arXiv:2602.17139v1 [math.GT] 19 Feb 2026

纽结外部中本质曲面的实现问题

MAKoto Ozawa 和 JES ´US RODR´IGUEZ-VIOR ATO

Abstract. 我们研究三维球面中的纽结外部里的紧致可定向本质曲面。亏格 g、边界分支数 b和边界斜率 p/q 是本质曲面的基本不变量。 *realization problem* 探讨的是：对于给定的三元组 $(g,\ b,\ q)$，其中 $g \geq 0$、$b \geq 1$和 $q \geq 1$，是否存在一个纽结 $K \subset S^3$，使其外部 $E(K)$包含一张紧致可定向本质曲面 F，其亏格为 g，有 b个边界分支，边界斜率为 p/q，其中某个 p。

一般而言，并非所有 $(g,\ b,\ q)$ 的组合都能实现。首先，我们证明，若 b 为奇数，则 q 必定等于 1。我们的主定理指出，对于任意给定的偶数 $b \geq 2$ 和 $q \geq 1$，都存在一个亏格为 $g \geq 0$ 的曲面和一个纽结K，使得 $E(K)$包含一张具有这些参数的紧致可定向本质曲面。

1. Introduction

设 K 是三维球面 S^3 中的一个纽结。纽结外部记为 $E(K)$，是由 $E(K) = S^3 - \mathrm{int}\ N(K)$ 定义的紧致可定向三维流形，其中 $N(K)$ 是 K 的一个正则邻域。Gordon–Luecke 的一项基本结果 [GL89] 断言，三维球面 S^3 中的纽结完全由其外部确定：两个纽结环境同痕，当且仅当它们的外部同胚。

纽结理论中的另一项基石是 Thurston 双曲化定理[Thu82], ，它将纽结几何分类为四种互不相容的类型：平凡纽结、环面纽结、卫星纽结和双曲纽结。这种分类与纽结外部中本质曲面 的存在密切相关。若一个紧致可定向曲面 F 真嵌入于 $E(K)$ 中，且该曲面不可压缩、边界不可压缩并且不是边界平行的，则称其为本质曲面。

在本质曲面的外在特征中，边界斜率这一概念起着核心作用。设 S 是 K 的塞弗特曲面。$\partial(S \cap E(K))$ 在 $\partial E(K)$ 上的同痕类称为经线；而 $\partial E(K)$ 上的本质环若在 $N(K)$ 中围成一个圆盘，其同痕类则称为子午线。固定一对子午线—经线 $(m,\ l)$ 后，$\partial E(K)$ 上任一本质环 α 的同痕类都对应一个同调类 $[\alpha] = p[m] + q[l] \in H_1(\partial E(K))$。我们将此类与斜率 $p/q \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ 等同，其中 ∞ 对应于 $1/0$。

若 F 是一个边界非空的紧致可定向本质曲面，则每个 h
F 的边界分支确定相同的斜率 p/q，称为边界 y

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 57M15；次要分类 05C35。
Key words and phrases. 边界斜率、本质曲面、纽结外部、Dehn手术、缆化猜想。第一作者部分获得科学研究费补助金（C 类，编号 17K05262）、日本文部科学省的资助。1

F斜率。纽结 K 的所有边界斜率组成的集合记为 $\mathcal{B}(K)$。例如，对于平凡纽结， $\mathcal{B}(K) = \{0\}$；而对于(p, q)-环面纽结， $\mathcal{B}(K) = \{0, pq\}$。Hatcher [Hat82]证明了 $\mathcal{B}(K)$总是一个有限集。

本质曲面由内在数据——亏格 $g(F)$ 和边界分支数 $b = |\partial F|$——以及外在数据，即边界斜率，共同刻画。本文通过考察以下实现问题，研究这三个量之间的相互关系：

问题 1.1 (实现问题). 给定整数 $g \geq 0$、 $b \geq 1$ 和 $q \geq 1$，是否存在一个纽结 $K \subset S^3$，使得 $E(K)$ 包含一个亏格为 g、具有 b 个边界分支且边界斜率为某个整数 p 的紧致可定向本质曲面 F？

众所周知，并非所有三元组 (g, b, q) 都可以实现。对于 $b = 1$，同调约束迫使边界斜率为 $0/1$ （即 $q = 1$），这意味着 F 必须是一个塞弗特曲面。因此，对于所有 $g \geq 0$，三元组 $(g, 1, 1)$ 都可以实现，而当 $q \geq 2$ 时，$(g, 1, q)$ 则不能实现。对于平面曲面 ($g = 0$)，Gordon–Luecke [GL87] 证明了 q 必须为 1。此外，如果 $g = 0$ 且 b 为奇数，那么 $b = 1$ 和 K 必须是平凡纽结。对于 $g = 0$ 和 $b = 2$， K 必须是缆结。Gordon [KO15] 还证明三元组 $(0, 4, 1)$ 不可实现。这些约束促使我们提出以下猜想：

猜想 1.2 （强缆结猜想）。 对于任意偶数 $b \geq 6$，三元组 $(0, b, 1)$ 不可实现。

若考虑任意的环境三维流形，则每个三元组（g, b, q）均可实现。因此，该实现问题特别凸显了三维球面所施加的拓扑约束。对于特定类别，关于欧拉示性数 $\chi(F)$ 的定量界已知：交错纽结满足 $-\chi(F) \geq \frac{1}{8}bq(n + 2)$ [TM92]，而 Montesinos 纽结一般满足 $-\chi(F) \geq bq$ [IM07]。这些表明存在形如 $-\chi(F) \geq f(b, q)$ 的普适界。

1.1. **结果**。 设 F 为 $E(K)$ 中的紧致可定向本质曲面。我们首先证明：若 b 为奇数，则 F 在 $E(K)$ 中必为非分离的。由于纽结外部中的非分离本质曲面的边界斜率必定为零（$q = 1$），故当 b为奇数时， q 必为 1。

尽管已知当 b 为奇数时，$(g, b, 1)$ 对某些 g 是可实现的，但我们的主要结果为其余情形提供了一个全面的存在性定理：

定理 1.3。 对于任意偶整数 $b \geq 2$ 和任意整数 $q \geq 1$，存在一个整数 $g \geq 0$，使得三元组 (g, b, q) 是可实现的。

Ishikawa、Mattman 和 Shimokawa 的近期工作 [IMS25] 表明，对于交错纽结，分母 q 可以任意大。然而，他们的结果并未规定亏格或边界分支。相比之下，本文阐明了 b 的奇偶性与分母 q 如何共同约束本质曲面的存在性，从而更清晰地呈现了实现问题。

2. Preliminaries

我们从两个一般性结果开始。

命题2.1. 若 b 为奇数，则 F 必须是 $E(K)$中的非分离曲线。

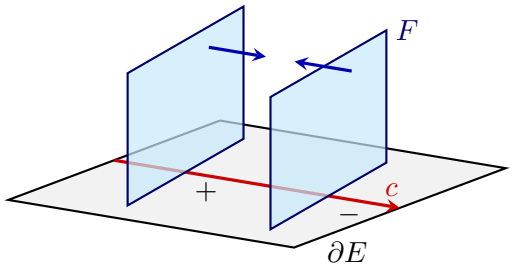


FIGURE 1. 正相交

证明。 注意到， ∂F 的所有连通分支都是环面$\partial E(K)$上的平行本质曲线。因此，我们可以选取一条与 ∂F 横截相交的曲线 c ，使其与每个边界分支恰好相交一次。固定 c 和 F的定向后，我们为 $F \cap c$中的每个交点赋予一个符号：如果 c 平行于 F 的法向量（见图1），则该交点为正；否则为负。

沿曲线 c 行进，并将其与 F 的各个交点依次标记为p_1， p_2，……， p_b。对于每个 $i = 1$，……， b， c上从 p_i到 p_{i+1}的子弧 c_i不包含与 F的其他交点，其中我们令 $p_{b+1} = p_1$。如果交点p_i 和 p_{i+1} 的符号相同，那么弧 c_i 连接 F的两侧；特别地， F 是非分离的。反之，假设所有弧 c_i 都不连接 F的两侧。那么，对每个 i，点 p_i 和 p_{i+1} 必定符号相反（如图 1 所示）。因此，每条弧 c_i 端点处的符号相互抵消，从而得到

$$0 = \sum_{i=1}^{b} \big(\operatorname{sign}(p_i) + \operatorname{sign}(p_{i+1})\big) = 2\sum_{i=1}^{b} \operatorname{sign}(p_i).$$

这意味着 $\sum_{i=1}^{b} (\pm 1) = 0$，因此 b 必为偶数，这与 b 为奇数的假设矛盾。

□

命题2.2. 如果 F 在 E（K）中是可定向且非分离的，那么 F 的边界斜率为零；也就是说， $p = 0$ 和 $q = 1$。

证明。 注意， F 必定有非空边界。否则， F 会在 $E(K)$中是分离的。

固定 F的一个定向，它确定一个同调类 $w = [F, \partial F] \in H_1(E(K)\ \partial E(K)) \cong \mathbb{Z}$。由于 F是非分离的，存在一条曲线 c，位于 $E(K)$中，并且与 F 恰好相交一次。我们可以取一条连接 F 两侧的曲线，并将其端点沿 F 滑动，使它们在 F处重合，从而形成环路 c，以此得到 c 。固定 c上的一个定向后，它表示 $H_1(E(K)) \cong \mathbb{Z}$中的一个元素 $\alpha = [c]$ 。取帽积 $H^1(E(K)) \times H_1(E(K)) \to H^0(E(K)) \cong \mathbb{Z}$。根据庞加莱对偶，我们将 $H_2(E(K)\ \partial E(K))$与 $H^1(E(K))$相识别，从而得到相交配对。这定义了一个双线性形式 β： $H_2(E(K)\ \partial E(K)) \times H_1(E(K)) \to \mathbb{Z}$，它将$(E(K)\ \partial E(K))$中的任意定向曲面$(S, \partial S)$和$E(K)$中的定向环路 γ作为输入，并将 $\beta([S, \partial S], [\gamma])$赋值为 S与 γ之间带符号交点的总和。这是通过横截性来描述的。

由于 $\beta([F, \partial F],\ [c]) = 1$，因此 $[F, \partial F]$和 $[c]$都必须分别是其同调群中的本原元。由于 $H_2(E(K)\ \partial E(K)) \cong \mathbb{Z}$ 由一个塞弗特曲面生成

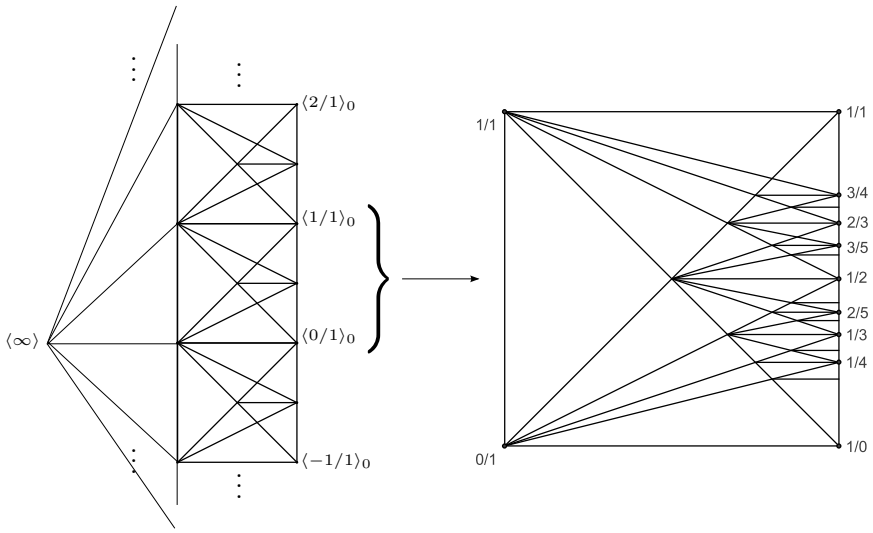


FIGURE 2. 图 $\mathcal{D}$

$[S_0, \partial S_0]$，所以必有 $[F, \partial F] = \pm[S_0, \partial S_0]$ 属于 $H_2(E(K)\ \partial E(K))$。现在考虑连接同态 δ： $H_2(E(K)\ \partial E(K)) \to H_1(\partial E(K))$。群$H_1(\partial E(K))$由一条子午线 μ （一条围成圆盘 D 、位于S^3 中且与 K 恰好相交于一点的闭曲线）和一条经线 λ （ $= \partial S_0$）生成。现在 $[\partial F]$ $=\delta([F, \partial F])$ $= \pm\delta([S_0, \partial S_0])$
$= \pm[\partial S_0] = \pm[\lambda] = 0[\mu] + (\pm 1)[\lambda]$。这意味着 ∂F 的斜率在 $\partial E(K)$中为零。□

在定理 1.3 中，我们仅考虑 b 的偶数值，这是因为 b 的奇偶性会影响所构造曲面的可定向性和可分离性，如命题 2.1 和 2.2 所示。这些限制确保了边界斜率可实现性的一致性。

3. PROOF

定理 1.3 将作为定理 3.5 和 3.6 的推论得到。证明采用了来自 [HO89] 的技术。关于这些技术的简要介绍可见于 [RG16]。在本文给出的所有证明中，我们将给出一个沿着图 2 所示的图（见[HO89]中的定义）之边行进的路径系统（每个缠结对应一条路径）。

路径系统描述曲面的条件见以下来自 [HO89] 的定义。

定义3.1. Montesinos纽结 K 的一个边路径系统是 $\mathcal{D}$的1-骨架上满足下列条件的一组 n 边路径γ_1， γ_2，..... γ_n：

(E1) γ_i 的起点位于边 $\langle p_i/q_i,\ p_i/q_i\rangle$上；如果起点不是顶点 $\langle p_i/q_i\rangle$，那么边路径 γ_i 就是常值的。(E2) γ_i 是极小的，也就是说，它不会停下或折返，也不会连续沿着 $\mathcal{D}$ 中同一个三角形的两条边行进。

(E3) γ_i的终点是 $\mathcal{D}$ 上的有理点，它们都位于同一条竖直线上，且其竖直坐标之和为零。(E4) γ_i 从右向左单调前进；这里“单调”取其宽松含义，即允许沿竖直边移动。

定理 3.2. 椒盐卷饼纽结 $K = P(-p, p, q)$，其中 $p \geq 3$ 与 $q \geq a^2 - a + 1$为奇整数，具有一个不可压缩曲面，其有 $gcd(a+b, 2a^2)/gcd(a, b)$ 个边界分支，以及斜率分母 $(a+b)/gcd(a+b, 2a^2)$，其中 $a = p-1$、$b = q-1$。

注：此处 $gcd(\cdot, \cdot)$ 是最大公约数函数。

证明. 我们取由下列给出的路径系

$$\begin{aligned}
\gamma_0: &\quad \langle\frac{-1}{p}\rangle \longrightarrow \frac{x_0}{x_0+y_0}\langle\frac{-1}{p}\rangle + \frac{y_0}{x_0+y_0}\langle\frac{-1}{p-1}\rangle \\
\gamma_1: &\quad \langle\frac{1}{p}\rangle \longrightarrow \frac{x_1}{x_1+y_1}\langle\frac{1}{p}\rangle + \frac{y_1}{x_1+y_1}\langle\frac{0}{1}\rangle \\
\gamma_2: &\quad \langle\frac{1}{q}\rangle \longrightarrow \frac{x_2}{x_2+y_2}\langle\frac{1}{q}\rangle + \frac{y_2}{x_2+y_2}\langle\frac{0}{1}\rangle
\end{aligned}$$

我们用 $(a,\ b,\ c)$ 坐标表示边路径的终点，

$$\begin{aligned}
\text{End}(\gamma_0): &\quad (x_0+y_0, x_0(p-1)+y_0(p-2), -x_0-y_0) \\
\text{End}(\gamma_1): &\quad (x_1+y_1, x_1(p-1), x_1) \\
\text{End}(\gamma_2): &\quad (x_2+y_2, x_2(q-1), x_2)
\end{aligned}$$

由于每个 a 坐标都等于叶数，因此它们必须全部相等。根据条件 E3，所有 b 坐标都必须相等，且所有 c 坐标之和必须为零。这些观察转化为以下方程：

$$\begin{gathered}
x_0 + y_0 = x_1 + y_1 = x_2 + y_2 \\
x_0(p-1) + y_0(p-2) = x_1(p-1) = x_2(q-1) \\
x_1 + x_2 = x_0 + y_0
\end{gathered}$$

通过初等数论论证，可以验证所有解都是以下解的倍数：

$$x_0 = \frac{a+b-a^2}{g}, \quad y_0 = \frac{a^2}{g}, \quad x_1 = \frac{b}{g}, \quad y_1 = \frac{a}{g}, \quad x_2 = \frac{a}{g}, \quad y_2 = \frac{b}{g}$$

其中 $g = gcd(a,\ b)$（回忆一下，$a = p-1$ 且 $b = q-1$）。这里，我们需要条件 $q \geq a^2 - a + 1$，以使 x_0 非负。因此，这三条边路径的分数经线为：

$$|\gamma_0| = \frac{y_0}{x_0+y_0} = \frac{a^2}{a+b}, \qquad |\gamma_1| = \frac{a}{a+b}, \qquad |\gamma_2| = \frac{b}{a+b}$$

那么，层数必须是一个整数 s，使得 $s|\gamma_i|$ 对于 $i = 0,\ 1,\ 2$ 是整数。这意味着 s 是 $(a+b)/gcd(a,\ b)$ 的倍数。这意味着，要构造一个连通曲面，只需考虑层数

层数为 $s = (a+b)/gcd(a,\ b)$ 的情况。现在，在这种情况下，扭转数 $\tau(\gamma_i)$ 是每条边路径长度的两倍，并带有正负号（若沿 $\mathcal{D}$向下则为负，向上则为正）：

$$\tau(\gamma_0) = \frac{2a^2}{a+b}, \qquad \tau(\gamma_1) = -\frac{2a}{a+b}, \qquad \tau(\gamma_2) = -\frac{2b}{a+b}$$

总扭转数为：

$$\tau(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = \frac{2a^2 - 2a - 2b}{a+b}$$

并且根据 [HO89] ，我们知道曲面 $slope(F)$ 的实际斜率满足 $slope(F) \equiv \tau(\gamma_0,\ \gamma_1,\ \gamma_2) \equiv \frac{2a^2}{a+b}$（模 1）。这意味着 $slope(F)$ 作为既约分数时，其分母等于 $(a+b)/gcd(a+b,\ 2a^2)$。最后，边界分支的数量必须为：

$$|\partial F| = sheets(F)/den(\partial F) = \frac{(a+b)/gcd(a,b)}{(a+b)/gcd(a+b,2a^2)} = \frac{gcd(a+b,2a^2)}{gcd(a,b)}.$$

这确定了候选曲面的斜率。还需证明它是不可压缩且可定向的。关于不可压缩性，我们使用 [HO89，推论 2.5]，并在下文陈述该结果。

推论 3.3 (来自 [HO89]的推论 2.5)。 除非 γ_i 的末端边的 r-值循环属于以下类型之一，否则候选曲面不可压缩：$(0, r_2, \ldots, r_n)$, $(1, \ldots, 1, r_n)$，或 $(1, \ldots, 1, 2, r_n)$。

提及的 r 值循环可以根据每条边路径 γ_i 的末端边计算如下。若 $\langle p/q,\ u/v\rangle$ 是 γ_i （从 p/q 朝向 u/v）的末端边， $r_i = q - v$ 是对应于 γ_i 的 r 值。那么，$(r_1,\ r_2,\ \ldots,\ r_n)$ 就是末端边的 r 值循环。在我们的例子中，末端边（每条边路径上唯一的一条边）是 $\langle 1/p,\ 1/p-1\rangle$、$\langle 1/p,\ 0/1\rangle$ 和 $\langle 1/q,\ 0/1\rangle$。因此， r 值循环为 $(1,\ p-1,\ q-1)$，这不属于推论 3.3 中的任何例外情形。因此，我们的候选曲面是不可压缩的。

候选曲面的可定向性将在定理 3.4 中讨论。 □

关于可定向性，定理 3.2 中的曲面仅在以下情况下可定向：

定理 3.4. 定理 *3.2* 给出的曲面在 $g =$ 最大公因数(a, b) 为偶数且 $(a+b)/g$ 为偶数时可定向。

证明。 候选曲面通过粘合每个缠结 p_i/q_i内部的嵌入曲面 S_i 构造而成；我们用 B_i 表示包含该缠结的球。此处， $p_0/q_0 = -1/p$、 $p_1/q_1 = 1/p$ 和 $p_2/q_2 = 1/q$。边路径 γ_i 编码了曲面 $S_i \subset B_i$，这些曲面通常是不连通的。在我们的情形中，边路径 γ_0、 γ_1 和 γ_2 在定理 3.2 的证明中有描述。

可以验证，曲面 S_0、 S_1 和 S_2 均不连通。为证明可定向性，我们的策略是对 S_i 的每个连通分支定向，使它们在 $B_i \cap B_j$ 上诱导相反的定向。这样可确保所选定向能够延拓到整个曲面，从而证明其可定向。

我们首先回顾每个 S_i 是如何构造的。首先，考虑 B_i 内部 $S \times \{1\} = \partial B_i$处 ∂B_i 的一个领圈邻域 $C = S^2 \times I$。将

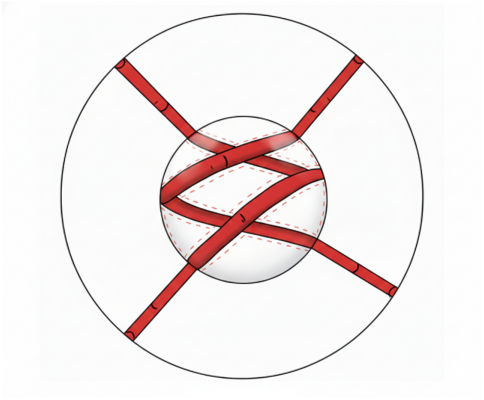


FIGURE 3. 缠结 $1/2$ 的正则邻域上，斜率为 $1/2$ 的平行副本。

沿着C的乘积结构，将缠结中的弧的第一部分平行于 I 放置，并使弧的缠绕部分位于球面 $S^2 \times \{0\}$ 上（如图 3 所示）。现在，在 $S^2 \times \{0\}$上取 p_i/q_i 斜率的 s 个平行副本；这些副本位于原纽结 K 的 Montesinos 分解中包含 p_i/q_i 弧部分的邻域上方（见图 3）。将这些平行副本与 C内部的 $[0, \epsilon]$ 作乘积，从而构造出曲面 S_i'，其中含有 B_i内的 $2s$ 个圆盘分支。

要从 S_i' 构造出 S_i，我们按照边路径 γ_i，沿着领 $C = S^2 \times I$ 的乘积结构的横向方向，从层级 $S^2 \times \epsilon$ 开始向上移动，并附加鞍带。

对于我们关注的情形，边路径 γ_i 规定了总共 y_i 个同类型的鞍，用于 $i = 0$, 1, 2。例如，对于 γ_1，我们需要附加 $y_1 = \frac{a}{g}$ 个鞍，每个鞍都将一对斜率为 $1/\overline{p}$ 的弧变为一对斜率为 0 的弧。因此，我们从层级 $S^2 \times \epsilon$ 开始，此时有 $s = a/g + b/g$ 对斜率为 $1/p$ 的平行弧；最终在层级 $S^2 \times 1$ 得到 a/g 条斜率为 $1/p$ 的弧，以及 b/g 条斜率为 0 的弧。通过图 4 所示的鞍点移动即可实现这一过程。

现在，为了给 S_i 确定一个定向，我们先为 S_i'确定一个定向；它有 2^{2s}种可能（ S_i'的每个连通分支有两种）。我们可以通过它们在 $\partial S_i'$ 中对 $S^2 \times \epsilon$的诱导定向来示意这些定向；它们是斜率为 p_i/q_i的有向弧对的 s个平行副本。但并非每种定向都能延拓为 S_i的一个定向。我们需要确保鞍保留该定向。

对于一对斜率为 p_i/q_i的弧 α 和 β，这两条弧的定向必须满足：所用的鞍连接的是 α 与 β的相对两侧。对于鞍将斜率从 $1/p$ 变为 0 的具体情形，若弧α 和 β 的方向如图 4 所示，或同时将两者反向，则鞍会保留定向。在 α 和 β上任选一种这样的定向。

接下来，考虑 s $\alpha_1, \ldots, \alpha_s$ 的平行副本，它们位于 α 和 $\beta_1, \ldots, \beta_s$ 的 β 中，并从最左侧到最右侧依次编号（见图 5）。每条弧 α_j 的定向可以与 α 一致，也可以与其相反。我们用一个向量来表示这一选择

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_s) \in \{\pm 1\}^s,$$

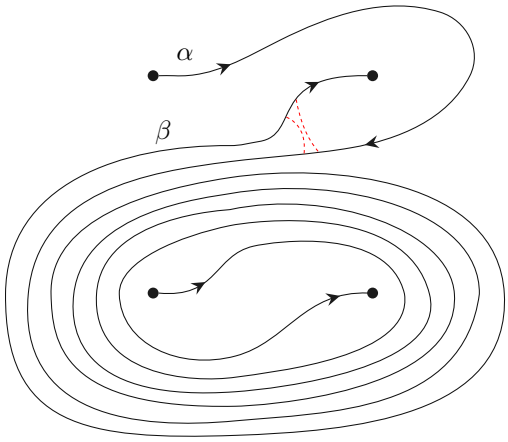


FIGURE 4. 从斜率 $1/7$ 到斜率 0 的鞍点移动示例。



FIGURE 5. 取 α 的平行副本，并从最左侧到最右侧编号

类似地，我们用以下方式表示弧 β_i 的定向

$$\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_s) \in \{\pm 1\}^s.$$

附加鞍后可定向性得以保持，条件是平行弧 α_j 和 β_j 上的定向选择均与 α 和 β 上的定向相同或相反，也就是说，条件为 $\mathbf{x} = \mathbf{y}$。满足此条件的一种便捷选择是交替使用正负号，例如

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} = (+1, -1, +1, \ldots, +1, -1).$$

执行 $\frac{a}{g}$ 次鞍点移动后，我们在 ∂B上得到一个诱导定向，如图6所示。在这种构型中，定向数据为

$$\mathbf{x_1} = (-1, +1, -1, +1, \ldots, -1), \qquad \mathbf{y_1} = (+1, -1, +1, -1, \ldots, +1),$$

其中 $|\mathbf{x_1}| = \frac{a}{g}$且 $|\mathbf{y_1}| = \frac{b}{g}$。这里 $|\cdot|$ 表示向量的长度。

注意到，由于 a/g 为奇数，$\mathbf{x_1}$ 从 -1 开始并在 -1 结束， b/g 也同样如此。

沿 z 轴切开图（如图6中的红色虚线所示），会得到两个圆盘，或者等价地说，两个半平面，我们将它们记为 D_1^L 和 D_1^R（见图7）。

对 γ_2 也可进行类似的分析。为获得相容定向，我们将所有符号反转，即

$$x_2 = (-1, +1, -1, +1, \ldots, -1), \qquad y_2 = (+1, -1, +1, -1, \ldots, +1),$$

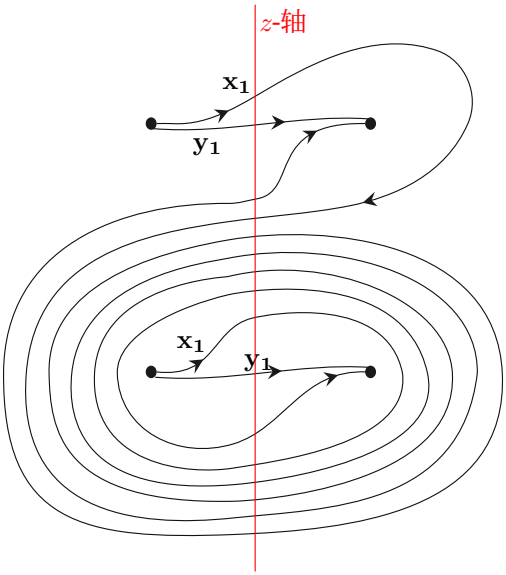


FIGURE 6. 鞍点移动后的定向。

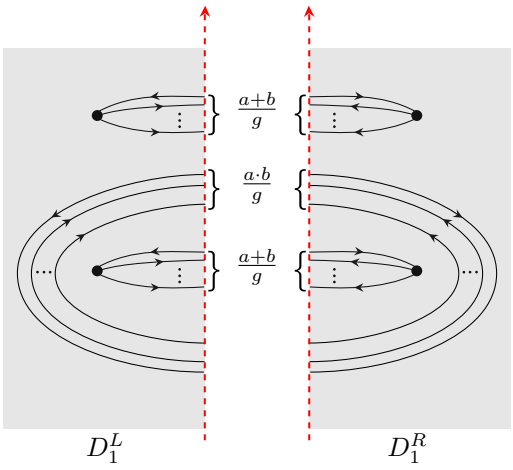


FIGURE 7. 左右两半 D_1^L 和 D_1^R。

从而得到图8所示的构型。此时，我们构造了两个沿着 F_1 和 F_2 完美匹配的定向曲面

$$F_1 \cap F_2 \subset D_1^R = D_2^L = B_1 \cap B_2.$$

最后，我们将相同的分析应用于 γ_0，采用图9所示从斜率 $-1/p$到 $-1/$（$p-1$）的鞍点移动。为 α_0 和 β_0 的平行副本选择交替定向，可确保经过 $\frac{a^2}{g}$ 次鞍点移动后仍保持可定向性，从而得到图10所示的 ∂B_0 两半上的诱导定向。.

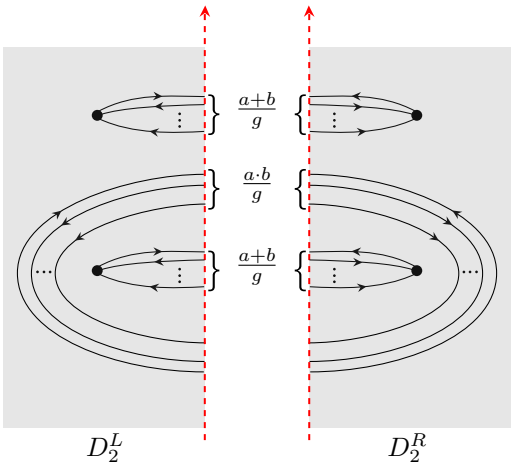


FIGURE 8. 相容定向的 γ_2。左右两半D_2^L和 D_2^R。

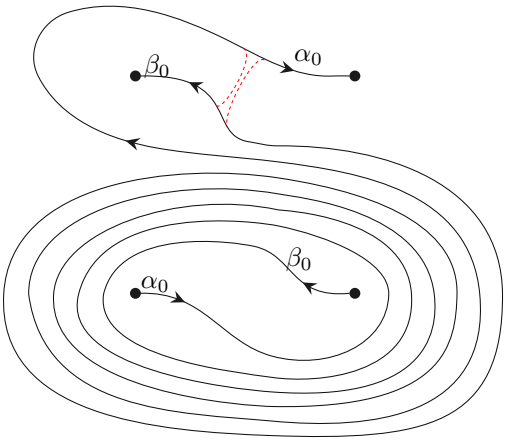


FIGURE 9. 与边路径 γ_0对应的鞍点移动，将斜率从 $-\frac{1}{p}$变为 $-\frac{1}{p-1}$。

至此，构造完成，并证明所得曲面在整个过程中始终保持可定向。

□

定理3.5。 给定椒盐卷饼纽结 $K = P(-(n+1)\ n+1, 2n^2q-n+1)$，其具有一个带有 $2n$ 个边界分支且斜率分母为 q的本质可定向曲面，其中 n 为偶正整数， q 为任意正整数。

证明。 我们利用 $a = n$ 和 $b = 2n^2q - n$应用定理 3.2。首先注意到$gcd(a, b) = n$ 以及 $gcd(a + b, 2a^2) = gcd(2n^2q, 2n^2) = 2n^2$。因此，边界分支的数目是商 $gcd(a + b, 2a^2)/gcd(a, b) = 2n^2/n = 2n$，正如所断言的。而分母是商$(a+b)/gcd(a+b, 2a^2) = 2n^2q/2n^2 =q$，这就完成了我们这一陈述的证明。□

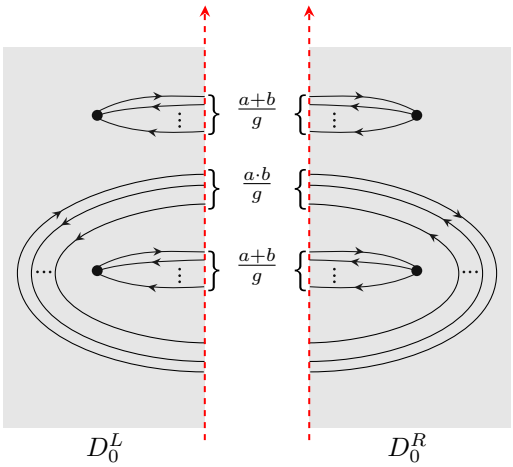


FIGURE 10. 在 ∂B_0上的诱导定向。

下列结果可以取代前一定理：椒盐卷饼纽结是亏格一纽结。

定理3.6。 给定椒盐卷饼纽结， $K = P(-(n+1)\ n+2, n(2nq+1)+2)$ 存在一个本质可定向曲面，它有 $2n$个边界分支，且斜率的分母为q ，其中 n 是奇正整数， q 是任意正整数。

证明。 我们采用与定理 3.2 中类似的构造，应用 Hatcher 和 Oertel 的算法 [HO 89]。考虑参数为 $p_1 = -(n+1)$、 $p_2 = n+2$和 $p_3 = n(2nq+1) + 2$的椒盐卷饼纽结 $K = P(p_1, p_2, p_3)$。我们使用每个缠结对应的图 $\mathcal{D}$ 上的一组边路径构造候选曲面。

与定理 3.2 的证明类似，我们建立边路径系统方程 (E1)–(E4)。令 x_i， y_i 为分别确定各缠结中边路径的坐标。通过求解关于叶数和竖直坐标的相容性方程（条件 E3），我们得到一个由最小整数解生成的解空间。

将定理陈述中给出的 p_1， p_2， p_3 的具体值代入边界分支数 $|\partial F|$ 的公式以及由总扭转数 τ导出的边界斜率公式，我们验证如下：

(1) 边界分支数 $|\partial F|$ 化简为 $2n$。(2) 边界斜率的分母化简为 q。

此外，由于末端边的 r值循环避开了推论 3.3 中的例外情形，该曲面是不可压缩的。参数的奇偶性保证了可定向性，因为 n为奇数，这补充了定理3.5 中的偶数情形。因此，对于某个亏格 g，三元组 $(g,\ 2n,\ q)$ 可以实现。□

4. Concluding Remarks and Future Directions

本文为三维球面中本质曲面的实现问题建立了一条基本存在性定理。具体而言，我们证明，对于任意偶整数 $b \geq 2$ 和任意整数 $q \geq 1$，都存在一个纽结 $K \subset S^3$，使得三元组 $(g,\ b,\ q)$ 可由某个亏格为 $g \geq 0$ 的本质曲面实现。

结合命题 2.1 和 2.2 中确立的奇偶性约束（当 b 为奇数时，这些约束迫使 $q = 1$），这些结果全面描绘了边界分支数目的奇偶性如何限制可能的边界斜率。

然而，我们采用椒盐卷饼纽结的构造性方法仍留下若干定量和定性问题有待解决。最后，我们提出以下未来研究方向。

4.1. **亏格的极小性**。尽管定理 1.3 断言存在某个亏格 g，但我们构造中使用的椒盐卷饼纽结未必能为给定的 (b, q) 实现可能的最小亏格。确定实现所需亏格的下界仍是一个自然的下一步。

问题 4.1。给定一个偶整数 $b \geq 2$ 和一个整数 $q \geq 1$，确定最小亏格 $g_{\min}(b, q)$，使得三元组 $(g_{\min}(b, q)\ b, q)$ 可在 S^3 中实现。

4.2. **欧拉示性数的普适界**。针对交错纽结和 Montesinos 纽结等特定类别，已有定量不等式将欧拉示性数 $\chi(F)$ 与 b 和 q 联系起来。确定这些针对特定类别的界能否推广为一个普适函数，具有重要意义。

问题 4.2. 是否存在一个通用函数 $f(b, q)$，使得对纽结外部中任意具有 b 个边界分支且边界斜率分母为 q 的本质曲面 F，不等式$-\chi(F) \geq f(b, q)$ 都成立？

References

[Hat82] A. E. Hatcher. “不可压缩曲面的边界曲线”。载于：太平洋数学杂志99.2 (1982)，第 373–377 页。 ISSN: 0030-8730,1945-5844。[Thu82] William P. Thurston. “三维流形、克莱因群与双曲几何”。载于：美国数学会公报（新辑）6.3 (1982)，第 357–381 页。 ISSN: 0273-0979,1088-9485。 DOI: 10 .1090 / S0273 - 0979 - 1982-15003-0。[GL87] C. McA. Gordon 和 J. Luecke. “只有整数德恩手术才能产生可约流形”。载于：剑桥哲学学会数学会报102.1 (1987)，第 97–101 页。 ISSN: 0305-0041,1469-8064。 DOI: 10 . 1017 / S0305004100067086。[GL89] C. McA. Gordon 和 J. Luecke. “纽结由其补空间确定”。载于：美国数学会杂志2.2 (1989)，第 371–415 页。 ISSN: 0894-0347,1088-6834。 DOI: 10.2307/1990979。[HO89] A. Hatcher 和 U. Oertel. “Montesinos 纽结的边界斜率”。载于：《拓扑学》28.4 (1989)，第 453–480 页。 ISSN: 0040-9383。 DOI: 10.1016/0040- 9383(89)90005-0。[TM92] M.B. Thistlethwaite 和 W.W. Menasco. “交错纽结外部中带边界的曲面”。载于：纯粹与应用数学杂志 ¨纯粹与应用数学杂志1992.426 (1992)，第 47–66 页。 DOI: doi:10.1515/crll.1992. 426.47。[IM07] Kazuhiro Ichihara 和 Shigeru Mizushima. “Montesinos 纽结数值边界斜率的界”。载于：《广岛数学杂志》37.2 (2007)，第 211–252 页。 DOI: 10.32917/hmj/1187916319。

[KO15] Yuya Koda 和 Makoto Ozawa. “亏格为二的把手体外部中具有非负欧拉示性数的本质曲面”。载于：美国数学会汇刊367.4 (2015)。附录由 Cameron Gordon 撰写，第 2875–2904 页。ISSN: 0002-9947,1088-6850。 DOI: 10.1090/S0002-9947-2014-06199-0。[RG16] Jes´us Rodr´iguez-Viorato 和 Francisco Gonzal´ez Acu˜na. “关于椒盐纽结与猜想 $\mathbb{Z}$”。载于：纽结理论及其分枝25.2 (2016)，第 1650012 页，共 40 页。 ISSN: 0218-2165,1793-6527。 DOI: 10 . 1142 / S0218216516500127。[IMS25] Masaharu Ishikawa 、 Thomas W Mattman 和 Koya Shimokawa. “交错纽结的非整数边界斜率”。载于：*Geometriae Dedicata*219.1 (2025)，第 19 页。

Department of Natural Sciences, Faculty of Arts and Sciences, Komazawa Univer-sity, 1-23-1 Komazawa, Setagaya-ku, Tokyo, 154-8525, Japan*Email address*: w3c@komazawa-u.ac.jp

Centro de Investigación en Matemáticas, A.C. 402, 36000 Guanajuato, Gto, México
Email address: jesusr@cimat.mx