arXiv:2602.17236v1 [math.CV] 19 Feb 2026

相切拟圆与拟环域的刻画

DIMITRIOS NTALAMPEKOS

Abstract. 我们给出一个充要条件，刻画球面上一对互不相交的 Jordan 区域何时可拟共形映射到一对圆盘。由此，我们针对其中一个 Jordan 区域为半平面的情形，得到一个涉及 Lipschitz 函数的简单刻画。我们应用这些结果证明，所有多项式尖点都拟共形等价，并且两个互不相交圆盘之并上的拟对称嵌入可定量地延拓为球面上的拟共形映射。此外，结合作者此前的工作，我们得到一个新刻画，描述哪些紧集与肖特基集拟共形等价。

Contents

1. 引言 1 2. 预备知识 9 3. 相对双曲度量 18 4. 函数图像与尖点 31 5. 拟共形延拓结果 37 6. 圆对嵌入的延拓 45 参考文献 47

1. Introduction

1.1. 动机。 本文研究这样一个问题：球面 $\mathbb{C} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ 中两个不相交的 Jordan$\widehat{\ }$区域能否通过 $\mathbb{C}$ 的拟共形同胚映射为一对不相交的圆盘$\widehat{\ }$。允许这些区域的闭包彼此相交。我们的目标是给出此类区域的一个具有定量性质的刻画。也就是说，拟共形畸变应仅取决于 Jordan 区域的几何特征，而不取决于它们的相对位置。

Ahlfors [Ahl63] 对可通过平面的拟共形同胚映射到圆的曲线给出了出色而深入的刻画。具体而言，平面中的若尔当曲线 J 可以拟共形地映射到一个

Date：2026年2月20日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类号 30C62、30C20；次要分类号 30F10、30F45。拟圆、拟圆盘、拟环域、相切拟圆、Schottky 集、一致化、拟共形、延拓、相对双曲距离。作者部分获得 ERC 初始资助的支持，资助协议编号为 101214615, GRComPaS。

圆，当且仅当存在 $L \geq 1$，使得对于任意一对点 z，$w \in J$，若 E 是连接 z 和 w 且直径最小的弧，则

$$\operatorname{diam}(E) \leq L|z-w|.$$

这样的若尔当曲线称为 L-拟圆。由拟圆所围成的区域称为拟圆盘。从几何上看，拟圆没有尖点。此外，在 Ahlfors 定理中，拟共形畸变与常数 L 在定量意义上相关。进一步的细节与定义见第 2.4 节。因此，若我们希望将一对不相交的 J ordan 区域 U, V 拟共形地映射到一对不相交的圆盘，则边界 $\partial U, \partial V$ 必须是拟圆。

不难看出，这一条件并不充分。例如，注意每个正方形的边界都是一个 2-拟圆。然而，我们不能用一个K-拟共形映射，将一对具有不相交闭包的不相交开正方形 U, V 映射到一对不相交的圆盘，其中 K 有界且不依赖于这些正方形的相对位置。具体而言，作者在 [Nta20 第 174–176] 页中观察到，当这些正方形的相对距离（定义为

$$\Delta(U,V) = \frac{\operatorname{dist}(U,V)}{\min\{\operatorname{diam}(U), \operatorname{diam}(V)\}},$$

收缩到 0，拟共形畸变 K 的值必定增大到 ∞。因此，仅假设 $\partial U, \partial V$ 是一致拟圆并不足够，但在这种情况下，相对距离也会影响拟共形畸变。

Herron [Her87] 给出了一个充分性准则，用于将两个不相交的 Jordan 区域 U, V 拟共形变换为两个圆盘，并具有定量控制。具体而言，若 $\partial U, \partial V$ 是 L-拟圆，且 $\Delta(\partial U, \partial V) \geq \delta > 0$，则存在一个具有所述性质的$K(L, \delta)$-拟共形映射。注意其逆命题并不成立。事实上，条件 $\Delta(\partial U, \partial V) \geq \delta$ 在拟共形意义下是拟不变的（见引理 2.2），而两个半径为 1、彼此非常接近甚至彼此相切的圆盘并不满足该条件。

在后续的一项工作中，Herron 和 Koskela [HK90] 证明，若 Ω 是一致域（见第 2.5 节），则存在一个球面的拟共形映射，将其映到一个圆域，即边界分支为点或圆的区域。一致域 Ω 的边界分支可以有无限多个，但它们全都是点或一致拟圆，并且一致相对分离；也就是说，它们之间的相对距离有统一的正下界。另一方面，一致域的定义还包含一项技术性要求，其强度甚至超过了这些条件。

二十年后，Bonk [Bon11]借助 Schramm [Sch95], 提出的一种强大工具——跨界模数，对上述结果进行了推广。Bonk 证明，若 $\{U_i\}_{i \in I}$ 是球面上一族互不相交的 Jordan 区域，且对每个 $i \in I$，∂U_i 都是一个 L-拟圆，并且对每个$i \neq j$，都有 $\Delta(\partial U_i, \partial U_j) \geq \delta > 0$，则存在一个球面的 $K(L, \delta)$-拟共形映射，将每个 U_i 映到一个圆盘。该结果蕴含 Herron 和 Koskela 定理，并表明，这种拟共形映射的存在应取决于区域 $U_i, i \in I$的几何性质，而非集合 $\mathbb{C} \setminus \bigcup_{i \in I} U_i$的内蕴几何。

Bonk 的结果应用于 Sierpi´nski 地毯的拟共形单值化问题、与几何群论中的 Kapovich–Kleiner 猜想相关的问题，以及与 Sierpi´nski 地毯相关的刚性结果 [BM13,BM20],

以及复动力系统中的刚性问题 [BLM16]。此外，该结果已推广至非平面地毯 [MW13,Reh22]。

复动力系统中一致化问题的最新进展，为无需一致相对分离假设的一致化结果开辟了道路。具体而言，Luo与作者 [LN24] 在一些温和条件下刻画了可拟共形映射为圆形垫圈的有理映射的Julia集；这些集合的补分支是可能在边界处彼此相切的Jordan 区域。特别地，这些Jordan 区域之间没有分离。 [LN24] 的方法在 [LMM26],中得到推广，其中证明某些Basilica Julia集以及Klein群的极限集可以拟共形映射为圆形Basilica。

虽然这些结果纯粹是动力系统意义上的，并不能推广到任意垫圈，但作者 [Nta25] 得到了球面中可拟共形映射为肖特基集的集合的一般刻画；也就是说，其补分支为圆盘的集合。 [Nta25]中的主要结果（在下文定理1.4中重述）断言：若 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是球面中互不相交的Jordan 区域的一个族，则存在球面的拟共形映射将每个 U_i映为圆盘，当且仅当该族 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是一致拟共形成对可圆化的；也就是说，存在 $K \geq 1$ ，使得对每一对 U_i， U_j、 $i \neq j$，都存在球面的一个 K-拟共形映射，将 U_i 与 U_j 映为圆盘。例如，借助Herron [Her87]的结果，在假设 $\Delta(\partial U_i,\ \partial U_j) \geq \delta$ 下该条件成立。因此，Bonk定理可作为其推论得到。

总而言之， [Nta25] 中的主要结果表明，若一组互不相交的 Jordan 区域中的任意一对都能以受控的伸缩商拟共形地统一化，那么就可以将这组区域拟共形地统一化为圆盘。因此，这个谜题中最后缺失的一块，就是刻画哪些互不相交的 Jordan 区域对可以拟共形映射为圆盘。这正是本文的主要目标。

1.2.主要结果。我们的主要结果对哪些互不相交的拟圆盘对可以拟共形映射为圆盘对给出了定量刻画。我们分别讨论两种基本情形：两个拟圆盘的边界相交于一点，或两个拟圆盘的闭包不相交。

主要结果通过本文引入的、对应于一对拟圆盘的相对双曲度量这一概念来表述。若$U \subset \mathbb{C}$是一个开集，我们用 U^*表示 U的补集。若 ∂U至少包含两个点，我们用 h_U 表示 U上的双曲度量。

设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为互不相交的 Jordan 区域，且 $U \cap V$为空集,或仅包含一个点；特别地， $\mathbb{C} \setminus (U \cup V)$ 是连通的。我们定义与这对区域 (V, U) 对应的相对双曲度量 如下:

$$d_{V,U}(z,w) = \inf_{\gamma}\{\ell_{h_{U^*}}(\gamma)\}, \quad z, w \in \partial V \setminus \overline{U},$$

其中下确界取遍满足$\gamma(a) = z$, $\gamma(b) = w$的可求长曲线 $\gamma\colon [a,b] \to U^* \setminus V$。事实证明,如果 V是拟圆盘，那么 $d_{V,U}$ 是$\partial V \setminus U$上的度量。详见第3.1节。当U, V 为互不相交的半平面，或它们的边界是同心圆时，可以显式计算该度量；参见引理3.1。第3.2节中，我们估计了若干其他有用情形下的度量。

我们的第一个主要结果刻画了拟圆盘U， V 在边界处有一个公共点的情形。我们可以假设这个公共

“相切”点位于 ∞。因此，在接下来的陈述中，我们使用$\mathbb{C}$ 的拓扑，而 $|\cdot|$ 表示欧几里得度量。

定理 1.1 （相切拟圆盘）**.** 设 U、$V \subset \mathbb{C}$ 为无界拟圆盘，且满足$U \cap V = \emptyset$。存在拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，将 U 与 V 映为半平面，当且仅当恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$$

在定量意义下是拟对称的。

证明见第 3.4 节。接下来，我们给出闭包互不相交的拟圆盘的相应结果。这里我们使用球面拓扑，χ 表示弦度量。

定理 1.2 （拟环域）**.** 设 U、$V \subset \mathbb{C}$ 为拟圆盘，且满足 $U \cap V = \emptyset$。存在拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，将 U 与 V 映为圆盘，当且仅当恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, \chi)$$

在定量意义下是拟 *Mobius* 的。

这一结果在第 3.5 节中证明。注意，这里我们需要转而使用准 Mobius 映射，它推广了拟对称映射，由 Vaisala [Vai84] 引入。原因在于，存在一个拟共形映射$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，将 U 和 V 映到圆盘，这一性质是拟共形不变量。然而，球面上的拟共形映射并非定量意义下的拟对称映射；一般而言，它们只是准 Mobius 映射。这在一定程度上说明了定理 1.2 中使用准 Mobius 映射的合理性。

我们可以将这两个陈述合并为一个，如下所示。同样，我们使用球面拓扑，证明见第 3.5 节。

定理 1.3。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为拟圆盘，且$U \cap V$至多包含一个点。当且仅当恒等映射存在一个拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，将 U 和 V 映到圆盘

$$\mathrm{id}\colon (\partial V \setminus \overline{U}, d_{V,U}) \to (\partial V \setminus \overline{U}, \chi)$$

是定量的拟 *Mobius*。

我们想强调这些结果的定量的性质。例如，在定理 1.3 中，如果 U, V是 L-拟圆盘，且所示的恒等映射是 η-拟 Mobius，那么拟共形映射 f 是 $K(L, \eta)$-拟共形的。反过来，如果f 是 U, V是 L-拟圆盘，且 f 是 K-拟共形的，那么所示的恒等映射是 η-拟 Mobius，其中 η 仅依赖于 K, L。注意，在上述结果中，我们优先采用定义在 ∂V 上的度量 $d_{V,U}$。当然，U, V 的作用是对称的，因此也可以改用定义在 ∂U 上的度量 $d_{U,V}$。

在第3.2节中，我们针对一些特殊且实用的情形，确立了上述定理的条件。这里给出示意图，并将精确表述留待第3.2节。我们在引理 3.2 中证明，当 U, V 是边界接近平行直线的无界拟圆盘时，定理 1.1 的条件定量成立；见图1。更一般地，在引理3.3中我们看到，如果 U, V 被一条弦弧曲线 J 分隔，且该曲线到 ∂U, ∂V 的距离和豪斯多夫距离都与 1 可比，那么该条件成立；见图2。此外，若 $\Delta(\partial U, \partial V)$ 的下界严格大于 0（

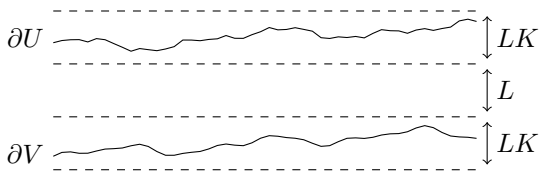


FIGURE 1. 两个无界拟圆盘 U, V，其边界与平行直线接近，如引理 3.2 所示。在这种情况下，$d_{V,U}(z,w) \simeq_K$距离$_e(\partial U, \partial V)^{-1}|z-w|$。

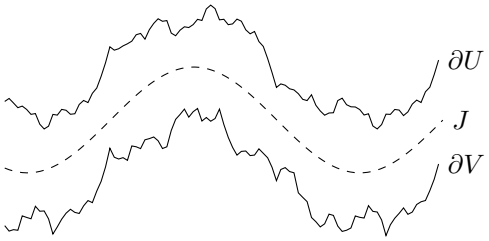


FIGURE 2. 两个无界拟圆盘 U, V 以及一条弦弧曲线J，它到 ∂U, ∂V 中每一个的距离和豪斯多夫距离都与 1 相当，如引理3.3 所示。在这种情况下，$d_{V,U}(z,w) \simeq_K |z-w|$。

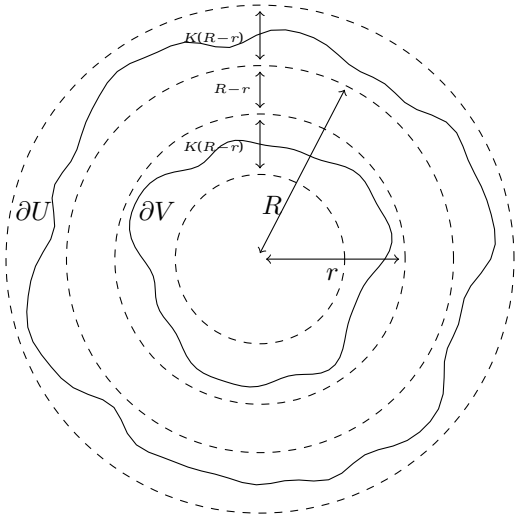


FIGURE 3. 两个拟圆盘 U, V 其边界接近同心圆，如引理 3.4 所示。在这种情况下，$d_{V,\ U}(z,\ w) \simeq_K$距离$_e(\partial U,\ \partial V)^{-1}|z-w|$。

与 0 保持距离（见引理 3.5），或者如果 U, V 是边界接近同心圆的互不相交拟圆盘（见引理 3.4），如图3所示，则定理 1.2 的条件定量成立。

人们可以问，是否存在比定理 1.3 中的条件更简单的条件，来刻画能够被拟共形映射到

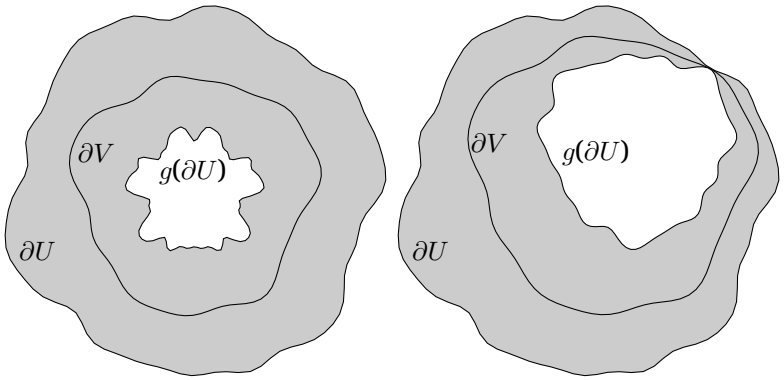


FIGURE 4. 灰色所示为区域 Z，该区域由 ∂U 以及 ∂U 沿 ∂V的拟共形反射 $g(\partial U)$所围成；左图对应 $U \cap V = \emptyset$的情形，右图对应 $\overline{U \cap V}$为单点集的情形。

圆的拟圆对。例如，拟圆可以用交比来刻画（见 (2.2)），因此若能对拟圆对给出类似的刻画，将是理想的。然而，这种过于简单的判据很可能并不存在。事实上，在下文的定理 1.5 中，我们给出了一个简洁的刻画，适用于其中一个拟圆是直线、另一个是利普希茨函数图像的情形；然而，这一刻画仍然颇为复杂，与涉及交比的几何条件相去甚远。

主要结果的证明依赖于拟共形映射与拟对称映射理论中的若干工具，同时也依赖于经典的共形几何与双曲几何。此外，我们还使用一致域的概念，以及双曲度量与拟双曲度量在拟共形映射下的畸变性质。所有所需的预备知识均包含在第2节中。

为了证明这些定理，我们需要证明如下条件，即

$$\text{the map } \ \mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, \chi) \ \text{ is quasi-Möbius}$$

具有拟共形不变性。定理的必要性部分可由以下事实轻易推出：当 U, V 为圆盘时，该条件成立。上述拟共形不变性源于我们所建立的相对双曲度量 $d_{V,U}$ 的一些特殊性质。一个重要的要素是，若 f 是一个将拟圆盘 U, V 映射到U', V'的球面拟共形同胚，则该映射

$$f\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V', d_{V',U'})$$

是拟对称的。这一点已在定理 3.6 中得到证明。另一个重要工具可用于估计$d_{V,U}$：它与区域 Z 中的拟双曲距离拟对称等价，该区域由 ∂U 及沿 ∂V对 ∂U 作的某个拟共形反射所界定；参见推论 3.10 和图4。

主要结果证明中的一个难点是，为了估计 $d_{V,\,U}$，需要进行多次归一化。理想情况下，我们希望∂U 和 ∂V 接近同心圆或平行直线，但只有在归一化并进行某些变换后才能做到。另一个问题是，在定理 1.2 的设定中，我们无法用拟对称映射将 ∂U，∂V 映射到同心圆，只能使用拟共形映射或拟 M¨obius 映射。

因此，在整个证明过程中，估计都变得更加微妙，需要确保定量控制不丢失。

现在，我们讨论主要定理在几何函数论中各种问题上的一些应用。

1.3. 肖特基集。 我们可以将定理 1.3 纳入[Nta25]的主要定理中，并得到肖特基集的以下拟共形刻画。

定理1.4（肖特基集）。设 $\{U_i\}_{i\in I}$ 是由至少两个互不相交的 *Jordan* 区域组成的集合，且位于 $\mathbb{C}$ 中，使得对于 $i \neq j$，$\overline{U_i} \cap \overline{U_j}$ 至多包含一个点。以下条件在定量意义下等价。

(i) 对于每一对不同的 $i, j \in I$，恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial U_i \setminus \overline{U_j}, d_{U_i,U_j}) \to (\partial U_i \setminus \overline{U_j}, \chi)$$

是一致拟共形的 -M¨

莫比乌斯映射。(ii) 对于每个 $i, j \in I$，存在一个从 $\mathbb{C}$ 到自身的一致拟共形同胚，它将 U_i 和 U_j 映到圆盘。(iii) 存在一个从 $\mathbb{C}$ 到自身的拟共形同胚 f，对于每个 $i \in I$，它都将 U_i 映到一个圆盘，并且在 $S = \mathbb{C} \setminus \bigcup_{i\in I} U_i$上是1-拟共形的。

在这种情况下，映射 $f|_S$ 在后复合一个 $\mathbb{C}$的共形自同构的意义下是唯一的。

1.4. 图像与尖点。 我们应用定理 1.1，对上半平面 $\mathbb{H}$ 中可通过 $\mathbb{H}$的拟共形同胚映到直线的利普希茨函数图像和拟圆进行刻画。本节结果的证明见第 4 节。值得注意的是，接下来的两个结果揭示了利普希茨几何与拟共形几何之间有趣的相互作用。

定理 1.5（图像）。设 $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ 为一个利普希茨函数。当且仅当 $1/f$ 的一个原函数是拟对称的，存在一个保持实轴不变、并将 f 的图像映射到一条直线上的 $\mathbb{C}$ 拟共形同胚。该结论是定量的。

例如，函数 $f(x) = (|x| + 1)^{-p}$, $p > -1$ 的图像和直线$y = 0$ 可以拟共形地映射到一对平行直线上。另一方面，对于 $f(x) = e^{-|x|}$，这是不可能的。详情见例 4.2。接下来，我们给出上半平面内无界若尔当曲线的一种实用刻画：这类曲线可以通过一个保持实轴不变的拟共形映射映射到一条直线上。这里，无界若尔当曲线是指一个集合 $J \subset \mathbb{C}$，使得 $J \cup \{\infty\}$ 在球面拓扑下是若尔当曲线。无界若尔当曲线的每个补分支都是一个无界 *Jordan* 区域。

定理 1.6. 设 $U \subset \mathbb{H}$ 是一个无界 *Jordan* 区域。存在 $\mathbb{C}$ 的拟共形同胚，它保持实数轴并将 ∂U 映成一条直线，当且仅当

(1) U 是拟圆盘，(2) 存在一个1-*Lipschitz*函数 $f\colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ 以及 $a \geq 1$，使得$\partial U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\colon a^{-1}f(x) \leq y \leq af(x)\}$，且(3) $1/f$ 的一个原函数是拟对称的。

该结论是定量的。

该证明依赖于定理 1.1，是本文中技术性最强的论证之一。

作为定理 1.5 的一个应用，我们证明多项式尖点 $C_\alpha = \{(x,\ y) \in \mathbb{R}^2 :\ |y| = x^\alpha,\ 0 \le x \le 1\}$，其中 $\alpha > 1$。

推论 1.7（尖点）。所有多项式尖点都拟共形等价。

或许可以找到一个显式的拟共形映射。Chrontsios–Tyson 的一项近期相关成果 [CGT23] 给出了多项式螺旋 $S_\alpha = \{x^{-\alpha}e^{ix}$ 的拟共形分类：$x > 0\}$, $\alpha > 0$。具体而言，研究表明，对于 $\alpha > \beta > 0$，当且仅当 $K \ge \alpha/\beta$ 时，S_α 可以通过一个 K-拟共形映射映到 S_β。若能为尖点证明类似的结果，将会很有意思。

此外，值得一提的是，尖点无法通过从 $\mathbb{C}$出发的拟共形映射拉直为线段，因为这类映射拟保角。然而，尖点可以通过有限畸变映射拉直；这一类映射推广了拟共形映射，而拟共形映射具有有界畸变。这个问题在论文系列 [KT07,Tak07, KT10a, KT10b, GKT14, IOZ21]中得到了研究。

1.5. **拟共形延拓问题**。我们将定理 1.3 的另一项应用介绍到拟共形延拓拟对称映射或拟-M¨obius 映射的问题中，并给出定量结果。Ahlfors 和 Beurling[BA56,Ahl 63], 证明了一个经典结论：单位圆到平面的每个拟对称嵌入，都可以定量地延拓为平面上的拟共形同胚（见推论 2.9）。更一般地，对于拟圆的每个拟对称嵌入，同样的结论也成立。对于哪些其他类别的集合，这样的结果也成立?

Vellis [Vel20] 研究了补域为一致区域的相对连通紧集这一情形；定义请参阅所引论文。因此，对于几何性质受控的集合，延拓问题已经得到了令人满意的解决。例如，中三分康托集的每个拟对称嵌入都可以延拓为平面的拟共形同胚，并且具有定量控制 [Mac99]。

作为主要定理的应用，我们解决了圆对嵌入的延拓问题。注意，两个相切圆盘的补域并非一致区域。此外，若两个圆盘的闭包不相交，则其补域是一致区域；但是，当两个圆盘趋于相切时，一致常数会退化。因此，先前的结果不适用于这些情形。

定理 1.8 (相切圆盘**)**。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 是两个不相交的相切圆盘，且 $f\colon \partial U \cup \partial V \to \mathbb{C}$ 是一个拟莫比乌斯嵌入。那么，存在 f 到$\widehat{}$的一个（可能是反向的）拟共形同胚延拓，并且具有定量控制。

请注意，我们并未假设 f 可延拓为球面的同胚；这一点可由 f 是准 M¨ öbius 映射以及 $\partial U \cap \partial V \neq \emptyset$这一假设推出。不过，在下一个结果中，显然必须假设存在一个同胚延拓。

定理 1.9（环域）。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为闭包互不相交的圆盘，且 $f\colon \partial U \cup \partial V \to \mathbb{C}$ 为拟 M¨比奥斯嵌入，并可延拓为 $\mathbb{C}$上的保向同胚。记 Γ（分别记 Γ'）为分离 ∂U与 ∂V（分别为 $f(\partial U)$ 与 $f(\partial V)$）的曲线族。假设下列条件之一成立。

(1) $K_0^{-1} \leq \dfrac{\operatorname{Mod}\Gamma'}{\operatorname{Mod}\Gamma} \leq K_0$ *for some* $K_0 \geq 1$.

(2) $\operatorname{Mod}\Gamma \leq M$ *for some* $M > 0$.

$\widehat{}$那么，存在一个将 f 延拓为 $\mathbb{C}$上的拟共形同胚的延拓，并且该延拓具有定量控制。

由于拟共形映射近似保持模数，显然，(1) 中的模数界是实现定量控制的延拓的必要条件。当 $\operatorname{Mod}\Gamma$ 较小时，如 (2) 所示，条件 (1) 可由嵌入 f 是拟 Möbius 的假设推出。一般而言，(1) 并不能由假设 f 是拟 Möbius 推出，也不能省略。事实上，考虑映射 f ： 它在单位圆 $\mathbb{S}$(0，1) 上是恒等映射，并将圆$\mathbb{S}$(0，e^{-n})缩放到 $\mathbb{S}$(0，$\frac{1}{n}$)，其中 $n \geq 2$。对于某个不依赖于 n 的畸变函数 η ，该映射是 η-拟对称的，也是 η-拟 Möbius 的（见下文性质 (Q-3)）。然而，(1) 对于与 n 无关的常数 K_0 并不成立。

定理 1.8 和定理 1.9 在第 6 节中证明，并基于第 5 节中的若干拟共形延拓结果。例如，我们证明，两个平行直线对之间或两个同心圆对之间的拟对称映射可以延拓为平面上的拟共形映射。尽管这类结果看起来十分自然，并且已在复动力系统中得到广泛应用 [BF14, Section 2.3], ，但我们尚未能在文献中找到定量的证明。具体而言，定理 1.8 中延拓的拟共形畸变仅取决于拟莫比乌斯嵌入 f的畸变函数。定理 1.9 的证明则更加微妙，其中伸缩商还取决于条件 (1) 或 (2) 中出现的常数。

2. Preliminaries

2.1. 记号。 如果 a 是一个参数，我们用记号 $C(a)$ $L(a)$ 等表示仅依赖于该参数 a 的正常数。对于量 A和 B ，若存在常数 $c > 0$ 使得 $A \leq cB$，则记作$A \lesssim B$ 。如果常数 c还依赖于另一个我们希望特别强调的量 H ，则改记为$A \leq c(H)B$ 或 $A \lesssim_H B$。此外，如果 $A \lesssim B$ 且$B \lesssim A$，我们使用记号 $A \simeq B$ 。与前文一样，我们用 $A \simeq_H B$ 强调隐含常数对量 H的依赖关系。所有陈述中的常数均假定为正，即使未明确说明也是如此；不同陈述中也可能用同一个字母表示不同的常数。如果结论中出现的常数或参数仅依赖于假设中的常数或参数，我们就称该陈述是定量的。

上的弦度量 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的弦度量定义为： $z \in \mathbb{C}$

$$\chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \text{ when } w \in \mathbb{C} \text{ and } \chi(z,\infty) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}}.$$

设 (X,d) 为一个度量空间。以点$x \in X$为中心、半径为 $r > 0$ 的开球记为 $B_d(x,r)$，闭球记为 $B_d(x,r)$。集合 $E \subset X$ 的直径记为 $\operatorname{diam}(E)$，若需强调度量，则记为 $\operatorname{diam}_d(E)$。曲线 $\gamma\colon [a,b] \to X$的长度记为 $\ell_d(\gamma)$。迹γ 是集合 $|\gamma| = \gamma([a,b])$。对于 $\mathbb{R}^n$ 中的欧几里得度量，必要时我们使用下标e 。例如， $B_e(z,r) = \{w \in \mathbb{R}^n : |z-w| < r\}$。此外，特别是对于复平面中的欧几里得度量，我们还使用记号

$\mathbb{D}(z,r)$ 表示球 $B_e(z,r)$，$\mathbb{S}(z,r)$ 表示圆 $\partial B_e(z,r)$，$\mathbb{A}(z;\,r,R)$ 表示环域 $\{w\in\mathbb{C}:\, r<|z-w|<R\}$，其中 $R>r>0$。

2.2. **拟共形映射**。设 $K\geq 1$。保向同胚 phism $f\colon U\to V$ 在 $\mathbb{C}$ 的开子集之间是拟共形 的，当且仅当 f 属于索伯列夫空间 $W^{1,2\,\mathrm{loc}}(U)$，并且

$$\|Df(z)\|^2\leq KJ_f(z)$$

对几乎处处的 $z\in\mathbb{C}$成立；这里 $\|\cdot\|$ 表示矩阵 Df 的算子范数，而 J_f 是其雅可比行列式。在这种情况下，我们称 f 为 K-拟共形映射。同胚-^映射 $f\colon U\to V$ 在 $\mathbb{C}$ 的开子集之间是拟共形的，如果 $f|_{U\setminus\{\infty,f^{-1}(\infty)\}}$按照上述定义是拟共形的。我们将直接使用以下基本事实：拟共形映射的反函数是拟共形的，两个拟共形映射的复合也是拟共形的，而 1-拟共形映射是共形的。更多背景知识请参阅 [LV73]，高维拟共形映射理论请参阅 [V¨ai71]。

除非另有说明，拟共形映射均视为保向映射，如上述定义所示。我们也以显然的方式定义反向拟共形映射。

我们将使用曲线族 Γ 的模这一概念，记作 $\operatorname{Mod}\Gamma$；定义及详情参见 [LV73, Chapter I]。这里记录一些基本事实。设 Γ 是环域 $\mathbb{A}(z;\,r,R)$ 中分隔边界分支的曲线族，其中 $0<r<R<\infty$。则有

$$\operatorname{Mod}\Gamma=\frac{1}{2\pi}\log\left(\frac{R}{r}\right).$$

注意，模在共形映射下保持不变，在拟共形映射下拟不变。也就是说，若 $f\colon U\to V$ 是 $\mathbb{C}$ 的两个开子集之间的一个 K-拟共形映射，且 Γ 是 U 中的曲线族，则

$$K^{-1}\operatorname{Mod}\Gamma\leq\operatorname{Mod}f(\Gamma)\leq K\operatorname{Mod}\Gamma.$$

2.3. **拟莫比乌斯¨与拟对称映射**。设 (X,d_X) 是一个度量空间。我们将不同点组成的四元组 $a,b,c,d\in X$ 的交比定义为

$$[a,b,c,d]=\frac{d_X(a,c)d_X(b,d)}{d_X(a,d)d_X(b,c)}.$$

^注意，若 $X=\mathbb{C}$配备弦度量，且 a，b，c，$d\neq\infty$，则

$$[a,b,c,d]=\frac{|a-c||b-d|}{|a-d||b-c|}.$$

含有点 ∞的因子省略不写。例如，

$$[a,b,c,\infty]=\frac{|a-c|}{|b-c|}.$$

同胚 $\eta\colon[0,\infty)\to[0,\infty)$ 称为畸变函数。度量空间之间的同胚 $f\colon(X,\ d_X)\to(Y,\ d_Y)$ 称为拟-M¨比奥斯，如果存在一个畸变函数 η 使得

$$[f(a),f(b),f(c),f(d)]\leq\eta([a,b,c,d])$$

对于每一组互不相同的四个点 a、b、c、$d\in X$。在这种情况下，我们称 f 是 ∽η-拟 M¨obius。假设 X、$Y\subset\mathbb{C}$ 和 $f\colon X\to Y$ 是 η-拟 M¨obius。那么

X 和 Y 中的交比可以用弦距离或欧几里得距离计算，两者可以互换（当所涉及的点都不同于 ∞ 时）。因此，我们无需指定在 X 和 Y 中使用哪一种度量。此外，由于交比在 M¨obius 变换下保持不变， f 与 M¨obius 变换的复合也同样是 η-拟 M¨obius。

度量空间之间的同胚 $f\colon (X,\ d_X) \to (Y,\ d_Y)$ 称为拟对称，如果存在畸变函数 η 使得

$$\frac{d_Y(f(a),f(b))}{d_Y(f(a),f(c))} \le \eta\left(\frac{d_X(a,b)}{d_X(a,c)}\right)$$

对于每组三个互异点 $a,\ b,\ c \in X$。此时我们称 f 是 η-拟对称的。根据定义可得一个初等结论（参见 [Hei01，命题 10.8]）：若 $A \subset B \subset X$ 且 $0 < \operatorname{diam}(A) \le \operatorname{diam}(B) < \infty$，则 $\operatorname{diam}(f(B)) < \infty$ 且

$$\frac{1}{2\eta\left(\frac{\operatorname{diam}(B)}{\operatorname{diam}(A)}\right)} \le \frac{\operatorname{diam}(f(A))}{\operatorname{diam}(f(B))} \le \eta\left(\frac{2\operatorname{diam}(A)}{\operatorname{diam}(B)}\right). \tag{2.1}$$

度量空间之间的同胚 $f\colon (X,\ d_X) \to (Y,\ d_Y)$ 称为双 *Lipschitz*，如果存在 $L \ge 1$ 使得对所有 $x,\ y \in X$，均有

$$L^{-1}d_X(x,y) \le d_Y(f(x),f(y)) \le Ld_X(x,y).$$

此时我们称 f 是 L-双 Lipschitz 的。

我们列出上述几类映射的一些基本性质。

(Q-1) 若 f 是 η-拟对称的（相应地，拟M¨obius），则对 $\eta'(t) = 1/\eta^{-1}(t^{-1}),\ t > 0$，$f^{-1}$ 是 η'-拟对称的（相应地，拟M¨obius）。此外，若 f 是η_1-拟对称的（相应地，拟M¨obius）且 g 是 η_2-拟对称的（相应地，拟M¨obius），则 $g\circ f$ 是 $(\eta_2\circ\eta_1)$-拟对称的（相应地，拟M¨obius）。

(Q-2) 设 $X,Y \subset \mathbb{C}$（相应地，有界）且 $f\colon\ X \to Y$是 η-拟对称的（相应地，η-拟 M¨obius）。则 f 可延拓为从 X 到 Y上的 η-拟对称（相应地，η-拟M¨obius）同胚。

(Q-3) 拟对称映射是定量拟 M¨obius 映射 [V¨ai84，定理 3.2]。反之，有界度量空间之间的拟 M¨obius 映射是拟对称的 [V¨ai84，定理 3.12]。具体而言，若 $f\colon\ X \to Y$是拟 M¨obius 映射，且存在 $\lambda \ge 1$ 以及点 $x_1,\ x_2,\ x_3 \in X$，使得

$$d_X(x_i,x_j) \ge \lambda^{-1}\operatorname{diam}(X) \text{ and } d_Y(f(x_i),f(x_j)) \ge \lambda^{-1}\operatorname{diam}(Y) \text{ for } i \ne j,$$

则 f 是定量拟对称的。

(Q-4) $\mathbb{C}$ 的开子集之间的拟 M¨obius 映射是定量拟共形的 [V¨ai84，定理 5.2]。反之，圆盘 $\mathbb{D}$ 或球面 $\mathbb{C}$ 的拟共形自同胚 $\widehat{}$ 是定量拟 M¨obius 映射 [V¨ai84，定理 5.4]。

(Q-5) 设 X 是一个无界度量空间， Y 是一个度量空间，且$f\colon\ X \to Y$是 η-拟 M¨obius。若当 $x \to \infty$时 $f(x) \to \infty$，则 f 是 η-拟对称 [V¨ai84，定理3.10]。

(Q-6) 设 $f\colon\ U \to V$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的开子集之间的 K-拟共形映射。对每个 $a > 1$，都存在一个畸变函数 η，它仅依赖于 $n,\ K$ 和 a，使得如果 $B_e(z,\ r) \subset B_e(z,\ ar) \subset U$，那么 f 在 $B_e(z,\ r)$ 中是 η-拟对称的 [Hei01，定理 11.4]。

(Q-7) 若 $f\colon X \to Y$ 是度量空间之间的 L-双 Lipschitz 映射，则对于 $\eta(t) = L^2 t$，f 是 η- 拟对称的。若 X，Y 是 $\mathbb{C}$ 中的区域，则 f 是 L^2- 拟共形的 [V¨ai71，定理 34.1]。

一个连续统 E 是紧致且连通的度量空间。如果 E 包含多个点，我们称 E 为非退化连续统。我们将度量空间中两个不相交的紧子集 E, F（每个都包含多个点）之间的相对距离 定义为

$$\Delta(E,F) = \frac{\operatorname{dist}(E,F)}{\min\{\operatorname{diam}(E), \operatorname{diam}(F)\}}.$$

和之前一样，我们使用记号 $\Delta_d(E,F)$ 来强调所用的度量。

引理 2.1。设 $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ 是度量空间之间的拟对称同胚。设 $E, F \subset X$ 为具有正直径的集合。那么

$$\frac{\operatorname{dist}(f(E),f(F))}{\operatorname{diam}(f(E))} \le \eta\left(2\frac{\operatorname{dist}(E,F)}{\operatorname{diam}(E)}\right).$$

证明。设 $x \in E$, $z \in F$ 为任意点，且令 $\varepsilon > 0$。那么存在一点 $y \in E$ 使得 $d(x, y) \ge \frac{1}{2+\varepsilon}\operatorname{diam}(E)$。我们有

$$\frac{\operatorname{dist}(f(E),f(F))}{\operatorname{diam}(f(E))} \le \frac{d(f(x),f(z))}{d(f(x),f(y))} \le \eta\left(\frac{d(x,z)}{d(x,y)}\right) \le \eta\left((2+\varepsilon)\frac{d(x,z)}{\operatorname{diam}(E)}\right).$$

对 x, z 取下确界，并令 $\varepsilon \to 0$，即可得出结论。 □

引理 2.2 ([Nta25，引理 2.4])。设 $f\colon (X,d_X) \to (Y,d_Y)$ 是度量空间之间的 η-准 *M¨obius* 同胚。那么存在一个仅依赖于 η 的畸变函数 $\widetilde{\eta}$，使得对于任意一对不相交的非退化连续体 $E, F \subset X$，都有

$$\Delta(f(E),f(F)) \le \widetilde{\eta}(\Delta(E,F)).$$

注 2.3。我们记录引理 2.2 的一个简单推论。恒等映射 $\mathrm{id}\colon (\mathbb{C},\chi) \to (\mathbb{C},|\cdot|)$ 保持交比，因此对于 $\eta(t) = t$，它是 η-准 M¨obius 映射。如果 $E, F \subset \mathbb{C}$, $a > 0$，且 $\Delta_\chi(E,F) \le a$（分别为 $\ge a$），那么引理 2.2 意味着 $\Delta_e(E,F) \le \widetilde{\eta}(a)$（分别为 $\ge (\widetilde{\eta})^{-1}(a)$）。反过来，如果 $\Delta_e(E,F)$ 有上界或下界，则可得到 $\Delta_\chi(E,F)$ 的界。

2.4. **拟圆盘与拟圆**。如果集合 $U \subset \mathbb{C}$ 是单位圆盘 $\mathbb{D}$（或等价地，任意其他圆盘）在某个拟共形同胚映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 下的像，则称其为拟圆盘。若 f 对某个 $K \ge 1$ 是 K-拟共形的，则称 U 为 K-拟圆盘。注意，拟圆盘的补集也是拟圆盘。若集合 $U \subset \mathbb{C}$ 作为 $\widehat{\mathbb{C}}$ 的子集是无界的，且作为 $\mathbb{C}$ 的子集是拟圆盘，则称其为无界拟圆盘。

令 $J \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 为一条若尔当曲线。若存在常数 $L \ge 1$，使得对每一对点 $z, w \in J$，都存在一条弧 $E \subset J$，其端点为 z, w，并且满足

$$\operatorname{diam}_\chi(E) \le L\chi(z,w).$$

在这种情况下，我们称 J 是一个 L-拟圆。注意，J 是拟圆，当且仅当存在一个常数 $L' \ge 1$，使得对于任意一对点 z，$w \in J \setminus \{\infty\}$，都存在一条弧 $E \subset J \setminus \{\infty\}$，其端点为 z，w，使得

$$\operatorname{diam}_e(E) \le L'|z-w|.$$

这种等价关系是定量的，且由 [Bon11，命题 4.4] 得出；事实上，文中证明了上述两个条件在定量意义上都等价于以下条件：存在 $\delta > 0$，使得对于循环序中任意四个互不相同的点 a，b，c，$d \in J$，都有

$$[a, b, c, d] \geq \delta > 0. \tag{2.2}$$

若 J 是一个拟圆且 $\infty \in J$，我们称集合 $J \setminus \{\infty\} \subset \mathbb{C}$ 为一个无界拟圆。下一个结果是初等的，可由 Nta25 引理 3.2] 的证明中的论证得出。

引理 2.4。设 J 是一个包含于条带 $\{z \in \mathbb{C} : \ a < \mathrm{Im}(z) < b\}$中的无界拟圆。那么 J 将该条带的边界分支分隔开。

Ahlfors 的以下深刻结果揭示了拟圆盘与拟圆之间的联系。

定理 2.5（Ahlfors [Ahl63]）。设 $U \subset \mathbb{C}$ 是一个 *Jordan* 区域且 $J = \partial U$。那么，U 是拟圆盘，当且仅当 J 是拟圆，且具有定量关系。

证明见 [Ahl06, 第 IV.D 节] 或 [LV73, 定理 II.8.6] 或[Pom92, 第 5]节。拟圆具有拟共形可去性，即如果一个 $\mathbb{C}$ 上的同胚在拟圆 J 的补集中是拟共形的，那么它在整个 $\mathbb{C}$ 上都是拟共形的；参见 [LV73, 定理 I.8.3]。

一个沿若尔当曲线的拟共形反射 $J \subset \mathbb{C}$ 是一个保向　反转的拟共形映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 满足 $f(z) = z$ 对每个 $z \in J$ 均成立，并且 f 交换 J 的补分支。每个拟圆盘都存在拟共形反射；参见 [Ahl06, 第 IV.D 节]。

命题 2.6。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为拟圆盘，且 $f : U \to V$ 为拟共形同胚。那么存在一个将 f 延拓为 $\mathbb{C}$ 的拟共形同胚的延拓，且其定量性质可控。

证明。映射 f 延拓为闭包 U, V 之间的同胚；参见 [LV73，定理 I.8.2]。拟圆盘 U，V 分别存在拟共形反射 g, h。映射 F 在 U 上由 f 定义，在 $\mathbb{C} \setminus U$ 上由 $h \circ f \circ g$ 定义，它是 $\mathbb{C}$ 的同胚　，并且在 U 和 $\mathbb{C} \setminus U$ 上均为拟共形映射。拟圆的拟共形可去性意味着 F 在 $\mathbb{C}$ 上是拟共形映射。□

我们回顾著名的 Beurling–Ahlfors 延拓定理。

定理 2.7 (Beurling–Ahlfors [BA56])。设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个递增的拟对称同胚。那么存在一个将 f 延拓为上半平面 $\mathbb{H}$ 上的拟共形同胚的延拓，且具有定量控制。

这一结果可直接推出单位圆 $\partial\mathbb{D}$ 上拟对称映射的延拓结果。

推论 2.8。设 $f : \partial\mathbb{D} \to \partial\mathbb{D}$ 为保向同胚。

(1) 如果 f 是拟 *Möbius*，那么存在一个将 f 延拓为 $\mathbb{D}$ 上的拟共形同胚的延拓，且具有定量控制。(2) 如果 f 是拟对称的，那么存在一个将 f 延拓为 $\mathbb{D}$ 上的拟对称同胚的延拓，该同胚固定点 0，且具有定量控制。

证明。对于 (1)，设 f 是 η-拟 M¨obius。通过将 f 与一个旋转复合，我们可以假设它固定点 1。考虑一个将 1 映到 ∞ 并将 $\partial\mathbb{D}\setminus\{1\}$ 映到 $\mathbb{R}$ 的 M¨obius 变换 ϕ: $\mathbb{D}\to\mathbb{H}\cup\{\infty\}$。映射 $\phi\circ f\circ\phi^{-1}\colon \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是一个递增的 η-拟 M¨obius 同胚。事实上，根据性质 (Q-5)，它是 η-拟对称的。因此，由定理 2.7，该映射可定量地延拓为 $\mathbb{H}$ 上的拟共形同胚 F。映射 $G=\phi^{-1}\circ F\circ\phi$ 就是第 (1) 部分所要求的拟共形延拓。

若 $f\colon \partial\mathbb{D}\to\partial\mathbb{D}$ 如 (2) 中所述是 η-拟对称的，那么对于点 $z_1=1$、$z_2=i$、$z_3=-1$，由 (2.1) 可得 $|f(z_i)-f(z_j)|\simeq_\eta 1$，其中 $i\neq j$。考虑由第 (1) 部分给出的延拓 G。由 (Q-4) 和 (Q-2)，映射 G 在 $\mathbb{D}$ 中是拟 Möbius 的。因此，由性质 (Q-3)，延拓 G 是定量拟对称的。令 $A\subset\mathbb{D}$ 为从 $G(0)$ 到 $\partial\mathbb{D}$ 的径向线段。由于

$$\frac{1}{2}\le\frac{\operatorname{diam}(G^{-1}(A))}{\operatorname{diam}(\mathbb{D})}\le 1,$$

由 (2.1) 可得 $\operatorname{diam}(A)\simeq_\eta 1$。因此，$|G(0)|\le r(\eta)<1$。现在我们可以在 G 后复合一个 $\mathbb{C}$ 上的 $L(\eta)$-双 Lipschitz 映射，该映射将 $G(0)$ 映到 0，并且在 $|z|\ge {}^{1+r}{}_{(\eta)}{}_{2}$ 上是恒等映射。根据性质 (Q-7)，复合后仍然是定量拟对称的。□

推论 2.9. 设 $f\colon A\to\mathbb{C}$ 是拟对称嵌入，其中 $A=\mathbb{R}$ 或 $A=\partial\mathbb{D}$ 和 f 保向。则存在 f 的延拓，使其成为 $\mathbb{C}$ 上的拟共形同胚，且具有定量控制。

证明。我们证明 $A=\partial\mathbb{D}$ 成立的情形。另一种情形的证明类似。由 f 是拟对称的假设可知，$f(\partial\mathbb{D})$ 是拟圆（见 [Pom92，命题 5.10]）。根据定理 ^2.5，此拟圆围成一个拟圆盘 $U\subset\mathbb{C}$。设 ϕ 是一个将 U 映到 $\mathbb{D}$ 上的 $\mathbb{C}$ 拟共形映射。通过后复合一个 $\mathbb{D}$ 的莫比乌斯变换，我们可假设 ϕ 固定 ∞。因此，由 (Q-6)，$\phi\colon \mathbb{C}\to\mathbb{C}$ 是拟共形且拟对称的。映射 $\phi\circ f\colon \partial\mathbb{D}\to\partial\mathbb{D}$ 是拟对称的。根据推论 2.8，映射 $\phi\circ f$ 可延拓为一个固定 0 的 $\mathbb{D}$ 上的拟共形同胚 F。通过反射（见 [LV73，第 I.8.4] 节），可得到一个 $\mathbb{C}$ 上的拟共形同胚 F。因此，$\phi^{-1}\circ F$ 就是 f 所需的拟共形延拓。□

2.5. **一致域**。如果存在 $L\ge 1$，使得对于任意 $z,w\in A$，都存在一条曲线 $\gamma\colon [a,b]\to A$，满足 $\gamma(a)=z$、$\gamma(b)=w$，且 $\ell_e(\gamma)\le L|z-w|$，则称集合 $A\subset\mathbb{R}^n$ 为拟凸。此时称 A 为 L-拟凸。由长度的下半连续性可知，A 也为 L-拟凸。

如果存在常数 $L\ge 1$，使得对于任意一对点 $z,w\in U$，都存在一条曲线 $\gamma\colon [a,b]\to U$，满足 $\gamma(a)=z$、$\gamma(b)=w$、$\ell_e(\gamma)\le L|z-w|$，则称区域 $U\subset\mathbb{R}^n$ 为一致的，

$$\min\{\ell_e(\gamma|_{[a,t]}),\ell_e(\gamma|_{[t,b]})\}\le L\operatorname{dist}_e(\gamma(t),\partial U)\ \text{ for each } t\in[a,b].$$

此时称 U 为 L-一致。根据定义，一致域是拟凸的。这是本文中我们唯一需要的性质。

空间 $\mathbb{R}^n$、$\mathbb{R}^n$ 中的每个球，以及 $\mathbb{R}^n$ 中每个球的外部，都是一致域。这是 [GO79 推论 3] 的结果：一致性在 $\mathbb{R}^n$ 的拟共形映射下保持不变。特别地，$\mathbb{C}$ 中的每个拟圆盘及其外部都是一致域。更一般地，以下结果成立。

定理 2.10 ([V¨ai84，定理 5。6])。设 $U \subset \mathbb{R}^n$ 是一致域，且$f\colon\ U \to \mathbb{R}^n$是一个拟莫比乌斯嵌入。那么 $f(U)$是一致域，且其一致性可作定量控制。

拟圆盘的拟凸性带来一个推论：拟圆盘 U 边界上的任意点 z 都是可由可求长曲线到达的；也就是说，存在一条可求长曲线 $\gamma\colon [a,b] \to U$，使得 $\gamma([a,b)) \subset U$且 $\gamma(b) = z$。

推论 2.11. 拟圆盘边界上的每个点都可由可求长曲线到达。

2.6. **拟双曲度量**。设 $U \subsetneq \mathbb{R}^n$ 是一个区域。我们将 U 上的拟双曲度量 定义为

$$k_U(z,w) = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot,\partial U)}\, ds,$$

其中，下确界取遍 U 中端点为 z,w的所有可求长曲线 γ 。每一对 $z,w \in U$都可以由 U 中的一条拟双曲测地线 γ连接，也就是说，

$$k_U(z,w) = \int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_e(,\partial U)}\, ds = \ell_{k_U}(\gamma).$$

这表明 (U,k_U) 是 1-拟凸的；参见 [GO79，引理 1]。下一个引理给出拟双曲度量的一个方便估计。

引理 2.12. 设 $K \geq 1$。设 $U \subsetneq \mathbb{R}^n$ 为一个区域，且 $B \subset U$ 为一个 K-拟凸集合，使得$\operatorname{diam}_e(B) \leq K\operatorname{dist}_e(B,\partial U)$。则对每个 z、 $w \in B$，我们有

$$C(K)^{-1}\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)} \leq k_U(z,w) \leq C(K)\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)}.$$

证明. 设 $z,w \in B$。由拟凸性假设，存在B 中的一条曲线 γ ，其端点为 z,w ，使得 $\ell_e(\gamma) \leq K|z-w|$。因此，

$$k_U(z,w) \leq \int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot,\partial U)}\, ds \leq \frac{\ell_e(\gamma)}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)} \leq K\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)}.$$

对于反向不等式，考虑球 $B_e(z,R)$，其中 $R = 2^{-1}\operatorname{dist}_e(B,\partial U)$。设 γ 为 U 中连接 z 与 w的一条曲线。若 γ 不包含于 $B(z,R)$，则

$$\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot,\partial U)}\, ds \geq \frac{R}{\operatorname{dist}_e(z,\partial U)+R} \geq \frac{R}{\operatorname{diam}_e(B)+\operatorname{dist}_e(B,\partial U)+R} \geq \frac{1}{2K+3}.$$

另一方面，

$$\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)} \leq \frac{\operatorname{diam}_e(B)}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)} \leq K$$

因此我们有

$$\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}(\cdot,\partial U)}\, ds \geq C(K)^{-1}\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(B,\partial U)}. \tag{2.3}$$

现在，假设 γ 包含于 $B_e(z,R)$。则

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot,\partial U)}\, ds &\geq \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(z,\partial U)+R} \geq \frac{|z-w|}{\operatorname{diam}_e(B)+\operatorname{dist}_e(B,\partial U)+R}\\ &\geq \frac{2|z-w|}{(2K+3)\operatorname{dist}_e(B,\partial U)}.\end{aligned}$$

因此，在这种情况下，(2.3) 也成立，只是常数不同。对所有连接 z 和 w 的曲线 γ 取下确界，即得所需的不等式。□

Gehring 和 Osgood [GO79, Theorem 3] 研究了拟共形映射下准双曲度量的畸变。

定理 2.13 (Gehring–Osgood)**.** 设 $K \geq 1$。设 $f\colon U \to V$ 是区域 U、$V \subsetneq \mathbb{R}^n$ 之间的 K-拟共形同胚。若 $\alpha = K^{1/(1-n)}$，则有

$$k_V(f(z), f(w)) \leq C(n,K) \max\{k_U(z,w), k_U(z,w)^\alpha\} \text{ for all } z, w \in U.$$

将上述定理与拟共形映射的反函数仍为拟共形这一事实相结合，我们得出：在大尺度上，映射 f 关于相应的拟双曲度量是双 Lipschitz 的。我们证明，若同时考虑小尺度，则 f 关于拟双曲度量是拟对称的。

定理 2.14. 设 $K \geq 1$。设 $f\colon U \to V$ 是区域 U、$V \subsetneq \mathbb{R}^n$ 之间的 K-拟共形同胚。则映射

$$f\colon (U, k_U) \to (V, k_V)$$

是拟对称的，且为定量的，仅依赖于 n、K。

这一结果推广了 [AF21，定理1.3] 以及 [FH26，定理1.2]，，其中对区域 U施加了额外假设。

证明。 假设 f 对某个 $K \geq 1$是 K-拟共形的。V¨ais¨al¨a[V¨ai99，定理6.6] 的一个结果蕴含：拟凸空间之间的每一个弱拟对称映射都是拟对称的。因此，只需证明映射$f\colon (U, k_U) \to (V, k_V)$是弱拟对称的；也就是说，存在常数$H = H(n,K) > 0$，使得对任意满足 $k_U(z_1, z_2) \leq k_U(z_1, z_3)$的三点 $z_1, z_2, z_3 \in U$，我们有

$$k_V(z_1', z_2') \leq H k_V(z_1', z_3'),$$

其中我们用记号 $z' = f(z)$表示 $z \in U$。

假设 $k_U(z_1, z_2) \leq k_U(z_1, z_3)$。如果 $k_U(z_1, z_2) \geq 1/3$，那么 $k_U(z_1, z_3) \geq 1/3$，并且根据定理 2.13（应用于 f^{-1}），我们有

$$k_V(z_1', z_2') \gtrsim_{n,K} 1 \text{ and } k_V(z_1', z_3') \gtrsim_{n,K} 1.$$

因此，根据定理 2.13，我们得出

$$k_V(z_1', z_2') \simeq_{n,K} k_U(z_1, z_2) \text{ and } k_V(z_1', z_3') \simeq_{n,K} k_U(z_1, z_3).$$

因此，$k_V(z_1', z_2') \lesssim_{n,K} k_V(z_1', z_3')$。接下来，假设 $k_U(z_1, z_2) < 1/3 \leq k_U(z_1, z_3)$。根据定理 2.13，我们得到 $k_V(z_1', z_2') \lesssim_{n,K} 1$，并且如上所述，我们有$k_V(z_1', z_3') \gtrsim_{n,K} 1$。因此，$k_V(z_1', z_2') \lesssim_{n,K} k_V(z_1', z_3')$。

最后，我们假设 $k_U(z_1, z_2) \leq k_U(z_1, z_3) < 1/3$，并令 $R = 2^{-1} \cdot \operatorname{dist}_e(z_1, \partial U)$。若 $z \in U$且 $|z - z_1| \geq R$，则对于 U 中连接 z_1, z 的任意曲线 γ，有

$$\int_\gamma \frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot, \partial U)}\, ds \geq \frac{R}{\operatorname{dist}_e(z_1, \partial U) + R} = \frac{1}{3}$$

因此 $k_U(z_1, z) \geq 1/3$。我们得出 $z_2, z_3 \in B := B_e(z_1, R)$。根据引理 2.12，

$$k_U(z_1, z_i) \simeq \frac{|z_1 - z_i|}{\operatorname{dist}_e(B, \partial U)}$$

对于 $i = 2,3$。我们得出 $|z_1 - z_2| \lesssim |z_1 - z_3|$。

根据性质（Q-6），映射 $f|_B$ 在欧几里得度量下是拟对称的，且具有定量控制，该控制依赖于 n，K。特别地，$|z_1' - z_2'| \lesssim_{n,K} |z_1' - z_3'|$。此外，

根据定理 2.10，像 $B' = f(B)$ 是一致域，因此它是定量拟凸的。最后，我们有 $\operatorname{diam}_e(B') \lesssim_{n,\,K} \operatorname{dist}_e(B',\,\partial V)$；参见 [Hei01，习题 11.18]或 [Geh62，定理 11]。根据引理 2.12，我们有

$$k_V(z_1', z_i') \simeq_{n,K} \frac{|z_1' - z_i'|}{\operatorname{dist}_e(B', \partial V)}$$

当 $i = 2,3$。因此，$k_V(z_1', z_2') \lesssim_{n,K} k_V(z_1', z_3')$。证明至此完成。 □

2.7. **双曲度量**。设 $\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个边界至少包含两个点的区域。设 ρ_Ω 为 Ω 中的双曲密度；定义见 [BM07] 。两点 $z, w \in \Omega$ 之间的双曲距离 定义为

$$h_\Omega(z, w) = \inf_\gamma \left\{ \int_\gamma \rho_\Omega(\zeta)\, |d\zeta| \right\},$$

其中，下确界取遍 Ω 中所有端点为 z, w 的可求长曲线 γ。若 Ω 是一个半平面，则

$$\rho_\Omega(z) = \frac{1}{\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)}, \quad z \in \Omega$$

若对某个 $r > 0$，$\Omega = \mathbb{D}(0, r)$，则

$$\rho_\Omega(z) = \frac{2r}{r^2 - |z|^2} \text{ for } z \in \Omega \quad \text{and} \quad \rho_{\Omega^*}(z) = \frac{2r}{|z|^2 - |r|^2} \text{ for } z \in \Omega^*.$$

定理 2.15。设$\Omega \subset \mathbb{C}$ 是一个区域。

(1) 对于每个 $z \in \Omega$，都有 $\rho_\Omega(z) \le 2^{-1}\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)$。

(2) 如果Ω 是单连通的，那么对于每个 $z \in\Omega$，都有

$$\frac{1}{2\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)} \le \rho_\Omega(z) \le \frac{2}{\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)}.$$

(3) 如果 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 恰有两个连通分支 E，F 其中一个无界，并且$\Delta_e(E, F) \le K$ 对于某个 $K \ge 1$成立，那么对于每个 $z \in\Omega$，都有

$$\frac{1}{C(K)\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)} \le \rho_\Omega(z) \le \frac{2}{\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega)}.$$

证明。前两部分见 [BM07，第 8] 节，以及 [BP78，(2.1)、(2.2)]。第三部分中的左侧不等式由 [BP78，定理 1], 推出，只要我们证明该量

$$\beta(z) = \inf \left\{ \left| \log \frac{|z-a|}{|a-b|} \right| : a, b \in \partial\Omega,\, a \ne b,\, |z-a| = \operatorname{dist}_e(a, \partial\Omega) \right\}$$

在 Ω 中一致有界，且其界仅依赖于 K。设 E 是 $\mathbb{C} \setminus \Omega$ 的一个无界连通分支。令 $z \in\Omega$，并设 $\operatorname{dist}_e(z, \partial\Omega) = \operatorname{dist}_e(z, E)$。令$a \in E$ 使得 $|z - a| = \operatorname{dist}_e(z, E)$。由于 E 是连通的，且不包含于 $\mathbb{D}(a, |z-a|)$，我们可以找到一点 $b \in E$使得 $|a-b| = |z-a|$。因此，$\beta(z) = 0$。

现在，假设距离$_e(z, \partial\Omega)$ =距离$_e(z, F)$，并令 $a \in F$使得 $|z - a|$ =距离$_e(z, F)$ =: r。考虑环域 $A = \mathbb{A}(a;\ r, (2K + 2)r)$。假设 $\partial\Omega$不与环域 A相交，因此 $F \subset \mathbb{D}(a, r)$。由于 E 是无界的，环域 A 将 E 与 F分离。因此，

$$\Delta_e(E, F) \ge \frac{(2K + 2)r - r}{2r} = \frac{2K + 1}{2} > K,$$

矛盾。因此，存在一个点 $b \in \partial\Omega \cap A$，所以

$$\frac{1}{2K+2} \le \frac{|z-a|}{|a-b|} \le 1.$$

这意味着 $\beta(z) \le \log(2K+2)$。 □

3. Relative hyperbolic metric

3.1. 定义。 回想一下，若 $U \subset \mathbb{C}$是一个开集，我们令$U^* = \mathbb{C} \setminus U$。设$U, V \subset \mathbb{C}$ 为互不相交的 Jordan 区域，且 $U \cap V$要么为空，要么只包含$\widehat{\mathbb{C}}$中的一个点；特别地，$\widehat{\mathbb{C}} \setminus (\overline{U} \cup V)$是连通的。与这对集合 (V, U) 对应的相对双曲度量定义为

$$d_{V,U}(z,w) = \inf_\gamma \{\ell_{h_{U^*}}(\gamma)\}, \quad z, w \in \partial V \setminus \overline{U},$$

其中，下确界取遍所有满足 $[a,b] \to U^* \setminus V$使得 $\gamma(a) = z$,$\gamma(b) = w$ 的可求长曲线 γ。我们指出，在此定义中我们采用双曲度量而非拟双曲度量，因为我们处理的是球面的子集。

如果 V 是拟圆盘，那么 $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{V}$也是拟圆盘。根据推论 2.11，任意一对点 z，$w \in \partial V \setminus U$ 都可以由一条可求长曲线 γ 连接，且该曲线满足$d_{V,\,U}(z,\ w)$的定义。因此，对于任意一对 z，$w \in \partial V \setminus U$，都有$d_{V,\,U}(z,\ w) < \infty$，这意味着$d_{V,\,U}$是 $\partial V \setminus U$上的度量。

注意，若 $\phi\colon U^* \to \mathbb{C}$是一个共形嵌入，并且可以扩张为球面上的一个同胚，那么

$$d_{\phi(V),\phi(U)}(\phi(z),\phi(w)) = d_{V,U}(z,w) \text{ for every } z, w \in \partial V \setminus \overline{U}.$$

3.2. 基本例子。 我们在一些重要情形下估计度量$d_{V,\,U}$。

Lemma 3.1 (平行直线和同心圆)。 设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 是互不相交的圆盘。(1) 若 U，$V \subset \mathbb{C}$ 是半平面，且满足 $U \cap V \cap \mathbb{C} = \emptyset$，那么对每个 $z, w \in \partial V \cap \mathbb{C}$，

$$d_{V,U}(z,w) = \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial V, \partial U)}.$$

(2) 若 U^*、$V \subset \mathbb{C}$ 是同心欧几里得圆盘，则对每个 z、$w \in \partial V$，

$$\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial V, \partial U)} \le d_{V,U}(z,w) \le \pi \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial V, \partial U)}$$

且对每个 z、$w \in \partial U$，

$$\frac{\operatorname{diam}_e(\partial V)|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial U)\operatorname{dist}_e(\partial V, \partial U)} \le d_{U,V}(z,w) \le \frac{\pi \operatorname{diam}_e(\partial V)|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial U)\operatorname{dist}_e(\partial V, \partial U)}.$$

证明。 在 (1) 中，对任意连接 $z, w \in \partial V \cap \mathbb{C}$ 且位于 $U^* \setminus V$ 中的曲线 γ，有

$$\ell_{h_{U^*}}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\operatorname{dist}_e(\zeta, \partial U)} \ge \frac{\ell_e(\gamma)}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)} \ge \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)} = \ell_{h_{U^*}}([z,w]),$$

因此 $d_{V,U}(z,w) = \ell_{h_{U^*}}([z,w])$，如所需。

对于（2），设 $U = \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}(0,R)$与 $V = \mathbb{D}(0,r)$，$r < R$，于是 $U^* = \mathbb{D}(0,R)$。对于 $U^* \setminus V$中连接 $z, w \in \partial V$的任意曲线 γ，我们有

$$\ell_{h_{U^*}}(\gamma) = \int_\gamma \frac{2R|d\zeta|}{R^2 - |\zeta|^2} \ge \frac{2R\ell_e(\gamma)}{R^2 - r^2} \ge \frac{2R\ell_e([z,w])}{R^2 - r^2} = \ell_{h_{U^*}}([z,w]),$$

其中 $[z,w]$ 是 ∂V的以 z,w为端点的最短弧。因此，

$$d_{V,U}(z,w)=\ell_{h_{h^*}}([z,w])=\frac{2R}{R+r}\frac{\ell_e([z,w])}{\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}.$$

最后，注意到 $|z-w|\le \ell_e([z,w])\le \frac{\pi}{2}|z-w|$。这就证明了关于 $d_{V,U}$ 的不等式。

现在我们讨论关于 $d_{U,V}$ 的不等式。考虑共形映射 $\phi(z)=1/\widehat{z}$ 在 $\mathbb{C}$ 中。对于 z, $w\in\partial U$，由上文可得

$$d_{U,V}(z,w)=d_{\phi(U),\phi(V)}(z^{-1},w^{-1})=\frac{2r^{-1}\ell_e([z^{-1},w^{-1}])}{r^{-2}-R^{-2}},$$

其中 $[z^{-1},w^{-1}]$ 是 $\phi(\partial U)$ 上连接 z^{-1},w^{-1} 的最短弧。注意到

$$\frac{|z-w|}{R^2}=\frac{|z-w|}{|zw|}=\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{w}\right|\le \ell_e([z^{-1},w^{-1}])\le\frac{\pi}{2}\frac{|z-w|}{R^2}.$$

因此，

$$\frac{2r|z-w|}{R^2-r^2}\le d_{U,V}(z,w)\le \pi\frac{r|z-w|}{R^2-r^2}.$$

由此即可得出结论。 □

引理 3.2（平行直线附近的拟圆）。设 $K\ge 1$。设 U、$V\subset\mathbb{C}$ 是不相交的无界 K-拟圆盘，满足 $\partial V\cap\mathbb{C}\subset\{z\in\mathbb{C}:\ -LK\le \operatorname{Im}(z)\le 0\}$以及 $\partial U\cap\mathbb{C}\subset\{z\in\mathbb{C}:\ L\le\operatorname{Im}(z)\le L+LK\}$。则对于任意 z、$w\in\partial V\cap\mathbb{C}$，有

$$C(K)^{-1}\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}\le d_{V,U}(z,w)\le C(K)\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}.$$

示意图见图1。

证明。由于 U 是一个边界包含于水平条带中的无界拟圆盘，边界 ∂U 将半平面 $\operatorname{Im}(z)>L+LK$ 与半平面 $\operatorname{Im}(z)<L$ 分隔开；这由引理 2.4 得出。同样，边界 ∂V 将半平面 $\operatorname{Im}(z)>0$ 与半平面 $\operatorname{Im}(z)<-LK$ 分隔开。拟圆盘 U 和 V 不相交，因此半平面 $\operatorname{Im}(z)<-LK$ 包含于 V 中，而半平面 $\operatorname{Im}(z)>L+LK$ 包含于 U 中。因此，

$$\mathbb{C}\setminus(U\cup V)\subset\{z\in\mathbb{C}:-LK\le\operatorname{Im}(z)\le L+LK\}$$

且每条竖直线都与 ∂U 和 ∂V 相交。因此，若 $z\in U^*\setminus V$，则

$$\operatorname{dist}_e(z,\partial U)\le(2K+1)L\quad\text{and}\quad\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)\le(2K+1)L. \tag{3.1}$$

设 γ 是 $U^*\setminus V$ 中连接 z，$w\in\partial V$ 的任意曲线。根据定理 2.15 和 (3.1)，我们有

$$\int_\gamma\rho_{U^*}(\zeta)|d\zeta|\ge\frac{1}{2}\int_\gamma\frac{|d\zeta|}{\operatorname{dist}_e(\zeta,\partial U)}\ge\frac{\ell_e(\gamma)}{2(2K+1)L}\ge\frac{|z-w|}{2(2K+1)L}.$$

由于 $\operatorname{dist}_e(\partial U,\ \partial V)\ge L$，我们有

$$d_{V,U}(z,w)\ge\frac{|z-w|}{2(2K+1)L}\ge\frac{|z-w|}{2(2K+1)\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}.$$

另一方面，由于 $\mathbb{C}\setminus V$ 的拟凸性，存在一条位于 $\mathbb{C}\setminus V$ 中的曲线 γ，连接 z，$w\in\partial V$ 和 $\ell_e(\gamma)\le C(K)|z-w|$。将 γ 中位于 $\mathbb{H}$ 内的部分替换为实数轴上的线段后，我们还可以假设 γ 是

包含在 $\{\zeta \in \mathbb{C} \setminus V$ 中: $\operatorname{Im}(\zeta) \le 0\}$。$\gamma$ 中的每个点与 ∂U 的距离至少为 L。由定理 2.15 可得

$$d_{V,U}(z,w) \le \int_\gamma \rho_{U^*}(\zeta)|d\zeta| \le \int_\gamma \frac{2|d\zeta|}{\operatorname{dist}_e(\zeta, \partial U)} \le \frac{2C(K)|z-w|}{L}.$$

由于 $\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V) \le (2K+1)L$，我们得到所需的不等式。 □

引理3.3 (虫洞)。设 $K \ge 1$。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 是无界的 K-拟圆盘。假设存在一条 K-弦弧曲线 $J \subset \mathbb{C} \setminus (U \cup V)$，它将 ∂U 与 ∂V 分隔开，并满足

$$N_{1/K}(J) \subset \mathbb{C} \setminus (\overline{U} \cup \overline{V}) \subset N_K(J).$$

那么，对每个 $z, w \in \partial V \cap \mathbb{C}$，都有

$$C(K)^{-1}|z-w| \le d_{V,U}(z,w) \le C(K)|z-w|.$$

图2给出了示意图。这里，复平面 $\mathbb{C}$ 中的无界若尔当曲线 J 若存在 $K \ge 1$，使得对每个 z，$w \in J$，J 上连接 z 和 w 的弧的长度不超过 $K|z-w|$，则称其为一条弦弧曲线。此外，对于 $r > 0$ 和 $E \subset \mathbb{C}$，我们用 $N_r(E)$ 表示集合 E 的欧几里得开 r-邻域。利用弦弧曲线可通过 JK82 命题 1.13] 中的双 Lipschitz 映射映到直线这一事实，该引理可化归为引理 3.2。

引理 3.4 （同心圆附近的拟圆）。设 $K \ge 1$ 和 $R > r > 0$。设V是一个 K-拟圆盘，使得 $0 \in V$和

$$\partial V \subset \{z \in \mathbb{C} : \max\{r - K(R-r), K^{-1}r\} \le |z| \le r\}$$

且设 $U \subset \mathbb{C}$ 是一个 K-拟圆盘，使得 $\infty \in U$ 和 $\partial U \subset \{z \in \mathbb{C} : R \le |z| \le R + K(R-r)\}$。那么对于每个 z，$w \in \partial V$，我们有

$$C(K)^{-1}\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)} \le d_{V,U}(z,w) \le C(K)\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)},$$

并且对于每个 z，$w \in \partial U$，我们有

$$C(K)^{-1}\frac{\operatorname{diam}_e(\partial V)|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial U)\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)} \le d_{U,V}(z,w) \le C(K)\frac{\operatorname{diam}_e(\partial V)|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial U)\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)}.$$

图3给出了示意图。

证明。由于 $\infty \in U$，我们有 $\mathbb{D}(0, R + K(R-r))^* \subset U$，且 $\mathbb{D}(0, R)$位于 U之外。类似地，由于 $0 \in V$，我们有 $\{z \in \mathbb{C} : |z| < r - K(R-r)\} \subset V$，且 $\mathbb{D}(0, r)^*$ 位于 V之外。由此可得

$$\mathbb{C} \setminus (U \cup V) \subset \{z \in \mathbb{C} : r - K(R-r) \le |z| \le R + K(R-r)\}$$

且每条经过 0 的直线都与 ∂U和 ∂V相交。设 γ是 $U^* \setminus V$中连接 z、$w \in \partial V$的一条任意曲线。γ上的每个点到 ∂U的距离至多为 $(2K+1)(R-r)$。根据定理 2.15，

$$\int_\gamma \rho_{U^*}(\zeta)|d\zeta| \ge \frac{1}{2}\int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\operatorname{dist}_e(\zeta, \partial U)} \ge \frac{\ell_e(\gamma)}{(2K+1)(R-r)} \ge \frac{|z-w|}{(2K+1)(R-r)}.$$

已知 $\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V) \ge R - r$，我们有

$$d_{V,U}(z,w) \ge \frac{|z-w|}{(2K+1)(R-r)} \ge \frac{|z-w|}{(2K+1)\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)}.$$

另一方面，由于 $\mathbb{C}\backslash V$ 的拟凸性，存在一条曲线 γ，它位于 $\mathbb{D}(0,r)\backslash V$ 中，连接 $\overline{z},w\in\partial V$，并满足 $\ell_e(\gamma)\leq C(K)|z-w|$。这条曲线上的每一点到 ∂U 的距离都至少为 $R-r$。因此，由定理 2.15

$$d_{V,U}(z,w)\leq\int_\gamma\rho_{U^*}(\zeta)|d\zeta|\leq\int_\gamma\frac{2|d\zeta|}{\operatorname{dist}_e(\zeta,\partial U)}\leq\frac{2C(K)|z-w|}{R-r}.$$

由于 $\operatorname{dist}_e(\partial U,\ \partial V)\leq(2K+1)(R-r)$，我们得到 $d_{V,\ U}$ 的所述不等式。

现在我们证明 $d_{U,\ V}$ 的不等式。设 $r_1=\operatorname{dist}_e(0,\ \partial V)>0$，并令 $K_1>0$ 满足 $r_1=r-K_1(R-r)$。注意到 $r_1\geq r-K(R-r)$，因此 $K_1\leq K$。根据双曲度量的比较原理 [BM07，定理 8.1], ，我们有

$$\rho_{V^*}(z)\geq\rho_{\mathbb{D}(0,r_1)^*}(z)=\frac{2r_1}{|z|^2-r_1^2},\quad z\in V^*.$$

设 γ 是 $V^*\setminus U$ 中连接点 $z,\ w\in\partial U$ 的任意曲线。我们有

$$\begin{aligned}\int_\gamma\rho_{V^*}(\zeta)\,|d\zeta|&\geq\int_\gamma\frac{2r_1|d\zeta|}{|\zeta|^2-r_1^2}\geq\frac{2r_1|z-w|}{(R+K(R-r))^2-r_1^2}\\&=\frac{2r_1|z-w|}{(R-r_1+K(R-r))(R+r_1+K(R-r))}\\&\geq\frac{2r_1|z-w|}{(K+K_1+1)(R-r)(R+R+KR)}\\&\geq\frac{2r_1|z-w|}{(2K+1)(K+2)R(R-r)}.\end{aligned}$$

注意到 $r_1\geq\frac{1}{K}r\geq\frac{1}{2K}\operatorname{diam}_e(\partial V)$、$R\leq\frac{1}{2}\operatorname{diam}_e(\partial U)$，以及 $R-r\leq\operatorname{dist}_e(\partial U,\ \partial V)$。这证明了

$$d_{U,V}(z,w)\gtrsim_K\frac{\operatorname{diam}_e(\partial V)|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial U)\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}.$$

另一方面，由 $\mathbb{C}\setminus U$的拟凸性，存在一条位于$(\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(0,R))\setminus U$中的曲线 γ，它连接 $z,w\in\partial U$并满足 $\ell_e(\gamma)\leq C(K)|z-w|$。由双曲度量的比较原理，我们有

$$\begin{aligned}d_{U,V}(z,w)&\leq\int_\gamma\rho_{V^*}(\zeta)\,|d\zeta|\leq\int_\gamma\rho_{\mathbb{D}(0,r)^*}(\zeta)\,|d\zeta|=\int_\gamma\frac{2r|d\zeta|}{|\zeta|^2-r^2}\\&\leq\frac{2r\ell_e(\gamma)}{R^2-r^2}\leq\frac{2rC(K)|z-w|}{R(R-r)}.\end{aligned}$$

为完成证明，注意 $r\leq Kr_1\leq\frac{K}{2}\operatorname{diam}_e(\partial V)$、$\operatorname{diam}_e(\partial U)\leq2(R+K(R-r))\leq2(K+1)R$，以及$\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)\leq(2K+1)(R-r)$。□

引理 3.5 (相对分离的拟圆盘). 设 $K\geq1$。设 U、$V\subset\mathbb{C}$ 为 K-拟圆盘，使得 $U\cap V=\emptyset$且 $\infty\in\overline{U}$。若 $\Delta_e(\partial U,\partial V)>K^{-1}$，则对每个$z$、$w\in\partial V$，我们有

$$C(K)^{-1}\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}\leq d_{V,U}(z,w)\leq C(K)\frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U,\partial V)}.$$

证明。由于 $\infty\in U$，我们有 $\operatorname{diam}_e(\partial V)<\operatorname{diam}_e(\partial U)$。注意，$V\subset\overline{U^*}$, V是拟凸的，并且 $\operatorname{diam}_e(V)<K\operatorname{dist}_e(\overline{V},\partial U^*)$。因此，可以应用引理 2.12

并且我们有

$$k_{U^*}(z,w) \geq C(K)^{-1} \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)}$$

对 z, $w \in \partial V$。结合定理 2.15，对于 z, $w \in \partial V$，我们有

$$d_{V,U}(z,w) \geq h_{U^*}(z,w) \geq \frac{1}{2} k_{U^*}(z,w) \geq \frac{1}{2C(K)} \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)}.$$

接下来，我们证明反方向的不等式。集合 $\mathbb{C} \setminus V$ 是 $C_1(K)$-拟凸的。设 $a \in \partial V$，并考虑球 $\mathbb{D}(a, r(a))$，其中

$$r(a) = \frac{\operatorname{dist}_e(a, \partial U)}{2(2C_1(K)+1)} = C_2(K) \operatorname{dist}_e(a, \partial U).$$

假设 z, $w \in \mathbb{D}(a, r(a)) \cap \partial V$。那么存在一条长度至多为 $C_1(K)|z-w|$ 的曲线 γ，它连接 z, w，且包含于 $\mathbb{D}(a, 2^{-1} \operatorname{dist}_e(a, \partial U)) \setminus V$ 中。因此，曲线 γ 上的每个点 ζ 都满足

$$\operatorname{dist}_e(\zeta, \partial U) \geq 2^{-1} \operatorname{dist}_e(a, \partial U)$$

并且我们有

$$d_{V,U}(z,w) \leq \int_\gamma \rho_{U^*}(\zeta)\, |d\zeta| \leq \int_\gamma \frac{2|d\zeta|}{\operatorname{dist}_e(\zeta, \partial U)} \leq \frac{2C_1(K)|z-w|}{2^{-1} \operatorname{dist}_e(a, \partial U)} \leq \frac{C_3(K)|z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)}.$$

注意，对每个 $a \in \partial V$，我们有

$$r(a) = C_2(K) \operatorname{dist}_e(a, \partial U) \geq C_2(K) \operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V) \geq K^{-1} C_2(K) \operatorname{diam}_e(\partial V).$$

因此，∂V可以由 $N \leq N(K)$ 个球 $\mathbb{D}(a_i, r(a_i))$ 覆盖，$a_i \in \partial V$，$i \in \{1, \dots, N\}$。假设对于任意 $a \in \partial V$，z, $w \in \partial V$以及 z, $w \notin \mathbb{D}(a, r(a))$。那么

$$|z-w| \geq r(z) \geq K^{-1} C_2(K) \operatorname{diam}_e(\partial V).$$

考虑 ∂V 中的点链 $z = z_0$, z_1, ..., $z_m = w$，其中 $m \leq N$，使得相邻点 z_{i-1}, z_i 位于同一个球 $\mathbb{D}(a_j, r(a_j))$ 中。根据前一种情形，

$$\begin{aligned} d_{V,U}(z,w) &\leq \sum_{i=1}^m d_{V,U}(z_{i-1}, z_i) \leq \frac{N(K) C_3(K) \operatorname{diam}_e(\partial V)}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)} \\ &\leq \frac{N(K) C_3(K) K C_2(K)^{-1} |z-w|}{\operatorname{dist}_e(\partial U, \partial V)}. \end{aligned}$$

证明完毕。 □

我们注意到，在上述特殊情形中，相对双曲度量 $d_{V,\,U}$ 通过恒等映射与欧氏度量拟对称，因此它也与弦度量拟 M¨obius。

3.3. 拟共形映射下的畸变。我们讨论球面上的拟共形映射对相对双曲度量的畸变。下面给出本节的主要结果。

定理 3.6。设 U、$V \subset \mathbb{C}$ 为拟圆盘，使得 $U \cap V$ 至多包含一个点。设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为拟共形映射。则映射

$$f\colon (\partial V \setminus \overline{U}, d_{V,U}) \to (f(\partial V) \setminus f(\overline{U}), d_{f(V),f(U)})$$

是定量拟对称的。

我们首先证明一些预备命题。

引理 3.7。设 $K \geq 1$。设 $V \subset \widehat{\mathbb{C}}$ 是一个 K-拟圆盘，且直径$\chi(\partial V) \geq K^{-1}$，并设 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是沿着 ∂V 的 K-拟共形反射。

(1) 对于每一对集合 $E, F \subset V$，我们有

$$\frac{\operatorname{dist}_\chi(E,F)}{\operatorname{dist}_\chi(E,g(F))} \leq C(K).$$

(2) 对于每个 $z \in \partial V$ 和 $w \in \mathbb{C}$，我们有

$$C(K)^{-1} \leq \frac{\chi(z,w)}{\chi(z,g(w))} \leq C(K).$$

(3) 对于满足 $E \cap \partial V \neq \emptyset$ 的每个集合 $E \subset \mathbb{C}$，我们有

$$C(K)^{-1} \leq \frac{\operatorname{diam}_\chi(E)}{\operatorname{diam}_\chi(g(E))} \leq C(K).$$

证明。在 (1) 中，不失一般性，假设 E, F 是闭集。由性质 (Q-4)，映射 g 是拟M¨比乌斯映射；由 (Q-3)，它是 η-拟对称的，其畸变函数为 η，且仅取决于 K。

我们首先考虑 E 由单点 $v \in \partial V$构成的特殊情形。设$u \in F$为任意一点。若 $\chi(v,u) \leq \operatorname{diam}_\chi(\partial V)$，则考虑一点 $u' \in \partial V$，使得 $\chi(v,u) = \chi(v,u')$。若 $\chi(v,u) > \operatorname{diam}_\chi(\partial V) \geq K^{-1}$，则考虑一点$u' \in \partial V$，使得 $\chi(v,u') = \operatorname{diam}_\chi(\partial V) \geq K^{-1} \geq 2^{-1}K^{-1}\chi(v,u)$。在这两种情形下，

$$\chi(v,u) \leq 2K\chi(v,u') \leq 2K\chi(v,u).$$

我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_\chi(v,F) \leq \chi(v,u) &\leq 2K\chi(v,u') = 2K\chi(g(v),g(u')) \\ &\leq 2K\eta(1)\chi(g(v),g(u)) = 2K\eta(1)\chi(v,g(u)).\end{aligned}$$

由于 $u \in F$ 是任意的，我们得出

$$\operatorname{dist}_\chi(v,F) \leq 2K\eta(1)\operatorname{dist}_\chi(v,g(F)). \tag{3.2}$$

现在我们处理一般情形。设 $z \in V$ 与 w为 $g(F)$中最接近 z的点。考虑球面 $\mathbb{C}$上经过 z 与 w的大圆，并用 J 表示连接 z 与 w的两条弧中较短的一条。由于 $z \in V$与 $w \in \mathbb{C} \setminus V$，弧 J与 ∂V相交于一点 v（该点可能等于 z或 w）。注意，$g(F)$中最接近 v 的点也是 w。（为看出这一点，假设通过与球面的一个等距变换复合后有 $z = 0$。则弧 J是以 $z = 0$ 为中心、连接 $z = 0$ 与 $w \in C$的圆 C 的一条半径。因此，$\frown C = \partial B_\chi(0, \chi(z,w))$。在弦度量下，$\mathbb{C} \setminus B_\chi(0, \chi(z,w))$中最接近点 $v \in J$ 的点是 w。）最后，设 u 为 F 中最接近v的点。见图 5 的图示。由 (3.2)，我们有

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_\chi(z,F) &\leq \chi(z,u) \leq \chi(z,v) + \chi(v,u) = \chi(z,v) + \operatorname{dist}_\chi(v,F) \\ &\leq \chi(z,v) + 2K\eta(1)\operatorname{dist}_\chi(v,g(F)) = \chi(z,v) + 2K\eta(1)\chi(v,w) \\ &\leq \chi(z,w) + 2K\eta(1)\chi(z,w) = (1 + 2K\eta(1))\operatorname{dist}_\chi(z,g(F)).\end{aligned}$$

因此，

$$\operatorname{dist}_\chi(E,F) \leq (1 + 2K\eta(1))\operatorname{dist}_\chi(z,g(F))$$

对每个 $z \in E$，这就完成了 (1) 的证明。

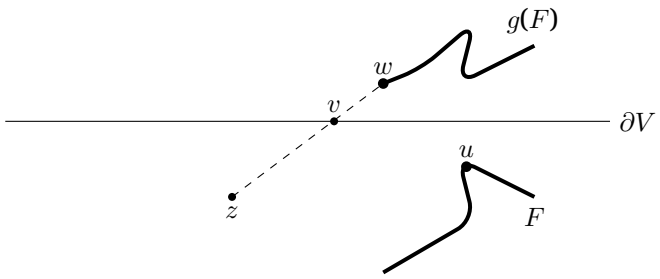


FIGURE 5. 引理 3.7 (1) 中的构形。

对于 (2)，注意，如果 $z \in \partial V$ 且 $w \in V$，则由 (1) 得 $\chi(z, w) \leq C(K)\chi(z, g(w))$。若 $w \in \mathbb{C} \setminus V$，则改为将 (1) 应用于拟圆盘 $\mathbb{C} \setminus V$，即可得到相同的不等式。将 (1) 应用于拟共形反射 g^{-1}，得到 $\chi(z, g(w)) \leq C(K)\chi(z, w)$。

对于 (3)，我们可以假设 E 是闭的。令 $z \in E \cap \partial V$ 和 $w \in E$ 满足 $\chi(z, w) \geq \frac{1}{2}$ 直径 $\chi(E)$。由 (2) 可得

$$\operatorname{diam}_\chi(E) \leq 2\chi(z, w) \leq 2C(K)\chi(z, g(w)) \leq 2C(K) \operatorname{diam}_\chi(g(E)).$$

为得到反方向的不等式，我们对 g^{-1} 应用相同的论证。□

接下来，我们讨论与一对 (V, U) 对应的相对双曲度量与某个区域的拟双曲度量之间的关系。

引理 3.8. 设 $K \geq 1$。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为 K-拟圆盘，满足 $U \cap V$ 至多包含一个点，且 $\infty \in U$。设 Z 为由 ∂U 和沿着 ∂V 对 ∂U 作某个 K-拟共形反射所得到的像围成的区域。若 $\Delta_\chi(\partial U, \partial V) \leq K$，则

$$C(K)^{-1} k_Z(z, w) \leq d_{V,U}(z, w) \leq C(K) k_Z(z, w) \quad \text{for all } z, w \in \partial V \setminus \overline{U}.$$

区域 Z 的示意图见图 4。

证明。我们首先进行一些不影响结论的归一化，使得 $\operatorname{diam}_\chi(\partial V)$ 足够大，其大小仅取决于 K。我们应用一个将 U^* 映到 $\mathbb{D}$ 的共形映射 ϕ，使得 $0 \in \partial V$。由于 $d_{V,U}$ 在共形映射下保持不变，而根据定理 2.13，k_Z 在共形映射下准不变，因此此映射不影响结论中的不等式。由命题 2.6 和 (Q-4)，共形映射 ϕ 可延拓为 $\mathbb{C}$ 上的准 Möbius 映射，因此 $\phi(V)$ 是一个拟圆盘。由引理 2.2 可得 $\Delta_\chi(\phi(\partial U), \phi(\partial V)) \leq C(K)$。由注 2.3，若适当改变常数，则用欧几里得距离表示时同一不等式仍成立。若 $\phi(\partial V) \subset \mathbb{D}(0, r)$，则

$$2r \geq \operatorname{diam}_e(\phi(\partial V)) \geq C(K)^{-1} \operatorname{dist}_e(\phi(\partial U), \phi(\partial V)) \geq C(K)^{-1}(1 - r)$$

若 $r = r(K) = \frac{1}{2C(K)+2}$，则会导致矛盾。因此，$\phi(\partial V)$ 不包含于 $\mathbb{D}(0, r)$ 中，且 $\operatorname{diam}_e(\phi(\partial V)) \geq r(K)$。综上，通过进行上述归一化，我们可以假设 $U^* = \mathbb{D}$ 且 $\operatorname{diam}_e(\partial V) \geq r(K)$。由于 $\partial V \subset \mathbb{D}$，弦直径也有一个依赖于 K 的下界，证毕。

令 $g\colon \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ 是沿着 ∂V 的 K-拟共形反射。此外，设 Z 为由 $\partial U = \partial\mathbb{D}$ 和 $g(\partial U)$ 围成的区域；示意图见图 4。我们

修改 g 在 V 内的定义，并令其等于 $(g|_{\widehat{\mathbb{C}}\setminus V})^{-1}$。拟圆 ∂V 的拟共形可去性意味着，修改后的映射 g 仍是沿着 ∂V 的 K-拟共形反射。根据构造，它满足 $g\circ g=\mathrm{id}$。

我们将引理 3.7 (1) 应用于拟圆盘 $\mathbb{C}\setminus V$ 和集合 $E=\{z\}$，其中 $z\in U^*\setminus V$，以及 $F=\partial U$，得到 $\mathrm{dist}_\chi(z,\partial U)\le C(K)\,\mathrm{dist}_\chi(z,g(\partial U))$。由于所涉及的集合包含于 $\mathbb{D}$ 中，因此欧几里得距离也满足相同的不等式，只是常数不同。因此，

$$\mathrm{dist}_e(z,\partial U)\le C(K)\,\mathrm{dist}_e(z,\partial U\cup g(\partial U))=C(K)\,\mathrm{dist}_e(z,\partial Z).$$

直观地说，点 z 到反射 $g(\partial U)$ 的距离比到 ∂U 的距离更远。若 γ 是 $U^*\setminus V$ 中的一条可求长曲线，则由定理 2.15 可得

$$\ell_{h_{U^*}}(\gamma)\ge\frac{1}{2}\int_\gamma\frac{|dz|}{\mathrm{dist}_e(z,\partial U)}\ge\frac{1}{2C(K)}\int_\gamma\frac{|dz|}{\mathrm{dist}_e(z,\partial Z)}=\frac{1}{2C(K)}\ell_{k_Z}(\gamma).$$

这表明 $d_{V,\,U}\gtrsim_K k_Z$。证明的其余部分将用于证明反向不等式。

我们先证明一些预备结果。设 $z\in V\cap Z$，并考虑球 $\overline{B}=\mathbb{D}(z,\,2^{-1}\,\mathrm{dist}_e(z,\,\partial Z))\subset Z$。我们断言

$$\mathrm{dist}_e(B,\partial Z)\simeq_K\mathrm{dist}_e(B,g(\partial U))\quad\text{and}\quad\mathrm{diam}_e(g(B))\simeq_K\mathrm{dist}_e(g(B),\partial U).\tag{3.3}$$

对于第一个不等式，假设

$$\mathrm{dist}_e(B,\partial Z)=\mathrm{dist}_e(B,\partial U)\le\mathrm{dist}_e(B,g(\partial U)).$$

这意味着 $\mathrm{dist}_e(z,\partial Z)=\mathrm{dist}_e(z,\partial U)$ 且 $\mathrm{dist}_e(B,\partial U)=\frac{1}{2}\mathrm{dist}_e(z,\partial U)$。由引理 3.7 (1)（由于涉及的集合都包含在 $\mathbb{D}$ 中，因此可以使用欧几里得距离），可得

$$\mathrm{dist}_e(B,g(\partial U))<\mathrm{dist}_e(z,g(\partial U))\lesssim_K\mathrm{dist}_e(z,\partial U)\simeq_K\mathrm{dist}_e(B,\partial U);$$

这里回忆一下，$g\circ g=\mathrm{id}$。这就完成了 (3.3) 中第一个关系的证明。对于第二个关系，注意到 g 和 g^{-1} 由 (Q-4) 和 (Q-3) 可知是拟对称的。由引理 2.1 以及 $\mathrm{diam}_e(B)\simeq_K\mathrm{dist}(B,g(\partial U))$ 这一事实，可得所述不等式。

设 γ 是 $V\cap Z$ 中一条端点为 z,w 的曲线，并假设

$$|\gamma|\subset\overline{\mathbb{D}}(z,2^{-1}\,\mathrm{dist}_e(z,\partial Z))=:B.$$

由引理 2.12 和 (3.3)，可得

$$\ell_{k_Z}(\gamma)\simeq\frac{\ell_e(\gamma)}{\mathrm{dist}_e(B,\partial Z)}\simeq_K\frac{\ell_e(\gamma)}{\mathrm{dist}_e(B,g(\partial U))}.\tag{3.4}$$

考虑反射 $g(B)$，它是一个拟圆盘，因此是拟凸的。反射后的曲线 $g(|\gamma|)$ 未必是可求长的。不过，我们可以在 $g(B)$ 内找到一条可求长曲线 γ'，连接 $g(z)$ $g(w)$，并且满足 $\ell_e(\gamma')\simeq_K|g(z)-g(w)|$。由定理 2.15、(3.3) 和引理 2.12，可得

$$\ell_{h_{U^*}}(\gamma')\simeq\ell_{k_{U^*}}(\gamma')\simeq_K\frac{\ell_e(\gamma')}{\mathrm{dist}_e(g(B),\partial U)}\simeq_K\frac{|g(z)-g(w)|}{\mathrm{dist}_e(g(B),\partial U)}.\tag{3.5}$$

我们已经完成了证明 $d_{V,U}\lesssim_K k_Z$ 所需的准备工作。

现在设 γ 是 $V \cap Z$ 中一条端点为 $z, w \in \partial V$ 的曲线。假设 $|\gamma| \subset \mathbb{D}(z, 2^{-1}\operatorname{dist}_e(z, \partial Z)) =: B$。由 (3.3) 和引理 3.7 (3)，可得

$$\begin{aligned}\operatorname{dist}_e(g(B), \partial U) &\simeq_K \operatorname{diam}_e(g(B)) \simeq_K \operatorname{diam}_e(B)\\ &\simeq_K \operatorname{dist}_e(B, \partial Z) \simeq_K \operatorname{dist}_e(B, g(\partial U)).\end{aligned}$$

将这些不等式与 (3.5) 和 (3.4) 结合起来，可得

$$\ell_{h_{U^*}}(\gamma') \simeq_K \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(g(B), \partial U)} \simeq_K \frac{|z-w|}{\operatorname{dist}_e(B, g(\partial U))} \lesssim_K \frac{\ell_e(\gamma)}{\operatorname{dist}_e(B, g(\partial U))} \simeq_K \ell_{k_Z}(\gamma).$$

我们得出 $\ell_{h_{U^*}}(\gamma') \lesssim_K \ell_{k_Z}(\gamma)$。

接下来，假设 $|\gamma|$ 不包含在球 $B_0 = \mathbb{D}(z, 2^{-1}\operatorname{dist}_e(z, \partial Z))$ 中。归纳地，我们可以找到曲线 γ 的一个分割，将其分成子曲线 γ_i，其端点为 z_{i-1}, z_i, $i \in \{1, \dots, n\}$，使得 $z_0 = z$, $z_n = w$, $|\gamma_i| \subset B_{i-1}$, $B_i = \mathbb{D}(z_i, 2^{-1}\operatorname{dist}_e(z_i, \partial Z))$ 对于 $i \in \{1, \dots, n\}$ 成立，而 $z_i \in \partial B_{i-1} \cap |\gamma|$ 对于 $i \in \{1, \dots, n-1\}$ 成立。注意，根据假设 $n \geq 2$，因为 $|\gamma| \not\subset B_0$。由 (3.4)，可得

$$\ell_{k_Z}(\gamma_i) \simeq_K \frac{\ell_e(\gamma_i)}{\operatorname{dist}_e(B_{i-1}, \partial Z)} \gtrsim_K \frac{|z_i - z_{i-1}|}{\operatorname{dist}_e(B_{i-1}, \partial Z)} \simeq_K 1$$

对于 $i \in \{1, \dots, n-1\}$。因此，给定 $n \geq 2$, $\ell_{k_Z}(\gamma) \gtrsim_K n$。我们按照上述过程“反射”每条曲线 γ_i，得到曲线 γ_i', $i \in \{1, \dots, n\}$，它们的连接给出一条曲线 γ'。由 (3.5)，对于 $i \in \{1, \dots, n\}$，我们有

$$\ell_{h_{U^*}}(\gamma_i') \simeq_K \frac{|g(z_i) - g(z_{i-1})|}{\operatorname{dist}_e(g(B_{i-1}), \partial U)} \lesssim_K \frac{\operatorname{diam}_e(g(B_{i-1}))}{\operatorname{dist}_e(g(B_{i-1}), \partial U)} \simeq_K 1,$$

其中最后一个不等式由 (3.3) 得出。因此，$\ell_{h_{U^*}}(\gamma') \lesssim n$。综上，在此情形下我们同样得到 $\ell_{h_{U^*}}(\gamma') \lesssim_K \ell_{k_Z}(\gamma)$。

更一般地，若 γ 是 Z 中一条端点为 $z, w \in \partial V$ 的任意可求长曲线，我们可以将位于 V 中的 γ 的（可数多个）部分“反射”，从而得到 $U^* \setminus V$ 中的一条曲线 γ'，该曲线连接 z, w 并满足

$$d_{V,U}(z, w) \leq \ell_{h_{U^*}}(\gamma') \lesssim_K \ell_{k_Z}(\gamma).$$

这意味着 $d_{V,\,U} \lesssim_K k_Z$，正如所需。 □

引理 3.9。设 $K \geq 1$。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为 K-拟圆盘，满足 $U \cap V = \emptyset$ 和 $\infty \in U$。设 Z 为由 ∂U 及沿着 ∂V 对 ∂U 作某个 K-拟共形反射所得的像围成的区域。若 $\Delta_e(\partial U, \partial V) > K^{-1}$，则对所有 $z, w \in \partial V$，有

$$\frac{1}{6}\frac{|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial V)} \leq k_Z(z, w) \leq C(K)\frac{|z-w|}{\operatorname{diam}_e(\partial V)} \tag{3.6}$$

and

$$C(K)^{-1}\Delta_e(\partial U, \partial V) d_{V,U}(z, w) \leq k_Z(z, w) \leq C(K)\Delta_e(\partial U, \partial V) d_{V,U}(z, w).$$

证明。通过平移和伸缩，我们不妨设 $0 \in V$，且 $\operatorname{diam}_e(\partial V) = 1$，因此 $V \subset \mathbb{D}$。注意，量 $\Delta_e(\partial U, \partial V)$ 不受此归一化的影响。设 g 为沿着 ∂V 的一个 K-拟共形反射，且 Z 为由 ∂U 和 $g(\partial U)$ 围成的区域。

设 γ 是连接 z, $w \in \partial V$ 两点的 Z 中的一条曲线。我们考虑两种情况。假设 γ 包含在圆盘 $\mathbb{D}(0, 2)$ 中。那么对于 $\zeta \in |\gamma|$，我们有

$\mathrm{dist}_e(\zeta,\ \partial Z) \le \mathrm{dist}_e(\zeta,\ g(\partial U)) \le 3$。因此，

$$\ell_{k_Z}(\gamma) = \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\mathrm{dist}_e(\zeta, \partial Z)} \ge \frac{1}{3}\ell_e(\gamma) \ge \frac{1}{3}|z-w|.$$

现在，若 γ 不包含于圆盘 $\mathbb{D}(0,2)$中，则它有一条子曲线 γ' 包含于$\mathbb{D}(0,2)$中，并连接环域 $\mathbb{A}(0;1,2)$的边界分支。因此，

$$\ell_{k_Z}(\gamma) \ge \ell_{k_Z}(\gamma') \ge \frac{1}{3}\ell_e(\gamma') \ge \frac{1}{3} \ge \frac{1}{6}|z-w|.$$

因此，$k_Z(z,w) \ge \frac{1}{6}|z-w|$。

若 $\mathrm{dist}_e(\partial U, \partial V) \le 2$，则 $K^{-1} < \Delta_e(\partial U, \partial V) = \mathrm{dist}_e(\partial U, \partial V) \le 2$。由注 2.3，得 $\Delta_\chi(\partial U, \partial V) \simeq_K 1$。由引理 3.8，得 $k_Z(z,w) \simeq_K d_{V,U}(z,w)$；由引理 3.5，得$d_{V,U}(z,w) \simeq_K \frac{|z-w|}{\mathrm{dist}_e(\partial U, \partial V)}$，其中 $z, w \in \partial V$。因此，

$$k_Z(z,w) \simeq_K |z-w|.$$

最后，假设 $\Delta_e(\partial U, \partial V) = \mathrm{dist}_e(\partial U, \partial V) > 2$。特别地，$U$与 $\mathbb{D}(0,2)$ 不相交。由于 $\overline{\mathbb{C}} \setminus V$ 是拟凸的，对于任意两点 $z, w \in \partial V$，存在一条位于 $\mathbb{C} \setminus V$ 中的曲线 γ，连接 z 和 w，且满足 $\ell_e(\gamma) \lesssim_K |z-w|$。如有必要，通过调整曲线 γ 并用 $\partial\mathbb{D}$ 的弧替换其中的部分，我们可以假设$|\gamma| \subset \mathbb{D} \setminus V \subset Z$。

由于 $\partial V \subset \mathbb{D}$ 且 $\mathrm{diam}_e(\partial V) = 1$，我们有 $\mathrm{diam}_\chi(\partial V) \simeq 1$。此外，由于$\partial U \cap \mathbb{D}(0,2) = \emptyset$ 且 $\partial V \subset \mathbb{D}$，我们有 $\mathrm{dist}_\chi(\partial V, \partial U) \simeq 1$。由引理 3.7 (1)，我们有 $\mathrm{dist}_\chi(\partial V, g(\partial U)) \simeq_K \mathrm{dist}_\chi(\partial V, \partial U) \simeq 1$。因此，$\mathrm{dist}_e(\partial V, g(\partial U)) \simeq_K 1$。这意味着，对于每个点 $\zeta \in |\gamma|$，我们有 $\mathrm{dist}_e(\zeta, g(\partial U)) \gtrsim_K 1$。此外，$\mathrm{dist}_e(\zeta, \partial U) \ge \mathrm{dist}_e(\partial\mathbb{D}, \partial U) \ge 1$。因此，$\mathrm{dist}_e(\zeta, \partial Z) \gtrsim_K 1$，并且

$$k_Z(z,w) \le \int_\gamma \frac{|d\zeta|}{\mathrm{dist}_e(\zeta, \partial Z)} \lesssim_K \ell_e(\gamma) \lesssim_K |z-w|.$$

这就完成了 (3.6) 的证明。引理陈述中的最后一个不等式由 (3.6) 和引理 3.5 立即得出。□

推论 3.10。设 $K \ge 1$。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为 K-拟圆盘，满足 $U \cap V$至多包含一个点且 $\infty \in U$。设 Z 为由 ∂U 及沿 ∂V对 $\overline{\partial U}$ 作某个 K-拟共形反射所得到的区域边界围成的区域。那么映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V \setminus \overline{U}, d_{V,U}) \to (\partial V \setminus \overline{U}, k_Z)$$

是拟对称的，其定量性质仅取决于 K。

证明。若 $\Delta_\chi(\partial U, \partial V) \le 1$，则结论由引理 3.8 得出。假设 $\Delta_\chi(\partial U, \partial V) > 1$。特别地，$U \cap V = \emptyset$。设 g 为沿 $\overline{\partial V}$ 的 K-拟共形反射，且 Z 为由 ∂U 和 $g(\partial U)$ 围成的区域。利用球面的共形等距变换，我们可以假设 $\infty \in U$；注意，$d_{V,U}$ 在共形等距变换下保持不变，而根据定理 2.13，k_Z 以双 Lipschitz 方式改变。由注 2.3 可得 $\Delta_e(\partial U, \partial V) \gtrsim 1$。由引理 3.9，恒等映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, k_Z)$ 是拟对称的。□

现在我们可以证明定理 3.6。

定理 *3.6* 的证明。设 $U' = f(U)$、$V' = f(V)$、$d = d_{V,\ U}$、$d' = d_{V',\ U'}$。我们进行一些归一化。通过将 f 与适当的莫比乌斯变换复合，我们假设 $\infty \in U$和 $f(\infty) = \infty$，因此 $\infty \in U'$。设 Z为由.....围成的区域

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$和沿着 ∂V 对 ∂U 的某个拟共形反射围成。如果 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是这个拟共形反射，那么 $h = f \circ g \circ f^{-1}$ 是沿着$\partial V'$的拟共形反射，区域 $Z' = f(Z)$ 由 $\partial U'$和 $h(\partial U')$ 围成。由推论 3.10，恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V \setminus U, d) \to (\partial V \setminus U, k_Z)$ 是拟对称的。定理 2.14 推出 $f\colon (\partial V \setminus U, k_Z) \to (\partial V' \setminus U', k_{Z'})$ 是拟对称的。最后，再由推论 3.10，映射 $\mathrm{id} : (\partial V' \setminus U', k_{Z'}) \to (\partial V' \setminus U', d')$ 是拟对称的。因此，$f\colon (\partial V \setminus U, d) \to (\partial V' \setminus U', d')$ 是拟对称的。所有推论都是定量的。□

3.4. 刻画相切拟圆。本节仅使用平面拓扑，因此点 ∞ 不属于无界集合的闭包。

引理 3.11。设 U、$V \subset \mathbb{C}$ 是无界乔丹区域，满足 $U \cap V = \emptyset$，且令 $\Omega = \mathbb{C} \setminus (U \cup V)$。存在一个共形映射 $\phi\colon \Omega \to S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$，使得 ϕ 可延拓为同胚 $\phi\colon \Omega \to S$，且满足 $\phi(\partial V) = \mathbb{R} \times \{0\}$ 和 $\phi(\partial U) = \mathbb{R} \times \{1\}$。

证明。由于 U, V 是无界的，在球面的拓扑下，它们的边界交于 ∞。通过施行一个莫比乌斯变换，我们可以假设 U 包含 ∞ 的一个邻域，V 有界，$V \subset U^*$，且 $\partial V \cap \partial U = \{1\}$。

区域 Ω 是单连通的，且具有局部连通边界。根据黎曼映射定理，存在共形映射 $\alpha\colon \mathbb{D} \to \Omega$。根据 Carath´eodory 定理 [Pom92，定理 2.1]，α 可延拓为连续映射 $\alpha\colon \mathbb{D} \to \Omega$。注意，$\partial\Omega = \partial U \cup \partial V$和 $\partial\Omega \setminus \{1\}$ 有两个连通分支。根据 [Pom92，命题 2.5]，，我们得出 $\alpha^{-1}(1)$ 由 $\partial\mathbb{D}$中的两个点组成。另一方面，对于 $z \in \partial\Omega \setminus \{1\}$，集合 $\partial\Omega \setminus \{z\}$ 是连通的，因此 $\alpha^{-1}(z)$ 是一个单点。通过在 α 前复合一个单位圆盘的 M¨obius 变换，我们可以假设 $\alpha(1) = \alpha(-1) = 1$ 且 $\alpha(i) \in \partial V$。

同样，我们使用一个莫比乌斯变换，将半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) > 1\}$ 映到圆盘 $U' = \mathbb{D}^*$，并将下半平面 $\{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$ 映到一个与 $\mathbb{D}$ 相切于 1 的圆盘 $V' \subset \mathbb{D}$。存在一个共形映射 $\beta\colon \mathbb{D} \to \Omega' = \mathbb{D} \setminus V'$（可显式写出），它可连续延拓至闭包，并满足 $\beta(1) = \beta(-1) = 1$ 且 $\beta(i) \in \partial V'$。

映射 $\phi = \beta \circ \alpha^{-1}\colon \Omega \to \Omega'$ 可延拓为一个保持点 1 不动的闭包间同胚，并将 ∂V 映到 $\partial V'$，将 ∂U 映到 $\partial U'$。通过适当的复合，该映射可得到引理陈述中区域之间所需的映射。□

现在我们重新陈述并证明定理 1.1。

定理 3.12。设 U、$V \subset \mathbb{C}$ 是满足 $U \cap V = \emptyset$ 的无界拟圆盘。存在拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它将 U 和 V 映射到半平面，当且仅当恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$$

是定量拟对称的。

证明。设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个拟共形映射，分别将 U, V映射到一对闭包不相交的半平面 $U', V' \subset \mathbb{C}$。由性质（Q-6），$f$和 f^{-1} 是拟对称映射。设 $d = d_{V,U}$ 以及 $d' = d_{V',U'}$。由定理 3.6，$f\colon (\partial V, d) \to (\partial V', d')$ 是拟对称映射。接下来，引理 3.1 表明，$\mathrm{id} : (\partial V', d') \to (\partial V', |\cdot|)$ 是拟对称映射。最后，映射 $f^{-1}\colon (\partial V', |\cdot|) \to$

$(\partial V, |\cdot|)$ 是拟对称映射。因此，恒等映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V, d) \to (\partial V, |\cdot|)$ 是拟对称映射。

反过来，假设恒等映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$ 是拟对称的。我们进行归一化。根据拟圆盘的定义，存在一个拟共形映射 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它将 V 映到下半平面 $g(V) = \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 0\}$。于是 $g(U)$ 是一个包含于上半平面内的无界 Jordan 区域。由定理 3.6，$g\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (g(\partial V)\, d_{g(V)}\, g(U))$ 是拟对称的，并且根据性质 (Q-6)，$g\colon (\partial V, |\cdot|) \to (g(\partial V)\ |\cdot|)$ 也是拟对称的。因此，利用我们的主要假设可知，恒等映射 $\mathrm{id} : (g(\partial V)\, d_{g(V)}\, g(U)) \to (g(\partial V)\ |\cdot|)$ 是拟对称的。将 V 替换为 $g(V)$，并将 U 替换为 $g(U)$ 后，我们假设恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$ 是拟对称的，∂V 是实数轴 $\mathbb{R} \times \{0\}$，而 U 无界且包含于上半平面内。

由引理 3.11，存在一个共形映射 f，将 $\mathbb{C} \setminus (U \cup V)$ 映到条带 $S = \{z \in \mathbb{C} : 0 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$，并可延拓为闭包之间的同胚，且满足 $f(\partial U) = \mathbb{R} \times \{1\}$ 和 $f(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$。令 Z 为由 ∂U 及其关于实数轴的反射所围成的区域。根据施瓦茨反射，可将 f 延拓为从 Z 到 $Z' = \{z \in \mathbb{C} : -1 < \mathrm{Im}(z) < 1\}$ 的共形映射。映射 $f|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 是递增的。事实上，若记 $f = u + iv$，由 $S \subset \mathbb{H}$ 可知 $v_y(x, 0) \geq 0$，因此对所有 $x \in \mathbb{R}$，都有 $u_x(x, 0) \geq 0$。

我们将 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 与 $\mathbb{R}$ 等同。回顾一下，映射 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, |\cdot|) \to (\mathbb{R}, d_{V,U})$ 根据归一化是拟对称的。由引理 3.8，映射 $\mathrm{id} : (\mathbb{R}, d_{V,U}) \to (\mathbb{R}, k_Z)$ 是双 Lipschitz 的。由定理 2.13，$f\colon (\mathbb{R}, k_Z) \to (\mathbb{R}, k_{Z'})$ 是双 Lipschitz 的。最后，在条带 Z' 中，我们有显式公式 $k_{Z'}(z, w) = |z - w|$，其中 $z, w \in \mathbb{R}$。考虑所有这些映射的复合，可知 $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是拟对称且递增的。根据 Beurling–Ahlfors 延拓定理（定理 2.7）并作适当的反射，我们可以将 f 延拓为下半平面 V 上的拟共形同胚。由于 $\mathbb{R}$ 对拟共形同胚是可去的，因此 $f\colon U^* \to \{z \in \mathbb{C} : \mathrm{Im}(z) < 1\}$ 是一个拟共形同胚。注意，当 $z \to \infty$ 时，$f(z) \to \infty$。由于 U 是拟圆盘，根据命题 2.6，我们可以将 f 延拓为 $\mathbb{C}$ 上的拟共形映射。□

3.5. **拟环带的刻画**。本节中，我们使用球面拓扑和弦度量。我们重述并证明定理 1.2。

定理 3.13。设 $U, V \subset \mathbb{C}$ 为拟圆盘，且 $U \cap V = \overline{\emptyset}$。存在一个拟共形映射 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它将 U 和 V 映射为圆盘，当且仅当恒等映射

$$\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, \chi)$$

是定量的拟 *Möbius* 映射。

证明几乎完全沿用了定理 3.12 的证明步骤。主要区别在于我们必须进行的归一化。

证明。设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为一个拟共形映射，将 U、V 映为一对具有不相交的闭包的圆盘 U'、V'。通过将 f 与一个 Möbius 变换后复合，我们假设 $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个拟共形映射，它将 U 映到 $\mathbb{D}(0, R)^*$，并将 V 映到 $\mathbb{D}(0, r)$，其中 $0 < r < R$ 为某个值。设 $d = d_{V,U}$ 以及 $d' = d_{V',U'}$。由定理 3.6，$f\colon (\partial V, d) \to (\partial V', d')$ 是拟对称的。接下来，引理 3.1 表明 $\mathrm{id}\colon (\partial V', d') \to (\partial V', |\cdot|)$ 是拟对称的。此外，$\mathrm{id}\colon (\partial V', |\cdot|) \to (\partial V', \chi)$ 是

拟-M¨obius 的，因为它保持交比。最后，由 (Q-4)，映射 $f^{-1}\colon (\partial V', \chi) \to (\partial V, \chi)$ 是拟 -M¨obius 的。因此，恒等映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V, d) \to (\partial V, \chi)$ 是拟 -M¨obius 的。

反之，假设恒等映射 $\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, \chi)$ 是拟$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$默¨比乌斯的。我们进行归一化。存在一个拟共形映射 $g\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，它将 V映到 $\mathbb{D}$，使得 $\infty \in g(U)$。由 (Q-4)，映射 $g\colon (\partial V, \chi) \to (\partial \mathbb{D}, |\cdot|)$ 是拟默¨比乌斯的。集合 $g(U)$ 是包含于 $\mathbb{D}^*$ 中的拟圆盘。由定理 3.6，$g\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial \mathbb{D}, d_{g(V)\,g(U)})$ 是拟对称的。因此，通过进行这一归一化，我们可以假设 $V = \mathbb{D}$、U 是包含 ∞ 的拟圆盘，并且 $\mathrm{id}\colon (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$ 是拟默¨比乌斯的。

存在一个共形映射 f，它将 $\mathbb{C} \setminus (U \cup \mathbb{D})$ 映到环域 $\mathbb{A}(0; 1, R)$，其中某个 $R > 1$ 可延拓为闭包之间的同胚，并满足$f(\partial\mathbb{D}) = \partial\mathbb{D}$ 以及 $f(\partial U) = \mathbb{S}(0, R)$；参见 [Con95] 中的定理 15.7.9 和 15.3.4。令 Z 为由 ∂U 及其沿 $\partial\mathbb{D}$的反射所围成的区域。根据施瓦茨反射，我们可以将 f延拓为一个从 Z到 $Z' = \mathbb{A}(0; 1/R, R)$ 的共形映射。注意，映射 $f|_{\partial\mathbb{D}}$ 是保向的。

回顾一下，根据我们的归一化，映射 $\mathrm{id}\colon (\partial\mathbb{D}, |\cdot|) \to (\partial\mathbb{D}, d_{V,\,U})$ 是拟 M¨obius。根据推论 3.10，映射 $\mathrm{id}\colon (\partial\mathbb{D}, d_{V,\,U}) \to (\partial\mathbb{D}, k_Z)$ 是拟对称的。根据定理 2.13，$f\colon (\partial\mathbb{D}, k_Z) \to (\partial\mathbb{D}, k_{Z'})$ 是双 Lipschitz 的。最后，在环域Z'中，映射 $\mathrm{id}\colon (\partial\mathbb{D}, k_{Z'}) \to (\partial\mathbb{D}, |\cdot|)$ 是拟对称的，因为

$$k_{Z'}(z, w) \simeq \frac{|z - w|}{R - 1}$$

对于 $z, w \in \partial\mathbb{D}$，具有一致常数。因此，$f\colon (\partial\mathbb{D}, |\cdot|) \to (\partial\mathbb{D}, |\cdot|)$ 是拟 Möbius 且保向的。由推论 2.8，存在一个将f 延拓为 V上的拟共形同胚的延拓。$\partial\mathbb{D}$ 的拟共形可去性意味着，f是从 U^* 到 $\mathbb{D}(0, R)$上的拟共形映射。由于 U是一个$\widehat{\ }$拟圆盘，根据命题 2.6，我们可以将 f 延拓为 $\mathbb{C}$上的拟共形映射。□

我们希望定理 3.13 中的映射 f 是拟对称的，并将 ∂U，∂V 映射为同心欧氏圆。我们给出一个充分条件。

推论 3.14。设 $K \geq 1$ 和 $R > r > 0$。设 V 是一个 K-拟圆盘，使得$0 \in V$ 和

$$\partial V \subset \{z \in \mathbb{C} : \max\{r - K(R - r), K^{-1}r\} \leq |z| \leq r\}$$

并设 $U \subset \mathbb{C}$ 是一个 K-拟圆盘，使得 $\infty \in U$ 和 $\partial U \subset \{z \in \mathbb{C} : R \leq |z| \leq R + K(R - r)\}$。那么存在一个从 $\mathbb{C}$ 出发的拟共形映射，将 V和 U^*映射到同心欧几里得圆盘，其定量性质仅取决于 K。

证明。由引理 3.4，恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, |\cdot|)$ 是拟对称的，因此也是拟 M¨obius 的。由于欧氏度量与弦度量下的交比相同，我们得出 $\mathrm{id} : (\partial V, d_{V,U}) \to (\partial V, \chi)$ 是拟 M¨obius 的。由定理$\widehat{\ }$3.13，存在一个拟共形映射 f of $\mathbb{C}$，它将 V 映到 $\mathbb{D}$，并将 U^* 映到圆盘 $\mathbb{D}(0, R)$，$R > 1$。注意，由引理 3.4，$\mathrm{id} : (\partial U, |\cdot|) \to (\partial U, d_{U,V})$ 是拟对称的。由定理 3.6，映射 $f\colon (\partial U, d_{U,V}) \to (\mathbb{S}(0, R)\, d_{\mathbb{D}(0,R)^*,\mathbb{D}})$ 是拟对称的。最后，由引理 3.1 (2)，恒等映射 $\mathrm{id} : (\mathbb{S}(0, R)\, d_{\mathbb{D}(0,R)^*,\mathbb{D}}) \to (\mathbb{S}(0, R)\ |\cdot|)$ 是拟对称的。综上，$f\colon (\partial U, |\cdot|) \to (\mathbb{S}(0, R)\ |\cdot|)$ 是拟对称的。由推论 2.9，它可延拓为一个从 $U \cap \mathbb{C}$到 $\mathbb{D}(0, R)^* \cap \mathbb{C}$的拟共形映射。若将 $U \cap \mathbb{C}$ 中 f的定义替换为该延拓，我们便得到所需的映射。□

定理 *1.3* 的证明。$U \cap V = \emptyset$ 的情形由定理 3.13 得出，因此我们假设$U \cap V \neq \emptyset$。假设存在一个拟共形映射 f of $\mathbb{C}$，它将 U, V映到圆盘。与适当的 M¨obius 变换复合后，我们可以令 $U \cap V = \{\infty\}$，于是 U, V是 $\mathbb{C}$ 中的无界拟圆盘，且 f将它们映到半平面。由定理 3.12，恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V \setminus U, d_{V,U}) \to (\partial V \setminus U, |\cdot|)$ 是拟对称的。因此，它也是拟 M¨obius 的。由于欧氏度量与球面度量下的交比相同，恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V \setminus U, d_{V,U}) \to (\partial V \setminus U, \chi)$ 是拟 M¨obius 的。

反过来，假设恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V \setminus U, d_{V,U}) \to (\partial V \setminus U, \chi)$ 是拟 M¨obius。通过施行一个 M¨obius 变换，我们可以假设 $U \cap V = \{\infty\}$。因此，恒等映射 $\mathrm{id} : (\partial V \setminus U, d_{V,U}) \to (\partial V \setminus U, |\cdot|)$ 及其反函数都是拟 M¨obius。注意，若 $w \in \partial V \setminus U$ 是给定点，则

$$\lim_{\substack{z \to \infty \\ z \in \partial V \setminus U}} d_{V,U}(z, w) = \infty.$$

由 (Q-5)，映射 $\mathrm{id} : (\partial V \setminus U, |\cdot|) \to (\partial V \setminus U, d_{V,U})$ 是拟对称的。 □

4. 函数图像与尖点

本节证明定理 1.5 和定理 1.6。我们将用到平面拓扑，因此无界集合的闭包不包含点 ∞。我们先给出一个预备命题。

命题 4.1。设 $K \geq 1$ 和 $L, a > 0$。令 $f \colon \mathbb{R} \to (0, \infty)$ 是一个 L-利普希茨函数，$U \subset \mathbb{H}$ 是一个无界 K-拟圆盘，且 $\partial U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^{-1} f(x) \leq y \leq a f(x)\}$，并且每条竖直线都与 ∂U相交。存在一个 $\mathbb{C}$ 的拟共形同胚，它保持实数轴不变，并将 ∂U映到一条直线上，当且仅当 $1/f$ 的一个原函数定量地拟对称。

证明。令 $\mathrm{Graph}(f) = \{(x, f(x)) : x \in \mathbb{R}\}$。对每个 $t \in \mathbb{R}$，球 $\mathbb{D}((t, 0), f(t))$ 包含点 $(t, f(t))$，也可能包含图像 f上的其他点。因此，存在一点 $y \in [t - f(t), t + f(t)]$，使得

$$\mathrm{dist}_e((t, 0), \mathrm{Graph}(f)) = |(t, 0) - (y, f(y))|.$$

若 $|t - y| \geq f(t)/2L$，则 $\mathrm{dist}_e((t, 0), \text{图像}(f)) \geq |t - y| \geq f(t)/2L$。若 $|t - y| \leq f(t)/2L$，则 $f(y) \geq f(t) - L|t - y| \geq \frac{1}{2} f(t)$。因此，

$$\frac{1}{2} \min\{1, L^{-1}\} f(t) \leq \mathrm{dist}_e((t, 0), \mathrm{Graph}(f)) \leq f(t)$$

由于 $\partial U \subset \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a^{-1} f(x) \leq y \leq a f(x)\}$，我们有

$$\mathrm{dist}_e((t, 0), \partial U) \geq \mathrm{dist}_e((t, 0), \mathrm{Graph}(a^{-1} f)) \geq \frac{1}{2a} \min\{1, L^{-1}\} f(t) \tag{4.1}$$

对所有 $t \in \mathbb{R}$。

由于 U 是无界 Jordan 区域，区域 U^* 也是 $\mathbb{C}$ 中的无界 Jordan 区域，因此可以应用定理 2.15 来估计 U^* 上的双曲度量。令 V 为下半平面。对于 $(x, 0), (y, 0) \in \partial V = \mathbb{R} \times \{0\}$，其中 $x < y$，由 (4.1) 可得

$$d_{V,U}((x, 0), (y, 0)) \leq \ell_{h_{U^*}}([x, y]) \leq \int_x^y \frac{2}{\mathrm{dist}_e((t, 0), \partial U)} \, dt \leq C(a, L) \int_x^y \frac{1}{f(t)} \, dt.$$

接下来，我们证明反方向的不等式。根据 $[x,y]$ 中 f 的一致连续性和正性，存在 $\delta>0$，使得若 $|s-t|<\delta$ 且 $s,t\in[x,y]$，则

$$|f(s)-f(t)|<\frac{1}{2}\min\{f(r):r\in[x,y]\}\le\frac{1}{2}f(t),$$

因此 $\frac{1}{2}f(t)\le f(s)\le\frac{3}{2}f(t)$。所以，存在 $[x,y]$ 的一个分割 $x=t_0<t_1<\cdots<t_n=y$，使得对于 $t\in[t_{i-1},t_i]$, $i\in\{1,\dots,n\}$, $\frac{1}{2}f(t_i)\le f(t)\le\frac{3}{2}f(t_i)$。

现在，令 γ 为 $U^*\setminus V\subset\{(t,s)\in\mathbb{R}^2$ 中任意一条曲线：$0\le s<af(t)\}$，其端点为 $(x,0)$ 和 $(y,0)$，$x<y$。存在 γ 的一族互不重叠的子曲线 γ_i，$i\in\{1,\dots,n\}$，使得每条 γ_i 在 x 轴上的投影为区间 $[t_{i-1},t_i]$。根据假设，∂U 与每条竖直线相交，因此注意到，对于 γ_i 上的每个点 (t,s)，我们有

$$\operatorname{dist}_e((t,s),\partial U)\le af(t)\le\frac{3a}{2}f(t_i).$$

此外，$\ell_e(\gamma_i)\ge t_i-t_{i-1}$。因此，由定理 2.15 可得

$$\begin{aligned}\ell_{h_{U^*}}(\gamma)&\ge\frac{1}{2}\int_\gamma\frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot,\partial U)}\,ds\ge\frac{1}{2}\sum_{i=1}^n\int_{\gamma_i}\frac{1}{\operatorname{dist}_e(\cdot,\partial U)}\,ds\\&\ge\frac{1}{3a}\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{1}{f(t_i)}\,dt\ge\frac{1}{6a}\sum_{i=1}^n\int_{t_{i-1}}^{t_i}\frac{1}{f(t)}\,dt=\frac{1}{6a}\int_x^y\frac{1}{f(t)}\,dt.\end{aligned}$$

这证明了 $d_{V,U}((x,0),(y,0))\ge\frac{1}{6a}\int_x^y\frac{1}{f(t)}\,dt$。

综上，若 $F\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是 $1/f$ 的一个原函数，我们已证明

$$C(a,L)^{-1}|F(y)-F(x)|\le d_{V,U}((x,0),(y,0))\le C(a,L)|F(y)-F(x)|$$

对所有 $x,y\in\mathbb{R}$ 均成立。也就是说，映射 $F\colon(\mathbb{R},d_{V,U})\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是双 Lipschitz 的。由定理 3.12，存在一个从 $\mathbb{C}$ 到 ∂V 和 ∂U 的拟共形同胚，将它们映射到两条平行直线，当且仅当恒等映射 $\mathrm{id}\colon(\mathbb{R},d_{V,U})\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是拟对称的。等价地，映射 $F\colon(\mathbb{R},|\cdot|)\to(\mathbb{R},|\cdot|)$ 是拟对称的。□

定理 *1.5* 的证明。 由命题 4.1，只需证明：若 $f\colon\mathbb{R}\to(0,\infty)$ 是一个 L-Lipschitz 函数，则 $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y>f(x)\}$ 是一个拟圆盘。对于图像 f 上任意两点 $(x,f(x))$ 和 $(y,f(y))$，若 $A=\{(t,f(t))\colon t\in[x,y]\}$，则

$$\operatorname{diam}_e(A)\le\sqrt{1+L^2}|x-y|\le\sqrt{1+L^2}|(x,f(x))-(y,f(y))|.$$

这表明 $U=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon y>f(x)\}$ 的边界是一个拟圆（若将 ∞ 处的点也包含在内）。由定理 2.5，U 是一个拟圆盘，证毕。□

定理 *1.6* 的证明。 首先证明条件 (1)、(2)、(3) 的充分性。由命题 4.1，只需验证 ∂U 与每条竖直线相交。根据假设 (2)，有 $\partial U\subset\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0<y\le af(x)\}$。由假设 (3) 和定理 1.5，存在一个 $\mathbb{C}$ 的拟共形映射，它保持实数轴不变，并将曲线 $y=af(x)$ 映射到直线 $y=1$。无界拟圆 ∂U被映射到条带 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\colon 0<y\le1\}$ 内的一个无界拟圆。由引理 2.4，这个拟圆必须将直线 $y=0$ 与半平面$y>1$分隔开。因此，∂U 将直线 $y=0$ 与集合 $y>af(x)$ 分隔开。这意味着每条竖直线都与 ∂U 相交，证毕。

我们证明必要性。设 F 是一个 K-拟共形映射，它保持实数轴不变，并将 $\mathbb{C}$ 映到直线 $y=1$ 上。注意，$F|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 是递增的

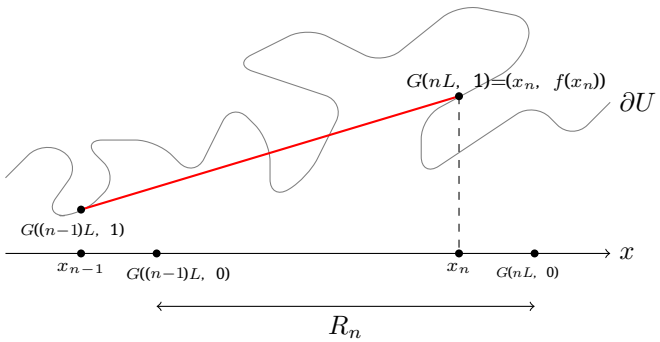


FIGURE 6. 定理 1.6 的证明中函数 f 的构造。

因为 F 是保向的。条件 (1) 显然成立。设 $G = F^{-1}$，它也是 K-拟共形的，并且在 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 上递增。由 (Q-6)，映射 F 和 G 是某个 η-拟对称映射，其中 η 仅依赖于 K。取 $L > 1$，使得 $\eta(1/L) = 1/3$。对于 $n \in \mathbb{Z}$ 和 $R_n = |G(nL,\ 0) - G((n-1)L,\ 0)|$，有

$$|G(nL,1) - G(nL,0)| \le \eta(1/L)|G(nL,0) - G((n-1)L,0)| = R_n/3 \tag{4.2}$$

类似地，$|G((n-1)L,\ 1) - G((n-1)L,\ 0)| \le R_n/3$。因此，点 $G((n-1)L,\ 1)$ 和 $G(nL,\ 1)$ 的 x 坐标至少相差 $R_n/3$。我们用一条斜率至多为 1 的线段连接这两点。这样，我们得到一个分段线性 1-利普希茨函数 $f\colon \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[x_{n-1}, x_n] \to (0,\ \infty)$，其图像经过点 $(x_n,\ y_n) = G(nL,\ 1)$、$n \in \mathbb{Z}$。参见图 6。

由于 $G|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 是到 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 上的递增同胚，我们得出 $\sum_{n=1}^{\infty} R_n = \infty$。如上所述，对每个 $n \in \mathbb{Z}$，都有 $x_n - x_{n-1} \ge R_n/3$，这意味着当 $n \to \infty$ 时，$x_n \to \infty$。类似地，当 $n \to -\infty$ 时，$x_n \to -\infty$。因此，f 的区域是 $\mathbb{R} = \bigcup_{n\in\mathbb{Z}}[x_{n-1}, x_n]$。此外，$\partial U$ 包含点 $(x_n,\ y_n)$、$n \in \mathbb{Z}$，因此根据连通性可知，每条竖直线都与 ∂U 相交。我们将验证条件 (2)，即

$$\partial U \subset \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : a^{-1} f(x) \le y \le a f(x)\}$$

对于某个 $a = a(K) \ge 1$。完成后，条件 (3) 即由命题 4.1 得出。

我们断言，对每个 $\delta > 0$,

$$\text{if } u, v \in \mathbb{R} \text{ and } |u - v| \le \delta f(u), \text{ then } f(u) \le C(K,\delta) f(v). \tag{4.3}$$

我们固定 $n \in \mathbb{Z}$。于是有

$$\frac{|(nL,0) - (nL,1)|}{|F(x_n,0) - (nL,1)|} \le 1 \text{ and } \frac{|((n-1)L,0) - (nL,0)|}{|(nL,0) - (nL,1)|} = L$$

so

$$\begin{aligned} f(x_n) = y_n = |(x_n,0) - (x_n,y_n)| &\ge \eta(1)^{-1}|G(nL,0) - G(nL,1)| \\ &\ge \eta(1)^{-1}\eta(L)^{-1}|G((n-1)L,0) - G(nL,0)| \\ &= \eta(1)^{-1}\eta(L)^{-1} R_n. \end{aligned}$$

此外，由 (4.2) 可得

$$f(x_n) = y_n = |(x_n, 0) - (x_n, y_n)| \le |G(nL, 0) - G(nL, 1)| \le R_n/3.$$

综上，我们有 $f(x_n) \simeq_K R_n$。采用同样的论证，可以证明$f(x_{n-1}) \simeq_K R_n$。由于 f 在 $[x_{n-1}, x_n]$ 上是线性的，因此

$$C_1(K)^{-1} R_n \le f(x) \le C_1(K) R_n \text{ for } x \in [x_{n-1}, x_n]. \tag{4.4}$$

此外，由 (4.2) 可得

$$2R_n/3 \le |(x_n, 0) - G((n-1)L, 0)| \le 4R_n/3.$$

因此，

$$|F(x_n, 0) - ((n-1)L, 0)| \le \eta(4/3)L$$

and

$$\begin{aligned} |F(x_n, 0) - F(x_n, y_n)| &\le \eta\left(\frac{f(x_n)}{|(x_n, 0) - G((n-1)L, 0)|}\right) |F(x_n, 0) - ((n-1)L, 0)| \\ &\le \eta(3C_1(K)/2)|F(x_n, 0) - ((n-1)L, 0)| \\ &\le \eta(3C_1(K)/2)\eta(4/3)L. \end{aligned}$$

于是，

$$1 \le |F(x_n, 0) - F(x_n, y_n)| \le C_2(K). \tag{4.5}$$

设 $\delta > 0$、 n， $m \in \mathbb{Z}$，且 $|x_n - x_m| \le \delta f(x_n) = \delta y_n$。由于 F 是 η-拟对称的，由 (4.5) 可得

$$\begin{aligned} |F(x_n, 0) - F(x_m, 0)| &\le \eta(\delta)|F(x_n, 0) - F(x_n, y_n)| \\ &\le \eta(\delta)C_2(K) \\ &\le \eta(\delta)C_2(K)|F(x_m, 0) - F(x_m, y_m)|. \end{aligned}$$

现在，由于 G 是 η-拟对称的，我们得到

$$|x_n - x_m| \le \eta(\eta(\delta)C_2(K))y_m.$$

由于 f 是1-Lipschitz的，由此可得

$$y_n \le C_3(K, \delta) y_m. \tag{4.6}$$

现在，设 $u, v \in \mathbb{R}$ 使得 $|u - v| \le \delta f(u)$。假设 $u \in [x_{n-1}, x_n]$ 与 $v \in [x_{m-1}, x_m]$。若 $|m - n| \le 1$，则（4.3）立即由（4.4）得出。因此，我们假设 $|m-n| > 1$。不失一般性，假设 $m < n$。由（4.4）我们有

$$|x_{n-1} - x_m| \le |u - v| \le \delta f(u) \le \delta C_1(K) f(x_{n-1}).$$

因此，由（4.6）和（4.4），对 $\delta' = \delta C_1(K)$我们有

$$f(u) \le C_1(K) f(x_{n-1}) \le C_1(K) C_3(K, \delta') f(x_m) \le C_1(K)^2 C_3(K, \delta') f(v).$$

至此完成了（4.3）中断言的证明。

我们现在继续验证（2）。设 $x \in [(n-1)L, nL]$ 并注意到

$$k_{\mathbb{H}}((x, 1), (nL, 1)) \le L.$$

由定理 2.13，我们有

$$k_{\mathbb{H}}(G(x, 1), G(nL, 1)) \le r(K).$$

$\mathbb{H}$ 上的双曲度量与拟双曲度量一致。因此,

$$\partial U \subset \{(x,y)\in\mathbb{H} : \mathrm{dist}_{h_{\mathbb{H}}}((x,y),\mathrm{Graph}(f)) \le r(K)\}.$$

我们将证明包含关系

$$\begin{aligned}\{(x,y)\in\mathbb{H} : \mathrm{dist}_{h_{\mathbb{H}}}((x,y),\mathrm{Graph}(f)) \le r(K)\}\\ \subset \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : a^{-1}f(x)\le y\le af(x)\}\end{aligned} \tag{4.7}$$

对某个 $a=a(K)\ge 1$ 成立，这将完成 (2) 的证明 .

设 $(u_0,v_0)\in\mathbb{H}$ 为一点，使得 $\mathrm{dist}_{h_{\mathbb{H}}}((u_0,v_0),$图像$(f)) \le r(K)$。设 $(u_1,f(u_1))\in$图像(f)，使得 $h_{\mathbb{H}}((u_0,v_0),(u_1,f(u_1))) \le r(K)$。我们使用公式

$$h_{\mathbb{H}}((u_0,v_0),(u_1,v_1)) = 2\,\mathrm{arcsinh}\,\frac{|(u_1,v_1)-(u_0,v_0)|}{2\sqrt{v_1v_0}}.$$

因此,

$$\frac{|(u_1,f(u_1))-(u_0,v_0)|}{\sqrt{f(u_1)v_0}} \le 2\sinh(r(K)/2) = C_4(K). \tag{4.8}$$

我们得出

$$|f(u_1)-v_0| \le C_4(K)\sqrt{f(u_1)v_0}.$$

等价地,

$$\left|\left(\frac{f(u_1)}{v_0}\right)^{1/2} - \left(\frac{v_0}{f(u_1)}\right)^{1/2}\right| \le C_4(K).$$

令 $t=\left(\frac{f(u_1)}{v_0}\right)^{1/2}$，我们有 $|t-t^{-1}|\le C_4(K)$，这意味着 $C_5(K)^{-1}\le t\le C_5(K)$。等价地， $f(u_1)\simeq_K v_0$。接下来，由 (4.8)，我们有

$$|u_1-u_0| \le C_4(K)\sqrt{f(u_1)v_0} = C_4(K)t^{-1}f(u_1) \le C_4(K)C_5(K)f(u_1).$$

根据 (4.3) 中的断言，我们有 $f(u_1)\le C_6(K)f(u_0)$。此外，由于 f是 1-Lipschitz 的，我们有 $f(u_0)\le(1+C_4(K)C_5(K))f(u_1)$。因此， $f(u_0)\simeq_K f(u_1)\simeq_K v_0$。也就是说，存在 $a=a(K)\ge 1$ 使得

$$a^{-1}f(u_0)\le v_0\le af(u_0).$$

这就证明了 (4.7) 中的包含关系。 □

例 4.2. 我们在两个基本例子中应用定理 1.5，以突出 f 在定理 1.5 中的衰减率的重要性。

令 $p>-1$和 $f(x)=(|x|+1)^{-p}$，其中 $x\in\mathbb{R}$。我们有 $|f'(x)|\le|p|$，其中 $x\ne 0$，因此f 是 $|p|$-利普希茨的。我们计算 $1/f$的一个原函数。当 $x\in\mathbb{R}$ 时，我们有

$$F(x)=\int_0^x\frac{dt}{f(t)}=\int_0^x(|t|+1)^p\,dt=\begin{cases}(p+1)^{-1}((|x|+1)^{p+1}-1) & x\ge 0\\ -(p+1)^{-1}((|x|+1)^{p+1}-1) & x<0.\end{cases}.$$

证明 F 是拟对称的是一道习题（参见 [Hei01，习题 10.3] 以及 [LV73，引理 II. 7.1]）。根据定理 1.5，曲线 $y=(|x|+1)^{-p}$ 与 $y=0$可通过$\mathbb{C}$的拟共形同胚映射为一对平行直线。该例子也曾由 Yusheng Luo 用不同的技巧独立研究过。

接下来，设 $f(x) = e^{-|x|}$，$x \in \mathbb{R}$，它是 1-Lipschitz 的。$1/f$ 的一个原函数是

$$F(x) = \int_0^x e^{|t|}\,dt = \begin{cases} e^{|x|} - 1 & x \geq 0 \\ -(e^{|x|} - 1) & x < 0 \end{cases}.$$

注意，对于 $x > 0$，我们有

$$\frac{F(2x) - F(x)}{F(x) - F(0)} = \frac{e^{2x} - e^x}{e^x - 1} = e^x$$

它无界，因此 F 不是拟对称的。由此，根据定理 1.5，曲线 $y = e^{-|x|}$ 和 $y = 0$ 不能通过 $\mathbb{C}$上的拟共形同胚映射到一对平行直线上。

对于 $\alpha > 1$，考虑多项式尖点 $C_\alpha = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |y| = x^\alpha, \ 0 \leq x \leq 1\}$。现在我们重新表述并证明推论 1.7。

推论 4.3。对于每个 α，$\beta > 1$，都存在 $\mathbb{C}$ 上的拟共形映射 f，使得 $f(C_\alpha) = C_\beta$。

证明。我们证明存在 $\mathbb{C}$上的拟共形同胚 f，它将实数轴映到自身，并将 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^\alpha, \ 0 \leq x \leq 1\}$ 映到半圆 $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + (y - 1/2)^2 = 1/4, \ x \geq 0\}$；该半圆在 $(0, 0)$ 处与实数轴相切。通过反射，我们可以定义$\mathbb{C}$上的拟共形同胚，它在上半平面内等于 f，并将 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = -x^\alpha, \ 0 \leq x \leq 1\}$映到 A的反射。由于任意多项式尖点 C_α 都可以映到两份 A，这足以得出定理的结论。现在我们着重证明这一断言。

考虑映射

$$\phi(z) = \frac{1}{\overline{z}} = \frac{x}{x^2 + y^2} + i\frac{y}{x^2 + y^2}.$$

注意，对于 $0 < x \leq 1$，我们有

$$\phi(x + ix^\alpha) = \frac{x}{x^2 + x^{2\alpha}} + i\frac{x^\alpha}{x^2 + x^{2\alpha}} = \frac{1}{x(1 + x^{2\alpha-2})} + i\frac{x^{\alpha-1}}{x(1 + x^{2\alpha-2})}.$$

Let

$$t(x) = \operatorname{Re}(\phi(x + ix^\alpha)) = \frac{1}{x(1 + x^{2\alpha-2})}, \quad 0 < x \leq 1.$$

注意，t严格递减，且取值于 $[1/2, \infty)$。设 $s\colon [1/2, \infty) \to (0, 1]$ 为 t的反函数。我们有

$$\operatorname{Im}(\phi(x + ix^\alpha)) = t(x)x^{\alpha-1} = t(x)s(t(x))^{\alpha-1}.$$

因此，$\{\phi(x+ix^\alpha) : 0 < x \leq 1\}$ 是函数 $h(t) = ts(t)^{\alpha-1}$, $t \geq 1/2$的图像。我们通过如下方式连续延拓 h：对 $|t| \geq 1/2$ 定义 $h(t) = |t|s(|t|)^{\alpha-1}$，并对 $t \in (-1/2, 1/2)$令$h(t) = 1/2$。

我们证明 h 是利普希茨连续的。对 $0 < x \leq 1$，我们有 $\frac{1}{2x} \leq t(x) \leq \frac{1}{x}$，因此对 $t \geq 1/2$，有$\frac{1}{2t} \leq s(t) \leq \frac{1}{t}$。注意

$$|t'(x)| = (x + x^{2\alpha-1})^{-2}(1 + (2\alpha - 1)x^{2\alpha-2}) \geq t(x)^2$$

当 $x \in (0,1)$ 时，因此 $|s'(t)| \leq t^{-2} \leq 4s(t)^2$ 当 $t \in (1/2, \infty)$ 时。因此，

$$|h'(t)| = |s(t)^{\alpha-1} + t(\alpha - 1)s(t)^{\alpha-2}s'(t)| \leq 1 + 4(\alpha - 1)ts(t)s(t)^{\alpha-1} \leq 1 + 4(\alpha - 1)$$

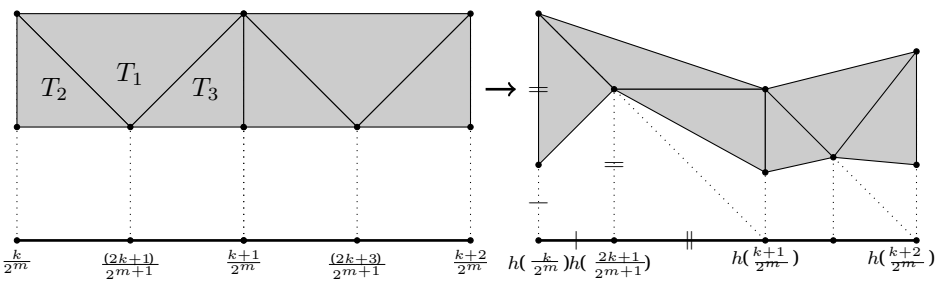


FIGURE 7. 定理5.1中构造的拟共形延拓。标记表示全等的线段。

当 $t \in (1/2, \infty)$ 时。对于 $t \in (-\infty, -1/2)$，同样的界也成立，并且对于 $t \in (-1/2, 1/2)$，有 $h'(t) = 0$。因此， h 是利普希茨的。

由于对于 $t \geq 1/2$，$-\frac{1}{2t} \leq s(t) \leq \frac{1}{t}$，我们有

$$\frac{1}{2^{\alpha-1}}|t|^{2-\alpha} \leq h(t) \leq |t|^{2-\alpha}$$

对于 $|t| \geq 1/2$。此外，对于 $|t| \geq 1/2$，我们有 $|t| \leq 1 + |t| \leq 3|t|$。因此，对于 $C = 2^{\alpha-1} \max\{3^{\alpha-2}, 3^{2-\alpha}\}$，我们有

$$C^{-1}(1 + |t|)^{2-\alpha} \leq h(t) \leq C(1 + |t|)^{2-\alpha}.$$

该不等式对 $|t| \leq 1/2$ 也成立。我们令 $g(t) = (1 + |t|)^{2-\alpha}$, $t \in \mathbb{R}$，并且对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有 $C^{-1}g(t) \leq h(t) \leq Cg(t)$。

由例 4.2 可知， $1/g$ 的一个原函数 G 是拟对称的。此外，若 H 是 $1/h$ 的一个原函数，则对于 t_1， $t_2 \in \mathbb{R}$，我们有

$$C^{-1}|G(t_1) - G(t_2)| \leq |H(t_1) - H(t_2)| \leq C|G(t_1) - G(t_2)|,$$

因此 H 也是拟对称的。根据定理 1.5，存在一个拟共形映射 F，它将复平面 $\mathbb{C}$ 中的直线 $y = 0$ 映到自身，并将 h 的图像映到直线 $y = 1$ 上。不妨设 $F(1/2, 1/2) = (1, 0)$。复合映射 $\phi^{-1} \circ F \circ \phi$ 是复平面 $\mathbb{C}$ 上的拟共形映射，它将实数轴映到自身，并将 $\{(x, y) : y = x^\alpha, \ 0 \leq x \leq 1\}$ 映到半圆 A 上。□

5. QUASICONFORMAL EXTENSION RESULTS

我们陈述一个 Beurling–Ahlfors 延拓定理的变体，适用于复平面 $\mathbb{R}$ 上局部拟对称的同胚。

定理5.1。 设 η 是一个畸变函数。设 $h\colon \ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是一个递增同胚，并且对每个 $t \in \mathbb{R}$，它在 $[t, t+1]$ 中是 η-拟对称的，且满足 $h(n) = n$，其中 $n \in \mathbb{Z}$ 任意。则存在一个将 h 延拓为同胚 $H\colon \ \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} \times [0,1]$ 的延拓，使得 $H|_{\mathbb{R}\times\{1\}}$ 是恒等映射，且 $H|_{\mathbb{R}\times(0,1)}$ 是 $K(\eta)$-拟共形的。此外，如果 h 与某个 $N \in \mathbb{Z}$ 复合后可交换（$z \mapsto z + N$），则延拓 H 也可以取为具有相同性质。

该构造在 [AIM09, 定理 5.8.1]，中给出，其假设略有不同。我们仅提供证明概要。

证明。 考虑映射

$$H(k2^{-m}, 2^{-m}) = (h(k2^{-m}), h((k+1)2^{-m}) - h(k2^{-m}))$$

其中 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$。在每个层级 $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$，都存在三种不同类型的三角形，其顶点集为

$$V_1 = \{(k2^{-m}, 2^{-m}), ((k+1)2^{-m}, 2^{-m}), ((2k+1)2^{-m-1}, 2^{-m-1})\},$$
$$V_2 = \{(k2^{-m}, 2^{-m}), (k2^{-m}, 2^{-m-1}), ((2k+1)2^{-m-1}, 2^{-m-1})\},$$
$$V_3 = \{((k+1)^{-m}, 2^{-m}), ((2k+1)2^{-m-1}, 2^{-m-1}), ((k+1)2^{-m}, 2^{-m-1})\}.$$

记 T_i 为由 V_i、$i = 1, 2, 3$ 的凸包构成的三角形。映射 H 在线性意义下扩展到每个三角形上。根据构造，并利用 h 是递增同胚这一事实，每个三角形的像都非退化，且不同的三角形映射为不同的三角形。示意见图7。因此，H 扩展为从 $\mathbb{R} \times [0,1]$ 到其自身的一个同胚。注意，H 在 $\mathbb{R} \times \{1\}$ 上是恒等映射，因为对于 $n \in \mathbb{Z}$，$h(n) = n$。此外，如果对于某个 $N \in \mathbb{Z}$，h 与 $z \mapsto z + N$ 交换，那么 H 也具有相同性质。为了证明 H 在 $\mathbb{R} \times (0, 1)$ 中是拟共形的，只需证明三角形 $H(T_i)$、$i = 1, 2, 3$ 的角一致地远离 0。更多细节请参见 [AIM09, 定理 5.8。1] □

5.1. 条带中的延拓。 下一个结果给出了充分条件，使得直线 $y = 0$ 和 $y = 1$ 之间的同胚可以拟共形地延拓到条带 $0 < y < 1$。

命题 5.2。 设 η 是一个畸变函数，且 $a \geq 1$。设 $h\colon \mathbb{R} \times \{0,1\} \to \mathbb{R} \times \{0,1\}$ 是一个同胚，使得 $h(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$，且 $h|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 递增。假设对每个 $t \in \mathbb{R}$

(1) 映射 h 在 $[t, t+1] \times \{0\}$ 和 $[t, t+1] \times \{1\}$ 上是拟对称的，且(2) 点 $(t, 0)$、$(t,1)$、$(t+1, 0)$、$(t+1, 1)$ 被映射到两两距离均位于区间 $[a^{-1}, a]$内的点。

于是，存在一个将 h 延拓为同胚 $H\colon \mathbb{R} \times [0,1] \to \mathbb{R} \times [0,1]$的延拓，使其在 $\mathbb{R} \times (0, 1)$ 上为 $K(\eta, a)$- 拟共形。此外，如果 h 与 $z \mapsto z + (N,0)$ 对某个 $N \in \mathbb{Z}$ 可交换，那么延拓 H 也可以取为具有相同性质。

证明。由于对每个 $t \in \mathbb{R}$，$|h(t, 0) - h(t,1)| \leq a$，我们得出 $h|_{\mathbb{R}\times\{1\}}$ 是递增的。因此，h 在两条直线上均递增。对于 $t \in \mathbb{R}$，令 $Q_t = [t, t+1] \times [0,1]$，并将底边为 $h([t, t+1] \times \{0\})$ 和$h([t, t+1] \times \{1\})$ 的闭梯形记为 T_t；见图 8。根据假设，T_t 的顶点的两两距离属于 $[a^{-1}, a]$。

对于每个 $n \in \mathbb{Z}$，梯形 T_n 都可以通过一个在 T_n 的每条边上均为线性的 $L(a)$-双 Lipschitz 映射 ψ 映射到正方形 $Q_n = [n, n+1] \times [0,1]$；此外，我们可以令 ψ 以递增的方式，分别将 T_n 的底边和顶边映射到 Q_n 的底边和顶边。为证明这一点，我们沿左下顶点到右上顶点的对角线，将 T_n 分成两个三角形A_n，B_n。注意，A_n 和 B_n 的高均为 1，因此它们的面积与 1 可比，具体取决于 a。这意味着 A_n 和 B_n 的角均一致地有一个大于 0 的下界。因此，A_n 和 B_n 可以通过线性双 Lipschitz 映射映射到两个由单位正方形沿对角线分割得到的直角三角形；双 Lipschitz 常数仅取决于 a。

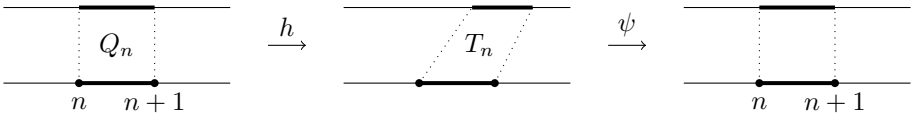


FIGURE 8. 映射 $\omega = \psi \circ h$。

将这些双 Lipschitz 映射拼接起来，我们构造出一个 $L(a)$-双 Lipschitz 映射ψ: $\mathbb{R}^2 \times [0,1] \to \mathbb{R}^2 \times [0,1]$，使得对于每个 $n \in \mathbb{Z}$， $\psi(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$、 $\psi(\mathbb{R} \times \{1\}) = \mathbb{R} \times \{1\}$, 且 $\psi(T_n) = [n, n+1] \times [0,1]$。

考虑圆盘 $\mathbb{R} \times \{0,1\}$ 上的映射 $\omega = \psi \circ h$。对于每个 $t \in \mathbb{R}$，映射 ω 在 $[t, t+1] \times \{0\}$ 上是拟对称的。此外， ω 在 $\mathbb{R} \times \{0\}$ 上递增，并且 $\omega(n, 0) = (n, 0)$, $n \in \mathbb{Z}$；见图 8。根据定理5.1，映射 $\omega|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 可延拓为复平面 $\mathbb{R} \times [0,1]$ 上的同胚 (u, v), 它在 $\mathbb{R} \times (0, 1)$ 内是拟共形的，因此 $(u, v)|_{\mathbb{R}\times\{1\}}$ 是恒等映射。映射 $\omega_0(x, y) = (u(x, 2y)$ $2^{-1}v(x, 2y))$ 是从 $\mathbb{R}\times[0, 1/2]$ 到其自身的同胚，它延拓了 $\omega|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$，在 $\mathbb{R} \times (0, 1/2)$ 内是拟共形的，并且在 $\mathbb{R} \times \{1/2\}$ 上是恒等映射。类似地， $\omega|_{\mathbb{R}\times\{1\}}$ 可延拓为复平面 $\mathbb{R} \times [1/2, 1]$ 上的同胚 ω_1，它在 $\mathbb{R} \times (1/2, 1)$ 内是拟共形的，而且该延拓在 $\mathbb{R} \times \{1/2\}$ 上也恒为恒等映射。

因此，根据直线的拟共形可去性， $\omega|_{\mathbb{R}\times\{0,1\}}$ 可延拓为 $\mathbb{R}\times[0,1]$ 上的同胚，并且在 $\mathbb{R}\times(0, 1)$中定量地拟共形。因此， $h = \psi^{-1} \circ \omega$ 可延拓为 $\mathbb{R} \times [0,1]$ 上的同胚，并且在 $\mathbb{R} \times (0, 1)$中定量地拟共形。

最后，我们证明，如果映射 h 与 $z \mapsto z + N$ 对某个 $N \in \mathbb{Z}$可交换，则延拓可以取为具有相同性质的映射。事实上，在这种情况下，梯形 T_n 满足 $T_{n+N} = T_n + (N, 0)$， $n \in \mathbb{Z}$，因此分段线性映射 ψ与 $z \mapsto z + (N, 0)$可交换。此外，定理5.1给出的延拓也具有这一性质。□

推论 5.3。设 η为一个畸变函数。设 h: $\mathbb{R} \times \{0,1\} \to \mathbb{R} \times \{0,1\}$ 为一个 η-拟对称同胚，满足 $h(\mathbb{R} \times \{0\}) = \mathbb{R} \times \{0\}$，且 $h|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$为递增函数。则存在一个将 h 延拓为 $K(\eta)$-拟共形同胚的延拓，其定义域为 $\mathbb{C}$。

证明。 对于每个 $t \in \mathbb{R}$，有

$$\frac{|h(t,1) - h(t,0)|}{|h(t,0) - h(t+1,0)|} \le \eta(1).$$

若 $h(t, 0) = (y, 0)$，则

$$|h(t,0) - h(t+1,0)| = \frac{|h(t,0) - h(t+1,0)|}{|(y,0) - (y,1)|} \le \eta\left(\frac{1}{|(t,0) - h^{-1}(y,1)|}\right) \le \eta(1).$$

因此， $1 \le |h(t, 1) - h(t, 0)| \le \eta(1)^2$。这意味着 $h|_{\mathbb{R}\times\{1\}}$ 也是递增的。此外，

$$|h(t,0) - h(t+1,0)| \ge \eta(1)^{-1}|h(t,1) - h(t,0)| \ge \eta(1)^{-1}.$$

由对称性可知，在 y坐标中交换 0 和 1 的角色后，上述界仍然成立。因此，存在 $a = a(\eta) > 0$，使得对于每个 $t \in \mathbb{R}$，正方形 $Q_t = [t, t+1] \times [0,1]$ 的顶点在 h 下映射为两两距离均落在区间 $[a^{-1}, a]$内的点。命题 5.2 意味着 h 具有

一个定义在条带 $\mathbb{R}\times(0,1)$ 上的 $K(\eta)$-拟共形延拓 H。利用 Beurling–Ahlfors 延拓定理（定理 2.7）以及直线的拟共形可去性，我们可以将 H 拟共形地延拓到整个平面。□

5.2. **环域中的延拓。** 我们给出上一节延拓结果在环域中的对应版本。首先，我们需要一个关于圆周同胚提升的初等引理。

引理 5.4. 设 $f,g\colon \mathbb{S}(0,1)\to\mathbb{S}(0,1)$ 是保向同胚。那么在映射 $z\mapsto e^{2\pi iz}$ 下，分别存在 f,g 的提升 F,G，使得

$$\|F-G\|_\infty\le\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty.$$

证明。任取 f,g的提升 F,G。映射 F,G 是递增同胚，满足 $F(\theta+1)=F(\theta)+1$，且 $G(\theta+1)=G(\theta)+1$，其中 $\theta\in\mathbb{R}$。我们将对映射 G 加上一个整数来进行修正。令 $D(\theta)=F(\theta)-G(\theta),\theta\in\mathbb{R}$。注意，对 $\theta\in\mathbb{R}$，$|e^{2\pi i\theta}-1|\ge 4\mathrm{dist}_e(\theta,\mathbb{Z})$。因此，对每个 $\theta\in\mathbb{R}$，

$$\begin{aligned}\|f-g\|_\infty&\ge|f(e^{2\pi i\theta})-g(e^{2\pi i\theta})|=|e^{2\pi iF(\theta)}-e^{2\pi iG(\theta)}|=|e^{2\pi iD(\theta)}-1|\\&\ge 4\,\mathrm{dist}_e(D(\theta),\mathbb{Z}).\end{aligned}$$

若 $\|f-g\|_\infty<2$，则对每个 $\theta\in\mathbb{R}$，$\mathrm{dist}_e(D(\theta)\ \mathbb{Z})<1/2$。由连续性，存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得对每个 $\theta\in\mathbb{R}$，$\mathrm{dist}_e(D(\theta)\ \mathbb{Z})=|D(\theta)-k|$。特别地，

$$\|F-(G+k)\|_\infty=\|D-k\|_\infty\le\frac{1}{4}\|f-g\|_\infty.$$

接下来，假设 $\|f-g\|_\infty\ge 2$，因此实际上 $\|f-g\|_\infty=2$。对于 $0\le\theta_1\le\theta_2\le 1$，我们有

$$\begin{aligned}|D(\theta_2)-D(\theta_1)|&=|(F(\theta_2)-F(\theta_1))-(G(\theta_2)-G(\theta_1))|\\&\le\max\{F(\theta_2)-F(\theta_1),G(\theta_2)-G(\theta_1)\}\le 1.\end{aligned}$$

因此，鉴于 D 是 1-周期的，D 的振幅至多为 1。这意味着存在 $k\in\mathbb{Z}$，使得

$$\|F-(G+k)\|_\infty=\|D-k\|_\infty\le 1=\frac{1}{2}\|f-g\|_\infty.$$

证明至此完成。□

命题 5.5. 设 η 为畸变函数，且设 $N\in\mathbb{N}$ 满足 $N\ge 2$ 和 $a\ge 1$。设 $h\colon\ \mathbb{S}(0,\ 1)\cup\mathbb{S}(0,\ e^{2\pi/N})\to\mathbb{S}(0,\ 1)\cup\mathbb{S}(0,\ e^{2\pi/N})$ 是一个保向且分别保持两个圆不变的同胚。假设对每个 $t\in\mathbb{R}$

(1) 映射 h 在 $B_r(t)=\{re^{i\theta}\colon\ t\frac{2\pi}{N}\le\theta\le t\frac{2\pi}{N}+\frac{2\pi}{N}\}$ 对于 $r=1$ 和 $r=e^{2\pi/N}$，是 η-拟对称映射；(2) 弧 $B_1(t)$ $B_{e^{2\pi/N}}(t)$ 的四个端点映射到的点，其两两距离都在区间 $[a^{-1}N^{-1},aN^{-1}]$ 内。

那么，存在一个将 h 延拓为同胚 $H\colon\ \mathbb{A}(0;1,e^{2\pi/N})\to\mathbb{A}(0;1,\overline{e^{2\pi/N}})$ 的延拓，使其在 $\mathbb{A}(0;1,e^{2\pi/N})$ 上是 $K(\eta,a)$-拟共形的。

注意，延拓的拟共形畸变不依赖于 N，尤其不依赖于圆 $\mathbb{S}(0,1)$ $\mathbb{S}(0,e^{2\pi/N})$ 之间的距离。

证明。令 $L = e^{2\pi/N} \in (1, e^{\pi}]$，并注意到 $L - 1 \simeq N^{-1}$ 具有一致常数。令 $f(z) = h(z)$ 和 $g(z) = L^{-1}h(Lz)$，其中 $z \in \mathbb{S}(0,1)$。我们有

$$|f(z) - g(z)| = |h(z) - L^{-1}h(Lz)| \le |h(z) - L^{-1}h(z)| + |L^{-1}h(z) - L^{-1}h(Lz)|$$
$$\le \frac{L-1}{L} + \frac{aN^{-1}}{L} \le C_1(a)N^{-1}.$$

由引理 5.4，存在 F, G，分别是 f, g 在映射 $z \mapsto e^{-2\pi iz}$ 下的提升，使得

$$|F(t) - G(t)| \le \frac{1}{2}C_1(a)N^{-1} \text{ for each } t \in \mathbb{R}. \tag{5.1}$$

~我们定义 $h(t,0) = (NF(t/N), 0) \equiv NF(t/N)$，它是 $h|_{\mathbb{S}(0,1)}$ 在 $\psi(z) = e^{-2\pi iz/N}$ 下的一个提升。我们还定义 $\widetilde{h}(t,1) = (NG(t/N), 1) \equiv NG(t/N) + i$，它是 $h|_{\mathbb{S}(0,L)}$ 在 ψ 下的一个提升。我们将验证 ~~

映射 h 满足命题 5.2 的假设；假定这一点成立，我们可以将 h 延拓为条带 $\mathbb{R} \times (0,1)$ 上的一个 $K(\eta, a)$ 拟共形同胚 $\sim H$，它与 $z \mapsto z + (N, 0)$ 可交换，因此可下降为环域 $\mathbb{A}(0; 1, L)$ 上的一个 $K(\eta, a)$-拟共形同胚 H，并且延拓了 h。

根据.....的定义 $\widetilde{h}$ 和（5.1），对于每个 $t \in \mathbb{R}$，我们有

$$|\widetilde{h}(t,0) - \widetilde{h}(t,1)| \le 1 + N|F(t/N) - G(t/N)| \le 1 + \frac{1}{2}C_1(a).$$

~对于 $s = 0,1$，我们将证明 $h([t,t+1]\times\{s\})$ 的长度与 1 可比，其依赖于~ a；并且 $h|_{[t,t+1]\times\{s\}}$ 是拟对称的，其仅依赖于 η 和 a。这些结论验证了命题 5.2 的假设。现在我们证明这些结论。

令 $t \in \mathbb{R}$。注意，$\psi([t,t+1]\times\{0\}) = B_1(-t-1)$。由于 $N \ge 2$，我们有

$$C_1^{-1}N^{-1}|z-w| \le |\psi(z) - \psi(w)| \le C_1N^{-1}|z-w|, \ z, w \in [t,t+1]\times\{0\}, \tag{5.2}$$

其中 $C_1 \ge 1$ 是一致常数。

根据假设，弧 $h(B_1(-t-1))$ 的端点间距离落在区间 $[a^{-1}N^{-1}, aN^{-1}]$ 内。如果这条弧的长度大于 π，那么其补弧的长度至多为 $aN^{-1}\pi/2$。然而，补弧恰好是弧 $h(B_1(-t-k))$、$k = 2$、.....、N 的并集，每条弧的长度都至少为 $a^{-1}N^{-1}$。由此可得

$$a^{-1}N^{-1} \cdot (N-1) \le aN^{-1}\frac{\pi}{2}$$

因此 $2 \le N \le 1 + a^2\pi/2$。于是，$h(B_1(-t-1))$的长度与1相当，~取决于 a。这意味着 $h([t,t+1]\times\{0\})$的长度也与1相当~，并且 ψ 在 $h([t,t+1]\times\{0\})$上是双 Lipschitz 的，仅取决于 a。

现在，如果弧 $h(B_1(-t-1))$的长度小于 π，则其长度与 N^{-1}相当，取决于 a，并且我们有

$$C_2N^{-1}|z-w| \le |\psi(z) - \psi(w)| \le C_2N^{-1}|z-w|, \ z, w \in \widetilde{h}([t,t+1]\times\{0\}), \tag{5.3}$$

其中 $C_2 \ge 1$ 是一个一致常数。因此，若允许~常数 C_2 依赖于 a，则(5.3)在两种情形下均成立。此外，注意在两种情形下，$h([t,t+1]\times\{0\})$的长度都与1相当，取决于 a。

~ ~由 (5.2)、(5.3) 及关系式 $\psi \circ h = h \circ \psi$，我们得出 h 在 $[t,t+1]\times\{0\}$ 上是 $\widetilde{\eta}$-拟对称的，其中 $\widetilde{\eta}$ 仅取决于 η 和 a。结合

~同样的论证可得，h 在 $[t,t+1]\times\{1\}$ 上是 $\tilde{\eta}$-拟对称的，并且 $h([t,t+1]\times\{1\})$ 的长度与 1 可比，这取决于 a。□

命题 5.6。设 η 是一个畸变函数，并设 L、$L'>1$ 满足 $L\in(1,M)$，其中 $M>1$。设 $h\colon \mathbb{S}(0,1)\cup\mathbb{S}(0,L)\to\mathbb{S}(0,1)\cup\mathbb{S}(0,L')$ 是一个 η-拟对称同胚，且为保向同胚并保持两个圆不变。那么存在 h 的一个延拓，它是 $K(\eta,M)$-拟共形拟共形同胚，定义在 $\mathbb{C}$ 上。

证明。注意，根据推论 2.8，h 可拟共形地延拓到 $\mathbb{D}$，也可延拓到 $\mathbb{C}\setminus\overline{\mathbb{D}}(0,L)$。因此，只需在环域 $\mathbb{A}(0;1,L)$ 中对其进行延拓。我们的目标是以双 Lipschitz 方式修改映射 h，从而能够应用命题 5.5。

首先，我们证明 $L-1\simeq_{\eta,M}L'-1$。令 $n\in\mathbb{N}$ 使得

$$\frac{M-1}{n+1}\le L-1<\frac{M-1}{n}.$$

考虑 $\mathbb{S}(0,1)$ 的一个分割 $\{z_0,\dots,z_n\}$，使得从 z_{i-1} 到 z_i 的弧 A_i 的长度为 $2\pi/(n+1)$，其中 $i\in\{0,\dots,n\}$，且 $z_{-1}:=z_n$。因此，对于 $i\in\{0,\dots,n\}$，我们有

$$|z_{i-1}-z_i|\le\frac{2\pi}{n+1}.$$

固定 $0\in\{1,\dots,n\}$。记 A_i 的补弧为 B_i，并注意到 $\operatorname{diam}_e(B_i)=2=\operatorname{diam}_e(\mathbb{S}(0,1))$。因此，根据 (2.1)，$\operatorname{diam}_e(h(B_i))\ge\eta(1)^{-1}$。这意味着 $\ell(h(A_i))\le 2\pi-\eta(1)^{-1}$，所以

$$\ell(h(A_i))\le C_1(\eta)|h(z_{i-1})-h(z_i)|.$$

此外，

$$\begin{aligned}\frac{|h(z_{i-1})-h(z_i)|}{L'-1}&=\frac{|h(z_{i-1})-h(z_i)|}{|h(z_i)-L'h(z_i)|}\\&\le\eta\left(\frac{|z_{i-1}-z_i|}{|z_i-h^{-1}(Lh(z_i))|}\right)\le\eta\left(\frac{2\pi(n+1)^{-1}}{L-1}\right)\le\eta\left(\frac{2\pi}{M-1}\right).\end{aligned}$$

因此，$\ell(h(A_i))\le C_2(\eta,M)(L'-1)$。我们对 $i\in\{0,\dots,n\}$ 求和，得到

$$2\pi\le C_2(\eta,M)\cdot(n+1)(L'-1)\le C_2(\eta,M)\cdot 2n(L'-1)\le C_2(\eta,M)2(M-1)\frac{L'-1}{L-1}.$$

若我们证明$L'\lesssim_{\eta,\ M}1$，那么便可对 h^{-1} 应用相同的论证，从而得到反向的不等式。注意，将 (2.1) 应用于$A=\mathbb{S}(0,\ 1)$ 和 $B=\mathbb{S}(0,\ 1)\cup\mathbb{S}(0,\ L)$，可得

$$\frac{2}{2L'}\ge\frac{1}{2\eta\left(\frac{2L}{2}\right)}>\frac{1}{2\eta(M)}.$$

因此，$L'<2\eta(M)=:M'$，如所求。至此，我们完成了关于 $L-1\simeq_{\eta,\ M}L'-1$ 的论断证明。

接下来，我们以双 Lipschitz 的方式修改映射 h。令 $N\in\mathbb{N}$, $N\ge 2$，使得 $\frac{M-1}{N}\le L-1<\frac{M-1}{N-1}$，因此 $L-1\simeq_M\frac{1}{N}$。注意，$\frac{1}{N}\simeq e^{2\pi/N}-1$，因此

$$L-1\simeq_M e^{2\pi/N}-1\quad\text{and}\quad L'-1\simeq_{\eta,M}e^{2\pi/N}-1.$$

考虑映射

$$\sigma(re^{i\theta})=\left(1+\frac{e^{2\pi/N}-1}{L-1}(r-1)\right)e^{i\theta}\ \text{ and }\ \tau(re^{i\theta})=\left(1+\frac{e^{2\pi/N}-1}{L'-1}(r-1)\right)e^{i\theta}.$$

映射 σ（分别地，τ）在 $\mathbb{S}(0,1)$ 上是恒等映射，在 $\mathbb{S}(0,L)$ 上是伸缩映射，因而在二者之间进行插值（分别地，在 $\mathbb{S}(0,L')$ 上进行插值）。映射 σ 在 $\mathbb{A}(0;1,L)$ 上是双 Lipschitz 的，其常数仅取决于 M，并将其映到 $\mathbb{A}(0;1,e^{2\pi/N})$ 上。映射 τ 在 $\mathbb{A}(0;1,L')$ 上是双 Lipschitz 的，其常数仅取决于 η, M，并将其映到 $\mathbb{A}(0;1,e^{2\pi/N})$ 上。如果我们能将映射 $\tau\circ h\circ\sigma^{-1}$ 延拓为环域 $\mathbb{A}(0;1,e^{2\pi/N})$ 上的一个 $K(\eta,M)$-拟共形映射，那么我们也能将原映射 h 延拓为从 $\mathbb{A}(0;1,L)$ 到 $\mathbb{A}(0;1,L')$ 的一个 $K'(\eta,M)$-拟共形映射。因此，将映射 h 替换为 $\tau\circ h\circ\sigma^{-1}$ 后，我们可以假设 $L=L'=e^{2\pi/N}\in(1,e^{\pi}]$ 且 h 是 η-拟对称的。

我们将验证命题 5.5 的假设。考虑曲边正方形 $S(t)=\{z\in\mathbb{A}(0;1,L):\ t\log L\le\arg(z)\le(t+1)\log L\}$。只需证明其顶点映射到的点的两两距离位于区间 $[a^{-1}\log L, a\log L]$ 内，其中某个 $a=a(\eta)\ge 1$。

设 $z,w\in\mathbb{S}(0,1)$ 是 $S(t)$ 的两个顶点。另两个顶点为 Lz 和 Lw。我们将给出距离 $|h(z)-h(w)|$, $|h(z)-h(Lz)|$, $|h(z)-h(Lw)|$, $|h(Lz)-h(Lw)|$ 的界。由对称性可得 $|h(w)-h(Lw)|$ 和 $|h(w)-h(Lz)|$ 的界。

注意，$S(t)$ 在 z 与 w 之间的弧长为 $\log L\le\pi$。因此，$\frac{2}{\pi}\log L\le|z-w|\le\log L$。此外，由于 $L\in(1,e^{\pi}]$，我们有 $c_0^{-1}(L-1)\le\log L\le L-1$，对 $c_0=\pi^{-1}(e^{\pi}-1)$ 成立。因此，我们有

$$\frac{L-1}{|h(z)-h(w)|}\le\frac{|h(Lz)-h(z)|}{|h(z)-h(w)|}\le\eta\left(\frac{|Lz-z|}{|z-w|}\right)\le\eta\left(\frac{L-1}{2\pi^{-1}\log L}\right)\le\eta\left(\frac{c_0\pi}{2}\right)$$

and

$$\frac{|h(z)-h(w)|}{L-1}=\frac{|h(z)-h(w)|}{|h(z)-Lh(z)|}\le\eta\left(\frac{|z-w|}{|z-h^{-1}(Lh(z))|}\right)\le\eta\left(\frac{\log L}{L-1}\right)\le\eta(1).$$

因此，$L-1\le|h(z)-h(Lz)|\le\eta(\frac{c_0\pi}{2})\eta(1)(L-1)$，且 $\eta(\frac{c_0\pi}{2})^{-1}(L-1)\le|h(z)-h(w)|\le\eta(1)(L-1)$。这些界立即给出 $|h(z)-h(Lw)|$ 的界。类似地，

$$\frac{|h(Lz)-h(Lw)|}{L-1}=\frac{|h(Lz)-h(Lw)|}{|h(z)-Lh(z)|}\le\eta\left(\frac{L|z-w|}{L-1}\right)\le\eta(L)\le\eta(e^{\pi})$$

and

$$\frac{L-1}{|h(Lz)-h(Lw)|}\le\frac{|h(Lz)-h(z)|}{|h(Lz)-h(Lw)|}\le\eta\left(\frac{L-1}{2\pi^{-1}L\log L}\right)\le\eta\left(\frac{c_0\pi}{2L}\right)\le\eta\left(\frac{c_0\pi}{2}\right).$$

于是，$\eta(\frac{c_0\pi}{2})^{-1}(L-1)\le|h(Lz)-h(Lw)|\le\eta(e^{\pi})(L-1)$。证明至此完成。 □

命题 5.7。设 η 为一个畸变函数，且 L、$L'>1$ 满足

$$c_0^{-1}\le\frac{\log L'}{\log L}\le c_0 \tag{5.4}$$

对某个 $c_0\ge 1$ 成立。设 $h:\ \mathbb{S}(0,1)\cup\mathbb{S}(0,L)\to\mathbb{S}(0,1)\cup\mathbb{S}(0,L')$ 为一个保向且保持两个圆各自不变的 η-拟对称同胚。则存在 h 到 $\mathbb{C}$ 的一个 $K(\eta,c_0)$-拟共形同胚延拓。

证明。由命题 5.6，我们可以假设 $L\ge 2$。注意到，根据推论 2.8，h 可拟共形地延拓到 $\mathbb{D}$ 以及 $\mathbb{C}\setminus\mathbb{D}(0,L)$。因此，只需将其延拓到环域 $\mathbb{A}(0;1,L)$ 中。

令 $z \in \mathbb{S}(0,\ 1)$和 $w \in \mathbb{S}(0,\ L)$满足 $|h(z)\ -h(w)| = L' - 1$。由 (2.1)，可得

$$\frac{L'-1}{2L'} = \frac{|h(z)-h(w)|}{2L'} \geq \frac{1}{2\eta\left(\frac{2L}{|z-w|}\right)} \geq \frac{1}{2\eta\left(\frac{2L}{L-1}\right)} \geq \frac{1}{2\eta(4)}.$$

因此，$L' \geq L_0' \coloneqq (1-\eta(4)^{-1})^{-1} > 1$。令 $R = \frac{1}{2}(1 + \min\{2, L_0'\}^{1/2})$，于是

$$1 < R^2 < (2R-1)^2 = \min\{2, L_0'\} \leq \min\{L, L'\}. \tag{5.5}$$

注意 $1 < R < L/R < L$ 与 $1 < R < L'/R < L'$。我们将环域 $\mathbb{A}(0; 1, L)$分成环域 $A_1 = \mathbb{A}(0; 1, R)$、$A_2 = \mathbb{A}(0;\ R, L/R)$以及 $A_3 = \mathbb{A}(0;\ L/R, L)$。类似地，我们将 $\mathbb{A}(0; 1, L')$分割为环域 $A_1' = A_1$、$A_2' = \mathbb{A}(0;\ R, L'/R)$、$A_3' = \mathbb{A}(0; L'/R, L')$。在 $\mathbb{S}(0, 1)$上等于 h、且在 $\mathbb{S}(0, R)$上等于恒等映射的映射显然是拟对称的，且仅依赖于 η。因此，由命题 5.6，存在 $h|_{\mathbb{S}(0,1)}$ 到环域 A_1 的 $K(\eta)$-拟共形同胚 H 的一个延拓，它在外圆上为恒等映射。类似地，存在 $h|_{\mathbb{S}(0,L)}$ 到 $K(\eta)$-拟共形同胚 $H\colon\ A_3 \to A_3'$ 的一个延拓，它在内圆上为伸缩 $z \mapsto L'L^{-1}z$。

接下来需要将 H 延拓为一个从 A_2 到 A_2'的拟共形映射。等价地，若与适当的伸缩复合，只需将映射 $g\colon\ \mathbb{S}(0,1) \cup \mathbb{S}(0, L/R^2) \to \mathbb{S}(0,1) \cup \mathbb{S}(0, L'/R^2)$ 拟共形地延拓，其中该映射在内圆上等于恒等映射，在外圆上等于一个伸缩。令 $\beta > 0$使得 $(R^{-2}L)^{\beta} = R^{-2}L'$，于是 $L' = R^{-2(\beta-1)}L^{\beta}$。我们证明，对于某个常数 $c_1 = c_1(\eta, c_0)$，有 $c_1^{-1} \leq \beta \leq c_1$。假设这一点成立，注意映射 $re^{i\theta} \mapsto r^{\beta}e^{i\theta}$ 是 $\max\{\beta, \beta^{-1}\}$-拟共形的，因此它是 c_1-拟共形的，并且在环域 $\mathbb{A}(0; 1, L/R^2)$ 中具有所需的边界行为。

现在证明这一断言。根据假设 (5.4)，有

$$c_0^{-1} \leq \frac{\beta \log L - 2(\beta-1)\log R}{\log L} \leq c_0.$$

等价地，

$$c_0^{-1} \leq \beta\,(1-\lambda) + \lambda \leq c_0, \tag{5.6}$$

其中 $\lambda = 2^{\frac{\log R}{\text{对数 } L}}$。由 (5.5)，有

$$0 < \lambda < \lambda_0 \coloneqq \frac{\log R}{\log(2R-1)} < 1.$$

由 (5.6)，我们得到 $\beta \leq c_0(1-\lambda)^{-1} \leq c_0(1-\lambda_0)^{-1}$。若 $\lambda < \frac{1}{2}c_0^{-1}$，则 (5.6) 给出 $\beta \geq c_0^{-1} - \lambda \geq \frac{1}{2}c_0^{-1}$。最后，若 $\lambda \geq \frac{1}{2}c_0^{-1}$，则 $L \leq R^{4c_0}$。因此，由 (5.5)，

$$R^{(4c_0-2)\beta} \geq (R^{-2}L)^{\beta} = R^{-2}L' \geq \left(\frac{2R-1}{R}\right)^2.$$

因此，

$$\beta \geq (4c_0-2)^{-1}(\log R)^{-1} 2\log\left(\frac{2R-1}{R}\right)$$

而后者是一个正数，仅取决于 η 和 c_0。证明至此完成。□

6. Extension of embeddings of pairs of circles

本节证明定理 1.8 和 1.9。首先考虑定理 1.8 中U 和 V 为相切圆盘的情形。我们先建立一个预备结果。

引理 6.1. 设 $f\colon \mathbb{R}\times\{0,1\}\to\mathbb{C}$ 是一个畸变函数为 η 的 η-拟对称嵌入。假设 $f|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 是恒等映射，且 $f(\mathbb{R}\times\{1\})\subset\mathbb{H}$。那么 $f(\mathbb{R}\times\{1\})\subset\mathbb{R}\times[\eta(1)^{-1},\eta(1)]$。

证明. 设 $x\in\mathbb{R}$ 和 $f(x,1)=(z,w)\in\mathbb{H}$。那么

$$w\le|f(x,1)-(x,0)|=|f(x,1)-f(x,0)|=\frac{|f(x,1)-f(x,0)|}{|f(x,0)-f(x+1,0)|}\le\eta(1).$$

对于反向不等式，我们有

$$\begin{aligned}w=|f(x,1)-f(z,0)|&=\frac{|f(x,1)-f(z,0)|}{|f(z,0)-f(z+1,0)|}\\&\ge\eta\left(\frac{|(z,0)-(z+1,0)|}{|(x,1)-(z,0)|}\right)^{-1}\ge\eta(1)^{-1}.\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

定理 *1.8* 的证明。证明中的所有断言都是定量的。设 U,V 为球面上互不相交的$\widehat{}$相切圆盘，且 $f\colon \partial U\cup\partial V\to\mathbb{C}$ 为拟 M¨obius 嵌入。通过使用适当的 M¨obius 变换，我们可以假设 V 是下半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)<0\}$，$U$ 是半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>1\}$，且 f 固定∞。此后我们使用平面拓扑。因此，$f\colon \mathbb{R}\times\{0,1\}\to\mathbb{C}$ 是一个拟 M¨obius 嵌入，使得当 $z\to\infty$ 时 $f(z)\to\infty$。由 (Q-5)，f 是拟对称的。由推论 2.9，映射 $f|_{\mathbb{R}\times\{0\}}$ 可延拓为 $\mathbb{C}$ 的一个拟共形、从而也是拟对称的同胚 F。因此，映射 $g=F^{-1}\circ f\colon \mathbb{R}\times\{0,1\}\to\mathbb{C}$ 是拟对称的，并且在 $\mathbb{R}\times\{0\}$ 上是恒等映射。通过与一个反射作后复合，我们可以假设 g 将 $\mathbb{R}\times\{1\}$ 映入上半平面。

由引理 6.1，$g(\mathbb{R}\times\{1\})$ 包含在条带 $\mathbb{R}\times[a^{-1},a]$ 中。由引理 3.2 可知，定理 3.12 的条件得以满足。因此，存在一个拟共形同胚 G，其定义于 $\mathbb{C}$ 上，将下半平面 V 映到自身，并将 $g(U)$ 映到半平面 $\{z\in\mathbb{C}:\mathrm{Im}(z)>1\}$。我们考虑映射 $h=G\circ g$。映射 h 是一个从 $\mathbb{R}\times\{0,1\}$ 到自身的拟对称同胚，它保持两条直线各自不变，并且在 $\mathbb{R}\times\{0\}$ 上递增。根据推论 5.3，h 在 $\mathbb{C}$ 中有一个拟共形延拓。通过适当的复合，该延拓给出原映射 f 所需的延拓。□

接下来，我们处理定理 1.9 中闭包互不相交的圆盘这一情形。我们先给出一个与引理 6.1 思路相近的预备结果。

引理 6.2. 设 η 为畸变函数且 $L>1$。设 $f\colon \mathbb{S}(0,1)\cup\mathbb{S}(0,L)\to\mathbb{C}$ 为 η-拟对称嵌入，使得 $f|_{\mathbb{S}(0,1)}$ 为恒等映射且$f(\mathbb{S}(0,L))\subset\mathbb{D}^*$。则存在 $L'>1$ 与 $K=K(\eta)>0$，使得对每个$z\in\mathbb{S}(0,L)$ 我们有

$$L'\le|f(z)|\le L'+K(L'-1).$$

证明。令 $z_1,z_2\in\mathbb{S}(0,L)$，使得 $|f(z_1)|=\sup\{|f(z)|:z\in\mathbb{S}(0,L)\}=:R$ 且$|f(z_2)|=\inf\{|f(z)|:z\in\mathbb{S}(0,L)\}=:r$。注意，由于 $f(\mathbb{S}(0,L))\subset\mathbb{D}^*$，因此 $r>1$。

假设 $L \geq 2$。那么

$$\frac{R-1}{r+1} \leq \frac{|f(z_1)-f(1)|}{|f(z_2)-f(1)|} \leq \eta\left(\frac{L+1}{L-1}\right) \leq \eta(3).$$

因此，

$$R \leq 1+\eta(3)(r+1) \leq (1+2\eta(3))r. \tag{6.1}$$

对于 $w = f(z_2)/|f(z_2)|$，我们有 $|z_2 - w| \geq L-1 \geq 1$。令 $u \in \mathbb{S}(0, 1)$ 满足 $|u-w| = 1$。那么

$$r-1 = |f(z_2)-w| = \frac{|f(z_2)-f(w)|}{|f(w)-f(u)|} \geq \eta\left(\frac{1}{|z_2-w|}\right)^{-1} \geq \eta(1)^{-1}.$$

我们得出结论 $r \geq 1+\eta(1)^{-1}$，这等价于

$$(1+2\eta(3))r \leq r + (\eta(1)+1)2\eta(3)(r-1).$$

将此与 (6.1) 结合，我们得出结论

$$R \leq (1+2\eta(3))r \leq r + (\eta(1)+1)2\eta(3)(r-1).$$

所需结论对 $L' = r$ 和 $K = (\eta(1)+1)2\eta(3)$ 成立。

接下来，假设 $1 < L < 2$。取 $w \in \mathbb{S}\in(0, 1)$，使得 $|L^{-1}z_1 - w| = L-1 = |L^{-1}z_1 - z_1|$；根据对 L 的限制，这样的点确实存在。于是

$$\frac{R-1}{L-1} \leq \frac{|f(z_1)-f(L^{-1}z_1)|}{|f(L^{-1}z_1)-f(w)|} \leq \eta\left(\frac{|z_1-L^{-1}z_1|}{|L^{-1}z_1-w|}\right) = \eta(1).$$

由此，$R \leq 1+\eta(1)(L-1)$。接下来，考虑点 $w = f(z_2)/|f(z_2)|$，并取$u \in \mathbb{S}\in(0, 1)$，使得 $|w-u| = L-1$。我们有

$$\frac{r-1}{L-1} = \frac{|f(z_2)-f(w)|}{|f(w)-f(u)|} \geq \eta\left(\frac{|w-u|}{|z_2-w|}\right)^{-1} \geq \eta(1)^{-1}.$$

因此，$r \geq 1+\eta(1)^{-1}(L-1)$，这等价于

$$1+\eta(1)(L-1) \leq r + (\eta(1)^2-1)(r-1).$$

因此，

$$R \leq 1+\eta(1)(L-1) \leq r + (\eta(1)^2-1)(r-1).$$

对 $L' = r$ 和 $K = \eta(1)^2 - 1$，结论成立。 □

定理 *1.9* 的证明。通过施加适当的 M¨obius 变换，我们可以假设 $V = \mathbb{D}$, $U^* = \mathbb{D}(0, L)$, 其中某些 $L > 1$, $f(\partial V)$ $f(\partial U)$ 是$\mathbb{C}$中的若尔当曲线，$f(\partial U)$ 位于 $f(\partial V)$ 的外部，且映射 $f|_{\partial V}$, $f|_{\partial U}$ 保持方向。曲线 $f(\partial U)$ 是一条拟圆；参见 (2.2) 及前面的讨论。

我们进一步进行归一化。考虑三个点 z_1，z_2，$z_3 \in \partial U$，它们的两两距离至少为 L。我们考虑一个拟共形同胚 ϕ，它将 $\mathbb{C}$ 映到自身，并保持由拟圆 $f(\partial U)$ 围成的 Jordan 区域；且点 $\phi(f(z_1))$、$\phi(f(z_2))$、$\phi(f(z_3))$ 的两两距离至少为 $\operatorname{diam}_e(f(\partial U))/2$；由定理 2.5 以及 $\mathbb{D}$ 上 M¨obius 变换的三点传递性，可证明 ϕ 的存在。复合 $\phi \circ f$ 是拟 M¨obius 映射，并满足 (Q-3) 中的归一化条件，因此它是拟对称的。于是，用 $\phi \circ f$ 替换 f 后，我们还可以假设 f 是拟对称的。

根据推论 2.9，映射 $f|_{\partial V}$ 可延拓为一个拟共形（因而也是拟对称）的同胚 F，定义在 $\mathbb{C}$的复平面上。映射 $g = F^{-1} \circ f \colon \partial U \cup \partial V \to \mathbb{C}$ 是

拟对称的，并且在 ∂V上等于恒等映射。此外， g 将 ∂U 映射为 $V=\mathbb{D}$外部的一条若尔当曲线。

由引理 6.2，存在 $L_1>1$，使得 $g(\partial U)$ 包含于环域$\{z\in\mathbb{C}:$ $L_1\le|z|\le L_1+K(L_1-1)\}$ 中，其中 K 仅依赖于给定数据。由推论 3.14，存在一个复平面 $\mathbb{C}$ 上的拟共形同胚 G，它将$\mathbb{D}$ 映到 $\mathbb{D}$，并将若尔当曲线 $g(\partial U)$ 的内部映到圆盘 $\mathbb{D}(0,\ L')$。注意， G 也是拟对称的。考虑映射 $h=G\circ g$: $\mathbb{S}(0,$ $1)\cup\mathbb{S}(0,\ L)\ \to\mathbb{S}(0,\ 1)\cup\mathbb{S}(0,\ L')$，它是拟对称的。

假设条件 (1) 成立。由于上述所有归一化都是^通过复平面 $\mathbb{C}$的拟共形映射实现的，条件 (1) 蕴含

$$c_0^{-1}\le\frac{\log L'}{\log L}\le c_0$$

其中某个 c_0 仅取决于给定数据。根据命题 5.7，映射 h 可以拟共形地延拓到 $\mathbb{C}$。若（2）成立，则可以利用命题 5.6 得到一个延拓。通过适当的复合，这个延拓便给出了原映射 f 所需的延拓。□

References

[AF21] C. Ackermann 和 A. Fletcher, *Quasiconformality and hyperbolic skew*, 《剑桥哲学学会数学汇刊》171（2021年），第3期，449–466。[Ahl06] L. V. Ahlfors, *Lectures on quasiconformal mappings*, 第二版，《大学讲义丛书》第38卷，美国数学学会，普罗维登斯，罗得岛州，2006年。另含 C. J. Earle、I. Kra、M. Shishikura 和 J. H. Hubbard 撰写的补充章节。[Ahl63] L. V. Ahlfors, *Quasiconformal reflections*, 《数学学报》109（1963年），291–301。[AIM09] K. Astala、T. Iwaniec 和 G. Martin, *Elliptic partial differential equations and quasiconformal mappings in the plane*, 《普林斯顿数学丛书》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州，2009年。[BA56] A. Beurling 和 L. Ahlfors, *The boundary correspondence under quasiconformal mappings* **96** 1956 125 142 , 《数学学报》（），–。[BF14] B. Branner 和 N. Fagella, *Quasiconformal surgery in holomorphic dynamics*, 《高等数学剑桥研究丛书》第141卷，2014年。[BLM16] M. Bonk、M. Lyubich 和 S. Merenkov, *Quasisymmetries of Sierpiński carpet Julia sets* **301** 2016 383 422 , 《数学进展》（），–。[BM07] A. F. Beardon 和 D. Minda, *The hyperbolic metric and geometric function theory*, 《拟共形映射及其应用》，Narosa，新德里，2007年，第9–56页。[BM13] M. Bonk 和 S. Merenkov, *Quasisymmetric rigidity of square Sierpiński carpets*, 《数学年刊》177（2013年），第2期，591–643。[BM20] M. Bonk 和 S. Merenkov, *Square Sierpiński carpets and Lattès maps*, 《数学杂志》296（2020年），第1–2期，695–718。[Bon11] M. Bonk, *Uniformization of Sierpiński carpets in the plane*, 《数学发明》186（2011年），第3期，559–665。[BP78] A. F. Beardon 和 Ch. Pommerenke, *The Poincaré metric of plane domains*, 《伦敦数学学会会刊》（第二辑）18（1978年），第3期，475–483。[CGT23] E. K. Chrontsios-Garitsis 和 J. T. Tyson, *Quasiconformal distortion of the Assouad spectrum and classification of polynomial spirals* **55** 2023 , 《伦敦数学学会通报》（），第1期，282–307。[Con95] J. B. Conway, *Functions of one complex variable. II*, 《研究生数学丛书》第159卷，Springer-Verlag，纽约，1995年。[FH26] A. N. Fletcher 和 A. M. Hahn, *Geometric function theory on uniformly quasiconformally homogeneous domains* **554** 2026 1, , 《数学分析及其应用杂志》（），论文编号129960，28。[Geh62] F. W. Gehring, *Rings and quasiconformal mappings in space*, 《美国数学会汇刊》103（1962年），353–393。

[GKT14] C.-Y. Guo、P. Koskela 和 J. Takkinen, *Generalized quasidisks and conformality*, 《数学出版物》58（2014年），第1期，193–212。[GO79] F. W. Gehring 和 B. G. Osgood, *Uniform domains and the quasihyperbolic metric*, 《数学分析杂志》36（1979年），50–74。[Hei01] J. Heinonen, *Lectures on analysis on metric spaces*, Universitext, Springer-Verlag, 纽约, 2001年。[Her87] D. A. Herron, *The geometry of uniform, quasicircle, and circle domains*, 《芬兰科学院学报》A辑I数学版12（1987年），第2期，217–227。[HK90] D. A. Herron 和 P. Koskela, *Quasiextremal distance domains and conformal mappings onto circle domains* **15** 1990 3, 167 179 , 《复变函数理论与应用》（），第–期。[IOZ21] T. Iwaniec、J. Onninen 和 Z. Zhu, *Singularities in $\mathcal{L}^p$-quasidisks*, 《芬兰数学年刊》46（2021年），第2期，1053–1069。[JK82] D. S. Jerison 和 C. E. Kenig, *Hardy spaces A_∞ and singular integrals on chord-arc domains* , , 《斯堪的纳维亚数学杂志》（），第2期，221–。[KT07] P. Koskela 和 J. Takkinen, *Mappings of finite distortion: formation of cusps*, 《数学出版物》51（2007年），第1期，223–242。[KT10a] P. Koskela 和 J. Takkinen, *Mappings of finite distortion: formation of cusps. III*, 《数学学报》（英文版）26（2010年），第5期，817–824。[KT10b] P. Koskela 和 J. Takkinen, *An note to "Mappings of finite distortion: formation of cusps II"* **14** 2010 184 189 , 《共形几何与动力系统》（），–。[LMM26] Y. Luo、M. Mj 和 S. Mukherjee, *Universality of the Basilica*（2026年）。预印本 arXiv:2601.13553。[LN24]Y. Luo 和 D. Ntalampekos, *Uniformization of gasket Julia sets*（2024年）。预印本 arXiv:2411.17227。[LV73] O. Lehto 和 K. I. Virtanen, *Quasiconformal mappings in the plane*, 第二版, 《数学科学基础丛书》第126卷, Springer-Verlag, 纽约–海德堡, 1973年。[Mac99] P. MacManus, *Catching sets with quasicircles*, 《伊比利亚美洲数学评论》15（1999年），第2期，267–277。[MW13] S. Merenkov 和 K. Wildrick, *Quasisymmetric Koebe uniformization*, 《伊比利亚美洲数学评论》29（2013年），第3期，859–909。[Nta20] D. Ntalampekos, *Potential theory on Sierpiński carpets With applications to uniformization* 2268, 2020 : , 《数学讲义》第卷, Springer, Cham, 。[Nta25] D. Ntalampekos, *Quasiconformal characterization of Schottky sets*（2025年）。预印本 arXiv:2507.22658。[Pom92] Ch. Pommerenke, *Boundary behaviour of conformal maps*, 《数学科学基础丛书》第299卷, Springer-Verlag, 柏林, 1992年。[Reh22] J. Rehmert, *Quasisymmetric Koebe Uniformization of Metric Surfaces with Uniformly Relatively Separated Boundary* 2022 , ProQuest LLC, 安娜堡, 密歇根州, 。博士论文——堪萨斯州立大学。[Sch95] O. Schramm, *Transboundary extremal length*, 《数学分析杂志》66（1995年），307–329。[Tak07] J. Takkinen, *Mappings of finite distortion: formation of cusps. II*, 《共形几何与动力系统》11（2007年），207–218。[V¨ai84] J. V¨ais¨al¨a, *Quasi-Möbius maps*, 《数学分析杂志》44（1984/85年），218–234。[V¨ai99] J. V ¨ ¨ ¨ *The free quasiworld. Freely quasiconformal and related maps in Banach spaces* 1996 aisala, , 《拟共形几何与动力系统》（卢布林，），《巴拿赫中心出版物》，波兰科学院数学研究所，华沙，1999年，第55–118页。[V¨ai71] J. V¨ais¨al¨a, *Lectures on n-dimensional quasiconformal mappings*, 《数学讲义》第229卷，Springer-Verlag，柏林–纽约，1971年。[Vel20] V. Vellis, *Extension properties of planar uniform domains*（2020年）。预印本 arXiv:1609.08763v4。

Department of Mathematics, Aristotle University of Thessaloniki, Thessaloniki, 54152, Greece.*Email address*: dntalam@math.auth.gr