau]_{su} = 0$。 □

我们将证明 Ψ_m 是一个同构。为此，我们需要建立一些结果。取一个齐次扩张 $\lambda : \Sigma_m^2 A \to Q\big(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\big)$。令 $\lambda(1\otimes(S^*)^m) = V$。由于 λ 是齐次的，因此它是范数满射扩张。由命题 2.5 和推论 2.7 可知，存在一个酉元 $U \in M\big(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\big)$ 使得 $[U]V[U^*] = [1\otimes 1\otimes(S^*)^m]$。由于 $[\lambda]_{su} = [[U]\lambda[U^*]]_{su}$，不妨假设 $V = [1\otimes 1\otimes(S^*)^m]$。因此我们有

$$\lambda(1\otimes p_{<m}) = [1\otimes 1\otimes p_{<m}].$$

定义

$$\nu : M_m(\mathbb{C}) \to Q\big(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\big);\ p_{ij}\mapsto\lambda(1\otimes p_{ij}) \text{ for all } 1\le i,j\le m-1.$$

那么 $\nu\in\Delta_m^2$。此外，若我们定义

$$\tilde{\tau} : A \to Q\big(C(Y)\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\otimes\mathcal{K}(\mathcal{H})\big);\ a\mapsto\lambda(a\otimes p_{<m}) \text{ for } a\in A,$$

于是我们得到

$$\lambda = \Sigma_m^2(\tilde{\tau},\nu,[1\otimes 1\otimes(S^*)^m]).$$

命题 3.4. 有

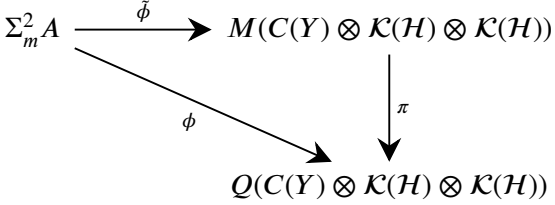
$$Ord([\nu]) \leq Ord([\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m])]_{su}).$$

特别地，如果 $[\nu]$ 是无限阶的，那么 $[\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m])]_{su}$也是如此。

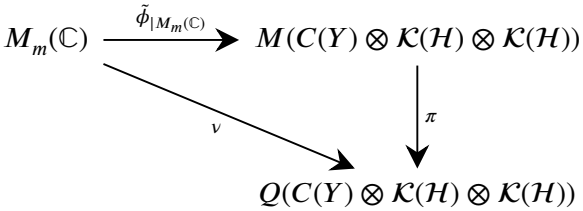
证明：设 $\mathrm{Ord}\ ([\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m])]_{su}) = r$。固定 r等距算子 $s_1, s_2, \cdots s_r \in Q(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ 使得 $\sum_{j=1}^r s_j s_j^* = 1$。定义

$$\phi : \Sigma_m^2 A \to Q(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})); \quad \phi(b) = \sum_{i=1}^r s_i \Sigma_m^2(\tau, \nu)(b) s_i^*.$$

于是 $[\phi]_{su} = r[\Sigma_m^2(\tau, \nu)]_{su}$，从而得到以下交换图：



将其限制到由 $\{1 \otimes p_{ij} : 1 \leq i, j \leq m\}$生成的 $\Sigma_m^2 A$ 的 C^*-子代数上，可得以下交换图：



这证明了 $r[\nu] = 0$，从而得证。

□

引理 3.5. $[\nu] = 0$ 当且仅当 $[\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m])]_{su} \in \Psi_m(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A))$。

证明：令 $[\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m])]_{su} \in \Psi_m(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A))$。那么存在一个齐次扩张 τ' 使得

$$\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m]) \sim_{su} \Sigma_m^2 \tau'.$$

因此，存在一个酉元 $U \in M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ 使得

$$[U]\Sigma_m^2(\tilde{\tau}, \nu, [1 \otimes 1 \otimes (S^*)^m])(b)[U]^* = \Sigma_m^2 \tau'(b) \quad \text{for all } b \in \Sigma_m^2 A.$$

因此我们有

$$[U]\nu(p_{ij})[U]^* = [U]\Sigma_m^2(\tau, \nu)(1 \otimes p_{ij})[U]^* = \Sigma_m^2 \tau'(1 \otimes p_{ij}) = 1 \otimes 1 \otimes p_{ij}.$$

这表明 $\nu \sim_{su} 0$，因此 $[\nu] = 0$。为了证明正向，我们假设 $[\nu] = 0$。令$P_{<m} = 1 \otimes 1 \otimes p_{<m}$。由于

$$\nu(1) = [P_{<m}], \text{ and } 1 \otimes P_{<m} \sim_{MVN} 1 \sim_{MVN} (1 - P_{<m}),$$

存在一个等距算子 $T_{<m} \in M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$，使得

$$T_{<m} T_{<m}^* = P_{<m}.$$

这导出以下同构：

$$T_{<m} \cdot T_{<m}^* : M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) \to P_{<m} M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) P_{<m}; \quad a \mapsto T_{<m} a T_{<m}^*.$$

因此我们有

$$\begin{array}{ccccc} M_m(\mathbb{C}) & \xrightarrow{\nu} & Q(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) & \xrightarrow{i} & [P_{<m}] Q(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))[P_{<m}] \\ & \searrow^{\tilde{\nu}} & \uparrow{\scriptstyle \pi} & & \uparrow{\scriptstyle \pi} \\ & & M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) & \xrightarrow{T_{<m} \cdot T_{<m}^*} & P_{<m} M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) P_{<m}. \end{array}$$

因此，存在一个酉元 $W \in P_{<m} M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})) P_{<m}$，使得

$$[W] \nu(p_{ij}) [W^*] = [1 \otimes 1 \otimes p_{ij}], \text{ for all } 0 \le i, j \le m - 1.$$

定义 $V = \sum_{j=0}^{\infty} W (1 \otimes 1 \otimes S^m)^j$。那么 V 是 $M(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$ 中的一个酉元，并且

$$[V][1 \otimes 1 \otimes S^m] = [1 \otimes 1 \otimes S^m][V], \text{ 且 } [V] \nu(p_{ij}) [V^*] = [1 \otimes 1 \otimes p_{ij}], \text{ 对于所有 } 0 \le i, \ j \le m - 1.$$

定义扩张 $\Gamma = V[\Sigma_m^2(\tau, \nu)] V^*$。则 $[\Gamma]_{su} = [\Sigma_m^2(\tau, \nu)]_{su}$。此外，扩张 Γ 诱导一个同态 $\gamma : A \to Q(C(Y) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H}))$，使得

$$\Gamma(a \otimes p) = \gamma(a) \otimes p, \text{ for all } a \in A.$$

不难验证 $\Gamma = \Sigma_m^2(\gamma)$。因此，我们有

$$[\Sigma_m^2(\tau, \nu)]_{su} = [\Gamma]_{su} \in \Psi_m(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A)).$$

□

引理 3.6. 设 Y 是一个有限维紧致度量空间。假设群 $K_0(C(Y))$ 和 $K_1(C(Y))$ 是有限生成自由阿贝尔群。那么，对于 $r \in \mathbb{N}_0$，有

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}^{\mathrm{Tor}}(Y, \Sigma_m^{2r} \mathbb{C}) = 0.$$

证明：我们对 r 进行归纳来证明该断言。 $r = 0$ 的情形显然，因为

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \mathbb{C}) = 0.$$

假设该结论对 $r - 1$成立。令 $[\psi]_{su} \in \mathrm{Ext}^{\mathrm{Tor}}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma^{2r}_m\mathbb{C}).$ ，则

$$[\psi]_{su} = [\Sigma^2_m\big(\tau,\ \nu, [1 \otimes 1 \otimes S^m]\big)]_{su},$$

对于某个 $\nu \in \Delta^2_m$ ，以及一个由 $C(Y) \otimes \mathcal{K}$ 扩张 $\Sigma^{2r-2}_m\mathbb{C}$ 得到的齐次扩张 τ。由于

$$\mathrm{Ext}(M_m(\mathbb{C}), C(Y)) = KK^1(M_m(\mathbb{C}), C(Y))$$

根据 Künneth 定理（参见 [2]第 234 页的定理 23.1.2），这是一个无挠阿贝尔群，因此

$$\mathrm{Ord}([\nu]) \in \{0, \infty\}.$$

由命题3.4，可得

$$\mathrm{Ord}([\nu]) \leq \mathrm{Ord}\big([\Sigma^2_m\big(\tau,\ \nu, [1 \otimes 1 \otimes S^m]\big)]_{su}\big) < \infty.$$

因此， $\mathrm{Ord}([\nu]) = 0$，从而由引理3.8

$$\psi \in \Psi_m\big(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma^{2r-2}_m\mathbb{C})\big).$$

该结论现在可由引理 3.3和归纳假设得出。 □

引理 3.7. 设 Y 是一个有限维紧致度量空间。假设群 $K_0(C(Y))$和 $K_1(C(Y))$ 是有限生成自由阿贝尔群。设 $\nu \in \Delta^{\ell}_m$。那么我们有以下结论。

$$Ord\,([\nu]) = 0.$$

证明：由 Künneth 定理（见定理 23.1.2，第 234, [2]），

$$\mathrm{Ext}(M_m(\mathbb{C}), C(Y)) \cong KK^1(M_m(\mathbb{C}), C(Y))$$

是一个无挠阿贝尔群。因此我们得到

$$\mathrm{Ord}([\nu]) \in \{0, \infty\}.$$

假设 Or $\quad \mathrm{d}([\nu]) = \infty$。接着，取 $A = \mathbb{C}$并使用命题 3.4 和引理 3.5，我们得到

$$\mathrm{Ord}([\Sigma^2_m(0, \nu)]) = \infty, \quad \text{and} \quad \Sigma^2_m(0, \nu) \notin \Psi_m(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \mathbb{C})).$$

固定 $r \in \mathbb{N}_0$。考虑映射

$$\Psi^r_m : \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma^{2r}_m A) \longrightarrow \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma^{2(r+1)}_m A), \quad [\tau]_{su} \mapsto [\Sigma^2_m\tau]_{su}.$$

通过类似的论证，

$$\mathrm{Ord}([\Sigma_m^2(0_r,\nu)])=\infty,\quad \text{and}\quad \Sigma_m^2(0_r,\nu)\notin \Psi_m^r\big(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^{2r}\mathbb{C})\big).$$

因此，这些元素

$$\left\{\Psi_m^r\circ\cdots\circ\Psi_m^{j+1}\Sigma_m^2(0_j,\nu)\;\middle|\;0\le j\le r\right\}$$

是 $\mathbb{Z}$中的线性无关无限阶元素。根据命题 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^{2r}\mathbb{C})$，可将 2.9 视为 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^{2r}\mathbb{C})$ 的子群 $KK^1(C(Y),\Sigma_m^{2r}\mathbb{C})$。此外，根据普适系数定理（见定理 23.1.1，第 233, [2] 页），有

$$KK^1(\Sigma_m^{2r}\mathbb{C},C(Y))\cong K_0(C(Y))\oplus K_1(C(Y))\oplus(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^{\oplus r}.$$

取大于 $K_*(C(Y))$ 的秩的 r。则 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^{2r}\mathbb{C})$ 至少包含 $r+1$ $\mathbb{Z}$ 个线性无关的无限阶元素，这只有在以下条件成立时才可能：

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}^{\mathrm{Tor}}(Y,\Sigma_m^{2r}\mathbb{C})\neq 0,.$$

这与引理 3.6 矛盾。 □

定理 3.8。设 $m\ge 1$，且 A 是一个含单位元的核可分 C^*-代数。设 Y 是一个有限维紧致度量空间，使得 $K_0(C(Y))$ 和 $K_1(C(Y))$ 是有限生成自由阿贝尔群。则映射

$$\Psi_m:\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)\to\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,\Sigma_m^2A),\quad [\tau]_u\mapsto[\Sigma_m^2\tau]_u$$

是一个同构。

证明：只需证明 Ψ_m 是满射，这由引理 3.3可知。设 λ 是Σ_m^2A 的一个齐次扩张，其扩张对象为 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$。则

$$[\lambda]_{su}=\left[\Sigma_m^2(\tilde{\tau},\nu,[1\otimes 1\otimes(S^*)^m])\right]_{su}$$

对于某个 $\nu\in\Delta_m^2$ 以及某个齐次扩张 τ，它是 A 以 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$为核的扩张。由引理 3.7，有 $[\nu]=0$。因此，引理 3.5推出

$$\Sigma_m^2(\tilde{\tau},\nu,[1\otimes 1\otimes(S^*)^m])\in\Psi_m\big(\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y,A)\big).$$

命题 3.9. 设

$$\xi:\ 0\longrightarrow C(Y)\otimes\mathcal{K}\longrightarrow B\xrightarrow{\alpha}A\longrightarrow 0$$

是 A 由 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$ 扩张而成的扩张，令 τ 表示相应的 *Busby* 不变量。则

$$\Sigma_m^2\xi:\ 0\longrightarrow C(Y)\otimes\mathcal{K}\otimes\mathcal{K}\longrightarrow\Sigma_m^2B\xrightarrow{\Sigma_m^2\alpha}\Sigma_m^2A\longrightarrow 0$$

是由 $C(Y)\otimes\mathcal{K}$ 对 Σ_m^2A 的扩张，其 *Busby* 不变量为 $\Sigma_m^2\tau$。此外，如果 ξ 是齐次的，那么 $\Sigma_m^2\xi$ 也是齐次的。

证明：第一部分可通过直接验证得出。对于另一部分，固定 $y \in Y$，并令

$$J_y = \ker\left(\mathrm{ev}_y \circ \Sigma_m^2 \tau\right).$$

由于 τ 是齐次的， J_y 是 $\Sigma_m^2 A$ 的一个理想，且 $J_y \cap (A \otimes \mathcal{K}) = \emptyset$。若 $J_y \neq \{0\}$，则存在 $t \in \mathbb{T}$ 使得

$$(1 \otimes S^m) - t\mathbb{1} \in J_y.$$

然而，我们有

$$\mathrm{ev}_y \circ \Sigma_m^2 \tau(1 \otimes S^m) = [S^m] \neq [t\mathbb{1}] \quad \text{for any } t \in \mathbb{T},$$

因此， J_y中不存在这样的非零元素。于是，对每个 $y \in Y$都有 $J_y = \{0\}$ ，从而证明了该断言。 □

命题 3.10。 设 Y是一个有限维紧致度量空间。假设群 $K_0(C(Y))$和 $K_1(C(Y))$ 是有限生成自由阿贝尔群。假设

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A) = \{[\xi_i]_{su} : i \in I\},$$

并令 C_i 表示扩张 ξ_i中作为中间 C^*-代数出现的 C^*-代数。那么

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma_m^2 A) = \{[\Sigma_m^2 \xi_i]_{su} : i \in I\}.$$

此外，这个集合

$$\{\Sigma_m^2 C_i : i \in I\}$$

恰好是所有作为$\Sigma_m^2 A$ 被 $C(Y) \otimes \mathcal{K}$的齐次扩张的中间 C^*-代数而出现的 C^*-代数的集合，在同构意义下。

证明：它是定理 3.8 与命题 3.9的直接推论。 □

命题 3.11. 假设 K_0 是出现在 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, A)$的扩张中的中间 C^*-代数的完全不变量。则对所有 $m \geq 1$， K_0 也是出现在 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(Y, \Sigma_m^2 A)$的扩张中的中间 C^*-代数的完全不变量。

证明：它由命题 3.9 与定理 2.5推出。 □

现在我们建立主要结果。

定理 3.12. 对于 $1 \leq k \leq 2n$， 我们有

$$B_k^{2n+1} \cong \begin{cases} \Sigma^{2(k-1)} C(\mathbb{T}), & \text{if } 1 \leq k \leq n, \\ \Sigma^{2(k-n-1)} \Sigma_2^2 \Sigma^{2(n-1)} C(\mathbb{T}), & \text{if } n+1 \leq k \leq 2n. \end{cases}$$

特别是，

$$C\left(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)\right) \cong \Sigma^{2(n-1)} \Sigma_2^2 \Sigma^{2(n-1)} C(\mathbb{T}).$$

证明：令 $1 \leq k \leq n$。在此情形下，由 [1] 中给出的不可约表示的显式描述可知，前 k 个生成元在映射 $C\big(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)\big)$ 下的像ϕ_{ω_k} 构成了 $C\big(S_q^{2k+1}\big)$的标准生成元，而其余生成元的像均为零。于是结论成立，因为

$$C\big(S_q^{2k+1}\big) \cong \Sigma^{2(k-1)}C(\mathbb{T}).$$

为证明关于 $k = n+1$ 的断言，假设该断言对 $1 \leq k \leq n$ 成立。对于 $m \neq 0$，我们有扩张

$$\xi_m : \ 0 \longrightarrow C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{K} \longrightarrow \Sigma_m^2 C(\mathbb{T}) \xrightarrow{\sigma} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0, \qquad \sigma(S^m) = t.$$

要得到一个平凡齐次扩张 ξ_0，取 $q \in \Upsilon$，其中 $\Upsilon := \{q \in \mathbb{C} : 0 < |q| < 1, \theta = \frac{1}{\pi}\arg(q)$ 是无理数$\}$。于是根据 [10], ，我们得到如下平凡齐次扩张。

$$\xi_0 : 0 \longrightarrow C(\mathbb{T}) \otimes \mathcal{K} \longrightarrow C(U_q(2)/_{\psi}\mathbb{T}) \xrightarrow{\vartheta} C(\mathbb{T}) \longrightarrow 0.$$

将 $C(U_q(2)/_{\psi}\mathbb{T})$ 记为 $\Sigma_0^2 C(\mathbb{T})$。于是我们有

$$K_0(\Sigma_0^2 C(\mathbb{T})) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{if } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{if } m = 0. \end{cases}$$

利用引理 3。4，我们得到 [10],

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, C(\mathbb{T})) = \{[\xi_m]_{su} : m \in \mathbb{Z}\}.$$

由于$\Sigma_m^2 C(\mathbb{T}) = \Sigma_{-m}^2 C(\mathbb{T})$，因此 K_0是扩张中出现的中间 C^*-代数的完全不变量，所涉及的扩张为 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, C(\mathbb{T}))$。然后由命题 3.11，可以得出 K_0 也是扩张中出现的中间 C^*-代数的完全不变量，所涉及的扩张为 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, B_n)$。由命题3.10，我们得到

$$\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, B_n^{2n+1}) = \mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, \Sigma^{2(n-1)}C(\mathbb{T})) = \{[\Sigma^{2(n-1)}\xi_m] : m \in \mathbb{Z}\}.$$

因此，出现在 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, B_n)$ 的扩张中的中间 C^*-代数为

$$\{\Sigma_m^2 \Sigma^{2(n-1)} C(\mathbb{T}) : m \in \mathbb{Z}\}.$$

根据定理2.5，我们有

$$K_0(\Sigma_m^2 \Sigma^{2(n-1)} C(\mathbb{T})) = \begin{cases} \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \text{if } m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, \\ \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} & \text{if } m = 0. \end{cases}$$

根据归纳假设和引理2.6，可知 B_{n+1}^{2n+1} 作为中间 C^*-代数出现在属于 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, B_n^{2n+1})$ 的扩张中。现在，利用定理 2.5 和 2.7，我们得出

$$B_{n+1}^{2n+1} \cong \Sigma_2^2 \Sigma^{2(n-1)} C(\mathbb{T}).$$

对于 $k = n+2$ 的情形，论证与上文相同。不过，这种情况下需要使用定理 3.8 或命题 3.10 来获得所有扩张的列表，从而得到出现在 $\mathrm{Ext}_{\mathrm{PPV}}(\mathbb{T}, B_{n+1})$ 的扩张中的所有中间 C^*-代数。其余情形的论证类似。 □

推论 3.13. 对于所有 $q \in (0,1)$， C^*-代数 $C\left(SO_q(2n+1)/SO_q(2n-1)\right)$ 彼此同构。

参考文献

[1] Akshay Bhuva、Surajit Biswas 和 Bipul Saurabh， B 和 D型量子齐性空间的拓扑不变性，arXiv:2406.19074，2024 年。[2] Bruce Blackadar， K算子代数的 K 理论，数学科学研究所出版物第 5 卷，剑桥大学出版社，剑桥，第 2 版，1998 年。[3] Partha Sarathi Chakraborty 和 S. Sundar，量子齐性空间 $SU_q(n)$ 的 K-群，《太平洋数学杂志》252（2011），第 2 期，275–292。[4] Partha Sarathi Chakraborty 和 S. Sundar，量子双重悬垂与谱三元组，《泛函分析杂志》260（2011），第 9 期，2716–2741。[5] Jeong Hee Hong 和 Wojciech Szymański，量子球面和射影空间作为图代数，《数学物理通讯》232（2002），第 1 期，157–188。[6] Huaxin Lin， C^*-代数本质扩张的酉等价，《美国数学会会刊》137（2009），第 10 期，3407–3420。[7] G. G. Kasparov， C^*-代数扩张理论中的 K-函子（俄文），《泛函分析及其应用》13（1979），第 4 期，73–74。[8] Anatoli Klimyk 和 Konrad Schmüdgen，量子群及其表示，《物理学文本与专著》。施普林格出版社，柏林，1997 年。[9] M. Pimsner、S. Popa 和 D. Voiculescu， $C(X) \otimes \mathcal{K}(\mathcal{H})$的齐次 C^*-扩张，1。《算子理论杂志》1（1979），第 1 期，55–108。[10] Bipul Saurabh，量子四元数球面的拓扑不变性，《太平洋数学杂志》288（2017），第 2 期，435–452。

BIPUL SAURABH（bipul.saurabh@iitgn.ac.in，saurabhbipul2@gmail.com）数学系，印度理工学院，甘地讷格尔，帕拉杰，甘地讷格尔 382055，印度