arXiv:2602.17224v1 [math.CV] 19 Feb 2026

具有对数奇点的有限部分积分的围道积分表示

Reynaldo P. Ylanan & Eric A. Galapon

菲律宾大学迪利曼分校国家物理研究所理论物理组，菲律宾奎松市，邮编 *1101*

Abstract. 积分 $\int_0^a f(t)t^{-s}\mathrm{d}t$ 在 $\mathrm{Re}(s) \geq \lambda + 1$时发散，其中 λ 是 $f(t)$在原点处第一个非零导数的阶。假设 $f(t)$在原点处解析，则该发散积分的有限部分可表示为如下围道积分形式：$\fint_0^a f(t)t^{-s}\mathrm{d}t = \int_C f(z)z^{-s}G(z)\mathrm{d}z$ ，其中 $G(z)$取决于 $z = 0$ 构成 z^{-s} [的极点还是分支点奇异性。E. A. Galapon, 《Physics》A 473（2017年），第2197卷，20160567。]本文将这些表示推广至任意阶 $n \in \mathbb{N}$ 的对数奇点，具体而言，针对 $\fint_0^a f(t)t^{-s}\ln^n t\mathrm{d}t$。随后，我们展示这些表示在有限部分积分数值计算中的效用，以及如何利用它们确定非梅林型发散积分的有限部分——这类积分在原点处呈现奇异行为，但不存在定义良好的梅林变换。最后，这些表示还给出了斯蒂尔切斯变换 $\int_0^a k(t)\ln^n t\left(t^\nu(\omega^2+t^2)\right)^{-1}\mathrm{d}t$ 的闭式计算结果，其以有限部分积分表示，并可据此直接提取参数 ω趋于零时的主导渐近行为。

1. Introduction

有限部分积分是一种求解收敛积分的方法：通过计算由收敛积分本身导出的发散积分的有限部分来求解[1, 2, 3]。该方法用于精确计算斯蒂尔切斯变换[2, 4, 5, 6]，

$$\mathcal{S}_f(\omega) = \int_0^a \frac{f(t)}{(\omega + t)}\,\mathrm{d}t. \tag{1.1}$$

通过将核函数表示为无穷级数，引入发散积分

$$\frac{1}{\omega + t} = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s}{t^{s+1}}\omega^s, \qquad \left|\frac{\omega}{t}\right| < 1, \tag{1.2}$$

其中展开是关于 $\omega = 0$ 的。发散源于形式地交换积分与求和的阶，而未遵循

E-mail address: eagalapon@up.edu.ph。

Date: 2026年2月20日。

在给定积分上限下该展开的一致条件。方程（1.1）的右端变为

$$\sum_{s=0}^{\infty}(-\omega)^s \int_0^a \frac{f(t)}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t. \tag{1.3}$$

如果函数 $f(t)$，或其任一导数，在 $t=0$处不为零，则求和中的积分预计会发散。简言之，方程（1.3）变成一个每一项都发散的级数。要使用方程（1.1）中的等式，可以用发散积分的有限部分，加上通过将积分延拓至复平面而恢复的缺失项，来替代这些发散积分。事实证明，缺失项包含在核函数[1]的奇点中。在此情形下所需的发散积分的有限部分，可通过将积分下限替换为某个正数 ϵ 来定义，该数 $0<\epsilon<a$ 并将该积分的解表示为

$$\int_\epsilon^a \frac{f(t)}{t^{s+1}}\,\mathrm{d}t = C_\epsilon + D_\epsilon. \tag{1.4}$$

其中 C_ϵ 收敛，而 D_ϵ 在 $\epsilon\to 0$时发散。方程（1.3）中发散积分的有限部分现在可记为并定义为 [2]

$$⨍_0^a \frac{f(t)}{t^\lambda}\mathrm{d}t = \lim_{\epsilon\to 0} C_\epsilon = \lim_{\epsilon\to 0}\left(\int_\epsilon^a \frac{f(t)}{t^\lambda}\mathrm{d}t - D_\epsilon\right). \tag{1.5}$$

在一定条件下，有限部分积分可表示为梅林变换在其解析带之外的解析延拓。方程（ λ 1.5）中参数 λ 的取值决定了这两种运算之间的关系。当 λ 为自然数时，有限部分积分的求值需要用到正则化极限的概念。在函数关于奇点的洛朗级数展开中，正则化极限对应于零阶项的系数，即常数项。

对于具有 n 阶极点的函数，计算正则化极限时采用了一个大小为 $(n+1)\times(n+1)$ 的矩阵形式。该矩阵由幂级数的代数除法得出，并在 [2], [7, 第 18 页，0.313] 中进行了详细讨论。尽管这种基于矩阵的方法严谨，但对于极点阶数较高的函数，计算会变得愈发繁琐。本文的目标之一是推导正则化极限的闭式表达式。这种表示有望为求解涉及任意阶极点的正则化极限提供一种更实用、高效的方法。

围道积分已被证明是在求值收敛积分时，与有限部分积分互为补充的一种有效方法。利用图 1 中所示的简单积分围道，方程 (1.3) 中出现的有限部分积分可以表示为围道积分 [1]:

$$⨍_0^a \frac{k(t)}{t^\lambda}\mathrm{d}t = \int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}G(z)\mathrm{d}z. \tag{1.6}$$

其中， $G(z)$由 $z=0$ 是 $z^{-\lambda}$的极点还是分支点决定。对于极点奇点，即当 $\lambda\in\mathbb{Z}_0^+$时，

$$G(z) = \frac{1}{2\pi i}(\log z - \pi i). \tag{1.7}$$

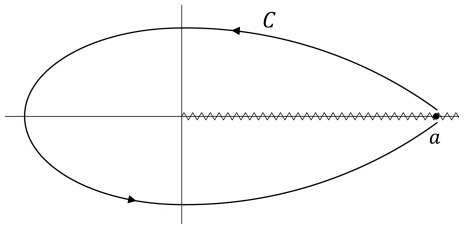

FIGURE 1. 积分围道 C。 z^λ 的支割线沿正实轴延伸。

另一方面，对于分支点，即 $\lambda \notin \mathbb{Z}$，其表达式为

$$G(z) = \frac{1}{(e^{-2\pi i\lambda} - 1)}. \tag{1.8}$$

该表达式是本文所分析的围道积分表示推导的起点。方程（1.6）的一个显著局限是未考虑对数奇点的存在。本研究的另一目标是扩展有限部分积分的围道积分表示，使其适用于具有任意阶对数奇点的被积函数。

围道积分表示利用梅林变换与有限部分积分之间的联系，将梅林变换的定义域扩展到其解析带之外。即使经过解析延拓，梅林变换也未必总能得到定义良好的结果，而有限部分积分预计能够存在，或至少其值为零。正如 [2], 所示，有限部分积分可以独立于梅林变换而存在。关键在于采用有限部分积分的围道积分表示，从而能够计算原本定义不良的表达式。

围道积分方法的另一项优势在于其在有限部分积分数值计算中的实用性。通过运用围道变形技巧，可以更灵活、更精确地确定给定积分问题的所需解。

最后，本文的最后一个目标是展示有限部分积分在计算如下形式的斯蒂尔切斯变换中的应用

$$\int_0^\infty \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2 + t^2)}\,\mathrm{d}t, \tag{1.9}$$

这类积分与欧拉–海森堡有效拉格朗日量 [8]存在潜在联系。欧拉–海森堡拉格朗日量表示对经典麦克斯韦拉格朗日量的非线性修正，并用于量子电动力学中描述外电磁场存在时的真空极化现象 [9, 10]。

本文其余部分安排如下。第2节介绍正则化极限的概念，并提出一种新表述，其中融入了整数分拆和无穷级数的倒数的思想。第3 节阐述存在任意阶对数奇点时有限部分积分的围道积分表示。本节还展示如何利用该表示计算有限部分积分的数值

，并在梅林变换框架之外证明其存在性。第4节将所发展的技术应用于求解涉及对数奇点情形下的广义斯蒂尔切斯变换。

2. The Regularized Limit

考虑一个在区域 $D \subseteq \mathbb{C}$ 上亚纯的函数 $w(\lambda)$，即它在 D 上除有限个孤立奇点外保持解析。这些奇点可以是可去奇点、本性奇点或极点。设 λ_0 是 D 的内点，并且是 $w(\lambda)$的孤立奇点。则 $w(\lambda)$ 在 λ_0 附近具有如下洛朗级数展开：

$$w(\lambda) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(\lambda - \lambda_0)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{-k}}{(\lambda - \lambda_0)^k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\lambda - \lambda_0)^k, \tag{2.1}$$

该式在去心邻域 $D' = D(r, \lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$ 内成立，其中 $D(r, \lambda_0)$ 表示半径为 r 、中心位于 λ_0 的开圆盘。方程（2.1）中的第一个和称为主部，记为 $w_P(\lambda \mid \lambda_0)$，第二个和称为正则部分，记为 $w_R(\lambda \mid \lambda_0)$。主部在 $\lambda \to \lambda_0$ 时发散。

$w(\lambda)$在奇点 λ_0 处的正则化极限定义为

$$\operatorname*{\overset{\times}{\lim}}_{\lambda \to \lambda_0} w(\lambda) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \left[w(\lambda) - w_P(\lambda \mid \lambda_0) \right]. \tag{2.2}$$

这个正则化极限提取函数在 $\lambda \to \lambda_0$ 时的有限部分和常数部分，得到

$$\operatorname*{\overset{\times}{\lim}}_{\lambda \to \lambda_0} w(\lambda) = a_0, \tag{2.3}$$

其中 a_0 是 $w(\lambda)$ 展开中的常数项，如方程（2.1）所示。我们可以用围道积分表示它：

$$\operatorname*{\overset{\times}{\lim}}_{\lambda \to \lambda_0} w(\lambda) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\lambda - \lambda_0| = \rho} \frac{w(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)} \, \mathrm{d}\lambda, \tag{2.4}$$

其中 ρ 足够小。该结果直接源自 Laurent 展开 [2]中常数系数 a_0 的积分表示。

本文所用正则化极限的一个重要性质是线性。设有复变量 λ 的函数无穷序列 $\{w_k(\lambda)\}_{k=0}^{\infty}$，每个函数在某个区域 D 内解析，除可能存在孤立奇点外。假设 λ_0 是 D 的内点，且无穷级数 $\sum_{k=0}^{\infty} w_k(\lambda)$ 在 λ_0 的某个去心邻域 $D' = D(r, \lambda_0) \setminus \{\lambda_0\}$ 内一致收敛。那么

$$\operatorname*{\overset{\times}{\lim}}_{\lambda \to \lambda_0} \sum_{k=0}^{\infty} w_k(\lambda) = \sum_{k=0}^{\infty} \operatorname*{\overset{\times}{\lim}}_{\lambda \to \lambda_0} w_k(\lambda). \tag{2.5}$$

这意味着在满足适当条件时，可以将正则化极限分配到求和中。此关系作为讨论正则化极限的定理之一，见 [2] 。证明很直接：由于所有 $w_k(\lambda$在 D'中都是解析的，方程（2.5）左侧的无穷级数可以替换围道积分表示（ $w(\lambda)$ 右侧中的2.4），并且可以逐项积分。这直接得到方程（2.5）的右侧。

考虑一点 λ_0 ，它是 $w(\lambda)$的一个 n阶极点。假设 $w(\lambda)$可以写成有理函数 $f(\lambda)/g(\lambda)$，其中 $f(\lambda_0)\neq 0$且 $g(\lambda_0)=0$，因此奇点是由分母消失引起的。在这种情形下， $w(\lambda)$在 λ_0 处的正则化极限记为

$$\overset{\times}{\lim_{\lambda\to\lambda_0}}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}. \tag{2.6}$$

计算此极限的显式公式为 [2]

$$\overset{\times}{\lim_{\lambda\to\lambda_0}}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=\left(\frac{n!}{g^{(n)}(\lambda_0)}\right)^{n+1}\det\Delta^{(n)}(\lambda_0), \tag{2.7}$$

其中 $\Delta^{(n)}(\lambda_0)$ 是一个形式如下的 $(n+1)\times(n+1)$ 矩阵

$$\Delta^{(n)}(\lambda_0)=\begin{bmatrix}\frac{g^{(n)}(\lambda_0)}{n!} & 0 & 0 & \cdots & \frac{f(\lambda_0)}{0!}\\ \frac{g^{(n+1)}(\lambda_0)}{(n+1)!} & \frac{g^{(n)}(\lambda_0)}{n!} & 0 & \cdots & \frac{f^{(1)}(\lambda_0)}{1!}\\ \frac{g^{(n+2)}(\lambda_0)}{(n+2)!} & \frac{g^{(n+1)}(\lambda_0)}{(n+1)!} & \frac{g^{(n)}(\lambda_0)}{n!} & \cdots & \frac{f^{(2)}(\lambda_0)}{2!}\\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{g^{(2n)}(\lambda_0)}{(2n)!} & \frac{g^{(2n-1)}(\lambda_0)}{(2n-1)!} & \frac{g^{(2n-2)}(\lambda_0)}{(2n-2)!} & \cdots & \frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{n!}\end{bmatrix}. \tag{2.8}$$

我们发现，方程 (2.7) 可用于生成显式公式；然而，它仍难以操作，也难以纳入更广泛的数学框架，尤其是在尝试推广有限部分积分的围道积分表示时——这正是本文的核心关注点。为解决这一局限，我们在定理 2.1中，将正则化极限表示为对指标的显式求和。

引理 2.1 (Galapon, [2])。设函数 $v(\lambda)$ 在 $\lambda=\lambda_o$ 处解析。那么，

$$\overset{\times}{\lim_{\lambda\to\lambda_o}}\frac{v(\lambda)}{(\lambda-\lambda_0)^n}=\frac{v^{(n)}(\lambda_0)}{n!}, \tag{2.9}$$

对于任意正整数 n。

引理2.2 (Salem, [11])。设函数 $y(\lambda)$ 定义为一个无穷级数的倒数，

$$y(\lambda)=\frac{1}{\sum_{\ell=0}^{\infty}a_\ell(\lambda-\lambda_0)^\ell}, \tag{2.10}$$

其中 a_ℓ 是以 λ_0 为中心的幂级数的系数，而 $a_0\neq 0$ 是 $y(\lambda)$ 在 λ_0 处的 k^{th} 阶导数，记作 S_k，其表达式为

$$S_k=\frac{k!}{a_0}\sum_{i=1}^{p(k)}J_i^{(k)}!\prod_{r=1}^{k}\frac{1}{m_{ri}!}\left(-\frac{a_r}{a_0}\right)^{m_{ri}}, \tag{2.11}$$

其中 $S_0=1/a_0$, $p\,(k)$ 是正整数 k 的分拆数，而 $J_i^{(k)}$ 由下式给出

$$J_i^{(k)}=\sum_{\ell=1}^{k}m_{\ell i}, \tag{2.12}$$

其中 $m_{\ell i}$ 为满足恒等式的整数

$$k = m_{1i} + 2m_{2i} + \cdots + km_{ki}. \tag{2.13}$$

引理 2.3 (Salem, [11]). 给定函数 $y(\lambda)$，定义为方程 (2.10) 中无穷级数的倒数，它可以表示为

$$y(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(\lambda - \lambda_0)^n, \tag{2.14}$$

其中

$$A_n = \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{p(n)} J_i^{(n)}! \prod_{r=1}^{n} \frac{1}{m_{ri}!} \left(-\frac{a_r}{a_0}\right)^{m_{ri}}, \tag{2.15}$$

且 $a_0 \neq 0$。

定理 2.1. 设 $f(\lambda)$ 在 λ_0 处解析，且 $f(\lambda_0) \neq 0$，并且 λ_0 是 $g(\lambda)$ 的 n 阶零点，则

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \to \lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} =& \frac{f^{(n)}(\lambda_o)}{g^{(n)}(\lambda_o)} + \frac{1}{g^{(n)}(\lambda_o)} \sum_{k=1}^{n} k! \binom{n}{k} f^{(n-k)}(\lambda_o) \\ & \times \sum_{i=1}^{p(k)} J_i^{(k)}! \prod_{r=1}^{k} \frac{1}{m_{ri}!} \left[-\frac{n!}{(r+n)!} \frac{g^{(r+n)}(\lambda_o)}{g^{(n)}(\lambda_o)} \right]^{m_{ri}}, \end{aligned} \tag{2.16}$$

其中 $p(k)$ 表示 $k \in \mathbb{N}$ 的分拆数，且 $J_i^{(k)}$ 与 $m_{\ell i}$ 分别由方程 (2.11)和 (2.12) 定义。

证明。 由于 $g(\lambda)$在 λ_0处有一个 n 阶零点，我们将其表示为

$$g(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n h(\lambda), \tag{2.17}$$

其中 $h(\lambda_0) \neq 0$。接着，将方程（2.16）的左端改写为

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \lim_{\lambda \to \lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{(\lambda - \lambda_0)^n h(\lambda)}. \tag{2.18}$$

应用引理2.1 计算方程（2.18），得到

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{1}{n!} \frac{d^n}{d\lambda^n} \left[\frac{f(\lambda)}{h(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_0}. \tag{2.19}$$

然后，我们利用微分的莱布尼茨法则并化简，得到

$$\lim_{\lambda \to \lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{1}{n!} \left[\frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{h(\lambda_0)} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)}(\lambda_0) \frac{d^k}{d\lambda^k} \left[\frac{1}{h(\lambda)} \right]_{\lambda = \lambda_0} \right]. \tag{2.20}$$

由方程（2.20），显然，求 $w(\lambda)$ 的正则化极限可归结为求解 n^{th} 的导数 $1/h(\lambda_o)$。我们将 $h(\lambda)$ 表示为幂级数，则其倒数为

$$\frac{1}{h(\lambda)} = \frac{1}{\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (\lambda - \lambda_0)^\ell}, \tag{2.21}$$

其中 $a_0 \neq 0$。应用引理 2.3，我们将方程（2.21）中的无穷级数的倒数表示为

$$\frac{1}{\sum_{\ell=0}^{\infty} a_\ell (\lambda-\lambda_0)^\ell} = \sum_{\ell=0}^{\infty} A_\ell (\lambda-\lambda_0)^\ell, \tag{2.22}$$

其中

$$A_\ell = \frac{1}{a_0} \sum_{i=1}^{p(\ell)} J_i^{(\ell)}! \prod_{r=1}^{\ell} \frac{1}{m_{ri}!} \left[-\frac{a_r}{a_0}\right]^{m_{ri}}. \tag{2.23}$$

将方程（2.21）的完整表达式代入方程（2.20），得到

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} =& \frac{1}{n!}\left[\frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{h(\lambda_0)} + \sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(\lambda_0)\right. \\ &\left.\times \frac{d^k}{d\lambda^k}\left[\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{(\lambda-\lambda_0)^\ell}{a_0}\sum_{i=1}^{p(\ell)} J_i^{(\ell)}! \prod_{r=1}^{\ell}\frac{1}{m_{ri}!}\left[-\frac{a_r}{a_0}\right]^{m_{ri}}\right]_{\lambda=\lambda_0}\right]. \end{aligned} \tag{2.24}$$

我们对方程（ k^{th} 中的表达式求导（2.24），并化简结果，得到（2.25）

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda\to\lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} =& \frac{1}{n!}\left[\frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{h(\lambda_0)} + \frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k} f^{(n-k)}(\lambda_0)\right. \\ &\left.\times \left[\sum_{\ell=k}^{\infty}\frac{\ell!}{(\ell-k)!}(\lambda-\lambda_0)^{\ell-k}\sum_{i=1}^{p(\ell)} J_i^{(\ell)}! \prod_{r=1}^{\ell}\frac{1}{m_{ri}!}\left[-\frac{a_r}{a_0}\right]^{m_{ri}}\right]_{\lambda=\lambda_0}\right]. \end{aligned}$$

该级数表示解析函数 $h(\lambda)$ 的倒数的收敛幂级数展开，其中 $h(\lambda_0) \neq 0$。因此，$1/h(\lambda)$ 在 λ_0 的邻域内解析，且可以逐项求导。

将方程（2.25）在 $\lambda = \lambda_0$处求值时，只有含有 $\ell = k$ 的项保留下来，表达式简化为

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o}^{\times} \frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} = \frac{1}{n!}\left[\frac{f^{(n)}(\lambda_0)}{h(\lambda_0)} + \frac{1}{a_0}\sum_{k=1}^{n} k!\binom{n}{k} f^{(n-k)}(\lambda_0)\sum_{i=1}^{p(k)} J_i^{(k)}! \prod_{r=1}^{k}\frac{1}{m_{ri}!}\left[-\frac{a_r}{a_0}\right]^{m_{ri}}\right]. \tag{2.26}$$

为进一步简化方程（2.26）并消去不必要的变量，我们将$g(\lambda)$ 在 λ_0 附近展开为

$$g(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{g^{(\ell)}(\lambda_0)}{\ell!}(\lambda-\lambda_0)^\ell. \tag{2.27}$$

通过施加 $g(\lambda)$ 在 λ_0 处有 n 阶零点这一条件，我们将级数改写为

$$g(\lambda) = \sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{g^{(\ell+n)}(\lambda_0)}{(\ell+n)!}(\lambda-\lambda_0)^{\ell+n}. \tag{2.28}$$

利用方程 (2.17) 和 (2.28)，我们将 $h(\lambda)$ 识别为

$$h(\lambda)=\sum_{\ell=0}^{\infty}\frac{g^{(\ell+n)}(\lambda_0)}{(\ell+n)!}(\lambda-\lambda_0)^{\ell}, \tag{2.29}$$

with

$$a_{\ell}=\frac{g^{(\ell+n)}(\lambda_0)}{(\ell+n)!}. \tag{2.30}$$

将方程（2.29）和（2.30）代入方程（2.26），即可直接得到方程（2.16）。□

利用 $p(k)$、 $J_i^{(k)}$ 和 m_{ri}的定义，我们也可以将方程（2.16）的第二项写成对 k 的整数分拆求和，从而得到另一种表达式：

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=&\frac{f^{(n)}(\lambda_o)}{g^{(n)}(\lambda_o)}+\frac{1}{g^{(n)}(\lambda_o)}\sum_{k=1}^{n}k!\binom{n}{k}f^{(n-k)}(\lambda_o)\\&\times\sum_{t=1}^{k}(-1)^t\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_t=k\\ r_i\in\mathbb{N}}}\prod_{p=1}^{t}\frac{n!}{(n+r_p)!}\frac{g^{(n+r_p)}(\lambda_o)}{g^{(n)}(\lambda_o)}.\end{aligned} \tag{2.31}$$

利用定理 2.1，可以得到以下推论。

推论 2.1。设 $f(\lambda)$在 λ_0处解析，且满足 $f(\lambda_0)\neq 0$，并且 λ_0是 $g(\lambda)$的单零点，则

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=\frac{f'(\lambda_o)}{g'(\lambda_o)}-\frac{f(\lambda_o)g''(\lambda_o)}{2g'(\lambda_o)^2}. \tag{2.32}$$

推论 2.2。设 $f(\lambda)$ 在 λ_0 处解析，且满足 $f(\lambda_0)\neq 0$，并且 λ_0 是 $g(\lambda)$的二重零点，则

$$\lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=\frac{f''(\lambda_o)}{g''(\lambda_o)}-\frac{2f'(\lambda_o)g^{(3)}(\lambda_o)}{3g''(\lambda_o)^2}+f(\lambda_o)\left(\frac{2g^{(3)}(\lambda_o)^2}{9g''(\lambda_o)^3}-\frac{g^{(4)}(\lambda_o)}{6g''(\lambda_o)^2}\right). \tag{2.33}$$

推论 2.3. 设 $f(\lambda)$在 λ_0 处解析，且 $f(\lambda_0)\neq 0$，并且 λ_0 是 $g(\lambda)$ 的三阶零点，则

$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_o}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)}=&\frac{f^{(3)}(\lambda_o)}{g^{(3)}(\lambda_o)}-\frac{3f''(\lambda_o)g^{(4)}(\lambda_o)}{4g^{(3)}(\lambda_o)^2}+f'(\lambda_o)\left(\frac{3g^{(4)}(\lambda_o)^2}{8g^{(3)}(\lambda_o)^3}-\frac{3g^{(5)}(\lambda_o)}{10g^{(3)}(\lambda_o)^2}\right)\\&+f(\lambda_o)\left(-\frac{g^{(6)}(\lambda_o)}{20g^{(3)}(\lambda_o)^2}-\frac{3g^{(4)}(\lambda_o)^3}{32g^{(3)}(\lambda_o)^4}+\frac{3g^{(5)}(\lambda_o)g^{(4)}(\lambda_o)}{20g^{(3)}(\lambda_o)^3}\right).\end{aligned} \tag{2.34}$$

推论 2.4. 设 $f(\lambda)$ 在 λ_0 处解析，且 $f(\lambda_0)\neq 0$，并且 λ_0 是 $g(\lambda)$ 的四阶零点，则

(2.35)
$$\begin{aligned}\lim_{\lambda\to\lambda_o}{}^{\times}\frac{f(\lambda)}{g(\lambda)} &= \frac{f^{(4)}(\lambda_o)}{g^{(4)}(\lambda_o)} - \frac{4f^{(3)}(\lambda_o)g^{(5)}(\lambda_o)}{5g^{(4)}(\lambda_o)^2} + f''(\lambda_o)\left(\frac{12g^{(5)}(\lambda_o)^2}{25g^{(4)}(\lambda_o)^3} - \frac{2g^{(6)}(\lambda_o)}{5g^{(4)}(\lambda_o)^2}\right)\\ &\quad + f'(\lambda_o)\left(-\frac{4g^{(7)}(\lambda_o)}{35g^{(4)}(\lambda_o)^2} - \frac{24g^{(5)}(\lambda_o)^3}{125g^{(4)}(\lambda_o)^4} + \frac{8g^{(6)}(\lambda_o)g^{(5)}(\lambda_o)}{25g^{(4)}(\lambda_o)^3}\right)\\ &\quad + f(\lambda_o)\left(-\frac{g^{(8)}(\lambda_o)}{70g^{(4)}(\lambda_o)^2} + \frac{2g^{(6)}(\lambda_o)^2}{75g^{(4)}(\lambda_o)^3} + \frac{24g^{(5)}(\lambda_o)^4}{625g^{(4)}(\lambda_o)^5}\right.\\ &\quad \left. + \frac{8g^{(7)}(\lambda_o)g^{(5)}(\lambda_o)}{175g^{(4)}(\lambda_o)^3} - \frac{12g^{(6)}(\lambda_o)g^{(5)}(\lambda_o)^2}{125g^{(4)}(\lambda_o)^4}\right).\end{aligned}$$

3. Contour Integral Representations of Finite-part Integrals with logarithmic Singularities

文献 [2] 指出，合适的围道积分表示是计算有限部分积分的有效方法。特别是，在不存在对数奇点的情况下，可利用该表示计算梅林型发散积分的有限部分。其表示形式为

$$\text{(3.1)}\qquad \text{⨍}_0^a \frac{k(t)}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(e^{-2\pi i\lambda}-1)}\int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z,$$

其中围道 C如图2所示，跨越 $z^{-\lambda}$ 的支割线，并以点 a为起点和终点。该围道既不包围任何极点，也不穿过 $k(z)$的任何支割线。方程（3.1）适用于半平面 $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 1$ 中的所有非整数值，并作为本节的出发点。

我们可以利用有限部分积分与梅林变换之间的关系，将这一结果扩展到包含对数奇点的情形；该关系已在 [2]中确立：

$$\text{(3.2)}\qquad \text{⨍}_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\mathrm{d}t = \begin{cases}\displaystyle\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\mathrm{d}t, & d<\mathrm{Re}(\lambda)<1,\\ \mathrm{AC}\displaystyle\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\mathrm{d}t, & \mathrm{Re}(\lambda)\geq 1,\ \lambda\notin\mathbb{Z},\\ \displaystyle\lim_{\lambda\to\mathfrak{b}}{}^{\times}\mathrm{AC}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\mathrm{d}t, & \mathrm{Re}(\lambda)\geq 1,\ \lambda\in\mathbb{N}.\end{cases}$$

这里，若 $a<\infty$，则 $d=-\infty$。反之，若 $a=\infty$，则 d 可能是有限值，也可能等于负无穷，这取决于当 $t\to\infty$时 $k(t)$的表现。符号 AC 表示解析延拓。函数 $k(t)$满足以下条件：$k(0)\neq 0$；它存在一个复扩张 $k(z)$，该扩张在区间 $[0,a)$内解析；并且它具有梅林变换。本节采用相同的条件，但最后一项除外。事实上，我们证明，即使 $k(t)$的梅林变换不存在，仍然可以确定其有限部分积分。下一节将通过例子对此作详细讨论。

方程（3.2）根据 λ的取值概述了三种情形，每种情形都规定了有限部分积分与梅林变换之间的特定联系。梅林变换 $\int_0^a t^{-\lambda}k(t)\ln^n t\,\mathrm{d}t$ 在 $\mathrm{Re}(\lambda)<1$ 的解析带内存在，其中 a 为有限值或

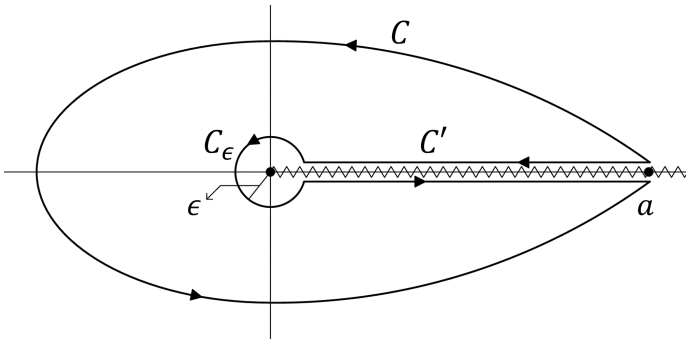

FIGURE 2. 围道 C 变形为围道 C'。该积分围道在建立具有对数奇点的有限部分积分的围道积分表示时起着关键作用。它不包围任何极点，也不穿过 $k(z)$的任何支割线。 z^λ 的支割线沿正实轴延伸。

在带 $d < \mathrm{Re}(\lambda) < 1$ 内，对于 $a = \infty$。如果我们在此解析带内应用有限部分积分 $\text{⨍}_0^a t^{-\lambda} k(t) \ln^n t \, \mathrm{d}t$ 的定义，则发散部分 (D_ϵ) 为零。这意味着，当 $d < \mathrm{Re}(\lambda) < 1$ 时，有限部分积分与梅林变换一致。对于非整数 $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$，有限部分积分对应于梅林变换的解析延拓。最后，对于整数 $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$，有限部分积分等于解析延拓在 $\lambda \to \mathfrak{b}$ 时的正则化极限，其中 $\mathfrak{b} \in \mathbb{N}$。

方程（3.1）中给出的有限部分积分可表示为 [2]

$$\text{⨍}_0^a \frac{k(t)}{t^\lambda} \mathrm{d}t = \int_\epsilon^a \frac{k(t)}{t^\lambda} \mathrm{d}t + \sum_{l=0}^{\infty} a_l \frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{l-\lambda+1} \tag{3.3}$$

在 $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$， $\lambda \notin \mathbb{Z}$ 对于 $\epsilon < \rho_o$， a 其中 ρ_o 是距离原点最近的 $k(z)$奇点的距离。在这些条件下， $k(t)$的复扩张$k(z)$可表示为幂级数 $k(z) = \sum_{l=0}^{\infty} a_l z^l$。为将其推广至涉及对数奇点的情形，我们引入恒等式 [2]

$$\text{⨍}_0^a \frac{k(t) \ln^n t}{t^\lambda} \mathrm{d}t = (-1)^n \frac{d^n}{d\lambda^n} \text{⨍}_0^a \frac{k(t)}{t^\lambda} \mathrm{d}t, \tag{3.4}$$

该恒等式对任意正整数 n均成立。右端积分允许在积分号下进行任意阶微分；对于相应的无穷级数，在以下假设成立时，也允许在相同范围内逐项求导： $k(t)$在 $[\epsilon, a]$ 上连续，且 $0 < \epsilon < a$，积分对 λ的取值收敛，并且左端存在。本文根据 λ 是整数还是非整数，将围道积分表示分为两类。

在继续之前，我们先澄清以下各节中所用复对数的定义。我们将复对数定义为 $\ln z$ =ln $|z| + i$辐角 z，其中辐角满足 $0 \leq$辐角 $z < 2\pi$。沿正实轴上侧，它与实自然对数 $\ln t$ 一致。在

另一方面，复主值对数定义为 $\mathrm{Log}\ z = \ln|z| + i$辐角 z，其中 $-\pi <$ 辐角 $z \leq \pi$。

3.1. **非整数 λ 的围道积分表示。**

定理 3.1. 设 $k(z)$ 在区间 $[0,a]$ 上解析。则对于半平面 $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$ 内的所有非整数 λ， $\oint_0^a t^{-\lambda}k(t)\ln^n t\,\mathrm{d}t$ 的围道积分表示为

$$\oint_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\,\beta_j(\lambda)\int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\ln^j z\mathrm{d}z, \tag{3.5}$$

而 $\beta_j(\lambda)$ 表示为

$$\beta_j(\lambda) = \sum_{l=0}^{n-j}(-1)^l\, l!\,\mathbf{S}_l^{n-j}\,\frac{e^{-2\pi i\lambda l}}{(e^{-2\pi i\lambda}-1)^{l+1}} \tag{3.6}$$

其中 n 是任意正整数，$\mathbf{S}_l^{n-j}$ 是第二类斯特林数。

证明。 为证明此定理，从方程 (3.1) 给出的初始条件出发，其中没有对数奇点。将方程 (3.4) 与 $n=1$应用于方程 (3.1)，推导出 $\oint_0^a t^{-\lambda}k(t)\ln t\mathrm{d}t$ 的围道积分表示，即

$$\oint_0^a \frac{k(t)\ln t}{t^\lambda}\mathrm{d}t = \int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\left[\frac{\ln z}{(e^{-2i\pi\lambda}-1)} - \frac{2i\pi e^{-2i\pi\lambda}}{(e^{-2i\pi\lambda}-1)^2}\right]\mathrm{d}z. \tag{3.7}$$

反复将方程 (3.4) 应用于方程 (3.1)，即可得到所需的 $\oint_0^a t^{-\lambda}k(t)\ln^n t\mathrm{d}t$ 的围道积分表示。当 $n=2$ 时，情形表示为

$$\oint_0^a \frac{k(t)\ln^2 t}{t^\lambda}\mathrm{d}t = \int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\left[\frac{\ln^2 z}{(e^{-2i\pi\lambda}-1)} - \frac{4i\pi e^{-2i\pi\lambda}\ln z}{(e^{-2i\pi\lambda}-1)^2} - \frac{4\pi^2 e^{-2i\pi\lambda}\left(e^{-2i\pi\lambda}+1\right)}{\left(e^{-2i\pi\lambda}-1\right)^3}\right]\mathrm{d}z, \tag{3.8}$$

我们可以用上文所述的同一方法得到围道积分表示的其他情形。

观察方程（3.7）、（3.8）以及其他更高阶 n的情形，我们可以得出 $\oint_0^\infty t^{-\lambda}k$（$t$）$\ln^n t\mathrm{d}t$ 的围道积分表示满足如下关系

$$\oint_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t = \sum_{l=0}^{n}\frac{1}{\left(e^{-2\pi i\lambda}-1\right)^{l+1}}\int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\,G_l^n(z)\,\mathrm{d}z \tag{3.9}$$

其中函数 $G_l^n(z)$有待确定。

令 $n=0$ 代入方程（3.9），并将其与方程（3.1）比较，则初始条件由下式给出

$$G_0^0(z) = 1. \tag{3.10}$$

首先，为求解 $G_l^n(z)$，考虑以下围道积分：

$$\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z, \tag{3.11}$$

其中围道 C 与图 2所示相同。将积分围道从 C 变形为 C'，如图 2所示，即可得到等式 3.12

$$\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z = \int_a^\epsilon \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t + \int_\epsilon^a \frac{k(t)(\ln t + 2\pi i)^n}{t^\lambda e^{2\pi\lambda i}}\,\mathrm{d}t + \int_{C_\epsilon} \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z. \tag{}$$

对第二项应用二项式定理，方程（3.12）变为（3.13）

$$\begin{aligned}\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z = (e^{-2\pi\lambda i}-1)\int_\epsilon^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \\ + e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\int_\epsilon^a \frac{k(t)\ln^j t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t + \int_{C_\epsilon}\frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

沿 C_ϵ 的积分在 $\epsilon \to 0$ 时趋于零，其中 $\mathrm{Re}(\lambda) < 1$；而当 $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$时则发散。为进一步说明这一点，考虑 $n = 0$时方程（3.13）的第三项。对于足够小的 ϵ， $k(z$在包含原点附近C_ϵ 的区域内仍为解析函数。于是，我们可以使用函数$k(z) = \sum_{l=0}^\infty a_l z^l$ 的幂级数展开，并代入参数化 $z = \epsilon e^{i\theta}$，其中 $0 \leq \theta \leq 2\pi$，得到

$$\int_{C_\epsilon}\frac{k(z)}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z = \int_{C_\epsilon}\sum_{l=0}^\infty a_l z^{l-\lambda}\,\mathrm{d}z = i\sum_{l=0}^\infty a_l \epsilon^{l-\lambda+1}\int_0^{2\pi} e^{i(l-\lambda+1)\theta}\,\mathrm{d}\theta, \tag{3.14}$$

并逐项积分。计算方程（3.14）中的积分，得到

$$\int_{C_\epsilon}\frac{k(z)}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z = -(e^{-2\pi\lambda i}-1)\sum_{l=0}^\infty a_l \frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}. \tag{3.15}$$

令 $\lambda = \lambda_R + i\lambda_I$。当 $\mathrm{Re}(\lambda) < 1$时，方程（3.15）在 $\epsilon \to 0$时趋于零。对于另一种情形，当 $\mathrm{Re}(\lambda) \geq 1$时，方程（3.15）可表示为

$$\int_{C_\epsilon}\frac{k(z)}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z = -(e^{-2\pi\lambda i}-1)\left[\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor} a_l\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1} + \sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^\infty a_l\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right]. \tag{3.16}$$

当 $\epsilon \to 0$ 时，方程（3.16）的第二项消失，而第一项发散。

由 [2]，可知，方程（3.16）表示从发散积分中减去的发散部分，以便得到有限部分。因此，有限部分积分由（

3.17)

$$⨍_0^a \frac{k(t)}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{e^{-2\pi i\lambda}-1}\int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z = \lim_{\epsilon\to 0}\left[\int_\epsilon^a \frac{k(t)}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t - \sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor} a_l\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right],$$

其中系数 a_l 是 $k(t$在原点附近的局部展开中的各项。左端的存在意味着该极限存在。

我们可以用同样的方法求解 C_ϵ 附近关于 $n=1$的积分。由此得到如下表示：

(3.18)
$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon}\frac{k(z)\ln z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z=-(e^{-2\pi i\lambda}-1)\Bigg[&\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor}a_l\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}\ln\epsilon}{\lambda-l-1}+\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{(\lambda-l-1)^2}\right)\\&+\sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^{\infty}a_l\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}\ln\epsilon}{\lambda-l-1}+\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{(\lambda-l-1)^2}\right)\Bigg]\\-2\pi ie^{-2\pi i\lambda}\Bigg[&\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor}a_l\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}+\sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^{\infty}a_l\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\Bigg].\end{aligned}$$

方程 (3.18) 表示积分 $\int_\epsilon^a t^{-\lambda}k(t)\ln t\mathrm{d}t$ 在极限 $\epsilon\to 0$下，当 $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 1$时的发散部分。事实上，我们可以将沿 C_ϵ 的积分表达式推广到任意阶 n，如下所示：

(3.19)
$$\begin{aligned}\int_{C_\epsilon}\frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z=-(e^{-2\pi i\lambda}-1)\Bigg[&\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor}a_l(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\\&+\sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^{\infty}a_l(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\Bigg]\\-e^{-2\pi i\lambda}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\Bigg[&\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor}a_l(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\lambda^j}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\\&+\sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^{\infty}a_l(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\lambda^j}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

这是方程 (3.4) 中所述关系和条件的直接推论。将方程 (3.19) 代入方程 (3.13)，得到

(3.20)
$$\begin{aligned}\int_{C}\frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z=(e^{-2\pi\lambda i}-1)\Bigg[&\int_\epsilon^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t-\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor}a_l(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\\&-\sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^{\infty}a_l(-1)^n\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\lambda^n}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\Bigg]\\+e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\Bigg[&\int_\epsilon^a\frac{k(t)\ln^j t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t-\sum_{l=0}^{\lfloor\lambda_R-1\rfloor}a_l(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\lambda^j}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\\&-\sum_{l=\lfloor\lambda_R-1\rfloor+1}^{\infty}a_l(-1)^j\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\lambda^j}\left(\frac{\epsilon^{l-\lambda+1}}{\lambda-l-1}\right)\Bigg].\end{aligned}$$

括号内的各项表示在极限 $\epsilon\to 0$ 下，积分 $\int_\epsilon^a t^{-\lambda}k(t)\ln^j t\,\mathrm{d}t$ 的有限部分，适用于 $\mathrm{Re}(\lambda)\geq 1$；然而，当 $\mathrm{Re}(\lambda)<1$ 时，该积分收敛

且求和为零。由于我们可以取较小的 ϵ 值而不破坏等式，方程 (3.13) 给出两种最终形式:

$$\begin{aligned}\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z &= (e^{-2\pi\lambda i}-1)\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &\quad + e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\int_0^a \frac{k(t)\ln^j t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t, \quad \text{for } \mathrm{Re}(\lambda)<1,\end{aligned} \tag{3.21}$$

and

$$\begin{aligned}\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z &= (e^{-2\pi\lambda i}-1)⨍_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t \\ &\quad + e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}⨍_0^a \frac{k(t)\ln^j t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t, \quad \text{for } \mathrm{Re}(\lambda)\geq 1.\end{aligned} \tag{3.22}$$

我们可以将方程（3.9）代入方程（3.21）和（3.22）的第二项中，但要根据方程（3.2）中的关系，在不同的情形下进行处理，随后将有限部分积分表示为围道积分。

完成代换、恰当地交换求和顺序，并调整指标以符合方程（3.9），我们得到如下形式

$$\begin{aligned}⨍_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\lambda}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{e^{-2\pi\lambda i}-1}\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\lambda}\,\mathrm{d}z \\ &\quad - \sum_{l=1}^{n}\frac{1}{(e^{-2\pi\lambda i}-1)^{l+1}}\int_C \frac{k(z)}{z^\lambda}\left[e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=l-1}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}G_{l-1}^j(z)\right]\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{3.23}$$

通过比较方程（3.9）和方程（3.23），我们发现函数G_l^n（z）满足递推关系

$$G_l^n(z) = -e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=l-1}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}G_{l-1}^j(z), \quad l=1,\ldots,n, \tag{3.24}$$

with

$$G_0^n(z) = \ln^n z. \tag{3.25}$$

利用递推关系，我们计算 $G_1^n(z)$，得到

$$G_1^n(z) = -e^{-2\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\ln^j z, \quad n=1,2,\ldots \tag{3.26}$$

为推导 $G_2^n(z)$，我们首先将其表示为 $G_1^n(z)$ 的形式。由于 $G_1^n(z)$ 可以用 $G_0^n(z)$ 表示，因此所得表达式包含一个双重求和:

$$\begin{aligned}G_2^n(z) &= e^{-4\pi\lambda i}\sum_{j_1=1}^{n-1}\binom{n}{j_1}(2\pi i)^{n-j_1}\sum_{j_2=0}^{j_1-1}\binom{j_1}{j_2}(2\pi i)^{j_1-j_2}\ln^{j_2} z \\ &= e^{-4\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-2}\left[\sum_{j_1=0}^{n-j-2}\binom{n}{j_1+j+1}\binom{j_1+j+1}{j}\right](2\pi i)^{n-j}\ln^j z\end{aligned} \tag{3.27}$$

$$= e^{-4\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-2}\left[\binom{n}{j}\sum_{j_1=0}^{n-j-2}\frac{(n-j)!}{(n-j-j_1-1)!\,(j_1+1)!}\right](2\pi i)^{n-j}\ln^j z$$

$$= e^{-4\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-2}\left[\binom{n}{j}\sum_{\substack{r_1+r_2=n-j\\ r_i\in\mathbb{N}}}\frac{(n-j)!}{r_1!r_2!}\right](2\pi i)^{n-j}\ln^j z$$

内和与第二类斯特林数的广义幂级数表示成正比，该表示由 [12] 给出

$$\mathbf{S}_m^n = \frac{n!}{m!}\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_m=n\\ r_i\in\mathbb{N}}}\frac{1}{\prod_{j=1}^m r_j!}. \tag{3.28}$$

将方程（3.28）代入方程（3.27），得到

$$G_2^n(z) = e^{-4\pi\lambda i}\sum_{j=0}^{n-2} 2!\,\mathbf{S}_2^{n-j}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\ln^j z. \tag{3.29}$$

现在，我们将这一结果推广到任意 l。反复使用递推关系，得到

$$G_l^n(z) = \left(-e^{-2\pi i\lambda}\right)^l\sum_{j_1=l-1}^{n-1}\binom{n}{j_1}\prod_{p=1}^{l-1}\sum_{j_{p+1}=l-p-1}^{j_p-1}\binom{j_p}{j_{p+1}}(2\pi i)^{n-j_l}\ln^{j_l} z \tag{3.30}$$

$$= \left(-e^{-2\pi i\lambda}\right)^l\sum_{j=0}^{n-l}\left[\binom{n}{j}\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_l=n-j\\ r_i\in\mathbb{N}}}\frac{(n-j)!}{\prod_{t=1}^l r_t!}\right](2\pi i)^{n-j}\ln^j z$$

最后，根据第二类斯特林数的定义，将$G_l^n(z)$表示为

$$G_l^n(z) = \left(-e^{-2\pi i\lambda}\right)^l\sum_{j=0}^{n-l} l!\,\mathbf{S}_l^{n-j}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\ln^j z, \tag{3.31}$$

其中$\mathbf{S}_l^{n-j}$ 表示第二类斯特林数。

我们将方程（3.31）代入方程（3.9），并交换求和次序、对指标作相应调整，从而得到方程（3.5）所示的最终闭式表达式。□

将方程（3.5）与方程（3.4）和（3.1）进行比较，并化简各项，可得以下定理。

定理 3.2. 设

$$f(\lambda) = \frac{1}{(e^{-2\pi i\lambda}-1)\,z^\lambda}, \qquad \lambda\in\mathbb{R}_{>0}\setminus\mathbb{Z},\ \ z\in\mathbb{C}\setminus\{0\},\ \ 0<\operatorname{Arg} z\le 2\pi. \tag{3.32}$$

那么，其导数满足以下关系

$$f^{(n)}(\lambda) = (-1)^n\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\ln^j z\sum_{l=0}^{n-j} l!\,\mathbf{S}_l^{n-j}\,\frac{1}{(e^{2\pi i\lambda}-1)^l}\,f(\lambda). \tag{3.33}$$

3.2. **整数 λ 的围道积分表示。**

引理 3.1. 对于所有 $n \in \mathbb{N}$ 和 $q \in \mathbb{N}_0$,

$$\sum_{l=1}^{n}(-1)^{l-1}(q+l)!\sum_{k=0}^{l-1}\frac{B_k^{(q+l+1)}}{k!}\frac{(q+l)^{l-k-1}}{(l-k-1)!}\mathbf{S}_{q+l}^{q+n} = (q+1)!\,\delta_{n,1}, \tag{3.34}$$

其中，$\mathbf{S}_{q+l}^{q+n}$ 表示第二类斯特林数，$B_k^{(q+l+1)}$ 表示 $q+l+1$ 阶伯努利数。

证明。 高阶伯努利数通常由其指数生成函数 [13]定义：

$$\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(m)}\,\frac{z^n}{n!}. \tag{3.35}$$

它们还通过以下恒等式与第一类斯特林数 $\mathbf{s}_{n-k}^n$ 和第二类斯特林数$\mathbf{S}_n^{k+n}$相关：

$$\mathbf{s}_{n-k}^n = \binom{n-1}{k}B_k^n, \tag{3.36}$$

$$\mathbf{S}_n^{k+n} = \binom{k+n}{k}B_k^{(-n)}. \tag{3.37}$$

为证明方程（3.34）中给出的表达式，我们使用以下高阶伯努利多项式以及第一类和第二类斯特林数的性质 [14, 15, 16], [17, 26.8.39]:

$$B_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k^{(m)}x^{n-k}, \tag{3.38}$$

$$B_n^{(k+1)}(x) = \left(1-\frac{n}{k}\right)B_n^{(k)}(x) + (x-k)\frac{n}{k}B_{n-1}^{(k)}(x), \tag{3.39}$$

$$B_n^{(k)}(k-a) = (-1)^n B_n^{(k)}(a), \tag{3.40}$$

$$\sum_{l=j}^{k}\mathbf{s}_j^l\mathbf{S}_l^k = \delta_{j,k}. \tag{3.41}$$

考虑方程（3.34）中外层求和的被加数，不包括斯特林数 $\mathbf{S}_{q+l}^{q+n}$。利用方程（3.38），将其改写为

$$(-1)^{l-1}(q+1)!\binom{q+l}{l-1}B_{l-1}^{(q+l+1)}(q+l). \tag{3.42}$$

将关系式（3.39）和反射公式（3.40）应用于方程（3.42）可得

$$\begin{aligned}(-1)^{l-1}(q+1)!\binom{q+l-1}{l-1}B_{l-1}^{(q+l)}(q+l) &= (q+1)!\binom{q+l-1}{l-1}B_{l-1}^{(q+l)}\\ &= (q+1)!\,\mathbf{s}_{q+1}^{q+l},\end{aligned} \tag{3.43}$$

其中我们使用了方程（3.36）于最后一步。将此表达式代回方程（3.34），调整求和指标，并应用方程（3.41），

我们得到

$$(q+l)!\sum_{l=q+1}^{q+n}\mathbf{s}_{q+1}^{l}\mathbf{S}_{l}^{q+n}=(q+1)!\,\delta_{n,1}. \tag{3.44}$$

证明至此完成。 □

引理3.2。对于 $l\in\mathbb{N}$,

$$b_{l+1}=(-1)^{l+1}\sum_{k=0}^{l+1}\frac{B_k^{(l+1)}}{k!}\frac{l^{\,l+1-k}}{(l+1-k)!}, \tag{3.45}$$

其中， b_{l+1} 表示第二类伯努利数， $b_0=1$、 $b_1=1/2$和$B_k^{(l+1)}$ 表示$(l+1)$阶伯努利数。

证明。第二类伯努利数 b_k 由生成函数 [17, 24.16。5]

$$\frac{t}{\ln(1+t)}=\sum_{k=0}^{\infty}b_k\,t^k. \tag{3.46}$$

我们使用以下性质 [15], [17, 24.16.6]:

$$B_n^{(k)}(z+1)-B_n^{(k)}(z)=nB_{n-1}^{(k-1)}(z), \tag{3.47}$$

$$B_{l+k}^{(l)}\left(z+\frac{l}{2}\right)=(-1)^{l+k}B_{l+k}^{(l)}\left(-z+\frac{l}{2}\right), \tag{3.48}$$

$$B_n^{(n-k)}=\frac{k-n}{k}B_n^{(n-k+1)}+\frac{(k-n)n}{k}B_{n-1}^{(n-k)}, \tag{3.49}$$

$$b_{l+1}=-\frac{B_{l+1}^{(l)}}{(l+1)!\,l},\quad b_0=1,\quad b_1=\frac{1}{2}, \tag{3.50}$$

利用方程（3.38）和（3.47）至（3.50），将方程（3.45）的右端改写为

$$\begin{aligned}\mathrm{RHS}&=\frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}\sum_{k=0}^{l+1}\binom{l+1}{k}B_k^{(l+1)}l^{\,l+1-k}=\frac{(-1)^{l+1}}{(l+1)!}B_{l+1}^{(l+1)}(l)\\&=\frac{1}{(l+1)!}\left(B_{l+1}^{(l+1)}+(l+1)B_l^{(l)}\right)=-\frac{B_{l+1}^{(l)}}{(l+1)!\,l}=b_{l+1}.\end{aligned} \tag{3.51}$$

这就证明了该引理。 □

引理 3.3. 对于所有 $m\in\mathbb{N}$,

$$\frac{B_{m+1}}{m+1}=\sum_{l=1}^{m}(-1)^l l!\,\mathbf{S}_l^m\sum_{k=0}^{l+1}\frac{B_k^{(l+1)}}{k!}\frac{l^{\,l+1-k}}{(l+1-k)!}, \tag{3.52}$$

其中， B_{m+1} 是伯努利数， $B_k^{(l+1)}$ 是（l+1）阶伯努利数，而$\mathbf{S}_l^m$表示第二类斯特林数。

证明。 利用引理 3.2，方程（3.52）的右侧化简为

$$\mathrm{RHS}=-\sum_{l=1}^{m}l!\,\mathbf{S}_l^m b_{l+1}. \tag{3.53}$$

方程（3.53）的计算结果为 $B_{m+1}/m+1$，如 [18] 所示。 □

定理 3.3。 设 $k(z)$ 在区间 $[0,a]$ 内解析。那么，对于所有正整数 $\mathfrak{b}$， $⨍_0^a t^{-\mathfrak{b}}k(t)\ln{}^n t\,\mathrm{d}t$ 的围道积分表示为

$$⨍_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\mathfrak{b}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i\,(n+1)}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n+1} z\,\mathrm{d}z + \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\,\frac{B_{n-j+1}}{n-j+1}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^j z\,\mathrm{d}z, \tag{3.54}$$

其中， B_{n-j+1} 为伯努利数，n 为任意正整数。

证明。 我们可以通过对自然数 λ应用方程（3.2）中的恒等式来证明此定理。有限部分积分等于梅林变换解析延拓的正则化极限。在求解方程（3.5）的正则化极限时，记为

$$\operatorname*{\times\lim}_{\lambda\to\mathfrak{b}}\left[⨍_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\lambda}}\,\mathrm{d}t\right] = \operatorname*{\times\lim}_{\lambda\to\mathfrak{b}}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\sum_{l=0}^{n-j}(-1)^l\,l!\,\mathbf{S}_l^{n-j} \times\frac{e^{-2\pi i\lambda l}}{(e^{-2\pi i\lambda}-1)^{l+1}}\int_C \frac{k(z)}{z^{\lambda}}\ln^j z\,\mathrm{d}z\right], \tag{3.55}$$

我们着重考察右侧内项的正则化极限，它等于

$$\operatorname*{\times\lim}_{\lambda\to\mathfrak{b}}\frac{e^{-2\pi i\lambda l}}{(e^{-2\pi i\lambda l}-1)^{l+1}}\int_C \frac{k(z)}{z^{\lambda}}\ln^j z\,\mathrm{d}z, \qquad \mathfrak{b}\in\mathbb{N}. \tag{3.56}$$

我们通过利用正则化极限 [2]的线性来证明这一步。

定义函数

$$f(\lambda) = e^{-2\pi i\lambda l}\int_C \frac{k(z)}{z^{\lambda}}\ln^j z\,\mathrm{d}z, \qquad g(\lambda) = \left(e^{-2\pi i\lambda l}-1\right)^{l+1}. \tag{3.57}$$

根据方程（2.16），我们需要计算以下导数：

$$f^{(l+1)}(\mathfrak{b}), \quad f^{(l+1-k)}(\mathfrak{b}), \quad g^{(l+1)}(\mathfrak{b}), \quad \text{and} \quad g^{(r+l+1)}(\mathfrak{b}). \tag{3.58}$$

我们要求被积函数关于 $z\in\mathbb{C}$ 是解析的、关于参数 λ 平滑变化，并且围道 C 的选取应适当避开奇点。在这些条件下，可以在积分号下求导。

为对 $f(\lambda)$ 求导，我们应用莱布尼茨法则：

$$f^{(l+1)}(\mathfrak{b}) = \frac{d^{l+1}}{d\lambda^{l+1}}\left[e^{-2\pi i\lambda l}\int_C \frac{k(z)}{z^{\lambda}}\ln^j z\,\mathrm{d}z\right]_{\lambda=\mathfrak{b}} = (-1)^{l+1}\sum_{q=0}^{l+1}\binom{l+1}{q}(2\pi i)^{l+1-q}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{j+q} z\,\mathrm{d}z. \tag{3.59}$$

我们按照相同的步骤求出 $f^{(l+1-k)}(\mathfrak{b})$：

$$f^{(l+1-k)}(\mathfrak{b}) = (-1)^{l+1-k}\sum_{q=0}^{l+1-k}\binom{l+1-k}{q}(2\pi i)^{l+1-k-q}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{j+q} z\,\mathrm{d}z. \tag{3.60}$$

接下来，我们计算 $g(\lambda)$ 的导数。对于 $g^{(l+1)}(\mathfrak{b})$，我们将表达式进行二项式展开，并逐项求导：

$$g^{(l+1)}(\mathfrak{b}) = \frac{d^{l+1}}{d\lambda^{l+1}}\left[\left(e^{-2\pi i\lambda l}-1\right)^{l+1}\right]_{\lambda=\mathfrak{b}} = (-2\pi i)^{l+1}(l+1)!. \tag{3.61}$$

这里我们使用了第二类斯特林数的级数表示[17, 26.8.6]:

$$\mathbf{S}_k^n = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n. \tag{3.62}$$

应用相同的方法，我们得到：

$$g^{(r+l+1)}(\mathfrak{b}) = (-2\pi i)^{r+l+1}\sum_{t=0}^{l+1}\binom{l+1}{t}(-1)^t(l+1-t)^{r+l+1} = (-2\pi i)^{r+l+1}(l+1)!\,\mathbf{S}_{l+1}^{r+l+1}. \tag{3.63}$$

将方程（3.59）、（3.60）、（3.61）和（3.63）代入方程（2.16），并利用所得结果计算方程（3.55），得到

$$\begin{aligned}\text{⨍}_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\mathfrak{b}}}\,\mathrm{d}t = {}& \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n+1} z\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^n z\,\mathrm{d}z \\ &+ \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\sum_{l=1}^{n-j}(-1)^l\,l!\,\mathbf{S}_l^{n-j}\sum_{k=0}^{l+1}\frac{B_k^{(l+1)}}{k!} \\ &\times \sum_{q=0}^{l+1-k}\frac{l^{l-q-k+1}}{q!\,(l-q-k+1)!}\frac{1}{(2\pi i)^q}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{j+q} z\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{3.64}$$

我们定义 $B_0^{(l)}=1$，并将 $B_k^{(l+1)}$ 表示为

$$B_k^{(l+1)} = \frac{k!}{(-2\pi i)^k}\sum_{i=1}^{p(k)}J_i^{(k)}!\prod_{r=1}^{k}\frac{1}{m_{ri}!}\left[-\frac{(-2\pi i)^r(l+1)!}{(r+l+1)!}\mathbf{S}_{l+1}^{r+l+1}\right]^{m_{ri}}. \tag{3.65}$$

利用方程中给出的正则化极限的另一种表达式（2.31），并使用 $J_i^{(k)}$ 和 m_{ri}的定义，我们将方程（3.65）改写为

$$B_k^{(l+1)} = \sum_{t=1}^{k}(-1)^t\sum_{\substack{r_1+\cdots+r_t=k\\ r_i\in\mathbb{N}}}\frac{\binom{k}{r_1,\ldots,r_t}}{\binom{r_1+l+1}{l+1}\cdots\binom{r_t+l+1}{l+1}}\mathbf{S}_{l+1}^{r_1+l+1}\cdots\mathbf{S}_{l+1}^{r_t+l+1}. \tag{3.66}$$

伯努利数 $B_k^{(l+1)}$，其阶为（$l+1$），如（3.66）所示，与 [14]中的形式相同。

我们将方程（3.64）中的情形 $l=0$ 单独列出，因为 $\mathbf{S}_0^n=\delta_{n,\,0}$。计算结果由第一项和第二项体现。第三项（LT）包含一个四重

求和，其形式为

$$\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s}} = \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{l=1}^{n-j} \sum_{k=0}^{l+1} \sum_{q=0}^{l+1-k}, \tag{3.67}$$

其中被加数为

$$\binom{n}{j} (2\pi i)^{n-j} (-1)^l \, l! \, \mathbf{S}_l^{n-j} \frac{B_k^{(l+1)}}{k!} \frac{l^{l-q-k+1}}{q! \, (l-q-k+1)!} \frac{1}{(2\pi i)^q} \int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \ln^{j+q} z \, \mathrm{d}z. \tag{3.68}$$

我们合并指标 j 和 q，并定义

$$j + q = n + 1 - m, \tag{3.69}$$

其中 m 是从 0 到 $n+1$的正整数。我们用 n、 m和 q表示 j，并按 $\ln z$的幂重新排列所有项，得到一个等价的算子：

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s}} = \Bigg[& \sum_{m=2-\delta_{n,1}}^{n} \sum_{l=1}^{m} \sum_{k=0}^{l} \delta_{q,1} + \sum_{m=2}^{n-1} \sum_{q=2}^{n+1-m} \sum_{l=q-1}^{m+q-1} \sum_{k=0}^{l+1-q} \\ & + \sum_{m=2}^{n+1} \sum_{l=1}^{m-1} \sum_{k=0}^{l+1} \delta_{q,0} + \sum_{m=0}^{1-\delta_{n,1}} \sum_{q=2-m}^{n+1-m} \sum_{l=q-1}^{m+q-1} \sum_{k=0}^{l+1-q} \Bigg] \delta_{j,n+1-m-q} \\ = \ & \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s_1}} + \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s_2}} + \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s_3}} + \hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s_4}}. \end{aligned} \tag{3.70}$$

计算 $\hat{}\mathbf{Q}_{\mathbf{s_1}}$ 作用于方程（3.68）中给出的被加数时，我们调整指标，并利用第一类斯特林数表示 $B_k^{(l+1)}$。由此得到

$$\begin{aligned} \mathrm{LT}_1 = & \sum_{m=2-\delta_{n,1}}^{n} \binom{n}{m} (2\pi i)^{m-1} \int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \ln^{n+1-m} z \, \mathrm{d}z \left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^l \mathbf{S}_l^m \sum_{k=0}^{l} \mathbf{s}_{l+1-k}^{l+1} l^{l-k} \right) \\ = & \sum_{m=2-\delta_{n,1}}^{n} \binom{n}{m} (2\pi i)^{m-1} \int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \ln^{n+1-m} z \, \mathrm{d}z \left(\sum_{l=1}^{m} (-1)^l (l-1)! \mathbf{S}_l^m \right) \\ = & \, 0. \end{aligned} \tag{3.71}$$

通过第一类斯特林数的生成函数以及关于第二类斯特林数的一个著名恒等式，可以化简括号内的求和，其解由 [19, 20] 给出

$$\sum_{k=0}^{n} \mathbf{s}_k^n \, x^k = n! \binom{x}{n}, \tag{3.72}$$

$$\sum_{l=1}^{m} (-1)^l \, (l-1)! \, \mathbf{S}_l^m = 0. \tag{3.73}$$

ˆ接下来，我们计算 $\mathbf{Q_{s_2}}$:

$$\begin{aligned}(3.74)\qquad \mathrm{LT}_2 &= \sum_{m=1}^{n-2}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n-m} z\,\mathrm{d}z \sum_{q=0}^{n+1-m}\binom{n}{m+q+2}(2\pi i)^{m+2}\frac{(-1)^q}{(q+2)!}\\ &\quad\times\left(\sum_{l=1}^{m+2}(-1)^{l-1}(q+l)!\sum_{k=0}^{l-1}\frac{B_k^{(q+l+1)}}{k!}\frac{(q+l)^{l-k-1}}{(l-k-1)!}\mathbf{S}_{q+l}^{q+m+2}\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

引理 3.1 保证内层求和为零。

现在我们应用 $\hat{\mathbf{Q}}_{\mathbf{s_3}}$:

$$\begin{aligned}(3.75)\qquad \mathrm{LT}_3 &= \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}(2\pi i)^m\int_C\frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n-m}z\,\mathrm{d}z\\ &\quad\times\left(\sum_{l=1}^{m}(-1)^l\,l!\,\mathbf{S}_l^m\sum_{k=0}^{l+1}\frac{B_k^{(l+1)}}{k!}\frac{l^{l+1-k}}{(l+1-k)!}\right)\\ &= \sum_{m=1}^{n}\binom{n}{m}(2\pi i)^m\,\frac{B_{m+1}}{m+1}\int_C\frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n-m}z\,\mathrm{d}z.\end{aligned}$$

括号内的求和在引理 3.3 中讨论，其值为 $B_{m+1}/(m+1)$，其中 B_{m+1} 是伯努利数。

For $\hat{\mathbf{Q}_{\mathbf{s_4}}}$，我们考虑两种情形。第一种情形是，当 $m=0$ 时，调整指标，并用第一类斯特林数表示 $B_k^{(l+1)}$，得到

$$(3.76)\qquad \mathrm{LT}_{40} = \left(\sum_{q=0}^{n-1}(-1)^{q+1}\binom{n}{q+1}\frac{1}{q+2}\right)\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n+1}z\,\mathrm{d}z.$$

我们计算求和:

$$\begin{aligned}(3.77)\qquad \sum_{q=0}^{n-1}(-1)^{q+1}\binom{n}{q+1}\frac{1}{q+2} &= \sum_{q=1}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}\frac{1}{q+1} = \int_0^1\sum_{q=1}^{n}(-1)^q\binom{n}{q}x^q\,\mathrm{d}x\\ &= \int_0^1\left((1-x)^n-1\right)\mathrm{d}x = -\frac{n}{n+1}.\end{aligned}$$

将方程 (3.77) 代入方程 (3.76)，得到:

$$(3.78)\qquad \mathrm{LT}_{40} = -\frac{n}{n+1}\,\frac{1}{2\pi i}\int_C\frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^{n+1}z\,\mathrm{d}z.$$

第二种情形是当 $m=1$时,

$$\begin{aligned}(3.79)\qquad \mathrm{LT}_{41} &= \sum_{q=1}^{n}\binom{n}{q}\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_C\frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^n z\,\mathrm{d}z\\ &\quad\times\left(\sum_{l=0}^{1}(-1)^l\,(q+l-1)!\sum_{k=0}^{l}\frac{B_k^{(q+l)}}{k!}\frac{(q+l-1)^{l-k}}{(l-k)!}\,\mathbf{S}_{q+l-1}^{q}\right)\\ &= \sum_{q=1}^{n}\binom{n}{q}\frac{(-1)^{q-1}}{q!}\int_C\frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}}\ln^n z\,\mathrm{d}z\left(-\frac{1}{2}(q-1)\,q!+\frac{1}{2}(q-1)\,q!\right)\\ &= 0.\end{aligned}$$

括号内的内层求和利用高阶伯努利多项式和第二类斯特林数的下列性质加以简化 [20, 21]:

$$\mathbf{S}_n^n = 1, \quad \mathbf{S}_{n-1}^n = \binom{n}{2}, \tag{3.80}$$

$$B_0^{(n)} = 1, \quad B_1^{(n)} = -\frac{n}{2}. \tag{3.81}$$

现在，我们汇集四重求和中所有保留下来的项，并将所得展开式写为

$$\begin{aligned} \mathrm{LT} &= \mathrm{LT}_{40} + \mathrm{LT}_3 \\ &= -\frac{n}{(n+1)}\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \ln^{n+1} z \, \mathrm{d}z \\ &\qquad + \sum_{m=1}^{n} \binom{n}{m} (2\pi i)^m \, \frac{B_{m+1}}{m+1} \int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \ln^{n-m} z \, \mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{3.82}$$

将这一最终表达式代入方程（3.64），并重新排列求和指标，得到方程（3.54）。□

利用定理 3.3，可以确定具有对数奇点的有限部分积分的围道积分表示。

推论 3.1。 设 $k(z)$ 在区间 $[0,a]$内解析。则，对于所有正整数 $\mathfrak{b}$，$⨍_0^a t^{-\mathfrak{b}} k(t)\mathrm{d}t$ 的围道积分表示为

$$⨍_0^a \frac{k(t)}{t^{\mathfrak{b}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \left(\ln z - \pi i \right) \mathrm{d}z. \tag{3.83}$$

推论 3.2。 设 $k(z)$ 在区间 $[0,a]$内解析。则，对于所有正整数 $\mathfrak{b}$，$⨍_0^a t^{-\mathfrak{b}} k(t) \ln t \, \mathrm{d}t$ 的围道积分表示为

$$⨍_0^a \frac{k(t)\ln t}{t^{\mathfrak{b}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \left(\frac{1}{2}\ln^2 z - \pi i \ln z - \frac{\pi^2}{3} \right) \mathrm{d}z. \tag{3.84}$$

推论 3.3。 设 $k(z)$ 在区间 $[0,a]$内解析。则，对于所有正整数 $\mathfrak{b}$，$⨍_0^a t^{-\mathfrak{b}} k(t) \ln^2 t \, \mathrm{d}t$ 的围道积分表示为

$$⨍_0^a \frac{k(t)\ln^2 t}{t^{\mathfrak{b}}}\mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{k(z)}{z^{\mathfrak{b}}} \left(\frac{1}{3}\ln^3 z - \pi i \ln^2 z - \frac{2\pi^2}{3}\ln z \right) \mathrm{d}z. \tag{3.85}$$

我们将方程 (3.54) 和 (3.55) 与方程 (3.5)、(3.32) 和 (3.33) 进行比较，得到以下定理。

定理 3.4. 设

$$f(\lambda) = \frac{1}{(e^{-2\pi i\lambda} - 1)\, z^{\lambda}}, \qquad \mathfrak{b} \in \mathbb{N}_0, \;\; z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, \;\; 0 < \operatorname{Arg} z \le 2\pi, \tag{3.86}$$

于是，它满足如下关系

$$\overset{\times}{\lim_{\lambda \to \mathfrak{b}}} f^{(n)}(\lambda) = (-1)^n \left[\frac{1}{2\pi i\,(n+1)} \frac{\ln^{n+1} z}{z^{\mathfrak{b}}} + \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} (2\pi i)^{n-j} \, \frac{B_{n-j+1}}{n-j+1} \frac{\ln^j z}{z^{\mathfrak{b}}} \right]. \tag{3.87}$$

3.3. **具有对数奇点的有限部分积分**。 有限部分积分与梅林变换是两个密切相关的数学概念。方程（3.2）列出了它们之间的关系。为进一步展开讨论，我们正式定义本节所用的特定术语：梅林型积分，梅林型发散积分，以及非梅林型发散积分。梅林型积分是指有限部分积分与梅林变换给出相同解的积分；它属于方程（3.2）中给出的第一种情形。梅林型发散积分是一种发散积分，其有限部分等于其梅林变换的解析延拓，或该解析延拓的正则化极限，具体取决于方程（3.2）中给出的条件。最后，非梅林型发散积分是其梅林变换不存在的梅林型发散积分。这就提出了一个问题：若某个非梅林型积分的梅林变换不存在，我们如何确定其有限部分积分？下一节将通过一个具体例子来回答这一问题。

3.3.1. 梅林型发散积分。在量子电动力学中，欧拉-海森堡拉格朗日量描述了恒定电磁背景场 [22, 23, 24]中旋量圈的非微扰相互作用。对拉格朗日量进行的重整化过程包括质量重整化和电荷重整化。我们从中减去自由场贡献和对数发散项[23]。重整化后的欧拉-海森堡拉格朗日量包含如下形式的发散积分

$$\int_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x, \tag{3.88}$$

其中 $0<\nu<1$ 且 n 为自然数。我们可以通过有限部分积分求解方程（3.88）的有限部分。

情形 $\nu\neq 0$。例子。简化方程（3.88，得到

$$⨍_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \ln\beta ⨍_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x + ⨍_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\ln x}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x. \tag{3.89}$$

根据方程（3.2），方程（3.89）中两项的有限部分积分分别等于其对应的梅林变换。第一项的梅林变换存在，且为

$$\ln\beta ⨍_0^\infty \frac{e^{-\beta x}}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln\beta}{\beta^{1-n-\nu}}\Gamma(1-n-\nu). \tag{3.90}$$

对于第二项，使用方程（3.4）可得

$$⨍_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\ln x}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \frac{(\psi(1-n-\nu)-\ln\beta)}{\beta^{1-n-\nu}}\Gamma(1-n-\nu). \tag{3.91}$$

将方程（3.90）与（3.91相加，得到最终结果：

$$⨍_0^\infty \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \frac{\Gamma'(1-n-\nu)}{\beta^{1-n-\nu}}. \tag{3.92}$$

情形 $\nu = 0$。例子。根据方程（3.2中列出的关系，我们发现，方程（3.92）在 $\nu = 0$ 处的有限部分积分等于右侧表达式的正则化极限：

$$\lim_{\nu\to 0}^{\times} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to 0}^{\times}\left[-\frac{1}{\beta^{1-n-\nu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\Gamma(1-n-\nu)\right)\right]. \tag{3.93}$$

利用伽马函数的反射性质，我们将方程（3.93）改写为

$$\lim_{\nu\to 0}^{\times} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to 0}^{\times}\left[\frac{1}{\beta^{1-n-\nu}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\Gamma(n+\nu)\sin(\nu\pi)}\right)\right]. \tag{3.94}$$

然后，求导得到

$$\lim_{\nu\to 0}^{\times} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \lim_{\nu\to 0}^{\times}\left[\frac{(-1)^{n+1}\pi}{\beta^{1-n-\nu}}\left(-\frac{\pi\cot(\pi\nu)\csc(\pi\nu)}{\Gamma(n+\nu)} - \frac{\csc(\pi\nu)\psi(n+\nu)}{\Gamma(n+\nu)}\right)\right]. \tag{3.95}$$

根据方程（3.95），我们通过定义来考虑第一项的正则化极限

$$f(\nu) = \frac{(-1)^n\pi^2}{\beta^{1-n-\nu}}\left(\frac{\cos(\pi\nu)}{\Gamma(n+\nu)}\right), \quad \text{and} \quad g(\nu) = \sin^2(\pi\nu). \tag{3.96}$$

利用推论 2.2，计算得到第一个正则化极限

$$\lim_{\nu\to 0}^{\times}\left[\frac{(-1)^n\pi^2}{\beta^{1-n-\nu}}\left(\frac{\cot(\pi\nu)\csc(\pi\nu)}{\Gamma(n+\nu)}\right)\right] = \frac{(-1)^n\beta^{n-1}}{\Gamma(n)}\left[\frac{1}{2}\ln^2(\beta) - \ln(\beta)\psi(n) + \frac{1}{2}\psi(n)^2 - \frac{1}{2}\psi^{(1)}(n) - \frac{\pi^2}{6}\right]. \tag{3.97}$$

接下来，通过令3.95），考虑方程（中的第二项的正则化极限

$$f(\nu) = \frac{(-1)^n\pi}{\beta^{1-n-\nu}}\left(\frac{\psi(n+\nu)}{\Gamma(n+\nu)}\right), \quad \text{and} \quad g(\nu) = \sin(\pi\nu) \tag{3.98}$$

并利用推论 2.1。我们得到第二个正则化极限

$$\lim_{\nu\to 0}^{\times}\left[\frac{(-1)^n\pi}{\beta^{1-n-\nu}}\frac{\csc(\pi\nu)\psi(n+\nu)}{\Gamma(n+\nu)}\right] = \frac{(-1)^n\beta^{n-1}}{\Gamma(n)}\left[\psi^{(1)}(n) - \psi(n)^2 + \ln(\beta)\psi(n)\right]. \tag{3.99}$$

最后，将方程（3.97）和（3.99）相加，以确定方程（3.92）在 $\nu \to 0$ 时的正则化极限，得到 3

$$\lim_{\nu\to 0}^{\times} \int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^{\nu+n}}\,\mathrm{d}x = \frac{(-1)^{n+1}\beta^{n-1}}{\Gamma(n)}\left[\frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{2}\ln^2\beta + \frac{1}{2}\psi(n)^2 - \frac{1}{2}\psi^{(1)}(n)\right]. \tag{.100}$$

通过在 3.100 式中代入 $n = 2$，并求值得到有限部分积分，我们重新得到欧拉–海森堡拉格朗日量中的发散积分

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-\beta x}\ln(\beta x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{12}\beta\left(-6\ln^2(\beta) + \pi^2 + 6(\gamma-2)\gamma + 12\right). \tag{3.101}$$

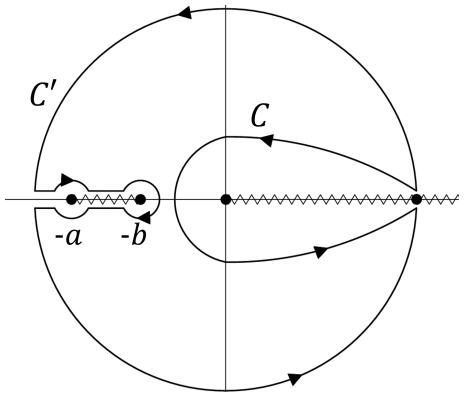

FIGURE 3. 将轮廓 C 变形为 C'。它不包围任何极点，也不穿过 $k(z)$ 的任何支割线。

3.3.2. 非梅林型发散积分。例子。为探讨非梅林型发散积分的梅林变换不存在这一问题，考虑有限部分积分

$$\text{⨍}_0^\infty \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b+x}} \frac{\ln x}{x^\lambda}\,\mathrm{d}x, \tag{3.102}$$

其中 $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$, $a > b > 0$，且 $\lambda = m$ 是正整数。为了使被积函数在无穷远处收敛，我们要求 $\mathrm{Re}(\lambda) > 1$；然而，为了保证在零附近收敛，则必须满足 $\mathrm{Re}(\lambda) < 1$ 。这一矛盾表明不存在解析带，也就是说，梅林变换不存在。

因此，我们剩下的任务是在不依赖梅林变换的情况下，求出这个发散积分的有限部分。在给定条件下，并假设被积函数存在复扩张，我们应用方程（3.7）得到围道积分表示

$$\begin{aligned}\text{⨍}_0^\infty \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b+x}} \frac{\ln x}{x^{\nu+m}}\,\mathrm{d}x = &\frac{1}{e^{-2\pi i\nu}-1}\int_C \frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{b+z}} \frac{\ln z}{z^{\nu+m}}\,\mathrm{d}z \\ &- \frac{2\pi i e^{-2\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)^2}\int_C \frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{b+z}} \frac{1}{z^{\nu+m}}\,\mathrm{d}z.\end{aligned} \tag{3.103}$$

我们将围道 C 变形为 C'，如图 3所示，并化简所有项，将有限部分积分（3.102）表示为

(3.104)

$$\begin{aligned}\text{⨍}_0^\infty \frac{\sqrt{a+x}}{\sqrt{b+x}} \frac{\ln x}{x^{\nu+m}}\,\mathrm{d}x = &-\frac{2i(-1)^m e^{-\pi i\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\int_b^a \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x-b}} \frac{\ln x}{x^{\nu+m}}\mathrm{d}x \\ &+ \frac{2\pi(-1)^m e^{-\pi i\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\int_b^a \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x-b}} \frac{1}{x^{\nu+m}}\mathrm{d}x - \frac{4\pi(-1)^m e^{-3\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)^2}\int_b^a \frac{\sqrt{a-x}}{\sqrt{x-b}} \frac{1}{x^{\nu+m}}\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

我们将有限部分积分的求值转化为求解式（3.104中的定积分。为计算第二项和第三项中的积分，我们应用

以下列出的公式： [7, 第331页，3.259。2]:

(3.105)

$$\int_0^u x^{\nu-1}(u-x)^{\mu-1}(x^m+b^m)^\lambda \,\mathrm{d}x = b^{m\lambda}u^{\mu+\nu-1}\mathrm{B}(\mu,\nu) \times {}_{m+1}F_m\left(-\lambda, \frac{\nu}{m},\ldots,\frac{\nu+m-1}{m}\,;\,\frac{\mu+\nu}{m},\ldots,\frac{\mu+\nu+m-1}{m}\,;\,\frac{-u^m}{b^m}\right),$$

其中 $\mathrm{Re}(\mu) > 0$, $\mathrm{Re}(\nu) > 0$, $\mathrm{Re}(\lambda) > 0$, 且 $|\arg(u/b)| < \pi/m$。这里，${}_{m+1}F_m$表示广义超几何函数。它由级数 [17,26.2.1]定义

$$(3.106)\qquad {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p\,;\,b_1,\ldots,b_q\,;\,z) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(a_1)_n\cdots(a_p)_n}{(b_1)_n\cdots(b_q)_n}\frac{z^n}{n!},$$

其中 $(a)_n$ 表示波赫哈默符号。我们在 x 中作常数平移，将 (3.104) 中的积分改写为这种形式。于是得到

$$(3.107)\qquad \int_b^a \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\frac{1}{x^{\nu+m}}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a-b}{b^{\nu+m}}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right),$$

对于 $a > b > 0$ 和正整数 m。为求解 (3.104) 第一项中的积分，我们对 (3.107) 右端关于 ν求导，得到 (3.108)

$$\int_b^a \sqrt{\frac{a-x}{x-b}}\frac{\ln x}{x^{\nu+m}}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}\left(\frac{a-b}{b^{\nu+m}}\right)\left[{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right)\ln b - {}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2;1-\frac{a}{b}\right)\right].$$

这里， ${}_2F_1^{(0,n,0,0)}(a,\ b;\ c;\ z)$ 表示高斯超几何函数 ${}_2F_1(a,\ b;c;\ z)$ 关于第二个参数 b 的 n 阶偏导数。也就是说，

$$(3.109)\qquad {}_2F_1^{(0,n,0,0)}(a,b;c;z) := \frac{\partial^n}{\partial b^n}\,{}_2F_1(a,b;c;z).$$

将（3.107）和（3.108）代入（3.104），可得

(3.110)

$$\int_0^\infty \sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\frac{\ln x}{x^{\nu+m}}\,\mathrm{d}x = (\pi^2-\pi i\ln b)\left(\frac{a-b}{b^m}\right)\frac{e^{-\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)b^\nu}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right) + \pi i\left(\frac{a-b}{b^m}\right)\frac{e^{-\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)b^\nu}{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right) - 2\pi^2\left(\frac{a-b}{b^m}\right)\frac{e^{-3\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)^2b^\nu}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right).$$

最后一步是求方程（3.110）在 $\nu\to 0$时的正则化极限。我们将第一项、第二项和第三项中涉及的正则化极限分别记为:

$$(3.111)\qquad \operatorname*{\times\lim}_{\nu\to0}\mathbf{T}_1(\nu) = \operatorname*{\times\lim}_{\nu\to0}\frac{e^{-\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)\,b^\nu}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right),$$

$$(3.112)\qquad \operatorname*{\times\lim}_{\nu\to0}\mathbf{T}_2(\nu) = \operatorname*{\times\lim}_{\nu\to0}\frac{e^{-\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)\,b^\nu}\,{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right),$$

$$\overset{\times}{\lim_{\nu\to 0}}\mathbf{T}_3(\nu)=\overset{\times}{\lim_{\nu\to 0}}\frac{e^{-3\pi i\nu}}{(e^{-2\pi i\nu}-1)^2b^\nu}{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right). \tag{3.113}$$

我们利用推论 2.1求解方程（3.111）和（3.112）。令

$$f(\nu)=\frac{e^{-\pi i\nu}}{b^\nu}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right)\quad\text{and}\quad g(\nu)=\left(e^{-2\pi i\nu}-1\right) \tag{3.114}$$

对于方程（3.111），以及

$$f(\nu)=\frac{e^{-\pi i\nu}}{b^\nu}\,{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right)\quad\text{and}\quad g(\nu)=\left(e^{-2\pi i\nu}-1\right) \tag{3.115}$$

对于方程（3.112）。我们得到如下解：

$$\overset{\times}{\lim_{\nu\to 0}}\mathbf{T}_1(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},m;2,1-\frac{a}{b}\right)-\frac{1}{2\pi i}\,{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},m;2,1-\frac{a}{b}\right), \tag{3.116}$$

$$\overset{\times}{\lim_{\nu\to 0}}\mathbf{T}_2(\nu)=\frac{1}{2\pi i}\,{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},m;2,1-\frac{a}{b}\right)-\frac{1}{2\pi i}\,{}_2F_1^{(0,2,0,0)}\left(\frac{1}{2},m;2,1-\frac{a}{b}\right). \tag{3.117}$$

为了确定方程（3.110）第三项的正则化极限，利用推论2.2，令

$$f(\nu)=\frac{e^{-3\pi i\nu}}{b^\nu}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},\nu+m;2,1-\frac{a}{b}\right),\quad\text{and}\quad g(\nu)=\left(e^{-2\pi i\nu}-1\right)^2. \tag{3.118}$$

我们计算方程（3.118）的正则化极限，当

$$\begin{aligned}\overset{\times}{\lim_{\nu\to 0}}\mathbf{T}_3(\nu)=&-\frac{1}{8\pi^2}\,{}_2F_1^{(0,2,0,0)}\left(\frac{1}{2},m,2,1-\frac{a}{b}\right)\\&+\frac{1}{4\pi^2}\,{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},m,2,1-\frac{a}{b}\right)(\ln b+\pi i)\\&+\frac{1}{24\pi^2}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},m;2;1-\frac{a}{b}\right)\left(-3\ln^2 b-6i\pi\ln b+\pi^2\right).\end{aligned} \tag{3.119}$$

综合方程（3.116）、（3.117）和（3.119）的解，我们得到方程（3.110）中原积分的正则化极限。最终解为

$$\begin{aligned}⨍_0^\infty\sqrt{\frac{a+x}{b+x}}\frac{\ln x}{x^m}\,\mathrm{d}x=\frac{(-1)^{m+1}}{12}\left(\frac{a-b}{b^m}\right)\Bigg[&3\,{}_2F_1^{(0,2,0,0)}\left(\frac{1}{2},m,2,1-\frac{a}{b}\right)\\&-6\ln b\,{}_2F_1^{(0,1,0,0)}\left(\frac{1}{2},m,2,1-\frac{a}{b}\right)+\left(3\ln^2 b+\pi^2\right)\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2},m;2;1-\frac{a}{b}\right)\Bigg].\end{aligned} \tag{3.120}$$

这是一个很好的例子，说明即使非梅林型发散积分没有梅林变换，其有限部分积分仍然存在。

3.4. **利用围道积分表示计算有限部分积分的数值**。 收敛积分需要数值方法，有限部分积分也需要数值方法。为了计算有限部分积分的数值，我们使用图 2所示的积分围道。

例子。 考虑求函数的有限部分积分的数值

$$\text{⨍}_0^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x. \tag{3.121}$$

利用方程（3.83），我们将方程（3.121）中的积分写成

$$\text{⨍}_0^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\ln z\,\mathrm{d}z - \frac{1}{2}\int_C \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\mathrm{d}z. \tag{3.122}$$

按照前面例子中的做法，将围道 C 变形为钥匙孔形，来计算第一个围道积分。由此得到

$$\int_C \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\ln z\,\mathrm{d}z = \int_\infty^\epsilon \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\ln x\,\mathrm{d}x + \int_\epsilon^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\ln\left(e^{2\pi i}x\right)\mathrm{d}x + \int_{C_\epsilon} \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\ln z\,\mathrm{d}z. \tag{3.123}$$

化简方程（3.123），得到

$$\int_C \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\ln z\,\mathrm{d}z = (2\pi i)\int_\epsilon^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x + \int_{C_\epsilon} \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\ln z\,\mathrm{d}z. \tag{3.124}$$

令 $\epsilon = 1$，并将 z 写成指数形式 $z = \epsilon e^{i\theta}$，则有

$$\int_C \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\ln z\,\mathrm{d}z = (2\pi i)\int_1^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x - \int_0^{2\pi} \frac{\theta\,J_0^2(e^{i\theta})}{\Gamma(1+e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta. \tag{3.125}$$

方程（3.122）中的第二个围道积分的计算结果为

$$\int_C \frac{J_0^2(z)}{z\,\Gamma(1+z)}\mathrm{d}z = i\int_0^{2\pi} \frac{J_0^2(e^{i\theta})}{\Gamma(1+e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta. \tag{3.126}$$

将方程（3.125）和（3.126）代入方程（3.122）得（3.127）

$$\text{⨍}_0^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x = \int_1^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x - \frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\theta\,J_0^2(e^{i\theta})}{\Gamma(1+e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta - \frac{i}{2}\int_0^{2\pi} \frac{J_0^2(e^{i\theta})}{\Gamma(1+e^{i\theta})}\mathrm{d}\theta.$$

我们可以用任意数值方法计算方程（3.127）中的所有积分。使用 Mathematica，可得最终数值结果：

$$\text{⨍}_0^\infty \frac{J_0^2(x)}{x\,\Gamma(1+x)}\mathrm{d}x = 0.2129210647. \tag{3.128}$$

尽管为该问题找到闭式解析解很困难，但利用围道积分表示来求解有限部分积分的数值，即使对于更复杂的函数也同样有效。

4. Finite-Part Integration of the Stieltjes Transform with Logarithmic Singularity

我们考虑由下式给出的具有对数奇点的广义斯蒂尔切斯变换

$$\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\,\mathrm{d}t, \tag{4.1}$$

对于 $0 \le \mathrm{Re}(\nu) < 1$, $-\pi < \mathrm{Arg}(\omega) \le \pi$ 其中 $|\mathrm{Arg}(\omega)| \ne \pi/2$, 且 $0 < a \le \infty$。本章接下来的两节将考察方程（4.1）中积分的不同情形。

4.1. $\nu \ne 0 \neq$ **0 时的斯蒂尔切斯变换**。

定理 4.1. 设 $k(t)$满足以下性质：***(1)*** $k(z)$ 是其复扩张，并且在区间 $[0,a)$上解析；***(2)*** 当在 $t = 0$ 处取值时，$k(0) \ne 0$，则

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\mathrm{d}t &= \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\mathrm{d}t \\ &+ \left[\frac{k(i\omega)+k(-i\omega)}{2}\right]\Delta_{n_1}(\nu,\omega) - i\left[\frac{k(i\omega)-k(-i\omega)}{2}\right]\Delta_{n_2}(\nu,\omega),\end{aligned} \tag{4.2}$$

其中

$$\Delta_{n_1}(\nu,\omega) = \frac{\pi}{2\omega^{\nu+1}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(\mathrm{Log}\,\omega)^{n-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right), \tag{4.3}$$

(4.4)

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) &= (-1)^{[(j+1)/2]}\left(\frac{\pi}{2}\right)^j\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{l=0}^{j}\frac{1}{2^l}\sum_{m=0}^{[(l-\gamma)/2]}(-1)^m\binom{l}{2m+\gamma} \\ &\times\tan^{2m+\gamma}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{p=0}^{l}(-1)^p\binom{l}{p}(2p+1)^j, \quad \gamma = \frac{1-(-1)^j}{2},\end{aligned}$$

and

$$\Delta_{n_2}(\nu,\omega) = \frac{\pi}{2\omega^{\nu+1}}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(\mathrm{Log}\,\omega)^{n-j}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right), \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\frac{d^j}{d\nu^j}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) &= (-1)^{[j/2]}\left(\frac{\pi}{2}\right)^j\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\sum_{l=1}^{j}\frac{1}{2^l}\sum_{m=0}^{l}(-1)^m\binom{l}{m}(2m+1)^j \\ &\times\sum_{p=0}^{[(l-\gamma)/2]}(-1)^p\binom{l}{2p+\gamma}\cot^{2p+\gamma}\left(\frac{\pi\nu}{2}\right), \quad \gamma = \frac{1-(-1)^j}{2},\end{aligned} \tag{4.6}$$

对于 $|\omega| < \mathit{min}(a,\rho_o)$, $-\pi < \mathit{Arg}(\omega) \le \pi$ 满足 $|\mathit{Arg}(\omega)| \ne \pi/2$, $0 < \mathit{Re}(\nu) < 1$, 且对于所有正整数 n，其中 $\omega^{-\nu}$ 取其主值， ρ_o 定义为 $k(z)$ 的最近奇点到原点的距离。当 $k(z)$ 为整函数，或对于所有 $|\omega| < \infty$，斯蒂尔切斯积分存在且 $a \to \infty$ 时，方程 ***(4.2)*** 对 $a = \infty$ 仍然成立。

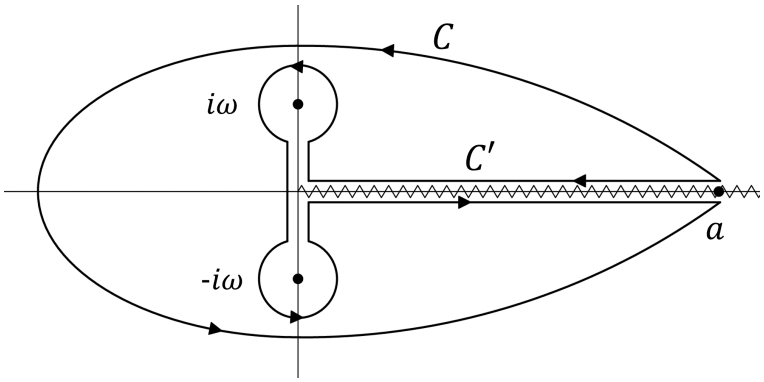

FIGURE 4. 考虑由 $(\omega^2+z^2)^{-1}$产生的极点后，将轮廓 C 变形为轮廓 C'。 z^λ 的支割线沿正实轴。

是整函数，或对于所有 $|\omega|<\rho_o$，当 $k(z)$ 至少有一个奇点时。最后，有：

$$\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\mathrm{d}t \sim k(0)\,\Delta_{n_1}(\nu,\omega), \quad \omega\to 0. \tag{4.7}$$

证明。目前，我们先假设 $\omega>0$成立，随后通过解析延拓将结果推广到 ω 的更一般取值。我们首先考虑$a<\infty$情形。通过考察围道积分，可以计算斯蒂尔切斯变换：

$$\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\nu(\omega^2+z^2)}\,\mathrm{d}z, \tag{4.8}$$

其中，围道 C 如图 4所示。围道 C 的选取必须满足以下条件：（i）遍历围道时，核在 $z=\pm i\omega$ 处的奇点应位于围道左侧；（ii）遍历围道时，$k(z)$ 的所有奇点都必须位于围道右侧。第一个条件确保逐项积分有效，第二个条件则保证所得围道积分可以解释为有限部分积分 [2]。

我们将围道变形 C 为 C' 方程（4.8）中的围道，同时考虑由项$(\omega^2+z^2)^{-1}$引入的极点。经过这次变形，可得

(4.9)

$$\begin{aligned}\int_C \frac{k(z)\ln^n z}{z^\nu(\omega^2+z^2)}\,\mathrm{d}z &= \left(e^{-2\pi i\nu}-1\right)\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &+ e^{-2\pi i\nu}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\int_0^a \frac{k(t)\ln^j t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\,\mathrm{d}t \\ &+ k(i\omega)\left[\frac{\pi e^{-\pi i\nu/2}}{\omega^{\nu+1}}\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^n\right]-k(-i\omega)\left[\frac{\pi e^{-3\pi i\nu/2}}{\omega^{\nu+1}}\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^n\right].\end{aligned}$$

利用方程（4.9）并应用级数展开

$$\frac{1}{\omega^2+z^2}=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{\omega^{2k}}{z^{2k+2}},\qquad \left|\frac{\omega^2}{z^2}\right|<1, \tag{4.10}$$

我们可以将相应的斯蒂尔切斯变换表示为

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\mathrm{d}t=&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\frac{1}{e^{-2\pi i\nu}-1}\int_C\frac{k(z)\ln^n z}{z^{\nu+2k+2}}\mathrm{d}z\\&-\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\frac{e^{-2\pi i\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\int_0^a\frac{k(t)\ln^j t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\mathrm{d}t\\&-k(i\omega)\left[\frac{\pi e^{-\pi i\nu/2}}{\omega^{\nu+1}(e^{-2\pi i\nu}-1)}\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^n\right]\\&+k(-i\omega)\left[\frac{\pi e^{-3\pi i\nu/2}}{\omega^{\nu+1}(e^{-2\pi i\nu}-1)}\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^n\right].\end{aligned} \tag{4.11}$$

在条件 $\omega<|z|$ 下，方程（4.10）中的级数展开沿围道 C 一致收敛。这种一致收敛性使得我们可以在方程（4.11）中交换求和与积分的顺序，从而逐项积分。

为递归求解方程（4.11），我们先分离第二个求和中的最后一项，该项对应于 $j=n-1$。接着，我们利用方程（4.11）本身表示分离出的积分，从而引入更多项。此步骤产生两个新的求和，其上限均降至 $j=n-2$。重复这一过程，最终可将所有求和上限降至零。每一项的系数都遵循与定理 3.1 中分析 $G_l^n(z)$ 时观察到的相同组合结构。于是，斯蒂尔切斯变换可表示为

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\,\mathrm{d}t=&\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\left[\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\beta_j(\nu)\int_C\frac{k(z)\ln^j z}{z^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}z\right]\\&-k(i\omega)\left[\frac{\pi e^{-\pi i\nu/2}}{\omega^{\nu+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\beta_j(\nu)\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^j\right]\\&+k(-i\omega)\left[\frac{\pi e^{-3\pi i\nu/2}}{\omega^{\nu+1}}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\beta_j(\nu)\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^j\right],\end{aligned} \tag{4.12}$$

其中

$$\beta_j(\nu)=\sum_{l=0}^{n-j}(-1)^l\,l!\,\mathbf{S}_l^{n-j}\frac{(e^{-2\pi i\nu})^l}{(e^{-2\pi i\nu}-1)^{l+1}}. \tag{4.13}$$

方程（4.12）由三项组成。根据方程（3.5）中有限部分积分的定义，第一项中包含所有围道积分的内层求和对应于一个带对数

奇点的发散积分的有限部分，该定义适用于 λ的非整数值。其余两项表示留数，其形式为

(4.14)
$$-k(i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\frac{(\omega e^{\pi i/2})^{-\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\right]=-k(i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi i}{2\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\omega^{-\nu}\csc(\pi\nu)\,e^{\pi i\nu/2}\right]$$
$$=k(i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{4\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\omega^{-\nu}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-i\,\omega^{-\nu}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right],$$

(4.15)
$$k(-i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\frac{(\omega e^{3\pi i/2})^{-\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\right]=k(-i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi i}{2\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\omega^{-\nu}\csc(\pi\nu)\,e^{-\pi i\nu/2}\right]$$
$$=k(-i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{4\omega}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\omega^{-\nu}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)+i\,\omega^{-\nu}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right],$$

由定理3.2推导得出。先将相似项分组，再进行微分并应用莱布尼茨法则，可得方程（4.3）和（4.5），其中 $j^{\text{th}}\,\mathsf{sec}(\pi\nu/2)$ 和 $\mathsf{csc}(\pi\nu/2)$ 的导数取自 [25, 第 8 页，1.1.5.5，1.1.5。9]。

自然对数 $\ln\omega$ 被复主值对数 $\mathsf{Log}\ \omega$ 取代，以便将函数从正实轴解析延拓到复平面。当 ω 为复数时，只要 $-\pi<\mathrm{Arg}(\omega)\le\pi$ 满足 $|\mathrm{Arg}(\omega)|\neq\pi/2$，方程（4.12）的左侧仍为解析函数。

要证明该定理，必须确立方程（4.2）中级数的收敛性。当 $a<\infty$ 时，有限值 a有两种可能的情形，即 $a<\rho_o$ 和 $a>\rho_o$。我们先讨论情形 $a>\rho_o$。回想一下，只要满足 $\epsilon<\rho_o$，参数 ϵ 就可以任意小。如 [2], 下列不等式成立：

(4.16)
$$\left|⨍_0^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{r+\nu+1}}\,\mathrm{d}t\right|\le\frac{M_\nu(a,\epsilon)}{\epsilon^{r+\nu}},$$

其中 r 是正整数，且 $M_\nu(a,\epsilon)$ 定义为

(4.17)
$$M_\nu(a,\epsilon)=\int_\epsilon^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+k}}\,\mathrm{d}t+n!\sum_{m=0}^{n}\frac{|\ln\epsilon|^m\,M(\nu)^{n-m+1}}{m!},$$

其中辅助函数 $M(\nu)$ 定义为

(4.18)
$$M(\nu)=\begin{cases}\dfrac{2\sinh(\pi\,\mathrm{Im}(\nu))}{\mathrm{Im}(\nu)\sqrt{\sin^2(\pi\,\mathrm{Re}(\nu))+\sinh^2(\pi\,\mathrm{Im}(\nu))}}, & \text{if } \mathrm{Im}(\nu)\neq 0,\\[2ex] \dfrac{2\pi}{|\sin(\pi\nu)|}, & \text{if } \mathrm{Im}(\nu)=0.\end{cases}$$

根据方程（4.16）中的界，方程（4.2）中的无穷级数绝对收敛，由不等式可知

(4.19)
$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}⨍_0^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}t\right|\le\sum_{k=0}^{\infty}|\omega|^{2k}\left|⨍_0^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}t\right|.$$

将方程（4.16）中的界代入方程（4.19）的右端，可得

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{M_\nu(a,\epsilon)}{\epsilon^{\nu+1}}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\omega}{\epsilon}\right|^{2k}. \tag{4.20}$$

因此，左侧无穷级数的收敛性由右侧几何级数的收敛性保证。只要 $|\omega|<\epsilon<\rho_o$，或者等价地，只要 $|\omega|<\rho_o<a$（因为 $\rho_o<a$），该级数就收敛。

当积分上限满足 $k(t)a<\rho_0$时，函数 $k(t)$ 仍为解析函数，因为围道内没有奇点。该条件允许我们使用 $t=0$ 在 $k(t)$ 关于 $t=0$ 的幂级数展开，从而逐项积分。为证明方程（4.2）中无穷级数的绝对收敛性，我们考察以下界

$$\left|\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| \le \left|\int_\epsilon^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| + n!\sum_{m=0}^{n}\frac{|\ln\epsilon|^m}{m!}\sum_{l=0}^{\infty}|c_l|\frac{\epsilon^{l-\nu-2k-1}}{|l-\nu-2k-1|^{n-m+1}}. \tag{4.21}$$

方程（4.21）右侧的第一项提供了主导贡献。将 $k(t)$ 展开为 $k(t)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l t^l$，即可得到以下界

$$\left|\int_\epsilon^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| \le \sum_{l=0}^{2k+2}|c_l|\int_\epsilon^a\left|\frac{\ln^n t}{t^{\nu+2k+2-l}}\right|\mathrm{d}t + \sum_{l=2k+3}^{\infty}|c_l|\int_\epsilon^a\left|t^{l-\nu-2k-2}\ln^n t\right|\mathrm{d}t. \tag{4.22}$$

随着 l 增大，第二个求和项中 t 的指数变得越来越大，使得该项占据主导地位。我们利用以下不等式对其进行估计

$$\int_\epsilon^a\left|t^{l-\nu-2k-2}\ln^n t\right|\mathrm{d}t \le \frac{1}{a^{2k+\nu}}\int_\epsilon^a\left|t^{l-2}\ln^n t\right|\mathrm{d}t. \tag{4.23}$$

通过采用与前一种情形相同的界估计策略，并利用方程（4.23），我们得出，方程（4.2）中无穷级数的界与几何级数 $\sum_{k=0}^{\infty}|\omega/a|^{2k}$ 成正比。因此，在满足条件 $|\omega|<\min(\rho_0,a)$ 时，该级数绝对收敛。

现在考虑 $a=\infty$ 的情形。假设方程（4.1）中的广义 Stieltjes 变换存在，则方程（4.2）中无穷级数的绝对收敛性必须给出一个有限值。具体而言，它必须满足$M_\nu(a,\epsilon)<M_\nu(\infty,\epsilon)$，$<\infty$，并且涉及 $M_\nu(\infty,\epsilon)$ 的和必须收敛。因此，当 $a\to\infty$ 时，方程（4.2）在极限意义下仍然成立，从而可以用于解决上述问题。

通过将方程（4.2）中的结果改写为如下形式，方程（4.7）中的渐近关系便显而易见：

$$\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^\nu(\omega^2+t^2)}\,\mathrm{d}t = \left(\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{\nu+2}}\,\mathrm{d}t + O(\omega)\right) + (k(0)+O(i\omega))\,\Delta_{n_1}(\nu,\omega), \tag{4.24}$$

当 $\omega\to 0$时。由方程（4.3）可知，$\Delta_{n_1}(\nu,\omega)=O(\omega^{-1-\nu}\operatorname{Log}^n\omega)$ 当 $\omega\to$趋于 0 时。这意味着方程（4.24）中的第二项支配第一项和第三项，从而确立了方程（4.7）所述的渐近形式。

此处给出的证明结构沿用了 [2]中所采用的方法。□

4.2. $\nu = 0$ **情形下的斯蒂尔切斯变换**。

定理 4.2。 设 $k(t)$满足以下性质：*(1)* $k(z)$ 是其复扩张，并且在区间 $[0, a)$内解析；*(2)* 当取值为 $t = 0$、$k(0) \neq 0$ 时，则有

$$\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{(\omega^2+t^2)}\mathrm{d}t = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{2k+2}}\mathrm{d}t + \left[\frac{k(i\omega)+k(-i\omega)}{2}\right]\Delta_{n_1}(\omega) - i\left[\frac{k(i\omega)-k(-i\omega)}{2}\right]\Delta_{n_2}(\omega), \tag{4.25}$$

其中

$$\Delta_{n_1}(\omega) = \frac{n!}{\omega}\sum_{j=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\frac{(-1)^j}{(n-2j)!\,(2j)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j+1}E_{2j}\,(\mathrm{Log}\,\omega)^{n-2j}, \tag{4.26}$$

(4.27)

$$\Delta_{n_2}(\omega) = -\frac{\mathrm{Log}^{n+1}\omega}{\omega\,(n+1)} + \frac{n!}{\omega}\sum_{j=1}^{\lceil n/2\rceil}\frac{(-1)^j(2^{2j}-2)}{(n-2j+1)!\,(2j)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}B_{2j}\,(\mathrm{Log}\,\omega)^{n-2j+1},$$

对于 $|\omega| < \mathit{min}(a, \rho_o)$，$-\pi <$ 辐角$(\omega) \leq \pi$，其中 $|$辐角$(\omega)| \neq \pi/2$，$0 <$ *Re*$(\nu) < 1$；并且对于所有正整数 n，其中 ρ_o 定义为 $k(z)$ 的最近奇点到原点的距离。此外，E_{2j} 和 B_{2j} 分别为欧拉数和伯努利数。另外，对于 $a = \infty$，方程 *(4.25)* 仍然成立；当 $k(z)$ 没有奇点时，斯蒂尔切斯积分存在为 $a \to \infty$；当 $k(z)$ 具有奇点时，则为 $|\omega| < \rho_o$。最后，有

$$\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{(\omega^2+t^2)}\mathrm{d}t \sim k(0)\,\Delta_{n_1}(\omega), \quad \omega \to 0. \tag{4.28}$$

证明。我们先考虑情形 $a < \infty$，考察围道积分

$$\int_C \frac{k(z)\ln^{n+1} z}{\omega^2+z^2}\,\mathrm{d}z, \tag{4.29}$$

其中围道 C 与图4所示的围道相同。我们将围道变形为C 中的围道 C'，以便展开方程（4.29），同时考虑由 $(\omega^2+z^2)^{-1}$产生的简单极点。由此得到

$$\int_C \frac{k(z)\ln^{n+1} z}{\omega^2+z^2}\,\mathrm{d}z = 2\pi i\,(n+1)\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{\omega^2+t^2}\,\mathrm{d}t + \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}(2\pi i)^{n+1-j}\int_0^a \frac{k(t)\ln^j t}{\omega^2+t^2}\,\mathrm{d}t + k(i\omega)\left[\frac{\pi}{\omega}\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^{n+1}\right] - k(-i\omega)\left[\frac{\pi}{\omega}\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^{n+1}\right]. \tag{4.30}$$

将方程（4.10）中给出的级数展开代入上述结果，我们得到相应斯蒂尔切斯变换在情形 $\nu = 0$下的表达式，即

$$\begin{aligned}(4.31)\qquad \int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{\omega^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi i\,(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\int_C \frac{k(z)\ln^{n+1} z}{z^{2k+2}}\,\mathrm{d}z\\ &\quad -\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n+1}{j}(2\pi i)^{n-j}\int_0^a \frac{k(t)\ln^j t}{\omega^2+t^2}\,\mathrm{d}t\\ &\quad + k(i\omega)\left[\frac{i}{2\omega(n+1)}\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^{n+1}\right]\\ &\quad - k(-i\omega)\left[\frac{i}{2\omega(n+1)}\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^{n+1}\right].\end{aligned}$$

同样，方程（4.10）沿围道 C 的一致收敛允许在方程（4.31）中交换求和与积分的顺序，从而进行逐项积分。

为了递归地求出方程（4.31），沿用非整数 λ 情形所采用的方法，我们首先分离出第二个求和中的最后一项，该项对应于 $j = n-1$。然后，我们利用方程（4.31）本身表示这个被分离出的积分，这会引入两个上限等于 $j = n-2$的新求和以及一些附加项。反复迭代这一过程，最终将所有求和的上限都降为零。在此过程中生成的所有系数都呈现出与定理 3.3中所述相同的组合结构。因此，斯蒂尔切斯变换可表示为

(4.32)

$$\begin{aligned}\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{\omega^2+t^2}\,\mathrm{d}t &= \frac{1}{2\pi i\,(n+1)}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\int_C \frac{k(z)\ln^{n+1} z}{z^{2k+2}}\,\mathrm{d}z\\ &\quad +\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\frac{B_{n-j+1}}{n-j+1}\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\int_C \frac{k(z)\ln^j z}{z^{2k+2}}\,\mathrm{d}z\\ &\quad - k(i\omega)\frac{\pi}{\omega}\left[\frac{1}{2\pi i(n+1)}\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^{n+1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\frac{B_{n-j+1}}{n-j+1}\left(\ln\omega+\frac{\pi i}{2}\right)^{j}\right]\\ &\quad + k(-i\omega)\frac{\pi}{\omega}\left[\frac{1}{2\pi i(n+1)}\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^{n+1}+\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(2\pi i)^{n-j}\frac{B_{n-j+1}}{n-j+1}\left(\ln\omega+\frac{3\pi i}{2}\right)^{j}\right],\end{aligned}$$

其中 B_{n-j+1} 表示伯努利数。

方程（4.32）由三项组成。应用方程（3.54）中给出的有限部分积分定义，所有围道积分的内层求和对应于一个发散积分的有限部分，该发散积分对整数 λ表现出对数奇点。这两个留数项可以表示为

(4.33)

$$-k(i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{\omega}\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\frac{(\omega e^{\pi i/2})^{-\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\right]$$

$$= k(i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{4\omega}\,\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\omega^{-\nu}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)-i\,\omega^{-\nu}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right],$$

(4.34)

$$k(-i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{\omega}\,\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\frac{(\omega e^{3\pi i/2})^{-\nu}}{e^{-2\pi i\nu}-1}\right]$$
$$= k(-i\omega)\,\frac{(-1)^n\pi}{4\omega}\,\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\nu^n}\left[\omega^{-\nu}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)+i\,\omega^{-\nu}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right],$$

如定理3.4所确立。这表明留数项可由分组留数项 $\Delta_{n_1}(\nu,\ \omega)$ 与 $\Delta_{n_2}(\nu,\ \omega)$ 在定理4.1 中当 $\nu\to 0$时的正则化极限所表示。更精确地说，

$$\Delta_{n_1}(\omega) = \operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\Delta_{n_1}(\nu,\omega)$$
$$= \frac{\pi}{2\omega}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(\operatorname{Log}\omega)^{n-j}\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\left[\omega^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right],\tag{4.35}$$

$$\Delta_{n_2}(\omega) = \operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\Delta_{n_2}(\nu,\omega)$$
$$= \frac{\pi}{2\omega}\sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}(\operatorname{Log}\omega)^{n-j}\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\left[\omega^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right)\right]\tag{4.36}$$

其中，自然对数 $\ln\omega$ 被复主值对数 $\operatorname{Log}\omega$ 取代，以便将函数解析延拓至复平面，条件是 $-\pi<$ 辐角$(\omega)\le\pi$，且 $|$辐角$(\omega)|\neq\pi/2$。

需要求出两个正则化极限。由于正割函数在原点处解析，第一个正则化极限可化为通常的柯西极限。用欧拉数 [17, 4.19.5]，表示，可得

$$\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\omega^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\sec\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) = \lim_{\nu\to 0}\omega^{-\nu}\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k E_{2k}}{(2k)!}\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2k}\nu^{2k}$$
$$= \begin{cases}(-1)^j\left(\frac{\pi}{2}\right)^{2j}E_{2j}, & \text{if } j \text{ is even},\\ 0, & \text{if } j \text{ is odd}.\end{cases}\tag{4.37}$$

将方程(4.37)代入方程 (4.35)并化简所得各项，可得方程 (4.26)。

对于第二个正则化极限，我们使用公式 [25,第 9 页，1.1.5。10]

$$\frac{\mathrm{d}^j}{\mathrm{d}\nu^j}\csc\left(\frac{\pi\nu}{2}\right) = (-1)^{j+1}\frac{2j!}{\pi\nu^{j+1}}+\frac{1}{2^{j+1}\pi}\left[\psi^{(j)}\left(\frac{2+\nu}{4}\right)-(-1)^j\,\psi^{(j)}\left(\frac{2-\nu}{4}\right)\right]$$
$$-\frac{1}{2^{2j+1}\pi}\left[\psi^{(j)}\left(\frac{\nu}{4}\right)-(-1)^j\,\psi^{(j)}\left(\frac{\nu}{4}\right)\right],\tag{4.38}$$

其中 $\psi^{(n)}(z)$ 表示阶数为 n的多伽马函数。将方程 (4.38) 代入方程 (4.36)，可将正则化极限分解为三项。根据正则化极限的线性性，利用方程 (2.9)，第一项的计算结果为

$$(-1)^{j+1}\frac{2j!}{\pi}\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\frac{\omega^{-\nu}}{\nu^{j+1}} = \frac{2}{\pi}\frac{(\operatorname{Log}\omega)^{j+1}}{j+1}.\tag{4.39}$$

第二项涉及多伽马函数，该函数在右半平面上解析，因此正则化极限可化为标准的柯西极限。利用表示式 [17, 5.15.3]

$$\psi^{(j)}\left(\frac{1}{2}\right) = (-1)^{j+1} j!\left(2^{j+1}-1\right)\zeta(j+1), \tag{4.40}$$

其中，$\zeta(z)$表示黎曼ζ函数，第二项的正则化极限正比于

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^{j+1}\pi}\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\omega^{-\nu}\left[\psi^{(j)}\left(\frac{2+\nu}{4}\right)-(-1)^j\psi^{(j)}\left(\frac{2-\nu}{4}\right)\right]\\ =\frac{(-1)^j}{2^{2j+1}\pi}\left(1-(-1)^j\right)\left(1-2^{j+1}\right)j!\,\zeta(j+1).\end{aligned} \tag{4.41}$$

注意，在 只有 j 的奇数值对求和有贡献 式。

第三项的计算需要在 $\nu=0$处的多伽马函数。 $z\to 0$ 的一个有用渐近展开为 [26]

$$\psi^{(j)}(z) = \frac{(-1)^{j-1}j!}{z^{j+1}} + (-1)^{j-1}j!\,\zeta(j+1)\left(1+\mathcal{O}(z)\right), \quad j=1,2,3,\ldots, \tag{4.42}$$

将其与方程（2.9）结合，可得到第三项的正则化极限：

$$\begin{aligned}-\frac{1}{2^{2j+1}\pi}\operatorname*{\times\lim}_{\nu\to 0}\omega^{-\nu}\left[\psi^{(j)}\left(\frac{\nu}{4}\right)-(-1)^j\psi^{(j)}\left(\frac{\nu}{4}\right)\right]\\ =-\frac{4}{\pi}\frac{(\operatorname{Log}\omega)^{j+1}}{j+1}+\frac{(-1)^j}{2^{2j+1}\pi}\left(1-(-1)^j\right)j!\,\zeta(j+1).\end{aligned} \tag{4.43}$$

代入所有已求得的正则化极限，化简所得各项，并应用黎曼ζ函数用伯努利数表示的公式 [17, 25.6.2],

$$\zeta(2j) = \frac{(-1)^{j-1}2^{2j-1}\pi^{2j}}{(2j)!}B_{2j}, \tag{4.44}$$

便得到定理 4.25 的方程（4.2）中给出的最终表达式。

现在，我们来验证方程（4.25）中的无穷级数绝对收敛。考虑 $a<\infty$ 的情形。可能有两种情况：要么 $a<\rho_o$，要么 $a>\rho_o$。我们先讨论 $\rho_o<a<\infty$ 的情形。在这种情况下，方程（4.25）中的无穷级数可作如下估计：

$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}⨍_0^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| \le \sum_{k=0}^{\infty}|\omega|^{2k}\left|⨍_0^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{2k+2}}\,\mathrm{d}t\right|. \tag{4.45}$$

根据 [2], 中的结果，方程（4.45）中的有限部分积分满足以下不等式：

$$\left|⨍_0^a\frac{k(t)\ln^n t}{t^{2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| \le |c_{2k+1}|\frac{|\ln\epsilon|^{n+1}}{n+1}+\frac{M_o(a,\epsilon)}{\epsilon^{2k+1}}, \tag{4.46}$$

其中，函数 $k(t)$ 展开为 $k(t)=\sum_{l=0}^{\infty}c_l t^l$，而 $M_o(a,\ \epsilon)$ 则由下式给出

$$M_o(a,\epsilon) = \int_{\epsilon}^{a}\frac{|k(t)\ln^n t|}{t}\,\mathrm{d}t+\sum_{j=0}^{n}\frac{|\ln\epsilon|^{\epsilon}}{j!}\sum_{\substack{l=0\\ l\neq 2k+1}}^{\infty}|c_l|\epsilon^l. \tag{4.47}$$

将不等式（4.46）代入方程（4.45）可得

(4.48)
$$\left|\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\omega^{2k}\fint_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^{2k+2}}\,\mathrm{d}t\right| \le \frac{|\ln\epsilon|^{n+1}}{n+1}\sum_{k=0}^{\infty}|c_{2k+1}\omega^{2k}| + \frac{M_o(a,\epsilon)}{\epsilon}\sum_{k=0}^{\infty}\left|\frac{\omega}{\epsilon}\right|^{2k}.$$

方程（4.48）中的级数要绝对收敛，两项都必须收敛。只要满足 $|\omega| < \rho_o$，第一项便收敛；而当 $|\omega| < \epsilon$时，第二项收敛。因此，当 $|\omega| < \rho_o$时，整个级数绝对收敛。

剩余情形 $a < \rho_o$ 可采用定理 4.1证明中使用的相同方法处理。在这种情况下，需要注意，函数 $k(t)$ 是整函数，因此可以表示为幂级数。因此，可以逐项积分，然后求和。

现在考虑 $a = \infty$的情形。与 $\nu \neq 0$情形一样，方程（4.25）中的无穷级数绝对收敛时必须有确定的值，前提是方程（4.1）中的广义斯蒂尔切斯变换在 $\nu = 0$ 处存在。这意味着，当 4.2 时，定理仍然成立 $a \to \infty$。

应用定理 4.1 中用于证明方程 (4.28) 中渐近关系的相同推理，将方程 (4.25) 改写为

(4.49) $$\int_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{\omega^2+t^2}\,\mathrm{d}t = \left(\fint_0^a \frac{k(t)\ln^n t}{t^2}\,\mathrm{d}t + O(\omega)\right) + \big(k(0)+O(i\omega)\big)\,\Delta_{n_1}(\nu,\omega),$$

当 $\omega \to 0$ 时。由方程 (4.26)，我们有 $\Delta_{n_1}(\nu,\ \omega) = O\big(\omega^{-1}\mathrm{Log}^n\omega\big)$，当 $\omega \to 0$ 时。因此，第二项在方程 (4.49) 中主导第一项和第三项，从而确立了方程 (4.28)。本定理下给出的证明遵循 [2] 中详述的相同结构。□

References

[1] E. A. Galapon, “逐项积分中涉及发散积分时缺项问题”，*Proceedings of the Royal Society A: Mathematical,Physical and Engineering Sciences*，第 473 卷，第 2197 期，第 20160567 页，2017年。[2] E. A. Galapon, “正则化极限、解析延拓与有限部分积分”，*Analysis and Applications*，第 21 卷，第 4 期，第 841–900 页，2023年。[3] L. L. Villanueva 和 E. A. Galapon, “竞争奇点存在时的有限部分积分：有限部分积分中出现的超几何函数的变换方程”，*Journal of MathematicalPhysics*，第 62 卷，第 4 期，2021年。[4] C. D. Tica 和 E. A. Galapon, “广义斯蒂尔切斯变换的有限部分积分及其参数取小值时的主导渐近行为。I. 整数阶”，*Journal of Mathematical Physics*，第 59 卷，第 2 期，第 023509 页，2018年。[5] C. D. Tica 和 E. A. Galapon, “广义斯蒂尔切斯变换的有限部分积分及其参数取小值时的主导渐近行为。II. 非整数阶”，*Journal of Mathematical Physics*，第 60 卷，第 1 期，第 013502 页，2019年。[6] C. D. Tica 和 E. A. Galapon, “通过有限部分积分将斯蒂尔杰斯级数延拓至大值区域”，*Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*，第 479 卷，第 2276 期，第 20230098 页，2023年。

[7] I. S. Gradshteyn 和 I. M. Ryzhik, 《积分、级数与乘积表》, Academic Press，2015年。[8] C. D. Tica、P. J. D. Blancas 和 E. A. Galapon, “海森堡–欧拉拉格朗日量发散展开的精确求值与重求和”，Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences，第 481 卷，第 2310 期，第 20240843 页，2025年。doi: 10.1098/rspa.2024.0843。[9] G. V. Dunne, “海森堡–欧拉有效拉格朗日量：基础与拓展”，载于《从场到弦：理论物理巡游》，2005年，第 445–522 页。doi: 10.1142/9789812775344 0014。[10] G. V. Dunne, “海森堡–欧拉有效作用量：75 年回顾”，International Journal of Modern Physics: Conference Series，第 14 卷，第 42–56 页，2012年。[11] S. Ahmed, “无穷级数的倒数与配分函数”，Integral Transforms and Special Functions，第 22 卷，第 6 期，第 443–452 页，2011年。[12] Wolfram Research, “第二类斯特林数：级数表示（公式 06.01.03. 0003）”，2001年。可访问：https://functions.wolfram.com/IntegerFunctions/StirlingS2/06/01/0003/。 [访问日期：6月 9, 2025]日。[13] L. Carlitz, “关于诺伦多项式 $B_n^{(z)}$的注记”，《美国数学学会会刊》，第 11 卷，第 452–455 页，1960年。[14] S. Jeong、M. Kim 和 J. Son, “伯努利数及其正特征对应物的显式公式”，《数论杂志》，第 113 卷，第 1 期，第 53–68 页，2005年。[15] F. T. Howard, “高阶伯努利数的同余与递推关系”，《斐波那契季刊》，第 32 卷，第 4 期，第 316–328 页，1994年。[16] P. T. Young, “伯努利–卢卡斯和的同余关系”，《斐波那契季刊》，第 55 卷，第 5 期，第 201–212 页，2017年。[17] F. W. J. Olver、A. B. Olde Daalhuis、D. W. Lozier、B. I. Schneider、R. F. Boisvert、C. W. Clark、B. R. Miller、B. V. Saunders、H. S. Cohl 和 M. A. McClain 编，《NIST 数学函数数字图书馆》。可访问：https://dlmf.nist.gov/。2025-12-15 发布的 1.2.5 版。[18] B. Farhi 和 S. Abdellah, “涉及两类伯努利数与斯特林数的公式”，《整数数列杂志》，第 28 卷，第 2 期，第 3 页，2025年。[19] E. W. Weisstein, “第一类斯特林数”，摘自 MathWorld——Wolfram 网络资源，Wolfram Research。可访问：https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheFirstKind.html。 [访问日期：6月9日，2025]。[20] E. W. Weisstein, “第二类斯特林数”，摘自 MathWorld——Wolfram 网络资源，Wolfram Research。可访问：https://mathworld.wolfram.com/StirlingNumberoftheSecondKind.html。 [访问日期：6月9日，2025]。[21] E. W. Weisstein, “诺伦多项式”，摘自 MathWorld——Wolfram 网络资源，Wolfram Resource。可访问：https://mathworld.wolfram.com/NorlundPolynomial.html。 [访问日期：6月 9, 2025]日。[22] D. Fliegner、M. Reuter、M. G. Schmidt 和 C. Schubert, “维数重整化中的双圈欧拉–海森堡拉格朗日量”，Theoretical and Mathematical Physics，第 113 卷，第 1442–1451 页，1997年。[23]G. V. Dunne 和 C. Schubert, “双圈自对偶欧拉–海森堡拉格朗日量（I）：实部与螺旋度振幅”，Journal of High Energy

《*Physics*》，第 2002 卷，第 08 期，第 053 页，2002 年 9 月。[24] I. Huet、M. Rausch de Traubenberg 和 C. Schubert，“单圈以上的欧拉–海森堡拉格朗日量”，《国际现代物理学杂志：会议系列》，第 14 卷，第 383–393 页，2012 年。[25] Y. A. Brychkov，《特殊函数手册：导数、积分、级数及其他公式》。Academic Press，2008 年。[26] Wolfram Research，“多伽马函数 2：级数表示（公式 06.13.03 .0004）”。2001 年。网址：
https://functions.wolfram.com/GammaBetaErf/PolyGamma2/06/01/03/01/02/0004/。[访问日期：6 月 9, 2025]。