arXiv:2602.17109v1 [math.GT] 19 Feb 2026

亏格二把手体结的 3-分解

小泽真、王一盛

Abstract. 我们研究 3-可分解亏格二把手体结这一类，并对其外部中的本质环带进行了完整分类。我们引入了 τ-和 ρ-缠结以及良好矩形和环带的概念。通过对外部存在良好矩形或环带的 τ-和 ρ-缠结进行分类，我们依据本质环带的数量，将无环面的 3-可分解亏格二把手体结划分为不同类别。作为应用，我们确定了所有交叉数不超过六个的亏格二把手体结的双曲性，并识别出许多具有七个交叉的双曲把手体结。此外，我们构造了把手体结无法进行 3-分解的障碍，并给出了具体实例。

1. 引言

分解是结理论中一种常见的技术，用于将复杂的结拆解开来。Schubert 的经典结果 [21] 指出，结可以唯一地分解为素结，因此可以从其素因子还原该结的性质。一般而言，结的 n-弦分解 是定向三维球面中的两个 3-球 B_1, B_2 的并，其中 $B_1 \cup B_2 = S^3$，且 $B_1 \cap B_2$ 是一个 2-球面，而 $B_i \cap K$ 由 n 条弦组成，$i = 1,\ 2$。因此，Schubert 的分解是一种 1-弦分解，而素结不存在 1-弦分解；然而，其n-弦分解 $n \geq 2$是一个重要的研究课题。Conway [5] 为结的枚举引入了 2-弦分解的概念，如今该概念已广泛应用于各种情境；例如，Lickorish [15]将其用于结的素性检验，Oertel [19]则将其用于结的双曲性检测。一般 n-弦分解的性质也得到过研究；例如，Bleiler [3]将素结的概念推广为在 n-弦上为素的结，Ozawa [20]考察了本质 n-弦分解的唯一性，而 Nogueira [18] 研究了其存在性。

更一般地，可以将空间图 Γ（嵌入于S^3中的有限图）分解为缠结图。一个2-球面 S 与 Γ 横截地相交于 $n > 0$ 个点，将S^3 分成两个3-球 B_1，B_2 并将图 Γ 分成两个缠结图 $G_i := B_i \cap \Gamma$位于 B_i中。并集（B_1，G_1）$\cup_S$（B_2，G_2）称为（S^3，Γ）的 n-缠结分解（或简称为 Γ的分解）。Suzuki [23] 研究了2-缠结分解，并得到了类似于 Schubert 素因子分解的唯一分解定理。对于3-缠结分解，Motohashi [16], [17]证明了空间图若干类别的唯一性结果。注意，在结的情形下，n-串缠结分解就是 $2n$-缠结分解。

一个亏格 g 把手体结 V 是嵌入于 S^3中的亏格为 g 的把手体。把手体结与空间图和结密切相关。若两个把手体结（分别地，空间图）环境同痕，则称它们等价。一个正则

Date: 2026年2月20日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号57K12、57K32；次要分类号57M15。*Key words and phrases.* 把手体结、双曲性、本质曲面、3-分解。Y.-S. Wang 衷心感谢 NSTC（项目编号112-2115-M-110 -001 -MY3）、台湾的支持。

邻域唯一确定一个把手体结，但每个亏格为 $g > 1$的把手体结都有无穷多个作为空间图彼此不等价的骨架。此外，亏格为一的把手体结的研究等价于经典结理论。与空间图和结一样，可以根据把手体结的可分解性对其进行分类。一个 n-分解球面 S 是 V 的一个2-球面，满足 $S \cap V$由 V中的 n 个圆盘组成，并且 $S - V$是外部 $E(V)$中的本质的曲$= S^3 - V$面。若 V存在一个n-分解球面，则称其为 n-可分解的；见 Ishii-Kishimoto-Ozawa [8]。一个 n-分解球面S将 S^3 切割成两个3-球 B_1、B_2，并将 V切割成两个把手体 V_1、V_2，且满足$V_i \subset B_i$。并集（B_1，V_1）$\cup_S$（B_2，V_2）称为（S^3，V）的一个 n-分解（或简称为 V的分解）。

对 1-可分解把手体结的研究历史悠久，例如可以追溯到 Suzuki [22] 和 Tsukui [25], ；而对具有 $n > 1$ 的 n-可分解把手体结的研究则是相对较新的发展。Ishii-Kishimoto-Ozawa [8]研究了打结把手分解这一特殊的 2-分解，其中一个 2-分解球与 V 相交于两个平行圆盘。对于亏格二把手体结，每个 2-分解都是打结把手分解。他们的结果被用于区分 Ishii-Kishimoto-Moriuchi-Suzuki 把手体结表 [6] 中的某些把手体结，并确定其手征性。Bellettini-Paolini-Wang [1] 研究了一种较弱的 3-分解概念（见第 2.4 节），并将其应用于把手体结的对称性和双曲性。

把手体结的双曲性与 n可分解性之间的关系，可以借助 Thurston 双曲化定理 [24]，来理解。该定理断言，外部 E（V）存在全测地边界的双曲度量，当且仅当 E（V）不含本质圆盘、环带或环面。若把手体结的外部含有本质圆盘（分别为环带或环面），则称该把手体结为可约的（分别为柱状的或环面型的）。如果 V 是二属的，则由 Tsukui [25]可知，不可约性意味着 1-可分解。另一方面，1-可分解把手体结必定可约，而 2-可分解把手体结必定是柱状的。因此，就可分解性而言，最简单的双曲把手体结是那些 3-可分解的把手体结。

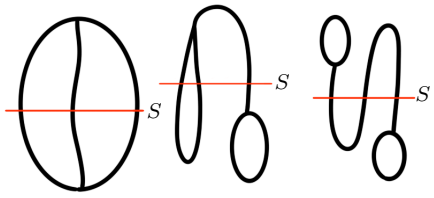
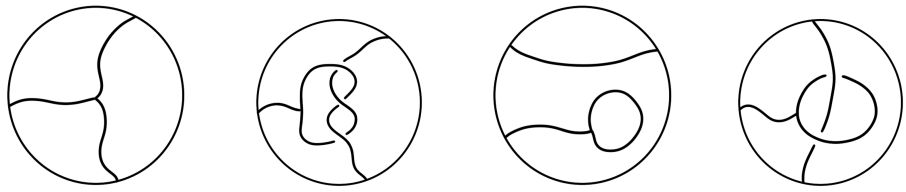


FIGURE 1. 交集 $S \cap V$。

考虑一个二属的3-可分解把手体结 V，它具有一个 3-分解（B_1，V_1）$\cup_S$（B_2，V_2），并注意到交集 $S \cap V$由三个圆盘组成，其中一个是分离的，或者它们在 V中两两非平行。因此，$S \cap V$中的圆盘确定了 V的一个骨架 Γ，该骨架是一个 θ图或手铐图；见图1。因此，图 $G_i := \Gamma \cap B_i$ 要么是一个三点锥（图2a），要么是一个弧与一个环和一条弧在其边界处的楔和的不交并（图2c）。若该对（B_i，G_i）属于前一种情况，则称其为τ-缠结；若属于后一种情况，则称其为 ρ-缠结；见图2b、2d。因此，V 的 3-分解还可进一步分为三种类型：

若 (B_1，G_1) 和 (B_2，G_2) 都是 τ-缠结，则称为 • $\tau\tau$-分解，

若 $(B_1,\ G_1)$ 和 $(B_2,\ G_2)$ 都是 ρ-缠结，则称为• $\rho\rho$-分解，
若 (B_1, G_1)、(B_2, G_2) 中一个是 τ-缠结，另一个是ρ-缠结，则称为• $\tau\rho$-分解。



(a) 平凡 τ-缠结。 (b) τ-缠结。 (c) 平凡 ρ-缠结。 (d) 霍普夫 ρ-缠结。

FIGURE 2. τ-缠结与 ρ-缠结。

在 V 的外部中，本质圆盘和不可压缩环面的情形相当简单。事实上，由引理 2.5 可知，V 必然不可约。另一方面，由引理 2.4 可知，V 无环面，当且仅当两个缠结外部 ~~$E(G_i)$~~: $= B_i - V_i$、$i = 1,\ 2$ 均无环面。相比之下，$E(V)$ 中本质环带的构形具有相当大的组合复杂性。

设 V 无环面，令 P 为 $S\cap E(V)$ 与 A 的交集，其中 A 是 $E(V)$ 中的一个本质环带，并且 $|A\cap P|$ 在 A 的同痕类中达到最小。此外，记 F_i 为 $G_i\subset B_i$ 的正则邻域的边界。

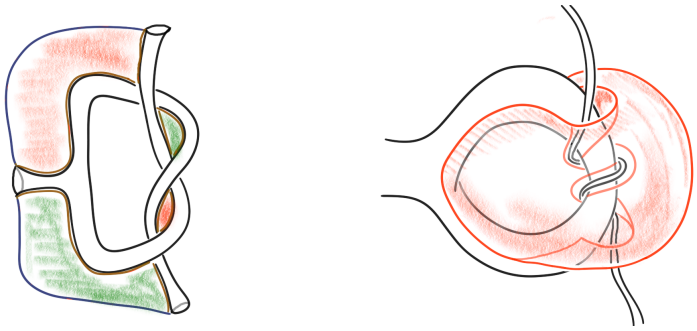
先考虑 $|A\cap P|\neq 0$ 的情形。在这种情况下，裤形曲面 P 将环带 A 切成若干圆盘 $D_1,\ \cdots,\ D_n$，每个圆盘都真嵌入于 $E(G_i)$、$i=1$ 或 2 中，并且与 P 和 F_i 各交于两条本质弧。这种圆盘在 $E(G_i)$ 中称为 良好矩形；见图 3a。良好矩形是 $E(G_i)$ 中的本质圆盘，但反过来并不成立。现在考虑 $|A\cap P|=0$ 的情形。此时，A 是真嵌入于 $E(G_i)$、$i=1$ 或 2 中的环带，且不存在与 P 不相交的 ∂-压缩圆盘。在 $E(G_i)$ 中，这样的环带称为 优良环面。每个与 P 不相交的本质环带都是优良环面，但也存在非本质的优良环面；例如图 3b。更多细节见引理 2.3。

鉴于上述观察，要确定 $E(V)$ 中的本质环带，只需对 ρ-/τ-缠结外部中的良矩形和良环带进行分类。注意，若将 τ-或 ρ-缠结外部 $E(G_i)$ 视为带有边界模式 $\{P, F_i\}$ 的三维流形，那么良环带和矩形恰好就是 Johannson [9] 中的本质环带和方形。采用当前术语是为了使论述自成一体，因为缠结外部所带来的边界模式相当特殊，而且读者无需预先了解带边界模式的流形理论。

主要结果。本文的第一个主要结果是对无环面的 τ-或 ρ-缠结外部中的良矩形和环带进行分类。我们将良矩形无重叠地分为五种类型，将良环带分为三种类型；见定理 4.1、4.2 和 5.2。

利用良矩形和环带的分类，我们的第二个主要结果是依据其外部中本质环带的数量，对无环面型的 3-可分解二属把手体结进行分类。更具体地说，我们将无环面型

- $\tau\tau$-可分解把手体结分为四个互不相交的类别；
- $\tau\rho$-可分解把手体结分为五类；
- 无环面 $\rho\rho$-可分解为三个把手体结。



(a) 良好矩形。 (b) 良好，但为非本质环带。

FIGURE 3

完整陈述请参见定理 6.1、6.2 和 6.3。

在 Ishii-Kishimoto-Muriuchi-Suzuki [6], 中，亏格二把手体结的不可约类型已按不超过六个交叉进行了枚举。总共有 21 个，其中四个已知是环面型，另有九个已知是无环面且柱状的。剩余八个被猜想为双曲的。我们的第二个主要结果证明了这些猜想为双曲的把手体结中除一个以外的所有结的双曲性；推论 6.4。我们通过把手体结的对合证明剩下那个结的双曲性；参见第 7 节。注意，根据 Chan Pamolo-Taylor [4] 最近的一项结果，利用 6_8 具有一个最小结化的 θ-脊这一事实，也可以推出它的双曲性。因此，不超过六个交叉的所有双曲亏格二把手体结均已确定。

Bellettini-Paolini-Paolini-Wang [2], 列举了具有七个交叉的不可约亏格二手柄体结，总计 69 个，其中已知有 17 个是 3-可分解的。在这 17 个手柄体结中，有七个（$7_{24}, 7_{32}, 7_{36}, 7_{38}, 7_{39}, 7_{59}, 7_{60}$ 见 [2, 表 1]）已知是无环面且柱状的。我们的第二个主要结果表明，其余十个都是双曲的；见推论 6.5。

第二个主要结果还使我们得以构造出不可 3-可分解的亏格二手柄体结。

约定。我们在分片线性范畴中进行研究。给定流形 M 的子多面体 X，我们分别用 X、X 和 $N(X)$ 表示 X 在 M 中的闭包、内部和正则邻域。若 X 在 M 中的余维为正，则 X 在 M 中的外部 $E(X)$ 定义为 $N(X)$ 在 M 中的补集；否则定义为 $M - X$ 的闭包。我们用 $|X|$ 表示 X 中连通分支的数量。除非另有说明，假定子流形是适当的，且交集是横截的。三维流形中的本质圆盘是指不会从该三维流形中切出一个 3-球的圆盘；而在 M 中具有非空边界且不是圆盘的紧曲面，若其不可压缩、边界不可压缩且不与边界平行，则称为本质的。

2. PRELIMINARIES

本节将进一步阐述引言中定义的概念。

2.1. 空间图与柄体结的分解。给定一个没有孤立顶点的有限平面图 G，我们用 ∂G 表示度为一的顶点集合。n-缠结 是一个有序对 (B, G)，其中 G 嵌入在一个定向的 3-球 B 中，且满足 $|\partial G| = n$ 和 $G \cap \partial B = \partial G$；例如，$\tau$-缠结和 ρ-缠结是

3-缠结；参见图2。若 G 包含在一个圆盘 $D \subset B$中，则有序对 $(B,\ G)$称为平凡的 。若存在保向同胚 $f\colon B_1 \to B_2$ 使得 $f(G_1) = G_2$，则两个有序对 $(B_1,\ G_1)$，$(B_2,\ G_2)$称为等价的 。

定义2.1。 给定一个空间图 Γ 和两个 3-球 $B_1,\ B_2 \subset S^3$ 使得$B_1 \cup B_2 = S^3$ 且 $B_1 \cap B_2$ 是一个 2-球面 S，它在 Γ 的边内部与其相交于 $n > 0$ 个点，则并集 $(B_1,\ G_1) \cup_S (B_2,\ G_2)$ 称为 Γ 的 $G_i := B_i \cap \Gamma,\ i = 1,\ 2$ 阶弧结分解。若交集 $S \cap E(\Gamma)$ 是 $E(\Gamma)$ 中的本质的子集，则该分解称为 本质的 。

接下来，定义2.1引出了以下概念。

定义2.2。 若不存在圆盘 D，使其为$E(G)$ 中的本质圆盘，且满足 $\partial D \subset P$ 或 $\partial D \cap P$ 是一条单弧，则称 n-弧结 $(B,\ G)$ 是 本质的 ； 若外部 $E(G)$ 不含本质环面，则称 $(B,\ G)$ 为无环面。

设 t_1, t_ρ 是 ρ-缠结中的两个连通分支（B, G）。若 t_ρ 包含在一个圆盘 $D \subset B$ 中，且 $D' \subset D$ 是由 t_ρ截出的圆盘；并且若（B, t_1）是一个平凡球-弧对，其中 $t_1 \cap D = t_1 \cap D'$ 是一个点，则（B, G）称为 $Hopf$ ρ-缠结；见图 2d。Hopf ρ-缠结是非平凡但非本质的。由定义 2.2 可得以下推论。

引理 2.1. 空间图 Γ 的 n-缠结分解$(B_1, G_1) \cup_S (B_2, G_2)$ 是本质的，当且仅当 B_i、 $i = 1$ 和 2 均为本质的。

给定一个把手体结 V，子午平面曲面 $P \subset E(V)$是一个平面曲面，其中 ∂P 的每个连通分支都围成 V 中的一个本质圆盘。设 D 是 V 中与 $\partial D = \partial P$ 不相交的圆盘之并。则并集 $P \cup D$ 称为由 P 诱导的 2-球面。

定义2.3。 若把手体结 V 的外部 $E(V)$中存在一个具有 n个边界分支的本质的子午平面曲面 P，则称其为 n-可分解的。我们称 P 为 V 的 n-分解曲面 ，并称由 P 诱导的2-球面 S 为 V的 n- 分解球面 。

2.2. **本质圆盘、环带和环面**。这里我们从一个 n-分解曲面 P 的角度，考察 n-可分解把手体结 V 的外部中是否存在本质圆盘、环带和环面。

引理 2.2。 假设 V 是可约的。那么在 $E(V)$ 中存在一个与 P 不相交的本质圆盘。

证明。 选择一个本质圆盘 $D \subset E(V)$，使得在 $E(V)$ 的所有本质圆盘中，$|D \cap P|$ 取极小值。若 $|D \cap P| \neq 0$，则由 P 从 D 截出的最外侧圆盘 D' 按极小性与 P 沿一条本质弧相交。这与 P 是本质的相矛盾，因此 $|D \cap P| = 0$；也就是说， D 与 P 不相交。□

设 X_1, X_2 是由 P 从 $E(V)$ 中切出的三维流形，且 $F_i := X_i \cap V, i = 1, 2$。考虑一个环带 $A \subset E(V)$，使其 $|A \cap P|$ 在其同痕类中取到最小值。于是有如下结论。

引理 2.3. 假设 V 不可约。

(i) 如果 $|A \cap P| = 0$，即 $A \subset X_i$、 $i = 1$ 或 2，那么 A 在 $E(V)$ 中是本质的，当且仅当 A 在 X_i 中没有与 P 不相交的（∂-）压缩圆盘。*(ii)* 如果 $|A \cap P| > 0$，那么 A 是本质的，当且仅当 P 将 A 切割成若干圆盘，其中每个圆盘都在 P （分别在 F_i）中与 P （分别与 F_i）沿两条本质弧相交，$i = 1$ 或 2。

证明。(i)：方向 $\Rightarrow$ 显然，因为 A 在 X_i 中与 P 不相交的每个（∂-）压缩圆盘都是 A 在 $E(V)$ 中的（∂-）压缩圆盘。对于方向 $\Leftarrow$，假设 A 在 $E(V)$ 中是非本质的。则 A 不可压缩，因为根据 P 的不可压缩性，A 在 $E(V)$ 中的每个压缩圆盘都可以通过同痕避开 P。因此，A 是 ∂-可压缩的。令 D 为一个 ∂-压缩圆盘，使得在 A 的所有 ∂-压缩圆盘中，$|D\cap P|$ 取极小值。根据假设，$D\cap P\neq\emptyset$，因此在 D' 中存在一个由 $D\cap P$ 与 $D'\cap A=\emptyset$ 截出的最外侧圆盘。根据极小性，$D'\cap P$ 在 P 中是本质的，这与 P 是本质的相矛盾。

(ii)：先考虑方向 $\Rightarrow$。由 A, P的本质性可知，交集$A\cap P$是在 A 和 P中的本质弧。因此，由极小性可知，若 $D_j\subset F_i$，则$D_j\cap F_i$ 是两条本质弧。

对于方向 $\Leftarrow$，我们反设：A 是非本质的。假设 A可压缩，且 D 是一个压缩圆盘，使其在 A的所有压缩圆盘中与 $|D\cap P|$ 的交集最少。那么，由 P 切出的每个最外侧圆盘 $D'\subset D$ 都沿一条弧与 D_j 相交。$D_j\cup D'$ 的正则邻域的边界由两个圆盘 E_1, E_2组成；E_i 沿弧 α_i与 P相交，$i=1,2$，该弧在 P中是非本质的，因为 P是 ∂-不可压缩的。设 $E_i'\subset P$为 α_i切出的圆盘。那么，$E_i\cup E_i'$确定了一个圆盘，其边界完全位于 ∂V中。由 V 的不可约性可知，该圆盘从 $E(V)$中切出一个 3-球，这与 $D_j\cap F_i$ 是两条本质弧相矛盾。

因此，A 是 ∂-可压缩的。设 D 为 A的一个 ∂-压缩圆盘，使得它极小化

$$\{|D\cap P| \mid D\cap A \text{ is parallel to arcs in } A\cap P\}.$$

设 D_j 为带有 $D\cap D_j=D\cap A$的圆盘。若 $D\cap P=\emptyset$，则沿 D 压缩 D_j得到 P 的一个 ∂-压缩圆盘，矛盾。若 $D\cap P\neq\emptyset$，则由极小性，D 中被 $D\cap P$截出且与 D_j 不相交的任一最外侧圆盘都是 P的一个 ∂-压缩圆盘，矛盾。□

对于 $E(V)$中的本质环面，我们有引理 2.2关于 $n=3$的类似结论。

引理 2.4. 假设 V具有一个3-分解曲面 P。则 $E(V)$ 包含一个本质环面当且仅当 $E(V)$ 包含一个与 P不相交的本质环面。

证明。方向 $\Leftarrow$ 是显然的。为了看出方向 $\Rightarrow$，我们令 $T\subset E(V)$为一个本质环面，并对 T 作合痕，使其在$E(V)$中的所有本质环面里极小化 $|T\cap P|$。

断言： T **与** P**不相交**。反之，分为以下两种情况：

情况1：$X_1\cap V$、$X_2\cap V$中有一个是连通的，不妨设为 $X_1\cap V$。在这种情况下，任意环带$A\subset T\cap X_1$ 在 P中都有平行的边界分支，因此 ∂A 从P中截出一个环带 A'。由极小性，环面 $A\cup A'$围成一个实心环面 U。由于 A' 的核围成一个与 U不相交的圆盘，可以将 T经由 U进行同痕变换，以消去交集 $\partial A\subset T\cap P$，这与极小性矛盾。

情形2：和 $X_2\cap V$均不连通。在此情形下，$X_i\cap V$是一个一次穿孔闭曲面 F_i 与一个二次穿孔闭曲面$i=1$的不交并，2. 考虑一个环带 $A\subset T\cap X_1$。如果 ∂A 的各连通分支在 P中平行，那么前一种情形中的同样论证会导出矛盾。如果 ∂A 的各连通分支不平行，那么 ∂A 的一个连通分支 C 与 ∂F_2平行。因此，与 C 相邻的环带 $A'\subset T\cap X_2$ 具有平行边界分支。由此可将问题归结为前一种情形。□

2.3. **二属情形**。回忆一下，亏格二手柄体结 V 的一个3-分解会诱导出 V的骨架的一个本质3-缠结分解，反之亦然。因此，我们也将亏格二手柄体结 V 的骨架 Γ 的一个本质3-缠结分解（B_1，G_1）$\cup_S$（B_2，G_2）称为 V的一个3-分解。还要回忆一下，（B_1，G_1）、（B_2，G_2）是 τ-或 ρ-缠结，因此，V的一个3-分解还可进一步分为 $\tau\tau$-、$\tau\rho$-或 $\rho\rho$-分解。这里我们将更详细地考察3-可分解亏格二手柄体结的拓扑。

引理 2.5。 可进行3-分解的亏格二手柄体结 V 是不可约的。

证明。 设 $(B_1,G_1)\cup_S(B_2,G_2)$ 是 V 的一个 3-分解。于是，由引理 2.2 可知，若 V 可约，则存在一个与 P 不相交的本质圆盘 $D:=S\cap E(V)$。不妨设 $D\subset E(G_1)$。注意，(B_1,G_1) 不可能是一个 τ-辫结，因为 $N(G_1)$ 的边界 F 是一个裤形曲面。由于 (B_1,G_1) 是一个 ρ-辫结，$N(G_1)$ 的边界 F 由一个环带和一个一次穿孔环面 T_ρ 组成，因此 ∂D 是 B_1 中 T_ρ 的优先经线。考虑一条与 D 交于一点的 T_ρ 的子午线 m。于是，$D\cup m$ 的正则邻域的边界会给出 P 的一个压缩圆盘，矛盾。□

将引理 2.4 应用于当前情形，可得如下结果。

引理 2.6. 设亏格二手柄体结 V 有一个3-分解$(B_1,G_1)\cup_S(B_2,G_2)$，则 V无环面，当且仅当(B_i,G_i)、$i=1,2$均无环面。

由引理 2.5 和引理 2.6，后续各节将重点讨论亏格二 3-可分解把手体结 V 中的本质环带。给定一个 τ-或 ρ-缠结 (B,G)，我们用 F 表示 G 在 B 中的正则邻域 $N(G)$ 的边界，即 $F=N(G)\cap E(G)$，并用 P 表示交集 $E(G)\cap\partial B$。注意，$P\cup F=\partial E(G)$ 和 $P\cap F$ 是三个圆周；若 (B,G) 是一个 τ-缠结，则 F 是一个裤形曲面；若 (B,G) 是一个 ρ-缠结，则 F 是一个环带与一个一次穿孔环面的不交并。受引理 2.3 启发，我们考虑如下情形。

定义 2.4. 给定一个 3-缠结 (B,G)，$E(G)$ 中的矩形 是满足 $|R\cap F|=|R\cap P|=2$ 的圆盘 $R\subset E(G)$；若 $R\cap F,R\cap P$分别在 F,P 中是本质的，则该矩形是良性 的。若 A 不可压缩，且 A不存在与 P 不相交的∂-压缩圆盘，则 $E(G)$ 中的环带 A 是良性 的。

现在考虑识别问题，即判定亏格二把手体结外部中的一条经向裤形曲面 P 是否为 3-分解曲面。这等价于判定它所诱导的 3-缠结分解 $(B_1,G_1)\cup_S(B_2,G_2)$ 是否本质。因此，由引理 2.1，P 是 3-分解曲面当且仅当 (B_i,G_i) 与 $i=1,2$ 二者均为本质的。若 (B_i,G_i) 与 $i=1,2$ 二者均为无环面，则非平凡性几乎蕴含本质性。

引理 2.7。 设(B,G)是一个无环面 τ 或 ρ-缠结。那么(B,G)是本质的，当且仅当(B,G)是非平凡的，且不是 *Hopf* ρ- 缠结。

证明。 当 (B,G) 是一个 ρ-缠结时，用 $t_1,t_\rho\subset G$ 表示其两个连通分支；若 (B,G) 是一个 τ- 缠结，则用 t_1,t_2,t_3 表示 G 中的三条边。方向 $\Rightarrow$ 显然成立。对于方向 $\Leftarrow$，假设 (B,G) 是非本质的。那么有两种情况：存在 $\partial E(G)$ 的一个压缩圆盘 D，且 $\partial D\subset P$；或者存在 $\partial E(G)$ 的一个压缩圆盘 D，其中 $D\cap P$ 是一条弧。

情形 1： D **是一个压缩圆盘**。 在这种情形下，(B,G)必然是一个 ρ-缠结，而圆盘 D 将 t_1,t_ρ分隔开，因此将 $E(G)$分成两个结外部。根据无环面性，它们都是平凡结外部。特别地，如果 B_1,B_ρ 是包含 $t_i\in B_i,i=1$ 或 ρ的两个3-球，那么存在一个圆盘 $D_i\subset B_i$ 使得 $t_i\subset D_i$，因此(B,G)是平凡的。

情形 2： D **是一个** ∂**-压缩圆盘**。首先假设(B, G)是一个 τ-缠结。如果 D 与 ∂P的两个连通分支相交，可以假设 D 位于 B中 $t_1 \cup t_2$的外部$E(t_1 \cup t_2)$，因此 ∂D是结外部 $E(t_1 \cup t_2)$的一条经线。特别地， D可延伸为 B中的一个圆盘，仍记为 D，使得 $t_1 \cup t_2 \subset \partial D$。另一方面， B 中 D 的外部是一个3-球 B'；根据无环面性，(B', t_3)是一个平凡球-弧对，因此存在 B' 中的一个圆盘 D'，其中包含 t_3。两者的并 $D \cup D'$ 表明(B, G)是平凡的。

如果 D 与 ∂P的一个连通分支相交，则可假设 D 位于 t_1 的外部，因此可将 D 延伸为 B中的一个圆盘，仍记作 D，使得 $t_1 \subset D$。特别地， D 将 B 分成两个 3-球 B_2， B_3，其中 $t_i \subset B_i$、$i = 2$，3。由无环面性可知，(B_i, t_i)、$i = 2$，3 都是平凡球-弧对，因此 (B, G) 是平凡的。

现在假设 (B, G) 是一个 ρ-缠结。如果 D与 ∂P的两个连通分支相交，那么 D 位于 t_1的外部 $E(t_1)$ 中。令 m 为 $E(t_1)$ 中与 D 相交于一点的子午线。那么， $D \cup m$ 的正则邻域的边界是 P的一个压缩圆盘，因此可归约至情形 1。

如果 D 只与 ∂P的一个连通分支相交，那么 D 位于 $t_\rho \subset B$的外部 $E(t_\rho)$ 中。注意， ∂D 将 P 分成两个环带 A_1, A_2，而正则邻域 $A_1 \cup D$ 的边界由一个与 D 平行的圆盘和一个环带 A组成。∂A 的一个连通分支与 $D' \cap P = \emptyset$一起围成一个子午盘 $D' \subset N(t_1)$，另一个连通分支则位于 $\partial N(t_\rho)$ 中。后者与 ∂D一起，将 $N(t_\rho) \subset B$ 的边界分成两个环带 A', A''。由于 t_ρ可以同痕至 A'中，二者的并集$D \cup A' \cup A \cup D'$ 在 B中诱导出一个包含 t_ρ的圆盘，并将 (B, t_1) 分成两个球—弧对；由无环面性可知，这两个球—弧对都是平凡的。这意味着 (B, G) 是一个 Hopf ρ-缠结。□

作为引理 2.7、2.5 和 2.6 的一个应用，我们得到了另一种判定把手体结 5_2, 5_3, 6_2, 6_3, 6_4, 6_5, 6_6, 6_7, 6_9,6_{12}, 6_{13} 在 [6]中不可约的方法，因为它们都有一个骨架，该骨架允许进行 3-缠结分解（B_1， G_1）$\cup_S$（B_2， G_2），其中（B_i， G_i）、$i = 1$，2 均为无环面、非平凡且不是 Hopf ρ-缠结；例如参见图 12。

2.4. **弱分解**。Ishii-Kishimoto-Ozawa [8] 引入了一种较弱的 n-可分解性概念，它取消了边界不可压缩性这一条件。

定义 2.5。若把手体结 V 的外部$E(V)$ 含有一个不可压缩、非边界平行的子午平面曲面P，且该曲面有 n 个边界分支，则称其为弱 n可分解的。曲面 P 称为弱 3分解曲面。

n-可分解性在一般情况下严格强于弱 n-可分解性。然而，对于亏格二手柄体结，这两个概念在 $n = 2$时等价，在 $n = 3$时则略有不同。称把手体结 V 具有 ***Hopf*** ρ-和项，如果存在3-球 $B \subset S^3$，使得$B \cap V$在 B 中的骨架是一个 Hopf ρ-缠结；见图 2d。

引理 2.8. 给定亏格二手柄体结 V，若 V 是弱3-可分解的而非3-可分解的，则要么 V 是2-可分解的，要么 V 具有 ***Hopf*** ρ-和项。

证明。设 $P \subset E(V)$为一个不是3-分解的弱三分解曲面。则 P 是 ∂-可压缩的。设 D 为 P的一个 ∂-压缩圆盘， W 为由 P从 $E(V)$切下的满足 $D \subset W$的分支。

假设 W 是一个 τ-缠结外部。若 $D \cap P \subset P$ 是非分离本质弧，则 $D \cup P$ 的正则邻域的边界是一个二分解曲面，前提是 P 不与边界平行。类似地，若 $D \cap P \subset P$ 是一条分离的

本质弧，则 $D \cup P$ 的正则邻域的边界由两个子午环带组成，其中至少一个是二分解曲面，因为 P 不与 ∂ 平行。

假设 W 是一个 ρ-缠结的外部（$B,\ G$），且 $t_1,\ t_\rho$ 是 G 中的两个连通分支。若 $D \cap P \subset P$ 是一条非分离本质弧，则 $D \cap P$ 的正则邻域的边界是 P 的一个压缩圆盘，矛盾。若 $D \cap P \subset P$ 是一条分离本质弧，且 $P_1 \subset P$ 是被 $D \cap P$ 截出的环带，则 $D \cup P_1$ 的正则邻域边界的一个连通分支是环带 A，其一个边界分支是子午的，另一个则是 t_ρ 外部中的一条经线。特别地，A 与一个子午盘 E 相交于 $N(t_\rho)$，且该点与 P 不相交。$A \cup E$ 的正则邻域的边界是一个 3-分解曲面 P'，由此诱导的 3-分解球面从（$B,\ G$）中截出一个 Hopf ρ-缠结。□

3. Rectangles in 3-tangle exteriors

以下，(B, G) 表示一个 τ- 或 ρ-缠结。

3.1. 分解。设 $B_R, B_L \subset B$ 为两个 3-球，使得 $B_R \cup B_L = B$与 $B_R \cap B_L$ 是圆盘 D，并定义 $G_{R/L} := B_{R/L} \cap G$。若 (B_L, G_L) 是平凡τ-缠结，且 (B_R, G_R) 是 2弦缠结，则称 $(B_L, G_L) \cup_D (B_R, G_R)$ 为 (B, G) 的典范分解；见图 4a。两个典范分解：

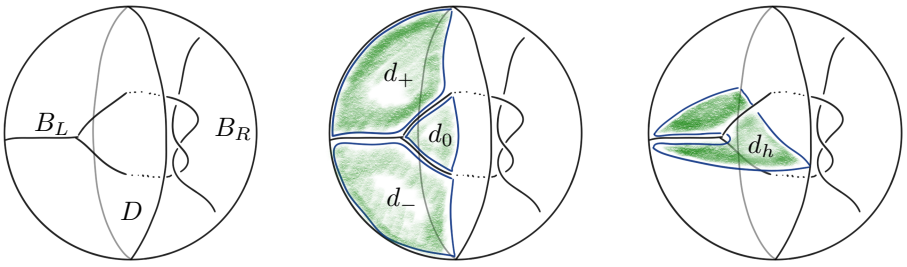
$$(B_L, G_L) \cup_D (B_R, G_R) \quad \text{and} \quad (B'_L, G'_L) \cup_{D'} (B'_R, G'_R)$$

是等价 的，若存在 (B, G) 的保向同胚，将 $B_{R/L}$ 映到 $B'_{R/L}$。不难看出，τ-缠结至多有三个典范分解，而 ρ-缠结在等价意义下只有一个。我们用 t_1, t_2 表示 G_R 中的两条弦，并用 t_1, t_ρ 表示 G 的两个分支，若 (B, G) 是 ρ-缠结。以下，$(B_L, G_L) \cup_D (B_R, G_R)$ 表示 $(B.G)$ 的一个典范分解。

3.2. 中的标准圆盘 B_L。考虑一个真圆盘 $D_v \subset B_L$，它包含 G_L，并与 D 相交于一条弧。则 $D_v \cap E(G_L)$由三个圆盘 d_0、d_+、d_-组成；见图4b。再考虑一个真圆盘 $D_h \subset B_L$，它与 D_v 相交于 G_L的边，且与 D不交。则 $D_h \cap E(G_L)$是一个圆盘 d_h；见图4c

给定一个良好矩形 $R \subset E(G)$，可以假设交集$R \cap B_L$ 是不交并，由 d_0、d_+、d_- 或 d_h 的若干个副本组成，并且 $R \cap B_R$ 是2弦缠结(B_R, G_R)的外部 $E(t_1 \cup t_2)$中的一个圆盘。

3.3. 中的矩形 (B_R, G_R)。设 $P' := P \cap \partial B_R$，并注意到 $P' \subset P$是一个变形收缩。将 $\partial E(t_1 \cup t_2) - P'$的闭包记为 F'。若 R是 (B, G)的一个（分别为良性）矩形，则 $Q := R \cap B_R$与 P', F' 各交于两条（分别为本质的）弧。反之，若 Q 是一个圆盘，且与 P', F' 各交于两条（分别为本质的）弧，



(a) 典范分解。 (b) 圆盘 d_+、d_-、$d_0 \subset D_v$。 (c) 圆盘 $d_h \subset D_h$。

Figure 4. 标准圆盘。

则可用若干互不相交的 d_+, d_-, d_0, d_h副本将 Q 扩展为 $E(G)$中的一个（分别为良性）矩形 R 。由此引出以下定义。

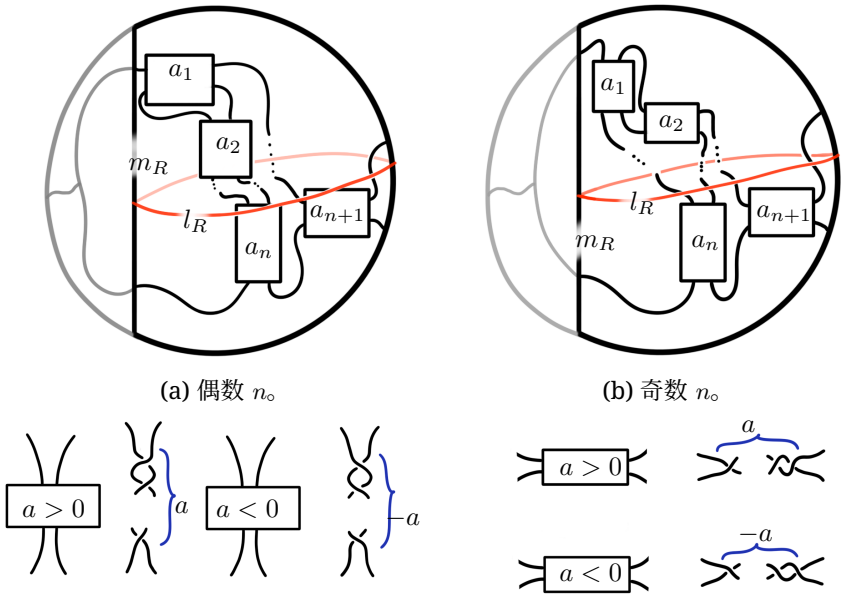
定义 3.1. （良性）矩形（B_R, G_R）是一个圆盘 $Q \subset E$（$t_1 \cup t_2$），满足 Q与 P', F' 各相交于两条（本质）弧。

3.4. 有理 3-缠结。若（B, G）可以分解为一个平凡的 τ-缠结（B_L, G_L）和一个有理缠结（B_R, G_R），则称（B, G）是有理的；例如见图 4a。注意，若这种分解存在，则它是唯一的，称为（B, G）的有理分解。选取一个环 $l_R \subset \partial B_R$，使其与 $m_R := \partial D$ 相交两次，且 $l_R \cup m_R$将 ∂（$t_1 \cup t_2$）中的四个点分隔开。于是，m_R, l_R分别称为（B_R, G_R）的子午线和经线；见图 5。就 m_R, l_R而言，有理缠结（B_R, G_R）可视为图 5a 或 5b 中的缠结 R（$a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}$），其中 $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$；符号约定见图 5c、5d。由于 l_R 的选取仅在沿 m_R作若干次德恩扭转的意义下唯一，因此（B_R, G_R）的斜率 $r = [a_1, \ldots, a_{n+1}]$ 仅在模 $\mathbb{Z}$的意义下良定义。特别地，可以选取 l_R，使斜率 r满足 $-\frac{1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$；根据 Conway 有理缠结理论（见 [10], ），有理缠结（B, G）由其模 $\mathbb{Z}$ 的斜率分类。当 $r = \frac{1}{2}$时，（B, G）是一个 Hopf ρ-缠结；见图 2d。由引理 2.7，斜率为 $r \neq \frac{1}{2}$（模 $\mathbb{Z}$）的每个有理缠结都是本质的。

可以假定 l_R 与 D_v 相交于一点，并与 D_h 相交于一条弧，其中 D_h, D_v在第 3.2 节中定义。有理缠结（B, G）的特殊端 是其有理分解（B_L, G_L）$\cup_D$（B_R, G_R）中位于 B_L 内的 ∂G 的点。

3.5. **环面 ρ-缠结**。给定一个 ρ-缠结（B, G），则当满足以下条件时，（B, G）是环面 ρ-缠结：

(i) (B, t_ρ) 是平凡的，并且 (ii) t_1 相对于 ∂t_1 同痕于 $E(t_\rho)$ 中的一条弧 $\beta \subset \partial E(t_\rho)$，使得$|\beta \cap \partial F| = 2$。

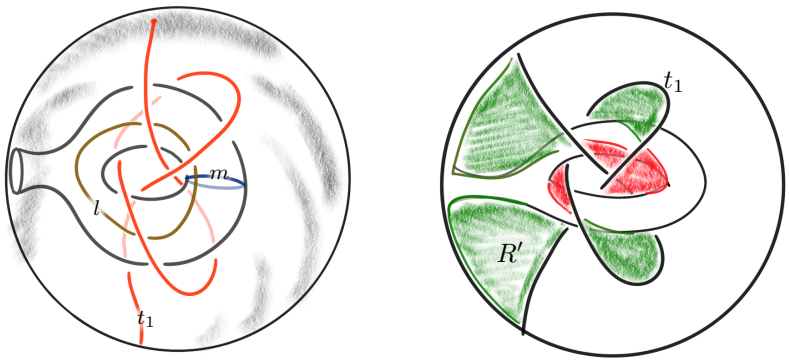


(a) 偶数 n。 (b) 奇数 n。

(c) 垂直交叉。 (d) 水平交叉。

FIGURE 5. 有理 3-缠结。

条件 (ii) 表明，在同痕意义下，存在唯一的一条弧 α，位于 $\partial B_R - D$ 中，连接 ∂t_1 且与 β 不相交。设 m、$l \subset \partial E(t_\rho)$ 为相对于 t_ρ 的子午线和优先经线。若 $\alpha \cup \beta$ 是相对于 m、l 的一条 (p,q)-曲线，则称 (B,G) 为 (p,q)-环面 ρ缠结；见图 6a。斜率为 $\frac{1}{2k}$ 的有理 ρ缠结是一个 $(k,\pm 1)$-环面 ρ缠结。此外，(p,q)-环面 ρ缠结与 $(-p,-q)$-环面ρ缠结是等价的。我们指出，环面 ρ缠结是指具有典范分解 $(B_L,G_L) \cup_D (B_R,G_R)$，且 (B_R,G_R) 在 $[29,$ 定义 $(2)]$ 的意义下为环面缠结者。



(a) (3,2)-环面 ρ-缠结。　　(b) I型矩形。

FIGURE 6. 环面 ρ-缠结外部中的 I型矩形。

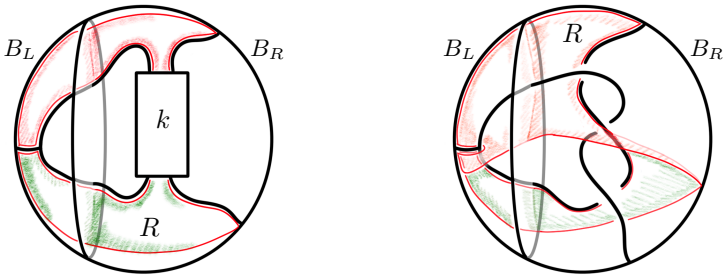
缠结外部中的矩形3。 这里我们在本质的 τ缠结或 ρ缠结（B,G）的外部构造各种类型的良矩形。下文中，$(B_L,G_L) \cup_D (B_R,G_R)$表示$(B,G)$的有理分解，或 ρ-缠结的典范分解。对于前者，我们选取一条经线，使得(B_R,G_R)与$R(a_1,a_2,\dots,a_n,0)$相对应。令 a,b 为 $F' \cap \partial B$中的两个圆周。

3.6. **缠结外部中的矩形** τ。 设(B,G)是一个有理 τ-缠结。

3.6.1. *I*型矩形。 设 Q' 是 t_1,t_2之间的一个平行性，且 $Q := E(t_1 \cup t_2) \cap Q'$。那么 Q 与 a,b 各交于一点，因此 $|\partial Q \cap \partial D| = 2$ 当且仅当 Q 是(B_R,G_R)的一个矩形。

考虑连分数 $[a_n,a_{n-1},\dots,a_1] = \frac{p}{q}$，并观察到 $2|q| = |\partial Q \cap \partial D|$。这意味着 Q 是矩形当且仅当 $q = \pm 1$。在此情形下，$Q \cap D$ 中的两条弧可与 $d_+ \cap D$和 $d_- \cap D$ 等同。诱导良矩形 $R := Q \cup d_+ \cup d_-$ 称为*I* 型矩形。由于 $q = \pm 1$，(B,G) 的斜率 $[a_1,\dots,a_n,0]$ 模 $\mathbb{Z}$ 为 $^{\pm}(-1)_p^{\,n+1}$，这由回文引理 $[10]$ 得出；见图 7a，其中 $k = \pm p$。

3.6.2. II型矩形。设 Q' 是 t_1 与 ∂B_R中的一条弧之间的平行性，且与 t_2 不相交（分别地，与 t_1不相交）。令 $Q := E(t_1 \cup t_2) \cap Q'$。由于 Q与 a 相交一次（分别地，与 b相交一次），Q 是(B_R,G_R)的矩形，当且仅当 ∂Q 与 ∂D 相交于三点。考虑(B,G)的斜率 $[a_1,a_2,\dots,a_n,0] = \frac{p}{q}$，并注意到$|q| = |\partial Q \cap \partial D|$。特别地，$Q$ 是矩形，当且仅当 $q = \pm 3$。在这种情况下，$\partial Q \cap D$ 中的两条弧可分别与 $d_h \cap D$ 和 $d_+ \cap D$ 或 $d_- \cap D$对应。诱导良矩形 $R := Q \cup d_h \cup d_+$ 或 $R := Q \cup d_h \cup d_-$ 称为II型矩形；见图7b。由于 $q = \pm 3$，τ-缠结(B,G)是斜率为$\pm\frac{1}{3}$的有理缠结。

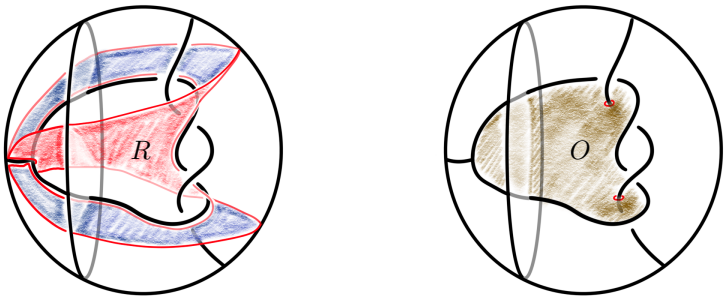


(a) I 型。　　(b) II 型。

FIGURE 7. τ-缠结外部中的矩形。

3.7. 缠结 ρ外部中的矩形。设$(B,\ G)$是一个 ρ-缠结，并分别将 F中的环带和一次穿孔环面记为$A_1,\ T_\rho$。

3.7.1. *I* 型和 *I 型矩形。**设 (B,G) 是一个 (p,q)-环面 ρ-缠结。那么，相对于 ∂t_1，t_1与一条弧 $\beta\in\partial E(t_\rho)$ 同痕，该弧与 F 相交两次，因此存在一个嵌入圆盘 $R'\subset E(t_\rho)$，使得 $\partial R'=t_1\cup\beta$。特别地，$R:=R'\cap E(t_1\cup t_\rho)$ 是一个良好矩形，称为 *I* 型矩形；(p,q) =(3,2) 的情形见图 6b。注意，$F_1\cup R$ 的正则邻域的边界 R^* 也是 (B,G) 的一个良好矩形，称为 *I** 型矩形。



(a) II 型矩形。　　(b) 扭转圆盘 O。

FIGURE 8. 有理 ρ-缠结外部中的 II 型矩形。

3.7.2. *II* 型矩形。注意，若 (B,G) 是有理 ρ-缠结，且 Q'是将 t_1 平行到 ∂B_R 中的一条弧上的平行性，满足 $Q'\cap t_2=\emptyset$。令 $Q:=Q'\cap E(t_1\cup t_2)$。由于 Q 与 a，b不相交，圆盘 Q 是 (B_R,G_R) 的矩形，当且仅当$|\partial Q\cap\partial D|\ =\ 4$。另一方面，连分数$\frac{p}{q}\ =\ [a_1,\ldots,a_n,0]$ 的分母计算出 $|\partial Q\cap\partial D|$（相差一个符号），因此 Q 是矩形，当且仅当 $q=\pm4$。此时，Q 与 D 相交于三条弧，这些弧可识别为 $(d_+\cup d_-\cup d_h)\cap D$。由此诱导的矩形 $R:=Q\cup d_+\cup d_-\cup d_h$ 是良性的；见图 8a。由于 $q=\pm4$，(B,G) 的斜率为 $\pm\frac{1}{4}$，因此它是一个 $(\pm2,1)$-环面ρ-缠结。

设 O 是 $E(t_\rho)$ 中的一个本质圆盘，满足 $\partial O\subset T_\rho$，并令 $\mathbf{t}:E(t_\rho)\to E(t_\rho)$ 为沿 O 的 Dehn 扭转；见图8b。定义 $G_r:=\mathbf{t}^r(t_1)\cup(G-t_1)$。那么 $(B,\ G_r)$ 是一个 $(\pm2,\ \pm2r+1)$-环面 ρ-缠结，而良性矩形 $R_r:=\mathbf{t}^r(R)$ 称为*II* 型矩形，$r\in\mathbb{Z}$。

4. Classification of good rectangles.

回顾一下， G 的正则邻域的边界记为 F，而 P 是 $\partial E(G) - F$ 的闭包。 $F \cap P$ 中的三个圆周记为 a， b， c。

定理 4.1. 设无环面 τ弦结的（B, G）外部包含一个良好矩形 R。那么（B, G）是有理的，并且

- 其斜率为 $\pm 1/k$，其中 k 为奇整数，且 R 为 I 型，或者
- 其斜率为 $\pm 1/3$，且 R 为 II 型。

证明。 记 α， β为 $R \cap P$中的两条弧，不失一般性， $\alpha \cup \beta$ 嵌入 P的方式有以下四种可能：

(i) α， β 各自连接 c 和 a。(ii) α 连接 c 和 a，而 β 连接 c 和 b。(iii) α 连接 c和 a，而 β 连接自身。(iv) α， β 各自连接自身。

情形（i）：考虑通过沿 b 将 2-圆柄 h_2 附加到 $E(G)$ 上得到的三维流形 $X := E(G) \cup_b h_2$。那么 X 是一个结外部，而 R 是斜率为非整数的本质圆盘，这不可能。

情形（ii）：考虑一个典范分解 $(B_L, G_L) \cup_D (B_R, G_R)$，其中 $c \subset \partial B_L$。那么 $Q := R \cap B_R$ 在 t_1, t_2之间诱导出一种平行性；由于 (B, G) 无环面，(B_R, G_R) 是有理的。由于 Q 是 $E(G_R)$ 中的一个矩形，根据第 3.6.1 节，(B, G) 的斜率为 $\frac{1}{k}$，其中 k 为奇数，且 R 为 I 型。

情形 (iii)：考虑一个典范分解 $(B_L, G_L) \cup_D (B_R, G_R)$，其中 $c \subset \partial B_L$。那么 $Q := R \cap B_R$ 在 t_1上诱导出一种平行性； t_1与 t_2不相交，并平行于 ∂B_R 中的一条弧。根据无环面性，(B_R, G_R) 是有理的。由于 Q 是 $E(G_R)$ 中的一个矩形，根据第 3.6.2 节，(B, G) 的斜率为 $\pm\frac{1}{3}$，且 R 为 II 型。

情形（iv）：圆盘 R是分离的，且 a, b位于 $E(G) - R$中的同一个连通分支。这意味着 $R \cap F$在 F中是非本质的，这与 R是良性的矛盾。□

若 (B, G) 是一个 ρ-缠结，我们假设 c 是与 ∂t_ρ对偶的圆周。

定理 4.2. 设无环面 ρ-缠结 (B, G) 的外部包含一个良好矩形 R。那么以下情况之一成立：

- (B, G) 是一个环面 ρ-缠结，且 R 为 I 型或 I^* 型；或者
- (B, G) 是一个 $(-2, \pm 2k + 1)$-环面 ρ-缠结，且 R 为 II 型。

证明。设 α, β是 $R \cap P$中的两条弧。由于 $A_1, T_\rho \subset F$互不相交，不失一般性， α, $\beta \subset P$有六种可能的构型：

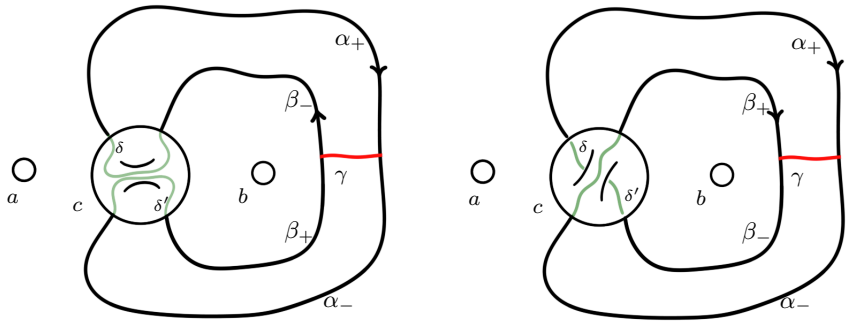
(i) α， β 各自连接 a 和 b。(ii) α, β 各自连接 c 和 a。(iii) α 连接 c 和 a; β 连接 c 和 b。(iv) α 连接 a 和 b； β 将 b 与自身相连。(v) α， β 各自将 a 与自身相连。(vi) α， β 各自将 c 与自身相连。

情形 (i) 不可能发生，否则 R 就是结外部$E(t_1)$中的一个具有非整数斜率的本质圆盘。情形 (ii)、(iv)、(v) 也都不会出现，否则 $R \cap A_1$ 会在 A_1中包含一条非本质弧，这与 R 是良性的相矛盾。

对于情形 (iii)， R 诱导了 t_1 到弧 $\beta \subset \partial E(t_\rho)$的一个同痕，该同痕相对于 ∂t_1，发生在带有 $|\beta \cap c| = 2$的 $E(t_\rho)$中。根据无环面性，(B, t_ρ)是平凡的，因此由第 3.5 节可知，(B, G)是一个环面 ρ-缠结，且 R 是 I 型。

对于情形 (vi)，我们给 ∂R 定向，因此 α， β 继承诱导定向；分别见图 9b、9a。设 γ 是 P 中连接 α 和 β 的一条弧，且 $\gamma \cap (\alpha \cup \beta) = \partial\gamma$。特别地， $\partial\gamma$ 将 α （分别将 β）分成两条弧 α_+， α_- （分别是 β_+， β_-）。不妨设 α_+ （分别是 β_+）从 c 指向 $\partial\gamma$，而 α_- （分别是 β_-）方向相反；

见图 9a、9b。设 δ，δ' 是 $\partial Q \cap T_\rho$ 中的弧，其中 δ 连接 α_+，β_-，而 δ' 连接 β_+，α_-。因此，$l_+ := \alpha_+ \cup \gamma \cup \beta_- \cup \delta$（分别是 $l_- := \beta_+ \cup \gamma \cup \alpha_- \cup \delta'$）的并是一个定向环。注意，在 $H_1(\partial E(t_\rho))$ 中有 $[l_+] + [l_-] = [\partial R]$。



(a) α, β 不平行。　　(b) α, β 平行。

FIGURE 9. 是否平行。

若 α, β 作为定向弧不平行，则 l_+, l_- 可经同痕使之互不相交。特别地，l_+, l_- 作为无向环在 $\partial E(t_\rho)$中平行，因而$R \subset E(t_\rho)$是分离的。设 B' 为由 R 从 $E(t_\rho)$ 中截出的3-球。于是$t_1 \subset B'$，因为 R 是良性的。由无环面性，(B', t_1)是平凡球-弧对，故 t_1在 B'中经由平行性R'与弧 $\beta \subset \partial E(t_\rho)$平行，且带有 $\beta \cap c$ 两个点。由无环面性，(B, t_ρ)是平凡的，因而(B, G)是环面 ρ-缠结。由于 B' 是 $R' \cup t_1$的正则邻域，且 R 是 B'的边界，我们得到R 为I*型。

如果 α，β作为定向弧彼此平行，那么可以将 l_+，l_- 同痕至满足 $|l_+ \cap l_-| = 1$。设 l_+ 是 p，q 型曲线，且 l_- 是 r，s 型曲线，位于 $E(t_\rho)$ 中。那么可以假设

$$1 = \begin{vmatrix} p & r \\ q & s \end{vmatrix}. \tag{4.1}$$

这意味着 $[l_+]+[l_-] = [\partial R]$ 不可能是平凡的，因此 R 是非分离的。所以圆盘 R 是 $E(t_\rho)$ 中的本质圆盘，因此 ∂R 是 $E(t_\rho)$ 中的 (0，1) 型曲线，从而 $(B,\ t_\rho)$ 是平凡的。于是我们有 $(p,\ q)\ +(r,\ s)\ =(0,\ 1)$。结合 (4.1)，可得

$$\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -q & 1+q \end{pmatrix} \tag{4.2}$$

令 $\mathbf{t}$ 为沿 $E(t_\rho)$ 中与 P不相交的一条本质圆盘作的 Dehn 扭转。那么 $\mathbf{t}^k$ 对 l_+，l_- 的作用由下式给出

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -q & 1+q \end{pmatrix} \tag{4.3}$$

当 $k = q$ 时，$\mathbf{t}^q(l_+)$ 是一条 $(1, 0)$-曲线，而 $\mathbf{t}^q(l_-)$ 是一条 $(-1, 1)$-曲线。特别地，$\partial\, \mathbf{t}^q(R)$ 与 $E(t_\rho)$ 的子午线相交一次。因此，$Q := \mathbf{t}^q(R) \cap B_R$ 在 ∂B_R 中的 t_1 与一条弧 β 之间诱导出平行性。由无环面性，$(B, \mathbf{t}^q(t_1) \cup t_\rho)$ 是有理的；根据第 3.7.2 节，它的斜率为 $-\frac{1}{4}$，因此是一个 $(-2, 1)$-环面缠结。这意味着 (B, G) 是一个 $(-2, +2q + 1)$- 环面 ρ- 缠结，而 R 属于 II 型。□

5. Classification of good annuli.

根据定义，如果一个 τ-缠结含有优良环带，那么它就是环面型。另一方面，也存在无环面的 ρ-缠结，其外部含有优良环带。

卫星 ρ-缠结。卫星卫星 ρ-缠结是一个 ρ-缠结（B，G），其中存在一条（p，q）曲线 α，位于 ∂E（t_ρ）中，使得存在 $N \subset E$（t_ρ）的一个正则邻域 α，包含 P，且 $t_1 \subset N$，并且 t_1 与 N 的每个子午盘 D 相交，而这些子午盘与P不相交。此外，如果 E（t_ρ）是平凡结外部，则要求 $|p| > 1$。此时N 的边界是一个优良环带，称为 I 型环带；见图 3b。

缆型 ρ-缠结。缆型缆型 ρ-缠结是一个 ρ-缠结（B，G），其中 E（t_ρ）是一个缆结的外部，且有一个与 t_1不相交的缆化环带 A。优良环带 $A \subset E$（G）称为*II*型环带。

霍普夫型。给定一个 ρ-缠结（B，G），若 $E(t_\rho)$ 是平凡结外部，且存在一个本质圆盘 $D \subset E(t_\rho)$ 与 t_1 交于一点，则良环带$A := D \cap E(G)$ 称为霍普夫型环带。注意，A 与 $E(t_\rho)$ 的子午线m 交于一点，而 $A \cup m$ 的正则邻域的边界是一个子午裤形曲面，它确定一个围住 3-球 $B' \subset B$ 的 2-球面 B'，其中（B'，$B' \cap G$）是一个霍普夫 ρ-缠结，称为霍普夫 ρ-子结。反过来，若一个 ρ-缠结（B，G）含有一个霍普夫 ρ-子结，则它也含有一个霍普夫型环带。

5.1. **优良环带的分类**。

引理5.1。给定一个无环面 ρ-缠结（B，G），则以下各项互斥：

(i) (B、G) 是卫星型；*(ii)* (B、G) 是缆型；*(iii)* (B、G) 含有一个霍普夫直和项。

证明。首先注意到（B、G）含有一个霍普夫 ρ直和项，于是 $E(t_\rho)$是一个平凡结外部。其次注意，如果（B、G）是卫星型，且 $E(t_\rho)$是一个非平凡结外部，那么并集 $A \cup A'$ 在 $E(G)$中诱导出一个不可压缩环面，这与无环面性矛盾，其中 $A' \subset T_\rho$ 是由 ∂A截出的环带。因此，$E(t_\rho)$也是一个平凡结外部。另一方面，如果（B、G）是缆型，那么$E(t_\rho)$必然是非平凡的。因此，(ii)不能与(i)或(iii)同时成立。

如果（B、G）是卫星型，同时又含有一个霍普夫直和项，那么 I 型环带 A 会从霍普夫型环带中截出一个最外侧圆盘 D，但此时 D 是一个与 P不相交的 A 的 ∂-压缩圆盘，这与 A 是良性的相矛盾。□

定理 5.2。设一个无环面 ρ缠结(B,G)的外部 $E(G)$ 包含一个优良环带 A。那么 (B,G)

(i) 是卫星 ρ缠结，且 A 为 *I* 型；或 *(ii)* 是缆型 ρ缠结，且 A 为 *II* 型；或 *(iii)* 含有一个霍普夫 ρ子结，且 A为霍普夫型。

此外，$E(G)$ 中的其他每个优良环带都与 A 在 $E(G) - P$中同痕。

证明。由无环面性可知，∂A 至多有一个连通分支位于 A_1中。若 ∂A 与 A_1相交，则连通分支 $F_1 \cap \partial A$ 是子午的，因此在$E(t_\rho)$中诱导出一个与 t_1 相交一次的本质圆盘。这说明 A 为霍普夫型。

若 ∂A 不与 F_1相交，则 ∂A 是在 $\partial E(t_\rho)$中的平行本质圈。

情形 1： $A \subset E(t_\rho)$ **是非本质的**。若 A 不是 ∂-平行的，则 A 容许一个压缩圆盘 D，且满足 $D \cap t_1 \neq \emptyset$。设 A' 为 $\partial E(t_\rho)$中由∂A 截出且与 t_1不相交的环带。则 $A \cup A'$ 从 $E(t_\rho)$中截出一个三维流形 V，它是

一个非平凡结外部，因为 A 不是 ∂-平行的。由于 D 与 t_1相交， ∂V 在 $E(G)$中诱导出一个不可压缩环面，这与无环面性矛盾。

若 A 与 ∂平行，则 A 与穿过实心环面 N的环带 $A' \subset \partial E(t_2)$平行。由于 A 是优良环带，我们有 $t_1 \subset N$，且每个与 P 不相交的子午盘 $D \subset N$ 都与 t_1相交。现在， N 可视为A' 核的一个正则邻域，其 A 边界位于 $E(t_\rho)$中，因此$(B,\ G)$是一个卫星 ρ-缠结，而 A 是I 型。

情形 2： $A \subset E(t_\rho)$**是本质的**。这意味着 $E(t_\rho)$是一个缆结的外部，其中 A 是与 t_1不相交的缆化环带，因此$(B,\ G)$是一个缆型 ρ-缠结，且 A 是一个 II 型环带。

为证明第二个断言，假设 A_1 是 $E(G)$中的另一个优良环带。根据引理5.1，我们可以将其分为三种情形:

情形 S: A, A_1 是 I 型，(B, G) 是卫星。因此， A, A_1 分别通过包含 t_1的实心环面 N, N_1 ，与 $A', A_1' \subset \partial E(t_\rho)$平行。如果 A_1' 的核在 $\partial E(t_\rho)$中不同痕于 A' 的核，那么 $A_1 \cap A$ 包含一条在A, A_1 其中之一中非本质、在另一个中本质的弧，这与 A, A_1 为良性相矛盾。因此， A, A_1同痕于 $E(t_\rho)$中的同一个环带 $\partial E(t_\rho)$。于是可以假设$\partial A_1 = \partial A$, $A' = A_1'$。由于 t_1 同时位于 N 和 N_1中，还可以进一步假设$t \in N \subset N_1$，从而 A, A_1 可通过 $E(G)$中的 $N - N_1 - P$同痕。

情形 C: A， A_1 均为 II 型，且（B， G）为缆型；由缆结的缆化环带在同痕意义下唯一这一事实，结论成立。

情形 H: A， A_1 均为霍普夫型，且（B， G）含有一个霍普夫 ρ-和项。由无环面性，我们可以将 A， A_1 同痕变换，使它们互不相交。诱导圆盘 D， D_1与由 $\partial(D \cup D_1)$从 T_ρ 中截出的环带一起围成一个3-球，该3-球与t_1 沿一条弧相交。由无环面性，球—弧对是平凡的，因此 A， A_1 彼此平行。□

6. Annuli in a 3-decomposable handlebody-knot exterior

在本节中， V 表示一个亏格二手柄体结，而（B_1， G_1）$\cup_S$（B_2， G_2）表示 V的一个三角弧分解。令 P为裤形曲面 $S \cap E(V)$，并令 a， b， c为 P的三个边界分支。此外，若（B_i， G_i）是有理或 ρ-弧结， $i = 1$，2，且它们的特殊端点相交，则称该三角弧分解为特殊；此时， $c \subset \partial P$ 表示与特殊端点对应的连通分支。

定理 *6.1.* 假设 V是无环面的，并且允许一个 $\tau\tau$-分解 $(B_1, G_1) \cup_S (B_2, G_2)$。那么，在同痕意义下，外部 $E(V)$ 包含：*(i)* 若 $\tau\tau$-分解是特殊的，且 (B_1, G_1)、(B_2, G_2) 的斜率均为 *1 3* 或 $-\frac{1}{3}$，则包含无限多个本质环带；*(ii)* 若 $\tau\tau$-分解是特殊的，且 (B_1, G_1)、(B_2, G_2) 中一个的斜率为 *1 3*，另一个的斜率为 $-\frac{1}{3}$，则包含三个本质环带；*(iii)* 若 $\tau\tau$-分解是特殊的，且 (B_1, G_1)、(B_2, G_2) 的斜率分别为 $\frac{1}{m}$、$\frac{1}{n}$，并且 n、m 中有一个不等于 ± 3，则包含一个本质环带；否则， V 是双曲的。

证明。 由于 τ-缠结外部中不存在优良环面，因此 $E(V)$ 中不存在与 P 不相交的本质环带。因此， P 将每个本质环带切割成若干良矩形。由于 τ-缠结外部中的极良矩形与特殊端相交，若 $(B_1,\ G_1) \cup_S (B_2,\ G_2)$ 不是特殊的，则 V 是双曲的。由于良好矩形仅存在于斜率为 $\frac{1}{n}$ 的有理 τ-缠结外部中，若 $(B_1,\ G_1)$、$(B_2,\ G_2)$ 中有一个不是斜率为 $\frac{1}{n}$ 的有理缠结，则 V 是双曲的。这证明了最后一个断言。

现在我们假设 $(B_1, G_1) \cup_S (B_2, G_2)$ 是特殊的，并且 (B_1, G_1)，(B_2, G_2) 分别是斜率为 $\frac{1}{m}$，$\frac{1}{n}$ 的有理对象。

情形 (i)： 不妨经镜像变换后，假设 (B_1, G_1)，(B_2, G_2) 的斜率均为 $\frac{1}{3}$。由图10a 可知，V等价于把手体结表 [6] 中的把手体结 5_2。因此，应用 [27, 定理 2.4]，可知 $E(V)$ 含有无限多个本质环带（视同痕而定）。

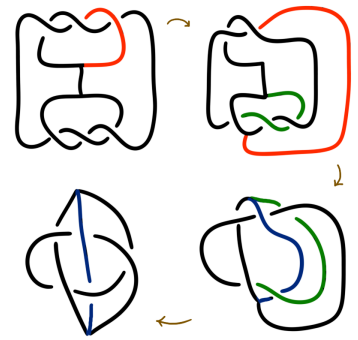
情形（ii）： 在此情形中，V 等价于把手体结表 [6]中的把手体结 4_1；见图10b。因此，由 [28, 引理 3.20]可知，$E(V)$在同痕意义下包含三条本质环带。

情形 (iii)： 考虑 τ-缠结（B_1，G_1）或（B_2，G_2）的外部中I型矩形的平行副本 R_1，$\cdots$，R_k，并令 α_i，β_i 为$R_i \cap P$，$i = 1$，$\cdots$，n中的两条弧。于是 α_i，β_i，$i = 1$，……，k的配置如图10c所示。因此，由连通性，P 将 $E(V)$中的每一条本质环带仅切成两个I型矩形，一个在 $E(G_1)$中，另一个在 $E(G_2)$中；见图10d。因此，$E(V)$中任意两条本质环带都是同痕的。□

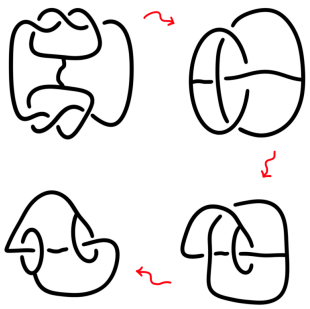
定理 6.2。 假设 V无环面，并且具有一个 $\tau\rho$分解 $(B_1, G_1) \cup_S (B_2, G_2)$，其中 (B_1, G_1) 是一个 τ缠结，而 (B_2, G_2) 是一个 ρ缠结。那么，如果(B_2, G_2) 不是卫星或缆型，且不含 *Hopf* ρ直和项，则 V 是双曲的。

如果 (B_2, G_2) 是卫星或缆型，或者含有 *Hopf* ρ直和项，那么在同痕意义下，外部 $E(V)$ 包含

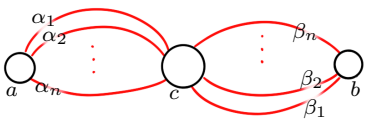
(i) 若 $\tau\rho$ 分解是特殊的，且 (B_1, G_1) 的斜率为 $\pm\frac{1}{3}$，并且 (B_2, G_2) 是 $(\pm 2, \pm q)$-环面 ρ-缠结，则有无限多个本质环带；*(ii)* 若 $\tau\rho$ 分解是特殊的，且 (B_1, G_1) 的斜率为 $\pm\frac{1}{-3}$，并且 (B_2, G_2) 是带有 $p \neq \pm 2$ 的 (p, q)-环面 ρ-缠结，则有四个本质环带；*(iii)* 若 $\tau\rho$ 分解是特殊的，且 (B_1, G_1) 的斜率为 $\frac{1}{n}$，$n \neq \pm 3$，并且 (B_2, G_2) 是带有 $p \neq \pm 2$ 的 (p, q)-环面 ρ-缠结，则有两个本质环带；



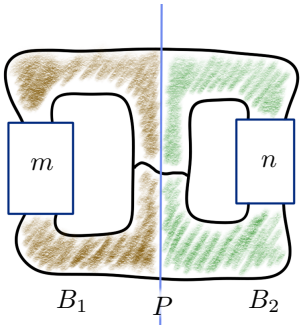
(a) $m = n = 3$ 或 -3。



(b) $\{m, n\} = (3, -3)$。



(c) I型矩形的构型。



(d) 奇数 m，n。

FIGURE 10

(iv) 否则存在一个本质环带。

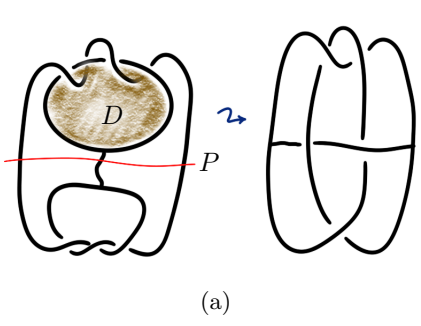
证明。由于 τ-缠结的外部不容许良好环带，且 $(B_2,\ G_2)$ 的外部容许良好矩形或环带，当且仅当根据定理4.2和5.2，$(B_2,\ G_2)$ 是卫星结或缆型结，或具有 Hopf ρ-和谐项时，第一项断言成立。

假设 $(B_2,\ G_2)$ 是卫星缠结或缆型 ρ-缠结，或具有一个 Hopf ρ-和，并令 A_0 为由 $(B_2,\ G_2)$ 外部中的优良环带所诱导的本质环带。若 $(B_1,\ G_2)\cup_S(B_2,\ G_2)$ 不是特殊的，则 $P:=S\cap E(V)$ 不会将任何本质环带切割成本矩形，因此根据定理 5.2，A_0 是 $E(V)$ 中唯一的本质环带。现在，若 $(B_2,\ G_2)$ 不是环面 ρ-缠结，则 $(B_2,\ G_2)$ 不承认任何良好矩形。同样，若 $(B_1,\ G_1)$ 不是斜率为 $\frac{1}{n}$ 的有理缠结，则 $(B_1,\ G_1)$ 不承认任何良好矩形。在这两种情况下，每个本质环带都与 P 不相交，因此根据定理 5.2 与 A_0 同痕。这就证明了情形 (iv)。

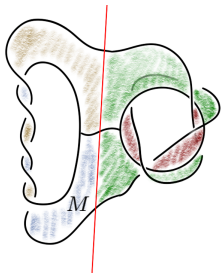
现在假设 $(B_1,\ G_1)\cup_S(B_2,\ G_2)$ 是特殊的，且 $(B_1,\ G_1)$ 是斜率为 $\frac{1}{n}$ 的有理结，而 $(B_2,\ G_2)$ 是一个 $(p,\ q)$- 环面 ρ- 缠结。可以假设 $p>1$。

情形 (i)：当 $n=\pm3$ 且 $(p,\ q)=(2,\ 2k+1)$ 时，将该把手体结记为 $W_k^{\pm}$。那么，W_0^- 等价于表 [6], 中的 5_2，至镜像为止；见图 11a，因此其外部在同痕意义下有无限多个本质环带。由此可得结论，因为 W_k^- 是通过沿图 11a 中的圆盘 D 进行 k 次 Dehn 扭转得到的（另见图8b），且 W_k^+ 是 W_{-k-1}^- 的镜像。

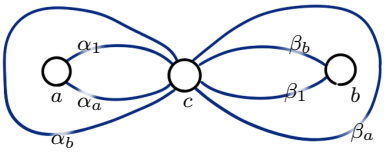
情形（ii）：将 R_a,R_b 记作 $E(G_1)$ 中两个互不相交且分别与 a,b相交的 II 型矩形，并将 R_1 记作 $E(G_1)$ 中一个与 $R_a\cup R_b$不相交的 I 型矩形。令 α_*,β_* 为 $R_*\cap P,\ *=1,a,b$中的两条弧。则 $\alpha_*,\beta_*,*=1,a,b$ 在 P中的配置如图11c所示。



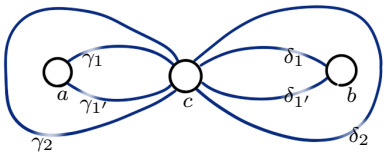
(a)



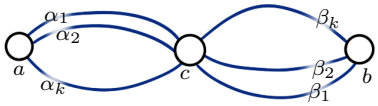
(b)



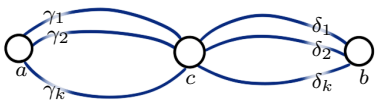
(c) 弧 $\alpha_*,\beta_*,*=1,a,b$ 在 P 中。



(d) 弧 $\gamma_*,\delta_*,*=1,1',2$ 在 P 中。



(e) 弧 $\alpha_1,\beta_1,\cdots,\alpha_n,\beta_n$ 在 P 中。



(f) 弧 $\gamma_1,\delta_1,\cdots,\gamma_k,\delta_k$ 在 P 中。

FIGURE 11

类似地，在 $E(G_2)$ 中，令 $Q_1, Q_{1'}$ 为两个互不相交的 I 型矩形副本，并令 Q_2 为一个与 $Q_1 \cup Q_{1'}$不相交的 II 型矩形。此外，将 γ_*, δ_* 记作 $Q_* \cap P, * = 1, 1', 2$ 中的两条弧。则 $\gamma_*, \delta_*, * = 1, 1', 2$ 在 P 中的配置如图 11d 所示。

将 $\alpha_1 \cup \beta_1$ 与 $\gamma_1 \cup \delta_1$对齐，得到一个本质的莫比乌斯带 M_1，它位于 $E(V)$ 中，由并集 $R_1 \cup Q_1$给出。同样，将 $\alpha_a \cup \beta_a \cup \alpha_b \cup \beta_b$与 $\gamma_{1'} \cup \delta_{1'} \cup \gamma_2 \cup \delta_2$对齐，得到一个本质的莫比乌斯带 M_2，它位于 $E(V)$ 中，由并集 $R_a \cup R_b \cup Q_{1'} \cup Q_2$给出。

根据图 11c、11d 中的构形，两个莫比乌斯带 M_1，M_2 相交于一条本质弧。因此，N的正则邻域 $M_1 \cup M_2$ 具有一个以带一个穿孔的莫比乌斯带为底空间的可容许的 I-丛结构。由此，[28, 推论 1.3]的结论得证。

情形 (iii)：首先注意，$E(G_1)$ 中的一个 I型矩形与 $E(G_2)$ 中的一个 I型矩形的并集构成一个莫比乌斯带 M；见图 11b。将 A_1记作 M的正则邻域的边界。

设 $A \subset E(V)$ 是一个本质环带。若 A 可以通过同痕避开 P，则由定理 5.2，A 同痕于 A_0。假设 A 不能通过同痕避开P。那么 P将 A切割成 k个I型矩形：R_1、$\cdots$、R_k位于 $E(G_1)$ 中，以及 k个I型矩形：Q_1、$\cdots$、Q_k位于 $E(G_2)$ 中。现在，若 α_*、β_*（分别为 γ_*、δ_*）是$R_* \cap P$（分别为 $Q_* \cap P$）中的弧，则 $* = 1$、$\cdots$、k。α_*、β_*（分别为 γ_*、δ_*）的构形，

$* = 1, \cdots, k$如图 11e（分别如图 11f）所示。由 A的连通性可得 $k = 2$，因此 A 同痕于 A_1。□

定理 6.3。设 V无环面，且具有一个 $\rho\rho$-分解 $(B_1, G_1) \cup_S (B_2, G_2)$。则其外部 $E(V)$ 在同痕意义下具有

(i) 若 (B_i, G_i) 是卫星型或缆型 ρ-缠结，或含有一个 *hopf*ρ-加项，则有两个本质环带，对每个 $i = 1,2$ 均如此；*(ii)* 若 (B_i, G_i)、$i = 1,2$ 中只有一个是卫星型或缆型ρ-缠结，或含有一个 *hopf* ρ-加项，则有一个本质环带；

否则，V 是双曲的。

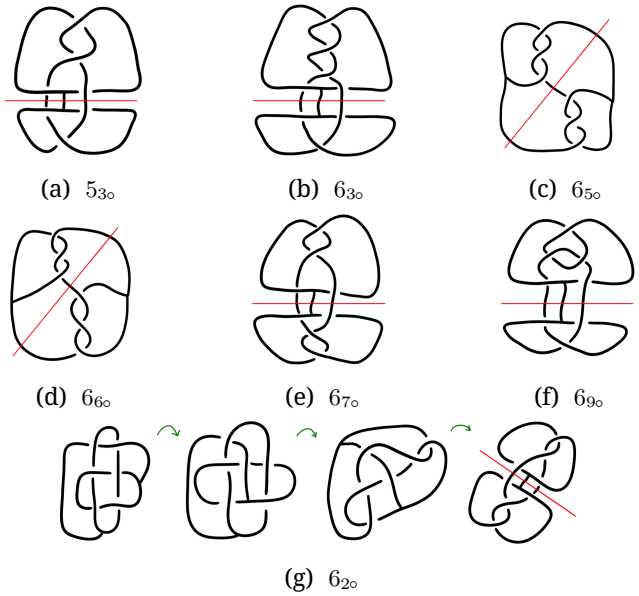
证明。由于 V 是连通的，该 $\rho\rho$-分解不可能是特殊的，因此每个本质环带 $A \subset E(V)$ 都可以经过同痕，使得 A 与 P 不相交。故结论由定理 5.2 得出。□

推论 6.4。把手体结表中的把手体结 $5_3, 6_2, 6_3, 6_5, 6_6, 6_7, 6_9$ 是双曲的。

证明。除了 6_9 容许一个 $\tau\rho$-分解之外，任何其他把手体结都具有如图 12 所示的 $\tau\tau$-分解。此外，该分解中的每个 τ-或 ρ-缠结都是有理的。因此，由引理 2.6，它们都是无环面的。对于 $6_5, 6_6$，其 $\tau\tau$-分解不是特殊的；见图 12c、12d，而对于其余情形，$\tau\tau$-分解是特殊的，但其中一个 τ-缠结不是斜率为 $\frac{1}{n}$、$n \in \mathbb{Z}$的有理缠结；见图 12a、12g、12b、12e。因此，它们的双曲性由定理 6.1 得出。6_9 的 $\tau\rho$-分解中的 ρ-缠结是斜率为$-\frac{3}{8}$的有理缠结。因此，它既不是卫星型也不是缆型，也不含 Hopf ρ-和项，故由定理 6.2，6_9 是双曲的。□

除了 6_8，推论 6.4 中的那些结之外，所有交叉数不超过六个的二属把手体结都已知不是双曲的。6_8 的双曲性将在第 7 节中确定。同理，我们

推论 6.5. 表 [2] 中具有七个交叉的把手体结 $7_{17}, 7_{18}, 7_{21}, 7_{23}, 7_{26}, 7_{27}, 7_{33}, 7_{37}, 7_{57}, 7_{58}$ 是双曲的。

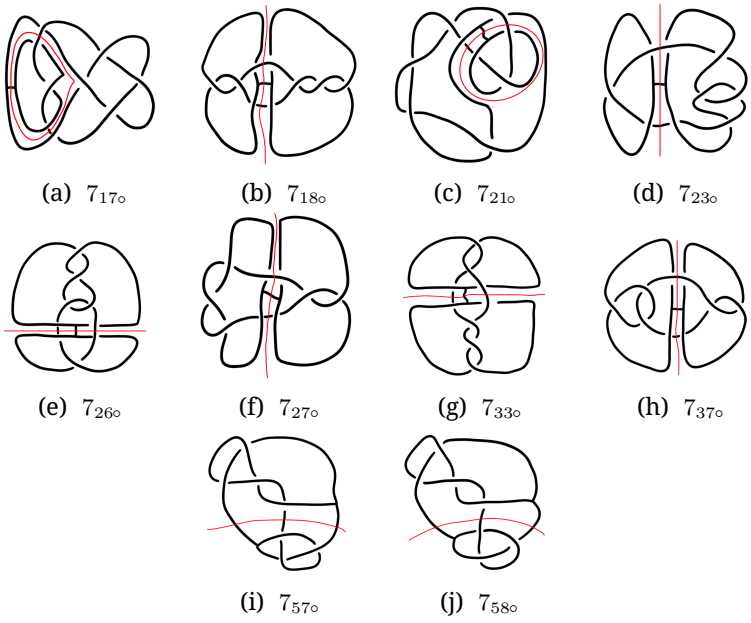


(a) $5_{3\circ}$ (b) $6_{3\circ}$ (c) $6_{5\circ}$

(d) $6_{6\circ}$ (e) $6_{7\circ}$ (f) $6_{9\circ}$

(g) $6_{2\circ}$

FIGURE 12. 3可分解的五交叉或六交叉把手体结。



(a) $7_{17\circ}$ (b) $7_{18\circ}$ (c) $7_{21\circ}$ (d) $7_{23\circ}$

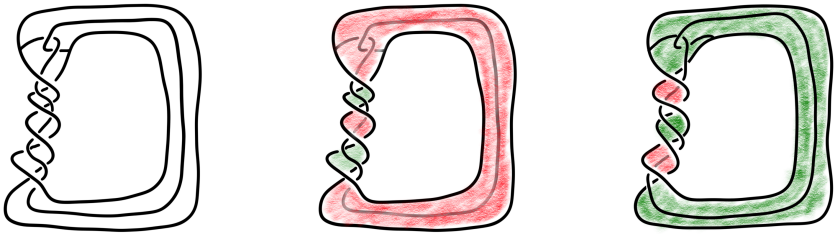
(e) $7_{26\circ}$ (f) $7_{27\circ}$ (g) $7_{33\circ}$ (h) $7_{37\circ}$

(i) $7_{57\circ}$ (j) $7_{58\circ}$

FIGURE 13. 3-可分解的七个交叉的把手体结。

证明. 除 $7_{26}, 7_{37}$ 容许一个 $\tau\rho$-分解（见图 13e、13h）外，任何其他把手体结都具有如图 13 所示的 $\tau\tau$-分解。由于该分解中的每个 τ-或 ρ-缠结都是有理的，由引理 2.6，它们都是无环面的。

在 $\tau\tau$- $7_{17}, 7_{18}, 7_{21}, 7_{23}, 7_{27}, 7_{33}, 7_{57}$, 或 7_{58}, 的分解中，至少有一个 τ-缠结不是斜率为 $\frac{1}{n}$、 $n \in \mathbb{Z}$ 的有理缠结，因此根据定理 6.1，它们是双曲的。



(a) (b) (c)

FIGURE 14. 一个不可 3-可分解的把手体结。

对于 $7_{26},$， $\tau\rho$ 分解中的 ρ-缠结是斜率为 $-\frac{3}{10}$ 的有理缠结；对于 $7_{37},$，它是斜率为 $-\frac{3}{8}$ 的有理缠结。因此，无论哪种情况， ρ-缠结都不是卫星缠结或缆型缠结，也不含 Hopf ρ-和项，其双曲性由定理 6.2 得出。□

不可 3-可分解的把手体结。 定理 6.1、6.2 和 6.3 中对本质环带的分类，使我们能够构造不可 3-可分解的亏格二把手体结。回想一下，根据 [28], ，无环面的亏格二把手体结外部至多有两个非分离本质环带（在同痕意义下）。另据 Koda-Ozawa [11], 亏格二把手体结外部中的本质环带 A 若恰有一个连通分支是子午的，则称为类型 2。

推论 6.6。如果一个无环面的3-可分解亏格二把手体结的外部（在同痕意义下）有两个非分离本质环带，那么这两个环带均为类型2。

证明。 这只会发生在定理 6.1(ii) 的情形，或定理 6.3(i) 中两个 ρ 缠结都含有一个 Hopf ρ 子结的情形。在这两种情况下，两个非分离的本质环带都是 2 型。□

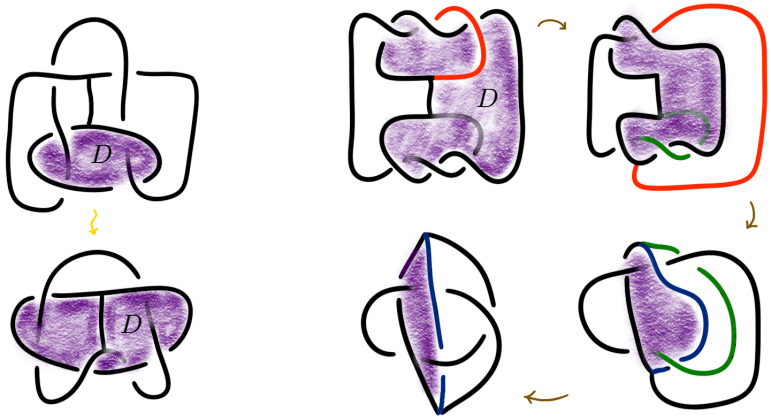
回想一下，根据 [26, 第 5.4]节，图 14a 中的无环面把手体结在同痕意义下有两个本质的非分离环带；见图 14b 和 14c。它们都不是 2 型，因此根据推论 6.6，该把手体结不是 3-可分解的。

回想一下，Lee-Lee [14] 中第二类把手体结族 $\mathcal{L}$ 里的把手体结，是通过扭转图 15a 中的圆盘 D 并取其镜像得到的。沿图 10a 所示的同痕变形圆盘 D；见图 15b，可知该圆盘可与图 11a 中的扭转圆盘认同。因此，我们得到定理 6.3、6.2 和 6.3 的以下推论。

推论 6.7。如果一个无环面的3-可分解亏格二手柄体结的外部（按同痕计）存在无限多个本质环带，那么该手柄体结属于 $\mathcal{L}$。

证明。 这种情况只会出现在定理 6.1(i) 或定理 6.2(i) 中。无论哪种情况，根据上述观察，该手柄体结都属于 $\mathcal{L}$。□

推论 6.7，结合 Koda-Ozawa-Wang [12, 定理 4.3]和 [13, 定理 5.7，推论 1.11]，表明由 Eudave-Mu˜noz 结构成的把手体结大多不是 3-可分解的。



(a) (b)

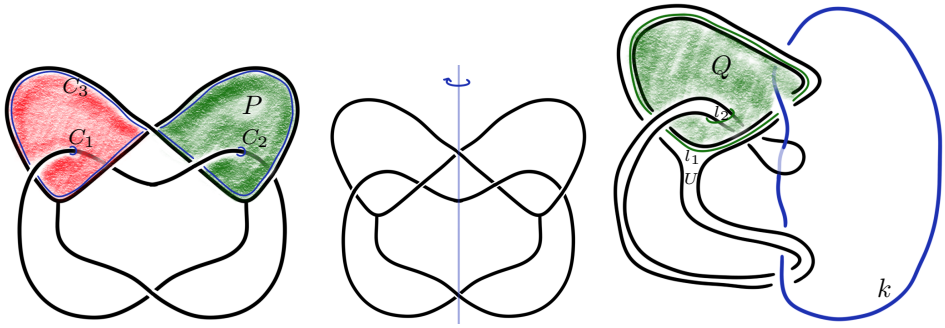
FIGURE 15. 扭转圆盘的形变。

7. HYPERBOLICITY OF 6_8

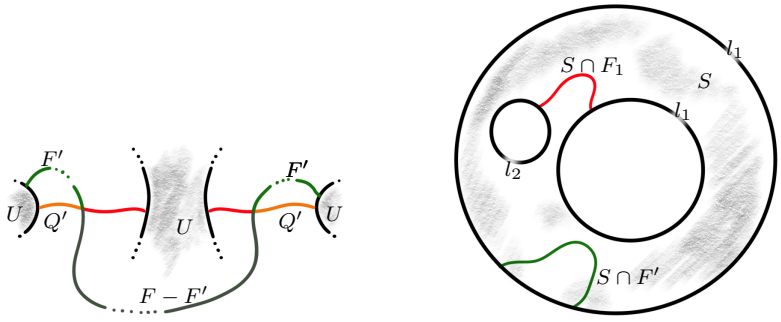
将把手体结表 [6], 中的把手体结记为 V，并将图16a 中 $E(V)$ 内的二次穿孔圆盘记为 P。将 ∂P 中在 V 内界定一个圆盘的分支记为 C_1，C_2，将另一分支记为 C_3。

引理7.1. *P 在 $E(V)$ 中不可压缩。*

证明。 由于 C_1、C_2、$C_3 \subset \partial V$ 都是本质的， P 的每个压缩圆盘都会在 $\partial V \subset E(V)$ 中诱导出一个压缩圆盘，这与 6_8 不可约相矛盾。□



(a) 双穿孔圆盘 P。 (b) 对合 ϕ。 (c) $W := U \cup N(k) \subset S^3$。



(d) $F \cap Q \subset Q$ 由本质闭曲线组成。 (e) $F \cap Q \subset Q$ 由本质弧组成。

FIGURE 16

引理 7.2. (S^3, V) 是无环面的。

证明。 反设 T 是 $E(V)$ 中的一个不可压缩环面。对 T 作同痕，使$|T \cap P|$ 达到最小。

假设 $|T \cap P| = 0$。那么，由于 $V' := V \cup N(P) \subset S^3$是平凡三属把手体结， T在 $E(V')$ 中可压缩，因此 T在 $E(V)$ 中可压缩，这就产生了矛盾。

假设 $|T \cap P| = 1$，且 $T \cap P$在 P 中与 C_i平行。那么 T将 C_i与 $E(V)$ 中 ∂P 的其他分支分隔开来，这与 ∂V 是连通的相矛盾。

假设 $|T \cap P| \geq 2$。那么 P截出一个环带 $A \subset T$。注意，由 $|T \cap P|$的极小性可知， ∂A 的各个分支不会平行于 ∂P 的同一个分支。此外， ∂A 的各个分支不会平行于 C_1, C_3 或 C_2, C_3，因为在$H_1(E(V'))$中，由 C_1, C_2 所诱导的同调类是非平凡的，而 C_3 的同调类是平凡的。因此， ∂A 的各个分支平行于C_1, C_2。

现在，注意到 $N(P)$ 是 P 的一个正则邻域，它将 ∂V 分割成一个环带和一个四孔球面。将 $N(P)$ 边界上的、与环带相交的连通分支记为 P_+ ，将边界上的另一个连通分支记为 P_-。必要时，可用 T 被 P 截出的相邻环带替换 A ，从而可假设 $A - N(P)$ 是 $E(V')$ 中与 P_- 相交的一个环带；然而，这与 ∂P_- 中在 ∂V 内平行于 C_1， C_2 的连通分支在 $H_1(E(V'))$ 中代表不同同调类相矛盾。

在所有情况下都会得到矛盾，因此 6_8 是无环面的。 □

定理 7.3. 6_8 是双曲的。

证明。 考虑由图 16b 中的旋转给出的 V 的对合 ϕ ，并将从 (S^3, V) 到商空间 $(S^3/\phi, V/\phi)$ 的投影记为 p。注意， $p(S^3) = S^3/\phi$ 可与三维球面 S^3 等同，而 $U := p(V) = V/\phi$ 是一个实心环面。注意，分支圆 $k \subset p(S^3)$ 是一个平凡结，并观察到 U 与 k 的正则邻域的并集 W （见图 16c）等价于把手体结表中的把手体结 6_3 ，根据推论 6.4，它是双曲的。令 Q 表示环带 $p(P)$，它与 k 相交于一点；见图 16c。

假设 $E(V)$ 含有一个本质环带。那么根据等变 JSJ 分解 [7, 定理 5.4]，存在一个环带 $A \subset E(V)$，使得要么$\phi(A)$ A 互不相交，要么 ϕ 在 A上限制为一个对合。后一种情况下，有四种可能： $\phi|_A$ 无不动点，或者 $\phi|_A$ 的不动点集由两个点、两条弧或一个圆周组成。无论是前一种还是后一种情况，像$F := p(A)$都可分为以下四种情形:

(i) F是 $E(U)$中的一个环带，且 $F \cap k = \emptyset$。(ii) F是 $E(U)$中的一个圆盘，且 $F \cap k = F \cap k$ 有两个点。(iii) F是 $E(U)$中的一个圆盘，且 $F \cap k = \partial F \cap k$ 有两条弧。(iv) F是 $E(U)$中的一个环带，且 $F \cap k = \partial F \cap k$ 有一个圆周。

情形 (i) : 假设一个连通分支 $l \subset \partial F$ 在 ∂U中是非本质的，而 D 是 ∂U上被圆盘 l 切出的部分。那么 D 必定与 k 相交，因为 A 是本质的。

若 $|D \cap k| \leq 1$，则 $p^{-1}(D)$ 是 A 的压缩圆盘，矛盾。因此，$|D \cap k| = 2$，因为 $|\partial U \cap k| = 2$。现在，令 l' 为 ∂F 的另一个连通分支。若 $l' \subset \partial U$ 也是非本质的，则 l' 在 ∂U 中与 l 平行，而 $l \cup l'$ 从 ∂U 中截出一个环带 F'。由 6_3 的双曲性可知， $F \cup F'$ 围成一个与 k 不相交的实心环面。由于 F' 的核在 W 中围成一个本质圆盘，它是该实心环面的经线。这意味着 F 可经由一个与 k 不相交的实心环面与 F' 作 ∂-平行，因此 A 是∂-平行的，矛盾。若 $l' \subset \partial U$ 是本质的，则 F 是 6_3, 的外部 $E(W)$ 中的本质环带，这与 6_3 的双曲性矛盾。

因此， ∂F 的分支是本质的，故是 ∂U 中彼此平行的分支。特别地， F 在 $E(W)$ 中是分离的，因此 ∂F 中的分支在 ∂W 中也彼此平行。由 6_3 的双曲性可知， F 在 $E(W)$ 中是非本质的。假设 F 在 $E(W)$ 中可压缩。那么，任一压缩圆盘都会导出 $E(V)$ 中 A 的一个压缩圆盘，矛盾。若 F 不可压缩，但在 $E(W)$ 中是 ∂-可压缩的，则由 6_3 的不可约性可知， F 是 ∂-平行的。这意味着 A 是 ∂-平行的，矛盾。

情形（ii）：设 F 是 $E(U)$ 中的本质圆盘。于是可以假设 F 的选取使得 $|F \cap Q|$ 最小。记 Q 的边界分支中在 U 中本质的为 l_1 （非本质的为 l_2）；见图 16c。由于 ∂F 与 l_1 平行，若 $F \cap Q = \emptyset$，则 $F \cup Q$ 将 $E(U)$ 分离，这与 $|(F \cup Q) \cap k| = 3$ 矛盾。

设 $F \cap Q$ 含有一条位于 Q 中的非本质弧 c 。可以假设 c 是最外层的，并截出一个圆盘 $Q' \subset Q$。于是 c 将 F 切成两个圆盘，其中一个记作 F'，其 $\partial(F' \cup Q')$ 在 ∂U 中是非本质的。特别地， $|(Q' \cup F') \cap k|$ 为偶数。若 $|Q' \cap k| = i = |F' \cap k|$, $i = 0$, 1，则 $Q' \cup (F - F')$ 会诱导出一个含有两个分支点、且与 Q 的交集更小的圆盘，这与极小性矛盾。若 $|Q' \cap k| = 0$, $|F' \cap k| = 2$，则 $Q' \cup (F - F')$ 会诱导出一个与 k 不相交的本质圆盘，这与 6_3 的不可约性矛盾。

类似地，若 $c \subset F \cap Q$ 是 Q 中最内层的非本质环，则 c 截出一个最内层的圆盘 $Q' \subset Q$ 和一个圆盘 $F' \subset F$。由于 $F' \cup Q'$ 是一个 2-球面， $|(F' \cup Q') \cap k|$ 为偶数。在 $|Q' \cap k| = |F' \cap k| = i$， $i = 0$, 1 的情形下， $Q' \cup (F - F')$ 的并集形成一个含有两个分支点的圆盘，它与 Q 的交集比 F 的交集少，这与极小性矛盾。在 $|Q' \cap k| = 0$， $|F' \cap k| = 2$ 的情形下，本质圆盘 $Q' \cup (F - F') \subset E(U)$ 与 k 不相交，这与 6_3 的不可约性矛盾。

因此， $F \cap Q$ 包含在 Q中本质的闭曲线或弧。假设是前者。那么存在一个在 Q 中最外层的闭曲线 $c \subset F \cap Q$ ，使得 l_1 是由 c截出的最外层环带 $Q' \subset Q$ 的一个边界分支；见图 16d。将由 c截出的环带记为 $F' \subset F$ 。由于 ∂F 与 l_1平行， $F' \cup Q' \subset E(U)$ 是分离的，因此 $|(F' \cup Q') \cap k| = 0$, 2。若 $|F' \cap k| = |Q' \cap k| = i$、$i = 0$, 1，则 $(F - F') \cup Q'$ 会诱导出一个带有两个分支点的圆盘，其与 Q 的交集少于 F，矛盾。若 $|F' \cap k| = 2$, $|Q' \cap k| = 0$，则 $(F - F') \cup Q$ 给出 6_3, 外部中的一个本质圆盘，这与其不可约性矛盾。因此， $F \cap Q$ 只包含在 Q中本质的弧。

注意， $l_1 \cup l_2$ 将 ∂U 分割成一个圆盘 R 和一个三孔球面S。若 $F_1 \subset F$ 是由 $F \cap Q$截出的最外侧圆盘，则 F_1 位于Q 背离 R的一侧，且 $F_1 \cap \partial F$ 是 S中的一条本质弧；见图 16e。特别地，F_1 是 $E(U \cup Q)$ 中的唯一一个本质圆盘，因此与 k 相交于一点。这意味着 F 中恰有两个由 $F \cap Q$截出的最外层分支 F_1, F_2 。由于 F_1, F_2 位于 Q的同一侧，因此存在一个由 $F \cap Q$截出的圆盘 $F' \subset F$，它与 F_1相邻，且 $F' \neq F_2$。由于弧 $F' \cap S$与 $F_1 \cap S$不相交，且只与 ∂S的一个分支相交， $F' \cap S \subset S$ 是非本质的，并截出一个与 k不相交的圆盘。将 F 穿过该圆盘进行同痕变形，可得到一个与 Q交集更少、带有两个分支点的本质圆盘，这与极小性矛盾。

因此， F在 $E(U)$中是非本质的，并从 ∂U中截出一个圆盘 D。由于$|F \cap k| = 2$, D 要么与 k 不相交，要么在两个点处与 k 相交。前一种情况下， D导出 A的一个压缩圆盘，矛盾。后一种情况下，2-球面 $F \cup D$将 S^3 分解为两个3-球 B_1、 B_2，其中(B_1, $k \cap B_1$)和(B_2, $k \cap B_2$)都是2弦缠结。可以假设 $B_1 \subset E(U)$。由于 $p^{-1}(S^3)$是一个三维球面，$p^{-1}(B_i)$、 $i = 1$中的一个，或2，是一个实心环面；等价地，$(B_i, k \cap B_i)$、 $i = 1$中的一个，或2，是有理的。如果$(B_1, k \cap B_1)$是有理的，那么 B_1 中分隔 $k \cap B_1$ 两条弦的圆盘会导出 A的一个 ∂-压缩圆盘，矛盾。如果$(B_1, k \cap B_1)$是

非有理的，那么 $p^{-1}(\partial B_1)$会在 6_8,的外部导出一个不可压缩环面，这与引理 7.2矛盾。

情形 (iii) 与 (iv) 不可能出现，因为 $k \cap U$ 是一条弧。 □

References

[1] G. Bellettini, M. Paolini, Y.-S. Wang: *Unique 3-decomposition and mapping classes of knotted handlebodies* **29** 74 2025 , Geom. Dedicata ( ) ( )。[2] G. Bellettini, G. Paolini, M. Paolini, Y.-S. Wang: *A table of genus two handlebody-knots with seven crossings* 2511 12194 , arXiv: . .[3] S. A. Bleiler: *Knots prime on many strings*, Trans. Amer. Math. Soc. 282 (1984), 385–401。[4] L. C. Chan Palomo, S. A. Taylor: *Hyperbolic Brunnian Theta Curves*, arXiv:2512.14533。[5] J. H. Conway: *An enumeration of knots and links, and some of their algebraic properties*, 载于《抽象代数中的计算问题》（J Leech 编），Pergamon，牛津，(1970) 329–358。[6] A. Ishii, K. Kishimoto, H. Moriuchi, M. Suzuki: *A table of genus two handlebody-knots up to six crossings* **21** 4 2012 1250035 , J. Knot Theory Ramifications ( ), ( )。[7] W. Jaco, J. H. Rubinstein: *PL equivariant surgery and invariant decomposition of 3-manifolds* **73** 1989 149 191 , Adv. Math. ( ), –。[8] A. Ishii, K. Kishimoto, M. Ozawa: *Knotted handle decomposing spheres for handlebody-knots*, J. Math. Soc. Japan 67 (2015), 407–417。[9] K. Johannson: *Homotopy Equivalences of 3-Manifolds with Boundaries*, 数学讲义第 761 卷，Springer，柏林、海德堡，1979。[10] L. H. Kauffman, S. Lambropoulou, *On the classification of rational knots*, Advances in Applied Mathematics 33 (2004), 199–237。[11] Y. Koda, M. Ozawa，附录由 C. Gordon 撰写: *Essential surfaces of non-negative Euler characteristic in genus two handlebody exteriors* **367** 2015 , Trans. Amer. Math. Soc. ( )，第 4 期，2875–2904。[12] Y. Koda, M. Ozawa, Y.-S. Wang: *Essential annuli in genus two handlebody exteriors*, 即将在 Algebr. Geom. Topol. 发表。[13] Y. Koda, M. Ozawa, Y.-S. Wang: *On symmetry and exterior problems of knotted handlebodies* 2506 06713 , arXiv: . .[14] J. H. Lee, S. Lee: *Inequivalent handlebody-knots with homeomorphic complements*, Algebr. Geom. Topol. 12 (2012), 1059–1079。[15] W. B. R. Lickorish: *Prime knots and tangles*, Trans. Amer. Math. Soc. 267 (1981) 321–332。[16] T. Motohashi: *A prime decomposition theorem for θ_n-curves in S^3*, Topology Appl. 83 (1998), 203–211。[17] T. Motohashi: *A prime decomposition theorem for handcuff graphs in S^3*, Topology Appl. 154 (2007), 3135–3139。[18] J. M. Nogueira: *The number of strings on essential tangle decompositions of a knot can be unbounded* **16** 2016 2535 2548 , Algebr. Geom. Topol. ( ) –。[19] U. Oertel: *Closed incompressible surfaces in complements of star links*, Pacific J. Math. 111(1), (1984), 209–230。[20] M. Ozawa: *On uniqueness of essential tangle decompositions of knots with free tangle decompositions* **8**, , 载于：G. T. Jub, K.H. Ko（编），应用数学研讨会论文集，KAIST，Tawjon，(1998), 227–232。[21] H. Schubert: *Die eindeutige Zerlegbarkeit eines Knoten in Primknoten*, Sitzungsber. Akad. Wiss. Heidelberg, math.-nat. 3, (1949) Abh: 57–104。[22] S. Suzuki: *On surfaces in 3-sphere: prime decompositions*, Hokkaido Math. J. 4, (1975), 179–195。[23] S. Suzuki: *A prime decomposition theorem for a graph in the 3-sphere*, 载于：S. Suzuki 编，《拓扑与计算机科学》（Kinokuniya，东京，1987）259–276。[24] W. P. Thurston: *Three-dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 357–381。[25] Y. Tsukui: *On surfaces in 3-space*, Yokohama Math. J. 18 (1970), 93–104。[26] Y.-S. Wang: *Rigidity and symmetry of cylindrical handlebody-knots*, Osaka J. Math. 60(2) (2023) 267–304。[27] Y.-S. Wang: *Annulus configurations in handlebody-knot exteriors*, Adv. Geom. 24(3) (2024), 341–355。[28] Y.-S. Wang: *JSJ decomposition for handlebody-knots*, J. Math. Soc. Japan 76(4) (2004), 1049–1085。[29] Y.-Q. Wu: *The classification of nonsimple algebraic tangles*, Math. Ann. 304 (1996), 457–480。

Department of Natural Sciences, Faculty of Arts and Sciences, Komazawa Univer-sity, 1-23-1 Komazawa, Setagaya-ku, Tokyo, 154-8525, Japan*Email address*: w3c@komazawa-u.ac.jp

National Sun Yat-sen University、 Kaohsiung 804、 Taiwan
Email address: yisheng@math.nsysu.edu.tw