arXiv:2602.17253v1 [math.CO] 19 Feb 2026

对称（上）同调多胞体

TORBEN DONZELMANN、THIAGO HOLLEBEN 和 MARTINA JUHNKE

摘要。对称边多胞体是近年来受到广泛研究的一类由图构造出的中心对称多胞体。本文将这一类多胞体推广到任意单纯复形。我们展示如何将单纯复形的拓扑性质转化为这类多胞体的几何性质，反之亦然。我们研究这些多胞体的整数分解性质、面和自反性。利用 Gr¨obner 基技术，我们得到这些多胞体的一个（不一定是幺模的）三角剖分。由于所用工具的缘故，我们的大多数结果也适用于更一般的任意中心对称多胞体。

1. 引言

在基于某个底层图构造组合对象时 G，其关联矩阵 G 往往是理解相应对象的重要工具。沙堆群 [26, 章 4]图的 G就是一个典型例子；借助广为人知的矩阵树定理，可以通过关联矩阵计算该群的阶 [2]。

从拓扑学的角度来看，将图 G 视为一维单纯复形时， G 的关联矩阵就是其同调中的第一边界映射。基于这一联系，Duval、Klivans 和 Martin 于 2010 年 [13] 引入了任意单纯复形 Δ的（余）临界群，旨在将矩阵树定理推广到更高维的单纯复形。

从另一个角度来看，近年来另一个受到广泛关注、以图 G 的关联矩阵定义的对象，是所谓的对称边多胞体$\mathcal{P}_G$ （参见例如 [5, 6, 7, 22, 24, 34]），它属于 G，定义如下：

$$\mathcal{P}_G = \operatorname{conv}\left(\pm\mathbf{v} \ : \ \mathbf{v} \text{ is a column of } \partial_1\right),$$

其中 ∂_1 表示 G的关联矩阵。对称边多胞体在数学的多个领域都十分重要，例如有限度量空间和计算系统发育学的研究；此外，在物理学中，它们还通过与相互作用振子的 Kuramoto 模型的联系而发挥作用（更多详情见 [7] ）。已有研究表明，对称边多胞体的许多组合性质并不显式依赖于底层图，而只取决于它所表示的图拟阵。受此启发， [8] 将对称边多胞体推广到了正则拟阵（关于这方面的更多结果，另见 [9]）。

本文旨在对对称边多胞体作更拓扑化的推广。具体而言，将图及其关联矩阵分别解释为一维单纯复形及其在同调中的第一边界映射（另见 [13]），并将对称边多胞体推广到任意单纯复形，如下：给定一个 d维单纯

日期：2026年2月20日。2020年数学主题分类。52B12；52B20；05E45。

复形 Δ 及其（同调中的）顶边界映射 ∂_d，我们称

$$\mathcal{P}_\Delta := \operatorname{conv}[\partial_d | -\partial_d] \qquad \text{and } \mathcal{P}^\Delta := \operatorname{conv}[\partial_d^\top | -\partial_d^\top] \tag{1}$$

分别为 Δ的对称同调多胞体和对称上同调多胞体，其中，对于矩阵 A，记号 conv $[A|-A]$ 表示取 A 和 $-A$的列所张成的凸包。本文旨在开启对这两类新多胞体的研究，并推动相关的进一步研究。我们将看到，它们有时与经典对应物的行为非常相似，但有时也表现出不同的行为。

更确切地说，在计算了维数、顶点数等基本性质之后，我们的首个主要结果是对对称同调多胞体的面作出精确描述。基于此，我们尤其通过对 Δ的面进行标记以及生成森林（见定理3.6），得到了其面的一种刻画。这一结果以非常自然的方式推广了图的对称边多胞体的面描述（见 [22, 定理 3.1]）。此外，定理3.6 使我们能够在底层单纯复形为连通闭可定向赝流形时，显式计算$\mathcal{P}_\Delta$ 的面数（见推论3.9）。在一维情形下，所得公式特化为已知的圈的对称边多胞体面数公式，因此也进一步体现了它与图的对称边多胞体之间的平行关系（参见 [7, 命题 4.3]）。

有趣的是，这些多胞体的环面理想的 Gröbner 基揭示了另一种相似性，同时也体现出一种差异：¨在定理 4.1 中，我们成功计算出¨任意中心对称格多胞体的环面理想的 *Gröbner* 基。相比于¨命题 [22, 3.8], 中的 Gröbner 基，我们的 Gröbner 基¨只需要一种全新的二项式类型，因此是一个很好的推广。另一方面，图的对称边多胞体的环面理想都存在无平方因子的 Gröbner 基，而对称（余）同调多胞体则不再总是如此（见定理 4.4）。因此，对称（余）同调多胞体不一定再具有整数分解性质，我们在命题 5.3 中给出了该性质成立的一个必要判据。特别地，我们证明，$d-1$）st 维单纯复形的 d 次同调群中的挠元，是这两类多胞体的一个障碍。这是我们能够将 Δ 的拓扑性质转化为多胞体 $\mathcal{P}_\Delta$ 和 $\mathcal{P}^\Delta$ 的几何性质的一个例子。

对称（余）同调多胞体与图的经典对应物表现出不同性质，其主要原因在于边界矩阵的性质不同。事实上，图的关联矩阵总是全幺模的，但任意边界矩阵并非如此。对于对称边多胞体，全幺模性对于证明这些多胞体的各种性质至关重要，例如反身性（参见 [29, 命题 3.2]））。一旦开始考虑高维单纯复形的边界映射，情况很快就会变得更加复杂。 [13] 中也是如此。

我们通过两种不同的方式处理非全幺模矩阵带来的这一障碍：

利用边界映射的史密斯标准形，我们研究一般中心对称多胞体何时是自反的。我们的主要结果是对中心对称交叉多胞体自反性的完整刻画（见定理 6.3）。这转化为对称同调多胞体情形下对自反性的一个特别优美的刻画（见

定理6.7），因为在此情形下，史密斯标准形可以作拓扑解释[31, 定理 11.4，定理 11.5]。特别地，与整数分解性质类似，$(d-1)^{\text{st}}$ 同调群中的高阶挠是自反性的障碍。这些结果也类似于 [13, 14, 15, 16]中关于临界单纯群的结果。

我们的方法还有一个方面，是关注其边界映射已知为全幺模的单纯复形类。在这方面，我们能够证明，可定向伪流形的同调多胞体和上同调多胞体都与某些特殊图的对称边多胞体幺模等价（见定理 8.3 和 8.5）。利用 [10]，中全幺模边界映射的分类，我们证明对称上同调多胞体可用于判定可剖分单纯球面是否组合等价（见推论 8.6）。

本文结构如下。第 2 节介绍全文所需的概念和记号，包括单纯复形的对称（上）同调多胞体的定义。第 3 节研究其基本性质，并给出面描述。第 4 节给出对称（上）同调多胞体的环面理想的 Grö¨bner 基，并研究这些多胞体是否存在正则幺模三角剖分。第 5 节探讨这些多胞体的整数分解性质（简称 IDP），并给出一个拓扑刻画，说明在何种情况下这些多胞体与交叉多胞体组合等价。第 6 节根据同调中的挠元生成元，给出判定对称同调多胞体何时为自反多胞体的准则。第 7 节重点研究小维数单纯复形的对称上同调多胞体。第 8 节探讨流形三角剖分的对称（上）同调多胞体。最后，第9 节汇集若干示例，展示对称同调多胞体和上同调多胞体的一些有趣性质，并提出由本文工作引出的问题。

2. 预备知识

2.1. 单纯复形。定义在顶点集 V 上的单纯复形 Δ 是 V 的子集构成的集合，这些子集称为面，并满足：若 $\sigma \in \Delta$ 且 $\tau \subset \sigma$，则 $\tau \in \Delta$。Δ 的极大面称为面，若 Δ 的面为 σ_1、...、σ_s，则记作 $\Delta = \sigma_1, \ldots, \sigma_s$。面 $\sigma \in \Delta$ 的维数为 $\dim \sigma = |\sigma| - 1$，而 Δ 的维数为 $\dim \Delta = \max(\dim \sigma\colon \sigma \in \Delta)$。一维单纯复形称为图。给定一个 d 维单纯复形 Δ，向量 $f(\Delta) = (f_0(\Delta) \ldots, f_d(\Delta))$，其中 f_i 是 Δ 的 i 维面的数量，称为 Δ 的 f 向量。

如果 Δ 的每个面都具有相同的维数，则称 Δ 为纯的。Δ 的零维面称为顶点，一维面称为边，j 维面也称为 j维面；对于 d 维纯单纯复形，其 $(d-1)$ 维面称为 Δ 的棱脊。若 Δ 的某个脊恰好包含于一个面中，则称其为自由的。Δ 的面-脊图 $G(\Delta)$ 是这样一个图：其顶点是 Δ 的面，其边对应于 Δ 中交于一个脊的面配对。按照包含关系对单纯复形的面进行排序，自然得到一个偏序集，即所谓的面偏序集。如果存在一个从单纯复形 Δ 的顶点集到 Γ 的顶点集的双射，并由此诱导出它们的面偏序集之间的双射，则称这两个单纯复形组合等价。

如果单纯复形 Δ 满足以下性质，则称其为伪流形：

(1) Δ 是纯的；(2) Δ 的每个棱脊至多包含在两个面中；

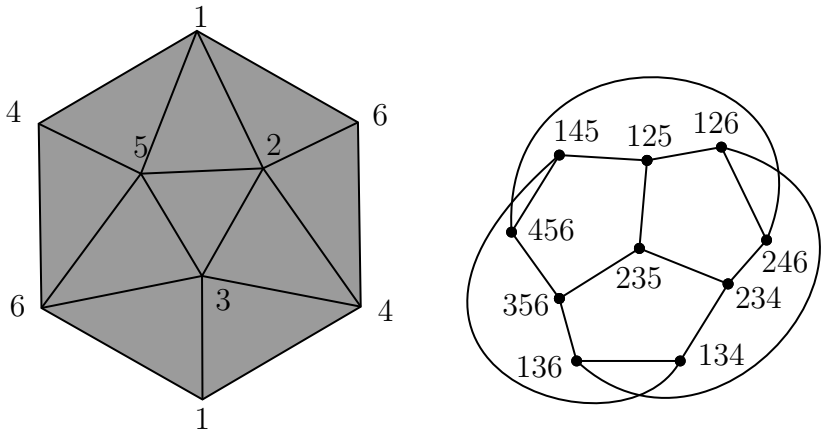

图 1. 实射影平面的三角剖分 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ （左）及其面-脊图 $G(\Delta_{\mathbb{RP}^2})$ （右）。

（3） Δ 是强连通的，即对于 Δ 中的每一对面 σ， σ'，都存在一个序列面 σ_1、……、σ_s，使得对于每个 i， $\sigma_1=\sigma$、 $\sigma_s=\sigma'$和 $\sigma_i\cap\sigma_{i+1}$都是 Δ的一个棱脊。注意，根据定义，伪流形 Δ 是连通的。伪流形 Δ的边界 是单纯复形 $\partial\Delta=\langle\sigma_1$、……、$\sigma_t\rangle$，其中$\{\sigma_1$、……、$\sigma_t\}$ 是 Δ 中恰好包含在一个面内的棱脊集合。如果 $\partial\Delta=\emptyset$，则称 Δ 为闭伪流形 或无边界伪流形。注意，对于闭伪流形 Δ，面-脊图的边与 Δ的棱脊一一对应。

例 2.1 （实射影平面的一个三角剖分）。二维实射影空间/平面 $\mathbb{RP}^2$ 是代数拓扑中的一个重要空间，因为它是满足若干有趣拓扑性质的最简单示例。本文中，我们将经常使用下述 $\mathbb{RP}^2$ 的三角剖分 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$：

$$\Delta_{\mathbb{RP}^2}=\langle 125,126,134,136,145,234,235,246,356,456\rangle.$$

其中，我们使用 125 表示 $\{1$、2、$5\}$，其他集合也类似。容易验证， $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ 是一个无边界伪流形。图1 展示了三角剖分$\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ 及其面-脊图 $G(\Delta_{\mathbb{RP}^2})$。

2.2. 单纯（上）同调。 现在我们回顾单纯（上）同调的一些基本事实，因为它将在接下来的章节中发挥非常重要的作用。更多详情请参阅 [31] 。

设 Δ 是顶点集为 $[n]:=\{1,\dots,n\}$ 的单纯复形， $\mathbb{K}$ 是一个域（或 $\mathbb{Z}$），且$C_j(\Delta;\mathbb{K})$ 是一个以 $\{\sigma\colon \sigma\in\Delta$ 且 $\dim\sigma=j\}$为基的 $f_j(\Delta)$ 维 $\mathbb{K}$向量空间（或自由阿贝尔群）。定义 $\mathbb{K}$-线性映射 $\partial_j\colon C_j(\Delta;\mathbb{K})\to C_{j-1}(\Delta;\mathbb{K})$，其在满足 $i_1<\cdots<i_{j+1}$ 的 j-面$\sigma=\{i_1,\dots,i_{j+1}\}$ 上的定义如下

$$\partial_j(\sigma)=\sum_{k=1}^{j+1}(-1)^{k+1}(\sigma\setminus\{i_k\})$$

称为 Δ 的边界映射 （在同调中）。注意，表示边界映射 ∂_j的矩阵是一个$\{0,1,-1\}$-矩阵，其列具有 $j+1$ 个非零项，且

符号交替。稍微滥用一下记号，我们将用 ∂_j 同时表示线性映射及其对应的矩阵（相对于标准基）。

注 2.2. 给定一个顶点集为 $[n]$ 的图 G，边界映射 ∂_1 通常称为 G 的关联矩阵。

对于每个 j，映射 ∂_j 都满足等式 $\partial_j \circ \partial_{j+1} = 0$。特别地，我们有 $\operatorname{im}\partial_{j+1} \subset$ 包含于 $\ker \partial_j$。Δ 的同调群（系数取自 $\mathbb{K}$）定义为以下商

$$H_j(\Delta;\mathbb{K}) := \frac{\ker_{\mathbb{K}} \partial_j}{\operatorname{im}_{\mathbb{K}} \partial_{j+1}},$$

其中，下标 $\mathbb{K}$ 表示我们取核/像中元素属于 $\mathbb{K}$ 的那些元素。后文也会使用这类记号。有限生成阿贝尔群基本定理 [12, （第 5 节定理 3）2] 指出，对于每个 j，都有同构 $H_j(\Delta;\mathbb{Z}) \cong F \oplus T$，其中 F 是自由阿贝尔群，T 是有限阿贝尔群。如果 T 有一个与 $\mathbb{Z}_p := \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ 同构的子群（其中 p 是正整数），我们就说 $H_j(\Delta;\mathbb{Z})$ 含有 p-挠元。如果 Δ 满足：对于任意 p，$H_j(\Delta;\mathbb{Z})$ 都不含 p-挠元，那么 Δ 和 $H_j(\Delta;\mathbb{Z})$ 分别称为无挠的。注意，如果 $\dim \Delta = d$，那么 $\operatorname{im}\partial_{d+1} = 0$，从而 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = \ker \partial_d$ 是 $C_d(\Delta;\mathbb{Z})$ 的子群，因此必为自由群。类似地，Δ 的上同调群（系数取自 $\mathbb{K}$）定义为以下商

$$H^j(\Delta;\mathbb{K}) := \frac{\ker_{\mathbb{K}} \partial_j^\top}{\operatorname{im}_{\mathbb{K}} \partial_{j-1}^\top}.$$

$C_j(\Delta;\mathbb{K})$、$\ker_{\mathbb{K}} \partial_j$ 和 $\operatorname{im}_{\mathbb{K}} \partial_j$ 中的元素分别称为 j-链、j-圈和 j-边界，因此 $H_j(\Delta;\mathbb{K})$ 中的非零元素来自不是边界的圈。将 ∂_j 替换为 $\partial_j^\top$ 时，我们只需在上述名称前加上前缀上。特别是在上同调的情形下，我们将 $C_j(\Delta;\mathbb{K})$ 中的元素称为 j-上链。

例 2.3 (从挠元到同调循环：*Bj¨orner* 的例子)。考虑 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ 的三角剖分 $\mathbb{RP}^2$，来自例 2.1。使用 Sage [40] 我们计算得

$$H_0(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2 \quad \text{and} \quad H_2(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z}) = 0,$$

其中，$H_1(\Delta;\mathbb{Z})$ 的挠生成元为

$$-[125] - [126] + [134] + [136] + [145] - [234] - [235] - [246] + [356] - [456]. \tag{2}$$

这里，记号 $[ijk]$ (其中 $1 \le i < j < k \le 6$) 用来指代 $C_2(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{K})$ 中与面 ijk 对应的基元。

令$\mathcal{B}$ 为由 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ 与额外的面 123 并集构成的单纯复形$\mathcal{B}$。这个单纯复形也常被称为 *Bj¨*<style id='9'>orner's example，见于 Hachimori 的单纯复形库 [19]。计算表明

$$H_0(\mathcal{B};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}, \quad H_1(\mathcal{B};\mathbb{Z}) = 0 \quad \text{and} \quad H_2(\mathcal{B};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

我们想强调的是，添加面 123 消除了其中一侧的挠元，同时在另一侧产生了非平凡的二维同调。$H_2(\mathcal{B};\mathbb{Z})$ 的生成元为

$$2[123] - [125] - [126] + [134] + [136] + [145] - [234] - [235] - [246] + [356] - [456].$$

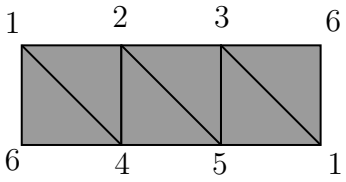

图 2. Möbius 带的三角剖分 $\mathcal{MS}$ 。

据我们所知，$\mathcal{B}$ 是（按顶点数计）具有 $\mathbb{Z}$ 互素系数同调循环的最小单纯复形，并且其中存在一个不等于 -1、0 或 1 的系数。这一性质将在后续章节中发挥重要作用。

给定一个单纯复形 Δ 及其子复形 Γ，系数取自 $\mathbb{K}$ 的一对 (Δ, Γ) 的 j^{th} 相对同调群 定义为以下商

$$H_j(\Delta, \Gamma; \mathbb{K}) = \frac{\ker_{\mathbb{K}} \partial_j^*}{\mathrm{im}_{\mathbb{K}} \partial_{j+1}^*},$$

其中 $\partial_j^* : \overrightarrow{C_j(\Delta)\ C_j(\Gamma)} \to \overrightarrow{C_{j-1}(\Delta)\ C_{j-1}(\Gamma)}$ 是由取商诱导的映射。（注意，Γ 的边界映射就是 Δ 的边界映射的限制。）

称 d 维闭伪流形 Δ 若满足 $H_d(\Delta; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，则为可定向 。否则，称 Δ 为不可定向。类似地，称带边界 $\partial\Delta$ 的 d 维伪流形 Δ 若满足 $H_d(\Delta, \partial\Delta; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，则为可定向 。

最后，矩阵 M 被称为 全幺模 ，如果 M 的每个子式都是 -1、0 或 1。事实证明，全幺模矩阵在线性规划和多胞体的研究中发挥着重要作用。关于单纯复形的边界矩阵Δ何时为全幺模的问题已在 [10]中得到解答。现在我们陈述这一结果的一个特例，它将对我们的研究有所帮助。

定理 2.4。 [10, 定理 4。1] 设 Δ 是一个 d维可定向伪流形。那么∂_d 是全幺模的。

我们注意到， [10, 定理 4。1] 最初是针对紧致可定向流形陈述的，但很容易验证，完全相同的证明也适用于可定向伪流形。

例 2.5 (一个非全幺模的边界映射)。 设 $\mathcal{MS}$ 是莫¨比乌斯带的三角剖分，如图 2所示。$\mathcal{MS}$ 是一个带边界的二维不可定向伪流形，其第二边界映射 ∂_2 由下列矩阵给出：

$$\partial_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

∂_2 的行和列分别按照$\mathcal{MS}$的边和二维面的字典序排列。删除对应于$\mathcal{MS}$边界的行（即只有一个非零元素的行），得到一个 (6×6) 矩阵，其行列式的绝对值为 2。因此，∂_2 不是全幺模的。

2.3. 史密斯标准形。 在域$\mathbb{K}$ 中取系数的同调群的计算可以转化为一个标准的线性代数问题。然而，在 $\mathbb{Z}$ 上工作时，标准的线性代数工具不再可用，因此人们常常必须依赖关于主理想整环（例如 $\mathbb{Z}$）上自由模的结果。

给定秩为 r的矩阵 $A \in \mathbb{Z}^{n\times m}$，有限生成阿贝尔群基本定理的一个版本表明，存在弱幺模矩阵（即行列式的绝对值为 1 的矩阵） $S \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ 和 $T \in \mathbb{Z}^{m\times m}$，使得

$$S^{-1}AT^{-1} = \begin{pmatrix} \alpha_1 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & \alpha_r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} =: D,$$

其中 α_i 整除 α_{i+1}，对 $1 \le i \le r-1$ 成立（例如参见 [38, 第 2 节。2]）。序列α_1，……，α_r 在相差符号的意义下是唯一的，且矩阵 D 称为 史密斯标准形 （对应于 A）（史密斯标准形，简称），并且我们也记 diag(α_1，……，α_r）来表示 D（而不涉及其大小，即 D）。元素 α_i 称为初等因子 （属于 A），并可计算为

$$\alpha_i = \frac{d_i(A)}{d_{i-1}(A)},$$

其中 $d_0(A) := 1$ 且 $d_i(A)$ 是 A 的 $(i \times i)$ 阶子式的最大公约数，适用于$1 \le i \le r$。

矩阵 A 的史密斯标准形之所以有用，是因为 $\mathrm{im}_{\mathbb{Z}} A \cong \mathrm{im}_{\mathbb{Z}} D$，其中 $\mathrm{im}_{\mathbb{Z}} A = \{A\mathbf{v} : \mathbf{v} \in \mathbb{Z}^m\}$，对 D 也同样成立。换言之，A 和 D 的列张成相同的整数格。举例来说，这意味着对于一个 d 维单纯复形 Δ，∂_d 的初等因子编码了 $H_d(\Delta)$ 的秩，以及 $H_d(\Delta)$ 中挠元的代数信息。下面汇总我们将用到的关于边界映射的史密斯标准形的结果。我们要强调的是，对于任意整数矩阵，也可以脱离拓扑背景陈述类似的结果。

定理 2.6。 [31, 定理 11.4 和 11。5] 设 Δ 是一个单纯复形，且 $0 \le i \le$维数 Δ。若 ∂_i 是一个秩为 r、初等因子为 $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ 的（$n \times m$）-矩阵，则

$$H_{i-1}(\Delta; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^{\min(n,m)-r} \bigoplus_{j=1}^{r} \mathbb{Z}_{\alpha_j}.$$

例2.7（摩尔空间与挠元）。给定一个阿贝尔群 G 和一个整数 i，一个单纯复形（或更一般地，一个CW 复形）M^i_G 称为 G 的Moore空间，如果$H_0(\mathrm{M}^i_G; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$，$H_i(\mathrm{M}^i_G; \mathbb{Z}) \cong G$，并且对 $j \ne i$ 有 $H_j(\mathrm{M}^i_G; \mathbb{Z}) = 0$（参见例如 [20, 第 2] 章，以了解有关摩尔空间的更多信息）。图 3给出了$\mathbb{Z}_3$的一个Moore空间$\mathrm{M}^1_{\mathbb{Z}_3}$ 的例子。其对于 $i > 0$ 的唯一非平凡同调群为 $H_1(\mathrm{M}^1_{\mathbb{Z}_3}; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_3$。

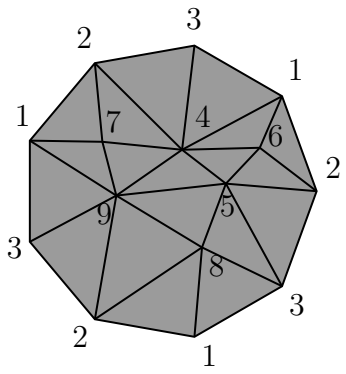

图 3。 $\mathbb{Z}_3$的 Moore空间。

该 f-向量（$\mathcal{M}^1_{\mathbb{Z}_3}$的）为$(1, 9, 27, \mathbf{19})$，并利用Sage [40] 可见第二边界映射 ∂_2 （$\mathcal{M}^1_{\mathbb{Z}_3}$的）的初等因子为

$$\underbrace{1, \ldots, 1}_{18 \text{ times}}, 3,$$

正如定理2.6所预测的。

在研究 A 的性质时，我们将充分运用整矩阵的$\mathcal{P}_A$，例如自反性和整数分解性质。值得注意的是，利用线性代数中的特殊形式来研究中心对称多胞体的这些性质，这一思路在文献中早有出现。例如，在 [32], 中，作者利用矩阵的 Hermite 标准形证明了与我们类似的结果。然而，采用史密斯标准形使我们能够证明 [32]中的若干结果在更弱的假设下也成立。更确切地说，我们可以将 [32] 所有极大子式的绝对值都相同这一条件，替换为对极大子式最大公约数的一个更弱条件。使用史密斯标准形的另一个优势在于，它在代数拓扑中有自然的解释（参见定理2.6）。

2.4. 拟阵。贯穿全文，我们经常采用的一种非常有用的视角，是考察单纯复形的边界映射的线性依赖。为此，我们将使用拟阵的语言。关于拟阵的更多细节，请参阅 [36]。

拟阵 *matroid* M是一个二元组（E, $\mathcal{I}$），其中 E是一个集合，称为 M的基集，而$\mathcal{I}$是 E 的子集族，称为独立集，满足

（1）如果 $\sigma \in \mathcal{I}$ 且 $\tau \subset \sigma$，则 $\tau \in \mathcal{I}$；（2） $\emptyset \in \mathcal{I}$；以及（3）如果 σ, $\tau \in \mathcal{I}$且 $|\sigma| > |\tau|$，那么存在 $x \in \sigma \setminus \tau$使得 $\tau \cup \{x\} \in \mathcal{I}$。

M 的极大独立集称为 M的基。子集 $\sigma \notin \mathcal{I}$ 称为相关集。极小相关集称为回路。

给定一个 $(n \times m)$-矩阵 A，我们定义拟阵 $M[A] = ([m], \mathcal{I})$，其中 $\sigma \in \mathcal{I}$当且仅当 A 中对应的列构成的集合线性无关时成立。若存在一个矩阵 A，其系数属于域 $\mathbb{K}$，且 M与 $M[A]$同构，即 M 的基集与 $M[A]$ 的基集之间存在一个双射，该双射保持独立集，并且独立集的原像也是独立集，则称拟阵 M 可在域 上实现 $\mathbb{K}$。此时， A 称为 M的表示。当 M

可以由某个图的关联矩阵表示时， M 称为图拟阵。如果拟阵 M 可在每个域 $\mathbb{K}$上实现， M 就称为正则的。

例 2.8。 令 $E = [n] = \{1、\ldots\ldots、 n\}$ 以及 $\mathcal{I} = 2^{[n]} \setminus \{[n]\}$。则 $M_n = (E, \mathcal{I})$ 是 n-圈 C_n 的图拟阵。这个拟阵也称为具有 n 个元素、秩为 $n-1$ 的均匀拟阵。

下面这个众所周知的命题将在后续章节中发挥关键作用。

命题 2.9。 [36] 拟阵 M 是正则的，当且仅当存在一个表示 M的全幺模矩阵 A 。特别地，图拟阵是正则的。

在本文中，我们经常处理形如 $M[\partial_d]$（以及 $M[\partial_d^\top]$）的拟阵，其中 ∂_d 是 d 维单纯复形 Δ的 d^{th} 边界映射。在这种情况下，需要注意的是， $M[\partial_d]$ 的独立集对应于 Δ 的具有平凡顶维同调的 d 维纯子复形，而 $M[\partial_d]$ 的回路对应于 Δ的具有非平凡顶维同调的极小 d 维子复形。

例 2.10（正则拟阵的全幺模与非全幺模表示）。考虑例 2.8 中的拟阵 M_n 。由于对任意 n， M_n 都是图拟阵，根据命题 2.9，它是一个正则拟阵。更一般地，设 Δ 是一个具有 n 个面、 $H_d(\Delta; \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 且满足对任意 Δ 的 d 维子复形 Γ ，都有 $H_d(\Gamma; \mathbb{Z}) = 0$ 的 d 维单纯复形。这个最后的条件保证了 Δ 的唯一同调循环包含 Δ 的所有面。由 Δ 的 ∂_d 边界映射所表示的拟阵与 M_n 同构，因为 M_n 的唯一相关集就是 $[n]$ 本身。这并不意味着 ∂_d 是全幺模的，例如 Bj¨orner 的例子（见例 2.3）就说明了这一点： ∂_d 中任何不包含对应于面 123 的列的 (10×10)-子式都能被 2 整除。特别地，这种方法使我们能够构造正则拟阵的非全幺模表示。正如我们将在后续章节中看到的（例如例 4.5），这对于证明多胞体的某些几何性质不仅取决于底层拟阵，也取决于其表示，非常有用。

我们还需要引入一个关于拟阵的概念。给定一个拟阵 M，其对偶拟阵 M^* 是定义在与 M 相同基集上的拟阵，其基是 M 的基的补集。如果 M 是可实现（分别为正则）拟阵，那么 M^* 也是可实现（分别为正则）拟阵。当 M^* 是图拟阵时，我们称 M 为余图拟阵。众所周知，图拟阵 M 是余图拟阵，当且仅当 M 可由平面图 [36, 的关联矩阵表示（定理 5.2）。2]

以下陈述说明了拟阵之间的对偶关系在何种情形下会自然出现；我们将在第7节中用到。

命题 2.11。 [14, 命题 6。1] 设 Δ 是一个 d 维单纯复形，满足 $H_d(\Delta; \mathbb{Z}) = 0$。那么，拟阵 $M[\partial_d^\top]$ 与拟阵 $M[\partial_{d-1}]$ 互为对偶。

2.5. **多胞体**。 在本节中，我们将提供关于多胞体的必要背景知识。有关该主题的更多信息，请参阅 [1] 和 [43]。

多胞体 P是有限多个点 $\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{R}^d$的凸包。若 $\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_n \in \mathbb{Z}^d$，则 P 称为格多胞体。 P 的支撑超平面是形如 $H = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} = b\}$ 的超平面，其中 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ 且 $b \in \mathbb{R}$ ，满足 $P \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{a}^\top \mathbf{x} \leq b\}$。 F 是P 的一个面，当且仅当它是 $P \cap H$ 与某个支撑超平面 H 的交集 P 。按照惯例，我们也将 $\emptyset$ 和 P 视为面。面的维数是其仿射包的维数。

0 维面和 1 维面分别称为顶点和边。维数为 $\dim P - 1$ 的面称为面。根据 Weyl-Minkowski 的著名定理（例如参见[43]），每个多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 也可以表示为有限多个闭半空间的有界交集，即 $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A^\top \mathbf{x} \leq b\}$，其中 $A \in \mathbb{R}^{m\times d}$ 是某个矩阵，且 $b \in \mathbb{R}^m$。特别地，如果这个表示是不可约简的，那么每个不等式（即 A的一行）都对应于 P的一个面。若多胞体 P 和 Q 的面格同构，即存在一个顶点集之间的双射，且该双射可扩展为 P 和 Q的面集之间的双射，则称它们组合等价。若格多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 满足 $P = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : A^\top \mathbf{x} \leq \mathbf{1}\}$，其中 $A \in \mathbb{Z}^{m\times d}$是某个矩阵，则称其为自反多胞体。等价地，其极对偶 $\mathrm{P}^\vee := \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^d : \mathbf{x}^\top \mathbf{y} \leq 1$ 对所有 $\mathbf{x} \in P$成立$\}$是一个格多胞体。全幺模矩阵理论中有一条关于自反性的重要判据如下。

定理 2.12. [37, 定理 19.1] 设 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 是一个顶点为 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 的格多胞体。若以 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 为列的矩阵是全幺模的，则 P 是自反的。

给定一个 m 维格多胞体 $P \subset \mathbb{R}^d$，数值函数 $E(k, P) = |kP \cap \mathbb{Z}^m|$，可以证明它是关于 k 的多项式，称为 P 的*Ehrhart* 多项式，而生成函数

$$E_P(t) = \sum_{k=0}^{\infty} E(k, P)t^k = \frac{h_P^*(t)}{(1-t)^{m+1}} = \frac{h_0^* + h_1^* t + \cdots + h_m^* t^m}{(1-t)^{m+1}}$$

称为 P 的*Ehrhart* 级数。多项式 $h_P^*(t) = h_0^* + h_1^* t + \cdots + h_m^* t^m$ 称为 P 的 h^*-多项式。

我们称格多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^d$ 具有整数分解性质(简称 IDP)，如果对每个 $k \in \mathbb{N}$，每个$\mathbf{x} \in kP \cap \mathbb{Z}^d$都可以写成$\mathbf{x} = p_1 + \cdots + p_k$，其中$p_i \in P \cap \mathbb{Z}^d$。当且仅当 的希尔伯特级数（定义见第2.6 节）与的 Ehrhart 级数相同，这一条件才成立。格多胞体 P称为张成的，如果 $\mathrm{aff}(P) \cap \mathbb{Z}^d$ 中的任意格点都可以表示为P中格点的整数线性组合。容易看出，每个具有 IDP 的多胞体也都是张成的。

2.5.1. 中心对称多胞体。 本文关注的主要对象是中心对称多胞体，即满足 P的多胞体。每个这样的多胞体 P都可以写成

$$P = \mathrm{conv}\{\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n, -\mathbf{v}_1, \ldots, -\mathbf{v}_n\} =: \mathrm{conv}[A| - A], \tag{3}$$

其中 $\{\pm\mathbf{v}1, \ldots, \pm\mathbf{v}_n\}$ 是 P的顶点，而 A 是以 $\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 为列的矩阵。我们也将 $_A$ 记作式 (3) 中的多胞体。虽然式 (3) 中的表示是最简的（按列数计），但将 P的其他格点作为列添加到 A 中，并不会改变该多胞体。这在第 4 节中会很有用。我们经常会遇到这样的情况：A 中的元素只有 -1、0 和 1（示例见图 4）。或许最著名、也最简单的中心对称多胞体 P，是由单位向量及其相反向量的凸包构成的，即 $P =$ 凸包$(\pm\mathbf{e}_i : 1 \leq i \leq n) \subseteq \mathbb{R}^n$。任何与该多胞体组合等价的多胞体都称为交叉多胞体。另一个重要示例是图 G的对称边多胞体（简称 SEP）P_G，其定义为

$$\mathcal{P}_G = \mathrm{conv}[\partial_1| - \partial_1]$$

（原始定义见 [29] ）。近来，[8], 这一类多胞体已推广至正则拟阵：对于一个正则拟阵 $M[A]$ —— 由一个

矩阵 A ——定义多胞体$\mathcal{P}_A$ ，如（3）中所定义。这些多胞体称为广义对称边多胞体，并且具有若干与通常的对称边多胞体相同的优良性质。

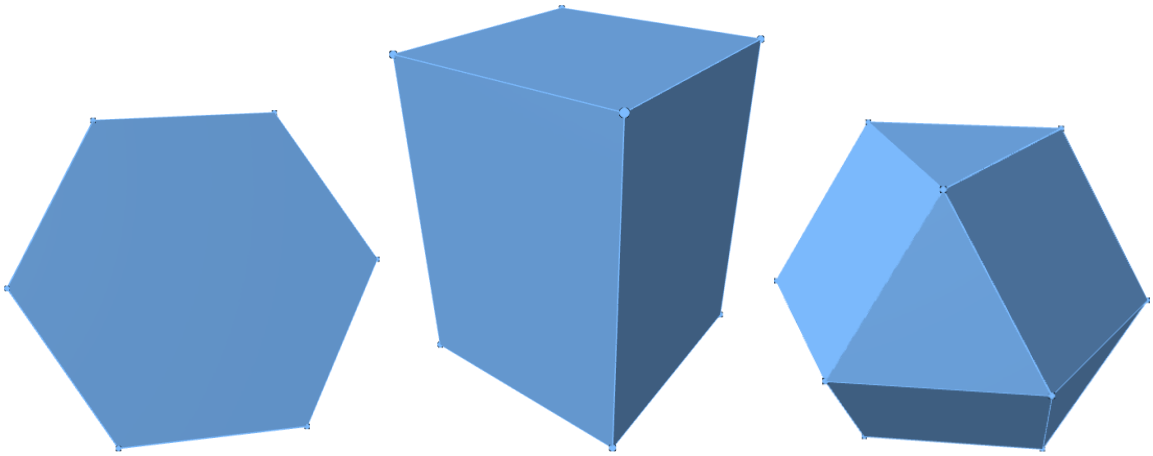

图 4. 由矩阵 $[A|-A]$ 的凸包定义的中心对称格多胞体，其中 M 分别是圈图C_3， C_4 与完全图 K_4 的关联矩阵。换言之，这些多胞体是这些图的对称边多胞体。

在本文中，我们希望研究一类中心对称多胞体 $\mathcal{P}_A$，它们从拓扑视角推广了图的对称边多胞体。由于任意图都可解释为一维单纯复形，自然可将图的对称边多胞体的定义推广到任意单纯复形。更确切地说，我们考察如下一类多胞体：

定义 2.13 (对称（上）同调多胞体)。 设 Δ 为一个 d维单纯复形。多胞体

$$\mathcal{P}_\Delta := \mathcal{P}_\partial := \mathrm{conv}[\partial_d| - \partial_d]$$

称为 Δ的对称同调多胞体。多胞体

$$\mathcal{P}^\Delta := \mathcal{P}_{\partial^\top} := \mathrm{conv}[\partial_d^\top| - \partial_d^\top]$$

称为 Δ的对称上同调多胞体。

一方面，（与图的情形类似）底层矩阵的拓扑解释将使我们能够把多胞体$\mathcal{P}_\Delta$ 与$\mathcal{P}^\Delta$ 的几何性质转化为 Δ 的拓扑性质，反之亦然。另一方面，当把对称边多胞体的定义从图推广到任意单纯复形时，我们会失去一些关键性质。特别地，底层矩阵不再必须是全幺模的（见命题2.9）——这一性质对图以及正则拟阵都成立，并使我们能够以简便的方式证明这些多胞体是自反的。在研究诸如自反性等性质或推导面描述时，我们需要考虑到这一问题。

多胞体 P 与 Q 称为幺模等价，如果在可能通过添加坐标将它们嵌入同一环境空间之后，存在弱幺模矩阵A 使得 $P = AQ$。此时我们记为$P \cong_u Q$ 。

我们将需要以下关于幺模等价的判据，见 [8].

定理 2.14。 [8, 定理 3.2 和注 3。4] 若 A 和 B 是表示同构拟阵的全幺模矩阵，则$\mathcal{P}_A$ 和 $\mathcal{P}_B$ 是幺模等价的。

2.6. 三角剖分与 Gr¨öbner 基。 一个 Δ 维格多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^m$ 的三角剖分 d是将 P 细分为维数至多为 d的格单形。在下文中，我们使用$\mathcal{V}(P)$表示 P的顶点集合。

如果存在高度函数$\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{\mathcal{V}(P)}$，使得对于每个单形 $S \in \mathcal{T}$，单形 conv $((p,\mathbf{w}(p)) : p \in \mathcal{V}(S))$ 是 conv $((p,\mathbf{w}(p)) : p \in \mathcal{V}(S))$ 的下表面，即具有最后一个坐标为负的外法向量的面，则称三角剖分$\mathcal{T}$ 为正则。如果其所有极大单形都是幺模的，则称这样的三角剖分幺模；也就是说，它们的欧几里得体积$!$，因而归一化体积等于 1。换言之，幺模单形是具有最小欧几里得体积的整单形。幺模三角剖分并不总是存在，最简单的例子是 3 维中的 Reeve 四面体。特别地，当格 $M_P := \mathrm{aff}(P) \cap \mathbb{Z}^m$ 由 P 张成且不与 $\mathbb{Z}^m$幺模等价时，情况就是如此。在这种情况下，顶点位于 M_P中的 d维单形的最小体积等于 $\frac{|\det(M_P|)!}{d}$，其中 $\det(M_P)$ 是一个矩阵的行列式，该矩阵的列为 M_P的一组格基。

受此启发，我们称顶点位于 M_P 中的 a d-单形为关于M_P幺模的，如果它的欧几里得体积为 $\frac{|\det(M_P|)!}{d}$。类似地，如果 Δ 中的每个极大单形都具有这一性质，就称 P 的三角剖分 Δ 关于 M_P 幺模。这种情况将在本文中多次出现。

要计算 P 的一个正则三角剖分（可能是关于 M_P 幺模的），人们通常会计算一个 Gr¨obner 基。设 $\mathbb{K}$ 是一个域，$\mathbb{K}[t_1^{\pm}, \ldots, t_d^{\pm}, s]$ 是劳朗多项式环。对于一个格多胞体 $P \subseteq \mathbb{R}^m$ 和任意 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in P \cap \mathbb{Z}^m$，令 $t^\alpha = t_1^{\alpha_1} \cdots t_m^{\alpha_m} \in \mathbb{K}[t_1^{\pm}, \ldots, t_m^{\pm}, s]$。环 $\mathbb{K}[P] := \mathbb{K}[t^\alpha s : \alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m]$ 是 P 的环面环，即 $\mathbb{K}[P]$ 是由单项式 $t^\alpha s$（$\alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m$）生成的 $\mathbb{K}[t_1^{\pm}, \ldots, t_m^{\pm}, s]$ 的子环。令 $S = \mathbb{K}[x_\alpha \mid \alpha \in P \cap \mathbb{Z}^m]$，其中 $\deg(x_\alpha) = 1$。P 的环面理想 I_P 是以下满射环同态的核

$$\pi_P \colon S \to \mathbb{K}[P], \text{ with } \pi_P(x_\alpha) := t^\alpha s.$$

多项式环（此处记为 $R = \mathbb{K}[x_1, \ldots, x_m]$）上的项序是单项式集合上的全序 $\prec$，满足对任意单项式 a、b、c，都有 $1 \prec a$，且 $a \prec b$蕴含 $ac \prec bc$。我们主要考虑由 $x_1 \prec \cdots \prec x_m$ 诱导的次数逆字典序 $\prec_{\mathrm{rev}}$（degrevlex）；当且仅当 $\sum_{i=1}^m \alpha_i < \sum_{i=1}^m \beta_i$，或$\sum \alpha_i = \sum \beta_i$ 且对 $\ell = \min\{j : \alpha_j \neq \beta_j\}$ 有 $\alpha_\ell > \beta_\ell$ 时，有 $x_1^{\alpha_1} \cdots x_m^{\alpha_m} \prec_{\mathrm{rev}} x_1^{\beta_1} \cdots x_m^{\beta_m}$。对于多项式 $f \in R$，其在 $\prec(f)$ 中的首项是 f 中出现的最大单项式。理想 $I \subseteq R$ 的初始理想 $\mathrm{in}_\prec(I)$ 是由 I 中所有首项生成的理想。若生成元集合 $g_1, \ldots, g_r$ 属于 I，且 $\mathrm{in}_\prec(g_1) \ldots, \mathrm{in}_\prec(g_r)$ 生成 $\mathrm{in}_\prec(I)$，则称其为 Gr¨obner 基（关于 $\prec$）。

格多胞体 P 的环面理想 I_P 的 Gröbner 基¨会导出 Δ_P P在顶点集 $P \cap \mathbb{Z}^d$ 上的正则三角剖分，具体如下：集合 $M \subseteq P \cap \mathbb{Z}^d$ 是 Δ_P 中某个单形的顶点集，当且仅当

$$\prod_{\alpha \in M} x_\alpha \notin \sqrt{\mathrm{in}_\prec(I_P)} = \Big(f : f^k \in \mathrm{in}_\prec(I_P) \text{ for some } k\Big).$$

事实上，P 的每个正则三角剖分都可以通过这种方式构造出来 [39]。此外，以下陈述成立：

定理 2.15。 [39, 推论 8。9] 三角剖分 Δ_P 是正则的，并且 相对于格 $\mathrm{aff}(P) \cap \mathbb{Z}^d$ 是幺模的，当且仅当 在$\prec(I_P) = \sqrt{}$中$\prec(I_P)$。当且仅当 I_P具有无平方因子的 *Gr¨obner* 基，即具有一个 *Gr¨obner* 基 I_P，其首项均无平方因子时，情况成立。

最后，环面环 $\mathbb{K}[P]$ 的希尔伯特函数 是数值函数 $\mathrm{HF}^{\mathbb{K}[P]}(i) = \dim_{\mathbb{K}}(\mathbb{K}[P])_i$，其中 $(\mathbb{K}[P])_i$表示 $K[P]$ 的次数为 i的齐次分量。 $\mathbb{K}[P]$ 的希尔伯特级数 是生成函数

$$\mathrm{HS}_{\mathbb{K}[P]}(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \mathrm{HF}_{\mathbb{K}[P]}(i)t^i = \frac{h_P(t)}{(1-t)^{d+1}},$$

其中 d 是多胞体 P的维数。我们将在若干例子中用到以下事实：格多胞体 P具有整数分解性质，当且仅当 $h_P(t) = h_P^*(t)$。

3. 对称（余）同调多胞体及其基本性质

本节研究对称（余）同调多胞体的基本性质。具体而言，我们将描述对称同调多胞体的面与面（定理3.6 及推论3.8）。

注 3.1 (纯单纯复形与非纯单纯复形)。 注意，根据 ∂_d的定义，多胞体 $\mathcal{P}_\Delta$ 和 $\mathcal{P}^\Delta$ 仅取决于 Δ 中维数为 d 的面（其中 $\dim \Delta = d$ ）的面 - 棱关联，而与可能存在的低维面无关。因此，我们可以假设 Δ只含有维数为 d 或 $d-1$的面。由于后一类面对应于顶边界映射 ∂_d 中的零行，这种面的存在意味着$\mathcal{P}_\Delta$ 位于某个坐标超平面内。类似地，对于$\mathcal{P}^\Delta$，这意味着原点出现在凸包中，但这也不会影响该多胞体。因此，在下文中，我们通常假设 Δ是纯的。

注 3.2 （任意矩阵与胞腔复形的边界映射）。 正如 [16, 注 4.2], 中所指出的，每个整数值矩阵都可以实现为某个胞腔复形的顶边界映射。因此，理论上，我们可以尝试将那些对任意矩阵成立的结果转换到这一更具拓扑性的情形中。不幸的是，这些结果中的大多数都需要一些额外条件，例如多胞体包含原点作为唯一的内部格点，而这些条件未必能自然地转化为胞腔复形上的条件。基于这一原因，我们仅在单纯复形的情形下陈述拓扑结果。

现在我们证明对称（余）同调多胞体的若干基本性质。我们首先刻画它们的顶点和格点。

引理 3.3。 设 Δ 为一个纯的 d维单纯复形，且设 P 为 P_Δ 或 P^Δ。则 P 的顶点是 ∂_d （分别为 $\partial_d^\top$）的列。特别地，

$$f_0(\mathcal{P}_\Delta) = 2f_d(\Delta) \qquad and \qquad f_0(\mathcal{P}^\Delta) = 2(f_{d-1}(\Delta) - \sum_{\sigma\in\Delta,\dim\sigma=d} \max(\mathrm{free}(\sigma) - 1, 0)),$$

其中，自由的（σ）表示面 σ 的自由棱脊数。此外，P 的唯一其他格点是原点。

在证明这一陈述之前，我们注意到，虽然在 ∂_d 中所有列各不相同，但在 $\partial_d^\top$中，同一列可以出现多次。

证明。我们首先注意到，由于 ∂_d 是一个$\{-1,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}\}$-矩阵，因此对于所有 i 以及所有$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$，都有 $|\mathbf{x}_i| \le 1$。特别地，$\mathbf{x}_i \in \{-1,\ \mathbf{0},\ \mathbf{1}\}$ 对所有 i 成立，当且仅当$\mathbf{x} \in \mathcal{P}$ 是一个格点。

下文中，令 $A_\Delta = [\partial_d| - \partial_d]$，并令 A^Δ 为从 $[\partial_d^\top| - \partial_d^\top]$ 中删除重复列后得到的矩阵。注意，由于 Δ 是纯的，$[\partial_d^\top| - \partial_d^\top]$ 不含零列。设 $\mathbf{w} \in \mathbf{P}_\Delta$（分别地，$\mathbf{w} \in \mathbf{P}^\Delta$）是一个格点，它既不等于原点，也不等于 A_Δ（分别地，A^Δ）的任一列 $\mathbf{v}$。于是，存在 A_Δ（分别地，A^Δ）的列 $\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_s$，以及 $\lambda_1, \ldots, \lambda_s > 0$，使得 $\sum_{\ell=1}^s \lambda_\ell = 1$ 且 $\mathbf{w} = \sum_{\ell=1}^s \lambda_\ell \mathbf{v}_\ell$。根据假设，我们有 $s \ge 2$，且存在 i 使得 $\mathbf{w}_i \ne 0$。由于 $\mathbf{P}_\Delta$ 和 $\mathbf{P}^\Delta$ 中心对称，并且根据开头的论证，$|\mathbf{w}_i| \le 1$，我们可以假设 $\mathbf{w}_i = 1$。此外，由于对所有 $1 \le j \le s$ 和 $\sum_{\ell=1}^s \lambda_\ell = 1$，$|(\mathbf{v}j)_i| \le 1$，可知对所有 $1 \le j \le s$，$(\mathbf{v}j)_i = 1$。特别地，这意味着对于 ∂_d（分别地，$\partial_d^\top$）的任一列 $\mathbf{v}$，$\{-\mathbf{v}, \mathbf{v}\} \not\subseteq \{\mathbf{v}1, \ldots, \mathbf{v}_s\}$。我们证明以下断言。

断言：存在 $1 \le j < j' \le s$ 和 $i \ne k$，使得 $(\mathbf{v}j)_k \ne 0$ 且 $(\mathbf{v}j')_k \ne 0$。

首先假设 $\mathbf{w} = \mathbf{e}_i$。由于 $\mathbf{w} \ne \mathbf{v}_\ell$ 对于 $1 \le \ell \le s$成立，因此存在 $1 \le j \le s$ 和 $k \ne i$，使得 $(\mathbf{v}j)_k \ne 0$。由于 $\mathbf{w}_k = 0$，这迫使另一个 $1 \le j' < s$ 存在，且满足 $j' \ne j$，使得 $(\mathbf{v}j')_k \ne 0$，由此可证该断言。若 $\mathbf{w} \ne \mathbf{e}_i$，则存在 $k \ne i$ 使得 $\mathbf{w}_k \ne 0$，并且根据证明第二段中的相同论证，对于所有 $1 \le j \le s$，我们有 $(\mathbf{v}j)_k \ne 0$。这同样证明了该断言。

该断言连同如下事实：$(\mathbf{v}j)_i = (\mathbf{v}j')_i = 1$（由上文讨论可知）意味着，对应于向量$\mathbf{v}j$、$\mathbf{v}j'$ 的面 σ_j、$\sigma_{j'}$ 共享两条棱脊，这是不可能的，因为面至多只能相交于一条脊。（注意，由上述论证可知$F_j \ne F_{j'}$。）对于$\mathcal{P} = \mathcal{P}^\Delta$，由此可知，对应于列$\mathbf{v}j$、$\mathbf{v}j'$ 的两条棱脊 r_j、$r_{j'}$ 包含于两个不同的公共面中。这是不可能的，因为两条棱脊至多只能包含于一个公共面中。

同一论证还表明，A_Δ（相应地，A^Δ）的每一列都是$\mathcal{P}_\Delta$（相应地，$\mathcal{P}^\Delta$）的一个顶点。由于 ∂_d 的所有列互不相同，这意味着 $f_0(\mathcal{P}_\Delta) = 2f_d(\Delta)$。

$\partial_d^\top$ 的列相同，当且仅当相应的棱脊包含于相同的面中。由于两条棱脊已经完全确定一个面，这种情况只有在相应的棱脊恰好包含于一个面中时才会发生。因此，这些棱脊是同一面的自由棱脊。从而，对于每一个具有 m 条自由棱脊的 d维面 σ，$\partial_d^\top$ 包含 m 个相同的列，它们都对应于$\mathcal{P}^\Delta$ 的同一个顶点。该断言由此得证。□

不难看出，对于 ∂_d 的一列 $\mathbf{v}$，可由将 $\mathbf{x}$ 映射到 $\mathbf{v}^\top\mathbf{x}$ 的线性泛函 $\ell_\mathbf{v}$ 给出一个支撑超平面。事实上，$\ell_\mathbf{v}(\mathbf{v}) = d + 1$，并且由于每一列恰好有 $d + 1$ 个条目等于 $\mathbf{1}$ 或 -1（其余所有条目均等于 $\mathbf{0}$），对于 $[\partial_d| - \partial_d]$的每一列 $\mathbf{w}$，都有 $\ell_\mathbf{v}(\mathbf{w}) < d + 1$。此外，相应的线性泛函为 $\partial_d^\top$ 中不对应自由棱脊的列定义了一个支撑超平面。

命题 3.4。设 $d > 0$，且令 Δ 为一个 d 维单纯复形。则：

(1) 维数 $\mathbf{P}_\Delta =$ 维数 $\mathbf{P}^\Delta = f_d(\Delta) -$ 维数$_\mathbb{Q}\, H_d(\Delta;\ \mathbb{Q})$。*(2)* $\mathbf{P}_\Delta$ 的仿射包是 $\mathbb{R}^{f_{d-1}(\Delta)}$ 中由 Δ 的 d- 余圈张成的线性空间的正交补。*(3)* $\mathbf{P}^\Delta$ 的仿射包是 $\mathbb{R}^{f_d(\Delta)}$ 中由 Δ 的 d- 圈张成的线性空间的正交补。

证明. 我们首先证明 (1)。由于$\mathcal{P}_\Delta$ 和 $\mathcal{P}^\Delta$都包含原点，我们有

$$\dim \mathcal{P}_\Delta = \operatorname{rank}[\partial_d| - \partial_d] = \operatorname{rank} \partial_d = \operatorname{rank} \partial_d^\top = \operatorname{rank}[\partial_d^\top| - \partial_d^\top] = \dim \mathcal{P}^\Delta.$$

由于 $\dim \Delta = d$，我们知道 $H_d(\Delta;\mathbb{Q}) = \ker_{\mathbb{Q}} \partial_d$（作为 $\mathbb{Q}$-向量空间），这意味着秩 $\partial_d = f_d(\Delta) - \dim_{\mathbb{Q}} H_d(\Delta;\mathbb{Q})$，从而得到该结论。

为证明 (2)，我们将 ∂_d 解释为一个从 $\mathbb{R}^{f_d(\Delta)}$ 到 $\mathbb{R}^{f_{d-1}(\Delta)}$的映射。由此可得$\mathcal{P}_\Delta \subseteq \mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, \partial_d$，且 $\dim \mathcal{P}_\Delta = f_d(\Delta) - \dim \ker_{\mathbb{R}} \partial_d = \dim \mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, \partial_d$，由 (1) 得出。因此，$\mathcal{P}_\Delta$ 的仿射包等于 $\mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, \partial_d$。此外，根据线性代数中的标准结论，后者与 $\ker_{\mathbb{R}} \partial_d^\top$ 正交，而 $\ker_{\mathbb{R}} \partial_d^\top$ 恰好是 Δ 的 d-余圈空间。结论得证。

最后，(3) 可用与 (2) 相同的论证证明。 □

注 3.5（图的对称同调多胞体与对称边多胞体）。对于一个具有 n 个顶点和 s 条边的连通图G，命题 3.4 表明 $\dim \mathrm{P}_G = s - \dim_{\mathbb{Q}} H_1(G;\mathbb{Q})$。另一方面，由于此时 P_G 是 G 的对称边多胞体，众所周知且易于验证，$\dim \mathrm{P}_G = n-1$，因此 $s - \dim_{\mathbb{Q}} H_1(G;\mathbb{Q}) = n-1$；这一等式也很容易从图论角度看出。此外，根据构造，P_G 包含于与 $(1,\dots,1)$ 正交的超平面中，而该向量生成 G 的 1 次余圈空间。

3.1. 面。 本节旨在描述对称同调多胞体$\mathcal{P}_\Delta$的面。具体而言，我们将给出图的对称边多胞体面描述的一种自然推广 [22, 定理 3.1]。我们从一般面的描述开始。

定理 3.6。 设 $\Delta = \langle \sigma_1,\dots,\sigma_s\rangle$ 是一个纯的 d 维单纯复形，具有 r 个棱脊。令 F_i 表示 ∂_d 的 i^{th} 列。P_Δ 的面对应于 Δ 的各面的一种标记 $\ell \in [-1,1]^s$，满足 $\sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j \in$ 像 $_{\mathbb{R}}\, \partial_d^\top$，且 最大值$(|\ell_j| : \ 1 \le j \le s) = 1$。特别地，与标记 ℓ 对应的面为 凸包$\{\ell_i F_i : |\ell_i| = 1\}$。此外，$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{w}^\top \mathbf{x} = 1\}$ 是该面的支撑超平面，其中 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ 满足 $\partial_d^\top \mathbf{w} = \sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j$；该超平面包含 P_Δ，且 P_Δ 位于其负半空间内。

我们注意到，标记 ℓ 上的条件 $\sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j \in \mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, \partial_d^\top$ 只是说 ℓ 是一个余边界。换言之，ℓ 在同调循环上为零。

证明。设 $\ell \in [-1,1]^s$ 为一个标记，使得 $\sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j \in \mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, \partial_d^\top$，并选取 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$，使得 $\partial_d^\top \mathbf{w} = \sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j$。对于列 $F_j = \partial_d \sigma_j$（对 $-F_j = -\partial_d \sigma_j$，同样的论证成立），我们有：

$$\mathbf{w}^\top(F_j) = \mathbf{w}^\top(\partial_d \sigma_j) = (\partial_d^\top \mathbf{w})^\top \sigma_j = \left(\sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j\right)^\top \sigma_j = \ell_j \in [-1,1]. \tag{4}$$

由凸性，我们得出 $\mathcal{P}_\Delta \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \le 1\}$。这表明 $\mathcal{P}_\Delta \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{w}^\top \mathbf{x} = 1\}$ 是 $\mathcal{P}_\Delta$ 的一个面。此外，上述计算表明，该面的顶点集合等于 $\{\ell_i F_i : |\ell_i| = 1\}$。

为了解每个面为何具有所描述的形式，设 Ω 是 P_Δ 的一个面。由于原点 $\mathbf{0}$ 位于 P_Δ 的内部，因此 $\mathbf{0} \notin \Omega$，故存在 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^r$ 使得 $\Omega = \mathrm{P}_\Delta \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{w}^\top \mathbf{x} = 1\}$ 且 $\mathrm{P}_\Delta \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^r : \mathbf{w}^\top \mathbf{x} \le 1\}$。令 $\partial_d^\top \mathbf{w} = \sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j$。由 $\mathbf{w}$ 的选取方式及 (4) 可知 $|\ell_j| = |\mathbf{w}^\top(F_j)| \le 1$，因此 $\ell_j \in [-1,1]$。令$\ell = (\ell_1,\dots,\ell_s)$ 即得所需结果。□

我们想指出，定理 3.6 可以看作中心对称 Gale 对偶的一个版本 [30, 方程 (9) 和 (10)]。特别地，它也可以表述为适用于一般矩阵的形式。

连通图的对称边多胞体的面与包含一棵生成树的连通子图相对应。（参见 [22, 定理 3.1]）。

对于高维单纯复形，单纯生成树有不止一种定义。事实证明，适用于我们的定义是下面这种，它推广自 [13] 中用于将矩阵树定理推广到高维单纯复形的定义。

定义 3.7。 设 $d \geq 1$，且设 Δ 为一个 d维单纯复形。 Δ 的子复形 Γ 称为关于 Δ 的单纯生成森林，如果它包含 Δ 的所有（$d-1$）面，并且满足以下条件：

（1） $H_d(\Gamma;\ \mathbb{Z}) = 0$，以及（2） f_d
（Γ） $= f_d(\Delta) - \dim_{\mathbb{Q}} H_d(\Delta;\ \mathbb{Q})$。

我们想指出，如果进一步有 $\dim_{\mathbb{Q}} H_{d-1}(\Gamma;\ \mathbb{Q}) = \dim_{\mathbb{Q}} H_{d-1}(\Delta;\ \mathbb{Q}) = 0$，则单纯生成森林就是 [13] 意义下的单纯生成树。

虽然一个 d维单纯复形存在单纯生成树，当且仅当对于 $0 < k < d$ 有 $H_k(\Delta;\ \mathbb{Q}) = 0$，并且 $H_0(\Delta;\ \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$（见 [13, 命题 3.7]），但很容易看出，每个单纯复形 Δ 都存在单纯生成森林：事实上， Δ 的任意子复形，只要其面对应于顶边界映射 ∂_d 的极大线性无关列集，就是一个单纯生成森林。于是我们可以证明以下结论。

推论 3.8（P 的面 P_Δ 与 Δ的生成森林）。 设 $\Delta = \langle \sigma_1, \ldots, \sigma_s \rangle$ 是一个纯d维单纯复形。那么，P_Δ 的面与 Δ 各面的一种标记 $\ell \in [-1,1]^s$一一对应，其中 $\sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j \in 像_{\mathbb{R}}\, \partial_d^\top$，且 $\Gamma_\ell = \langle \sigma_i\colon\ \ |\ell_i| = 1 \rangle$ 包含 Δ 的一个单纯生成森林。

证明。设 $\ell \in [-1,1]^s$ 是 Δ 各面的一个标记，且 $\sum_{j=1}^s \ell_j \sigma_j \in \mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, \partial_d^\top$。由定理 3.6 可知，$\ell$ 产生 P_Δ的一个面 $\Omega = \mathrm{conv}\{\ell_i F_i\colon\ |\ell_i| = 1\}$，其中 F_i 是 Δ的顶边界映射 ∂ 的 i^{th} 列。此外，每个面都可由此方式得到。因此，只需证明：当且仅当 $\Gamma_\ell = \sigma_i\colon\ |\ell_i| = 1$ 包含一个单纯生成森林时，Ω 才是 P_Δ 的面。

首先，假设 Ω 是$\mathcal{P}_\Delta$的一个面。设 ∂_ℓ 为 Γ_ℓ的顶边界映射，B 为 ∂_ℓ的列的一个极大独立集。此外，设 $\Sigma_B = \langle \sigma_k\colon\ F_k \in B \rangle$ 为相应的单纯复形， ∂_B 为 Σ_B的顶边界映射。由于 $\dim \Omega = \dim \mathcal{P}_\Delta - 1$，可知 ∂_d、 ∂_ℓ和 ∂_B具有相同的秩。这意味着Σ_B 和 Γ_ℓ都包含 Δ 的所有棱脊。利用 ∂_B 的列线性无关这一点，我们得出 $H_d(\Sigma_B;\mathbb{Z}) = 0$，并且

$$f_d(\Sigma_B) = \operatorname{rank} \partial_B = \operatorname{rank} \partial_d = f_d(\Delta) - \dim_{\mathbb{Q}} H_d(\Delta;\mathbb{Q}).$$

这表明 Σ_B 是 Δ的一个单纯生成森林。由于 Σ_B 包含于 Γ_ℓ中，结论得证。

反过来，假设 $\Gamma_\ell = \langle \sigma_i\colon\ |\ell_i| = 1 \langle$ 包含Δ的一个单纯生成森林 Σ。设 ∂_Σ 为 Σ 的顶边界映射， ∂_ℓ 为 Γ_ℓ的顶边界映射。根据单纯生成森林的定义，我们得到

$$\operatorname{rank} \partial_d = \operatorname{rank} \partial_\Sigma \leq \operatorname{rank} \partial_\ell \leq \operatorname{rank} \partial_d$$

由此可得 $\dim \Omega = 秩\ \partial_\ell - 1 = 秩\ \partial_d - 1 = \dim \mathcal{P}_\Delta - 1$，即 Ω 是 $\mathcal{P}_\Delta$ 的一个面。 □

我们以推论3.8对一类特殊单纯复形的应用来结束本节，这类单纯复形可视为图情形下圈的推广。

在介绍这一应用之前，我们需要先引入一些额外的记号。给定一个元素取自 $\mathbb{R}$ 的多重集 S，若一对多重集 $(M_1,\ M_2)$ 被称为 等权划分

的 S，如果 M_1，$M_2 \subseteq S$, $M_1 \cup M_2 = S$（作为多重集），且 $\sum_{x\in M_1} x = \sum_{y\in M_2} y$。我们用 part($S$) 表示 S 的等权分拆数。为简化记号，我们将 $\ker_{\mathbb{Z}} A$ 中的向量称为 线性依赖（对于 A）。

推论 *3.9.* 设 Δ 是一个纯的 d 维单纯复形，满足 $f_d(\Delta) = s$, $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，且对于 Δ 的每个面 σ，都有 $H_d(\Delta \setminus \{\sigma\};\mathbb{Z}) = 0$。设一个线性依赖 $\in \mathbb{Z}^s$ 生成 $H_d(\Delta;\mathbb{Z})$，并令 $S = \{a_1, a_2, \ldots, a_s\}$。若 ℓ 是与 P_Δ 的一个面 Ω 对应的标记，则以下条件之一成立：

(1) $(\{a_i : \ell_i = 1\}, \{a_i : \ell_i = -1\})$ 构成 S 的一个等权划分；*(2)* 存在 $1 \le k \le s$，使得 $\ell_k = 0$，且 $(\{a_i : \ell_i = 1\}, \{a_i : \ell_i = -1\})$ 构成 $S \setminus \{a_k\}$ 的一个等权划分。*(3)* 存在 $1 \le k \le s$，使得 $\ell_k \notin \{-1, 0, 1\}$，并且以下之一构成 $S \setminus \{a_k\} \cup \{\ell_k a_k\}$ 的一个等权划分：$(\{a_i : \ell_i = 1\} \cup \{\ell_k a_k\}, \{a_i : \ell_i = -1\})$ 或 $(\{a_i : \ell_i = 1\}, \{a_i : \ell_i = -1\} \cup \{\ell_k a_k\})$。

此外，*(1)*、*(2)* 或 *(3)* 中的每个等权划分都定义了 P_Δ 的一个面。特别地，P_Δ 的面数等于

$$\operatorname{part}(S) + \sum_{k=1}^{s} \operatorname{part}(S \setminus \{a_k\}) + \sum_{k=1}^{s} \sum_{i=1}^{|a_k|-1} \operatorname{part}(S \cup \{i\} \setminus \{a_k\}).$$

注意，关于 Δ的同调条件意味着 ∂_d 的核由唯一的线性依赖 $\mathbf{a}$ 张成，该依赖涉及 所有 Δ的面。此类单纯复形的例子包括球面的三角剖分，也包括例 $\mathcal{B}$ 中的单纯复形 2.3。

证明。设 Δ 的面为 $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$，并令 ∂_d 中对应的列为 $F_1, \ldots, F_s$。设 Ω 是 P_Δ 的一个面，$\ell \in [-1, 1]^s$ 是对应的标记。命题 3.4 (1) 表明 $\dim \Omega = s - 2$。特别地，由推论 3.8 可知，对于所有 $1 \le i \le s$，Ω 必须恰好包含 F_i 和 $-F_i$ 中的一个；或者包含除某个特定 $1 \le k \le s$ 之外的所有 $1 \le i \le s$。还要注意，Ω 的顶点集合等于 $\{\ell_i F_i : |\ell_i| = 1\}$。

由于 $\sum_{j=1}^{s} \ell_j \sigma_j \in \operatorname{im}_{\mathbb{R}} \partial_d^{\top}$ 且 $\mathbf{a} \in \ker_{\mathbb{R}} \partial_d$，我们得出

(5)
$$0 = \sum_{i=1}^{s} a_i \ell_i = \begin{cases} \sum_{\{i\,:\,\ell_i=+1\}} a_i - \sum_{\{i\,:\,\ell_i=-1\}} a_i, & \text{if } |\ell_i| = 1 \text{ for all } i \\ \sum_{\{i\,:\,\ell_i=+1\}} a_i - \sum_{\{i\,:\,\ell_i=-1\}} a_i + \ell_k a_k, & \text{if } |\ell_k| \neq 1 \text{ and } |\ell_i| = 1 \text{ for } i \neq k. \end{cases}$$

在第一种情况下，根据定义，标记 ℓ 对应于 S 的一个等权划分，这就是条件 (1)。在第二种情况下，我们首先注意到，由此可得 $\ell_k a_k \in [-a_k, a_k] \cap \mathbb{Z}$。若 $\ell_k = 0$，则 ℓ 产生 $S \setminus \{a_k\}$ 的一个等权划分，这就是条件 (2)。类似地，若 $\ell_k \notin \{-1, 0, 1\}$，则我们有 $S \setminus \{a_k\} \cup \{\ell_k a_k\}$ 的一个等权划分，这就是条件 (3)。对于 此外这一陈述，很容易验证，(1)、(2) 或 (3) 中的每个等权划分都会产生一个标记 $\ell \in [-1, 1]^s$，满足 $\sum_{j=1}^{s} \ell_j \sigma_j \in \operatorname{im}_{\mathbb{R}} \partial^{\top}$，并且 $\Gamma_\ell := \langle \sigma_i : |\ell_i| = 1 \rangle$ 包含 Δ 的一个单纯生成森林。

计数公式是显然的，因为上述第一、第二和第三个加项分别等于类型（1）、（2）和（3）的等权分拆数。□

作为推论 3.9 的特例，若 Δ 是一个连通、闭且可定向的 d-伪流形，我们可以得到计算 $\mathcal{P}_\Delta$ 的面数的简单公式。在这种情况下，存在一个线性依赖 $\mathbf{a} \in \{-1, 1\}^{f_d(\Delta)}$，它生成 $H_d(\Delta;\mathbb{Z})$。

推论 3.10。设 Δ 是一个具有 s 个面的连通、闭且可定向的 d-伪流形。那么，当 $s = 2m$ 时，P_Δ 的面数等于 $\binom{2m}{m}$；当 $s = 2m+1$ （其中 $m \in \mathbb{N}$）时，它等于 $(2m+1)\cdot\binom{2m}{m}$。

证明。该陈述可直接由推论得出3.9 只需注意到，多重集 S中 **1** 的重数为 s，且不含其他元素。因此有两种情况：若 $s = 2m$，等权划分对应于 m元子多重集 S，而 $S\setminus\{1\}$ 没有等权划分。若 $s = 2m+1$，则 S 没有等权划分，而 $S\setminus\{1\}$ 的等权划分对应于 m元子多重集 $S\setminus\{1\}$，并且还需选择从 S中删去哪些 **1**。□

最后，我们指出，推论 3.10 在 $d = 1$ 时，特化为圈的对称边多胞体的面数（例如参见 [7, 命题 4。3]）。

4. Gr¨obner 基与正则（幺模）三角剖分

本节着重于为一般的中心对称格多胞体构造正则三角剖分。正如第2.5.1节所指出的，每个这样的多胞体都具有$\mathcal{P}_A$的形式，其中 A 是一个矩阵，其列至少包含$\mathcal{P}_A$ 的每一对对踵顶点中的一个，但也可能包含 P的所有格点。若 A 饱和的，则称其为饱和的，即$\mathcal{P}_A$中除原点外的每个格点都恰好作为一列出现在 $[A|-A]$ 中。事实证明，这正是本节所需的合适表示形式。

为了计算正则三角剖分，我们将计算相应环面理想的 Gr¨obner 基。根据引理3.3，单纯复形的边界映射以及图的关联矩阵都是饱和的。在后一种情形下，众所周知，环面理想具有一个无平方因子的Gr¨obner 基，这意味着这些多胞体总是存在正则幺模三角剖分 [9, 22]。尽管对于任意中心对称格多胞体而言，这一结论不再成立并不令人意外，但事实证明，对称（余）同调多胞体也可能不满足这一结论（见定理4.4）。尽管如此，我们给出的 Gr¨obner 基仍可视为所考虑的更一般情形下，¨中的 Gr [9, 22]öbner 基的一种自然类比（见定理4.1）。

为了计算 $I_{\mathcal{P}_A}$ 的 Gr¨obner 基，我们需要引入单项式序并设定一些记号。下文中，令 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 为饱和的。

在环面环中，$\mathcal{P}_A$ 的每个格点对应一个变量。我们用 z表示对应于原点的变量。进一步地，我们用 x_{F^+} 和 x_{F^-} 分别表示对应于 A 的一列 F 及其负向量 $-F$ 的变量。为简化记号，如果 F 是 $[A|-A]$ 的一列，我们也简写为 x_F。此外，对于 A 的一列 F，我们令 $F^+ := F^-$ 和 $F^- = F^+$。

对于 A 的列的一个固定序 $F_1, \dots, F_s$，我们考虑由以下内容诱导的次数逆字典序：

$$z \prec x_{F_1^+} \prec x_{F_1^-} \prec \cdots \prec x_{F_s^+} \prec x_{F_s^-}. \tag{6}$$

若线性依赖 $\mathbf{0} \neq \mathbf{a} \in \ker_{\mathbb{Z}} A$，则称其为极小的，如果不存在$\mathbf{a}' \in \ker_{\mathbb{Z}} A$，使得$\mathbf{a}' \neq \mathbf{a}$，且 $\operatorname{sign}(\mathbf{a}_i') = \operatorname{sign}(\mathbf{a}_i)$，并且对所有 $1 \le i \le s$，$|\mathbf{a}_i'| \le |\mathbf{a}_i|$。这里，$\operatorname{sign}(\mathbf{a}_i) \in \{-, 0, +\}$ 表示 $\mathbf{a}_i$ 的符号，$\mathbf{a}_i'$ 的符号同理。

对于（广义）对称边多胞体，每个极小线性依赖中的非零项不是 **1** 就是 -1；但在我们更一般的

情形下，不一定如此。因此，与 [22, 命题 38]中的方法相比，我们需要做出若干调整。我们将以下多重集与向量 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$相关联：

$$M_{\mathbf{a}} = \{\underbrace{\operatorname{sign}(\mathbf{a}_\ell)F_\ell, \cdots, \operatorname{sign}(\mathbf{a}_\ell)F_\ell}_{|\mathbf{a}_\ell| \text{ times}} : \ell \in \operatorname{supp}(\mathbf{a})\},$$

其中，$\operatorname{supp}(\mathbf{a}) := \{1 \le i \le s : \mathbf{a}_i \neq 0\}$ 表示$\mathbf{a}$的支撑 。注意，$|M_{\mathbf{a}}| = \sum_{\ell=1}^{s} |\mathbf{a}_\ell|$。此外，根据构造，$[A| - A]$ 的列集上的多重集与 $\mathbb{Z}^s$ 中的向量一一对应；在此双射下，极小线性依赖$\mathbf{a}$ 对应于在包含意义下极小的多重集 $M_{\mathbf{a}}$ 。

给定 $[A| - A]$的列集上的一个多重集 $M_{\mathbf{a}}$，我们将 $-M := \{-F : F \in M_{\mathbf{a}}\}$ 记为由 $M_{\mathbf{a}}$ 翻转所有符号后得到的多重集，并将与 $M_{\mathbf{a}}$关联的单项式记为$\mathbf{m}^{M_{\mathbf{a}}}$，或简写为$\mathbf{m}_{\mathbf{a}}$，即$\mathbf{m}_{M_{\mathbf{a}}} = \mathbf{m}_{\mathbf{a}} = \prod_{F \in M_{\mathbf{a}}} x_F$。对于$\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$，我们进一步设 $\min(\mathbf{a}) = \min \operatorname{supp}(\mathbf{a})$。本节的主要结果如下：

定理 4.1。设 $A \in \mathbb{Z}^{m \times s}$ 是饱和的。那么以下二项式构成环面理想 $I_{\mathcal{P}_A}$ 关于由 (6)诱导的次数逆字典序单项式序下的 *Gröbner* 基。

(1) 对于每个极小线性依赖 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$，以及每个满足条件的 k 元素子多重集 $M \subseteq M_{\mathbf{a}}$，其中

(a) $+F_{\min(\mathbf{a})} \notin M$，如果 $\mathbf{a}_{\min(\mathbf{a})} > 0$，以及，

(b) $\underbrace{\{-F_{\min(\mathbf{a})}, \ldots, -F_{\min(\mathbf{a})}\}}_{|\mathbf{a}_{\min(\mathbf{a})}| \text{ 次}} \not\subseteq M$，如果$\mathbf{a}_{\min(\mathbf{a})} < 0$:

$$\prod_{F \in M} x_F - \prod_{F \in M_{\mathbf{a}} \setminus M} x_{\overline{F}}.$$

(2) 对于每个极小线性依赖 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$，满足 $|M_{\mathbf{a}}| = 2k+1$，以及每个含 $k+1$ 个元素的子多重集 $M \subseteq M_{\mathbf{a}}$:

$$\prod_{F \in M} x_F - z \prod_{F \in M_{\mathbf{a}} \setminus M} x_{\overline{F}}.$$

(3) 对于每个极小线性依赖 $\mathbf{a} \in \mathbb{Z}^s$，满足 $|M_{\mathbf{a}}| = 2k$，以及每个含 $k+1$ 个元素且至少两次包含最小元素 $+F_{\min(\mathbf{a})}$ 的子多重集 M：

$$\prod_{F \in M} x_F - z^2 \prod_{F \in M_{\mathbf{a}} \setminus M} x_{\overline{F}}.$$

(4) 对于任意 $F \in \{F_1, \ldots, F_s\}$:

$$x_{F^+} x_{F^-} - z^2.$$

在每种情况下，二项式的写法都使首项为正号。

下文中，属于定理所列情形之一的二项式将称为类型(1)(a)、(1)(b)、(2)、(3) 或(4)的二项式。

证明。我们只需证明，对于任意二项式 $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \in I_{\mathcal{P}_A}$ 中的一个 $\mathbf{m}_1$ 或$\mathbf{m}_2$ 可被上述某个二项式的首项单项式整除（例如参见 [39]）。此外，我们可以假设 $\mathbf{m}_1$ 和$\mathbf{m}_2$ 互素。令 $\mathbf{p},\mathbf{q} \in \mathbb{R}^{2s+1}$ 分别为 $\mathbf{m}_1$和$\mathbf{m}_2$, 的指数向量（坐标从 0 编号至 $2s$，顺序按（6）排列。

如果存在 $F \in \{F_1, \ldots, F_s\}$ 使得 $x_{F^+} x_{F^-} \mid \mathbf{m}_i$（对于 $i \in \{1, 2\}$），那么 $\mathbf{m}_i$ 可被 $x_{F^+} x_{F^-} - z^2$ 的首项整除，而该首项是 (4) 型二项式。因此，假设 $x_{F^+} x_{F^-}$ 既不整除 $\mathbf{m}_1$，也不整除任意列 F 中的 $\mathbf{m}_2$。令 $\mathbf{b}$、$\mathbf{c}$ 为将指数向量设为

$$\mathbf{b}_\ell = \mathbf{p}_{2\ell-1} - \mathbf{p}_{2\ell} \quad \text{and} \quad \mathbf{c}_\ell = \mathbf{q}_{2\ell-1} - \mathbf{q}_{2\ell} \quad \text{for} \quad 1 \le \ell \le s.$$

注意，由于对于 A 的任意列 F，$x_{F^+}x_{F^-}$ 都不整除 $\mathbf{m}_1$ 或 $\mathbf{m}_2$，我们有 $\mathbf{b}_\ell \in \{\mathbf{p}_{2\ell-1}, -\mathbf{p}_{2\ell}\}$，$\mathbf{c}_\ell$ 也同理。由于 $\mathbf{m}_1 - \mathbf{m}_2 \in I_{\mathcal{P}_A}$，可知 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ 是 A 的一个线性依赖。令 $\mathbf{a}$ 为 A 的一个极小线性依赖，其符号模式与 $\mathbf{b}-\mathbf{c}$ 相同，且绝对值逐分量小于或等于 $\mathbf{b} - \mathbf{c}$。我们可能有 $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$。如果 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 在同一位置有非零项，那么它们必定符号相反，因为根据假设，$\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 互素。这意味着

$$|\mathbf{a}_\ell| \le |(\mathbf{b}-\mathbf{c})_\ell| = |\mathbf{b}_\ell| + |\mathbf{c}_\ell| \quad \text{for} \quad 1 \le \ell \le s.$$

此外，限制在 $\mathbf{b}$ 的非零坐标上时，$\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{b}$ 的符号模式一致。类似地，限制在 $\mathbf{c}$ 的非零坐标上时，向量 $\mathbf{a}$ 和 $\mathbf{c}$ 的符号模式相反。选取向量 $\mathbf{b}'$、$\mathbf{c}' \in \mathbb{N}^s$，使得 $|\mathbf{a}_\ell| = \mathbf{b}'_\ell + \mathbf{c}'_\ell$、$\mathbf{b}'_\ell \le |\mathbf{b}_\ell|$ 且 $\mathbf{c}'_\ell \le |\mathbf{c}_\ell|$ 对于 $1 \le \ell \le s$ 成立。此外，令 $\mathbf{b}'$ 为一个向量，其分量为 $\mathbf{b}'_\ell = \operatorname{sign}(\mathbf{a}_\ell) \cdot \mathbf{b}'_\ell$，其中 $1 \le \ell \le s$，且 $\mathbf{c}' = \mathbf{b}' - \mathbf{a}$。我们考虑多重集 $M_\mathbf{a}$ 及其子多重集 $M_{\mathbf{b}'}$。根据构造，单项式 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'}$ 和 $\mathbf{m}_{\mathbf{c}'}$ 分别整除 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$，。不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{m}_{\mathbf{c}'} \prec_{\text{rev}} \mathbf{m}_{\mathbf{b}'}$；否则，考虑线性依赖 $-\mathbf{a}$，这将交换 $\mathbf{m}_1$ 与 $\mathbf{m}_2$ 的角色，并相应地交换 $\mathbf{b}$ 和 $\mathbf{c}$ 的角色。我们分几种情况讨论。

情形 1：$|M_\mathbf{a}| = 2k+1$。
若 $|M_{\mathbf{b}'}| \ge k+1$，则 $\mathbf{m}_{M'}$ 是 $\mathbf{m}_{M'} - z\mathbf{m}_{M_\mathbf{a}\setminus M'}$ 对任意 $M' \subseteq M_{\mathbf{b}'}$ 满足$|M'| = k+1$ 的$\mathbf{m}_{M'}$ 的首项$\mathbf{m}^{M_{\mathbf{b}'}}$整除$\mathbf{m}_1$。因此，$\mathbf{m}_1$ 可被一个类型为 (2) 的二项式的首项整除。

情形 2：$|M_\mathbf{a}| = 2k$。我们还需要进一步区分子情形。
情形 2(a)：$|M_{\mathbf{b}'}| = k$ 且 $\mathbf{a}_{\min(\mathbf{a})} > 0$。我们考虑二项式 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'} - \mathbf{m}_{\mathbf{c}'}$。若 $\mathbf{b}'_{\min(\mathbf{a})} = 0$，则其首项为 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'}$，由于 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'}$ 整除 $\mathbf{m}_1$，，结论即得。注意，该二项式属于类型 (1)(a)。

情形 2(b)：$|M_{\mathbf{b}'}| = k$ 且 $\mathbf{a}_{\min(\mathbf{a})} < 0$。在此情形下，根据假设，二项式$\mathbf{m}_{\mathbf{b}'} - \mathbf{m}_{\mathbf{c}'}$ 的首项是 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'}$，因此我们知道

$$\underbrace{\{-F_{\min(-\mathbf{a})}, \dots, -F_{\min(-\mathbf{a})}\}}_{|\mathbf{a}_{\min(-\mathbf{a})}| \text{ times}} \not\subseteq M_{\mathbf{b}'}.$$

因此，$\mathbf{m}_{\mathbf{b}'} - \mathbf{m}_{\mathbf{c}'}$属于情形 (1)(b)，并且它整除 $\mathbf{m}_1$。
情形 3：$|M_{\mathbf{b}'}| = k + j$，其中 $j > 0$。考虑二项式 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'} - z^{2j}\mathbf{m}_{\mathbf{b}'-\mathbf{a}}$。于是首项为 $\mathbf{m}_{\mathbf{b}'}$，因为它不能被 z 整除。我们将再次考虑几个子情形：
情形 3(a)：$\mathbf{b}'_{\min(\mathbf{a})} \ge 2$。在这种情况下，考虑通过删除相对于 $M' \subseteq M_{\mathbf{b}'}$ 列所选定的序中最大的 $j-1$ 个元素而得到的 A-元素子多重集。由于 M' 至少包含两次 $+F_{\min(\mathbf{a})}$，$\mathbf{m}_{M'}$ 是类型为 $\mathbf{m}_{M'} - z^2\mathbf{m}_{M_\mathbf{a}\setminus M'}$ 的二项式的首项(3)，并且它整除 $\mathbf{m}_1$。

情形 3(b)：$\mathbf{b}'_{\min(\mathbf{a})} = 1$。在这种情况下，考虑通过删除相对于 $M' \subset M_{\mathbf{b}'}$ 列所选定的序中最小的 j 个元素而得到的 A-元素子多重集。由于 M' 不包含 $\pm F_{\min(\mathbf{a})}$，单项式 $\mathbf{m}_{M'}$ 是类型为 $\mathbf{m}_{M'} - \mathbf{m}_{M_\mathbf{a}\setminus M'}$ 的二项式的首项(1)(a)，并且它整除 $\mathbf{m}_1$。

情形 3(c)：$\mathbf{b}'_{\min(\mathbf{a})} \le 0$。在此情形下，考虑通过从 A的列的所选序中删除最小的 j 个元素而得到的含有 k 个元素的子多重集 $M' \subset M_{\mathbf{b}'}$。

$$\partial_2^\top = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

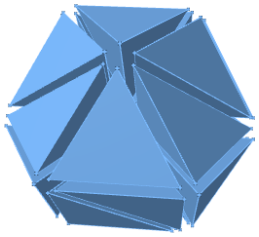

图5. $\mathcal{P}^\Delta$的一个投影的三角剖分，其中 Δ 是四面体的边界，以及相应的余边界映射。

由于 $-F_{\min(\mathbf{a})}$ 至少被删除过一次，单项式 $\mathbf{m}_{M'}$ 是二项式$\mathbf{m}_{M'} - \mathbf{m}_{M_\mathbf{a}\setminus M'}$ 的首项，类型为(1)(b)，并且它整除 $\mathbf{m}_1$。

□

注 4.2 (对称（余）同调多胞体的三角剖分与拓扑)。 对于（余）同调多胞体，极小线性依赖对应于（余）同调中的（余）圈。这给出了$\mathcal{P}_\Delta$ 和$\mathcal{P}^\Delta$的三角剖分的拓扑描述。

注4.3 (全幺模矩阵与非全幺模矩阵的区别)。 我们想强调的是，去掉底层矩阵 A的全幺模条件，只会迫使 Gr¨obner 基 $I_{\mathcal{P}_A}$ 中出现一种全新的二项式类型，即定理(3) 中的情形 4.1。在全幺模情形下不会出现这种情形；该情形已在 [8], 中描述，因为任意全幺模矩阵的核都可以由一组$\{-1, 0, 1\}$-向量生成（例如参见 [35, 引理3。18]）。

特别地，定理 4.1 表明，如果每个极小线性依赖只使用$\{-1,\ 0,\ 1\}$-项，那么 $I_{\mathcal{P}_A}$ 具有一个无平方因子的 Gr¨öbner 基，因此，$\mathcal{P}_A$ admits a regular 幺模三角剖分。

我们想指出，如果矩阵 A 具有一个极小线性依赖 a ker() with aand afor some . Then Pdoes not have any regular unimodular triangulation.

定理 4.4。 令 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 为一个秩为 $s-1$的饱和矩阵。假设（除符号外）A 具有唯一的极小线性依赖 $\mathbf{a} \in \ker_{\mathbb{Z}}(A)$ *with* $\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a}_j = 2k$ *and* $|\mathbf{a}_j| > 1$ *for some* $1 \le j \le s$. *Then* P_A *does not have any regular* 幺模三角剖分。

证明。 根据定理 2.15，只需证明$\mathcal{P}_A$ 的环面理想不具有平方自由的 Gr¨obner 基。由于 $\mathcal{P}_{A'} = \mathcal{P}_A$ 对于任意矩阵 A'，其列的集合与 A除符号外相同，不失一般性，我们可以假设 $\mathbf{a}_i \ge 0$ 对所有$1 \le i \le n$均成立。

反设存在一个项序 $\prec$，使得其初始理想 $\text{in}_\prec(I_{\mathcal{P}_A})$ 无平方因子。

令 $\mathcal{G}$ 为定理¨4.1 中的 Gröbner 基，并令 $J_\mathcal{G}$ 为 G 中二项式里出现的所有单项式。由于 $\mathcal{G}$ 生成$I_{\mathcal{P}_A}$，因此有 $\text{in}_\prec(I_{\mathcal{P}_A}) \subseteq \langle J_\mathcal{G}\rangle$。

此外，由于 $\mathrm{in}_\prec(I_{\mathcal{P}_A})$ 是无平方因子的，我们甚至有 $\mathrm{in}_\prec(I_{\mathcal{P}_A}) \subseteq \langle J_{\mathcal{G}} \setminus \{z^2\}\rangle$。我们将通过构造一个 $I_{\mathcal{P}_A}$ 中的二项式来证明该结论：其单项式不是无平方因子的，并且它必须属于关于 $\prec$ 的 $I_{\mathcal{P}_A}$ 的 Gröbner 基。

注意，由于 $\mathbf{a}_j \geq 2$，存在一个子多重集 M of $M_{\mathbf{a}}$，其中包含 $|M| = k$ 至少两次的F_j。临界二项式是 $I_{\mathcal{P}_A}$ 中的以下二项式

$$\prod_{F\in M} x_{F^+} - z^2 \prod_{F\in M_{\mathbf{a}}\setminus M} x_{F^-} = x_{F_j^+}^2 \mathbf{m}_1 - z^2\mathbf{m}_2 \tag{7}$$

（其类型为（3））。由于它的两个单项式都不是无平方因子的，其首项也不是无平方因子的。此外，由于 $\mathbf{m}_1$ 和 $\mathbf{m}_2$ 分别只被形如 x_{F^+} 和x_{F^-} 的变量整除，因此它们都不被 $x_{F^+}x_{F^-}$（对任意 F）整除。由于（除去符号外）$\mathbf{a}$是唯一的线性依赖关系，因此只需检查那些作为由 k 产生的、次数为$\mathbf{a}$的二项式一部分的单项式的整除性。我们区分两种情形。

情形 1：在$\prec(x_{F_j^+}^2 \mathbf{m}_1 - z^2\mathbf{m}_2) = z^2\mathbf{m}_2$ 中。$J_{\mathcal{G}} \setminus \{z^2\}\rangle$ 中任何次数至多为 且整除 m_2 的单项式，其次数必为 k。然而，由于$J_{\mathcal{G}} \setminus \{z^2\}\rangle$ 中没有次数为且被整除的单项式，因此这些单项式中没有一个能整除 m_2。

情形 2：在$\prec(x_{F_j^+}^2 \mathbf{m}_1 - z^2\mathbf{m}_2) = x_{F_j^+}^2 \mathbf{m}_1$中。与情形 1 一样，$J_{\mathcal{G}} \setminus \{z^2\}$中整除$x_{F_j^+}\mathbf{m}_1$的单项式必须是 k 次的。唯一符合条件的 k 次无平方因子单项式是 $x_{F_j^+}\mathbf{m}_1$，它出现在 $I_{\mathcal{P}_A}$ 中唯一的二项式 $x_{F_j^+}\mathbf{m}^1 - x_{F_j^-}\mathbf{m}_2$里。若在$\prec(x_{F_j^+}\mathbf{m}^1 - x_{F_j^-}\mathbf{m}_2)$ 中有 $= x_{F_j^-}\mathbf{m}_2,$，则可知 $x_{F_j^+}^2\mathbf{m}_1 - z^2\mathbf{m}_2$ 必须属于 $\mathrm{in}_\prec(I_{\mathcal{P}_A})$ 的 Gr¨obner 基。若在$\prec(x_{F_j^+}\mathbf{m}^1 - x_{F_j^-}\mathbf{m}_2)$ 中有 $= x_{F_j^+}\mathbf{m}_1,$，则对 $x_{F_j^+}\mathbf{m}^1 - x_{F_j^-}\mathbf{m}_2$ 和 $x_{F_j^-}^2\mathbf{m}_2 - z^2\mathbf{m}_1$，应用相同论证，可知后一个二项式必须属于 $\mathrm{in}_\prec(I_{\mathcal{P}_A})$ 的 Gr¨obner 基。□

例 4.5 (没有正则幺模三角剖分的对称同调多胞体)。考虑例 *2.3* 中的二维单纯复形 B 。我们知道 $H_2(\mathcal{B};\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 的生成元为

$$\mathbf{a} = 2[123] + [125] + [126] + [134] + [136] + [145] + [234] + [235] + [246] + [356] + [456].$$

注意，$\mathbf{a}$ 在对应于 $[123],$ 的坐标上系数为 2，且其各项之和为 12。特别地，复形 ∂_2 B 的顶边界映射满足定理 4.4中的所有假设，因此我们得出结论：$\mathrm{P}_{\mathcal{B}}$ 不具有正则幺模三角剖分。

5. 交叉多胞体与整数分解性质

本节的目标有两个方面。第一部分中，我们对所有能够生成交叉多胞体的矩阵进行分类（引理 5.1）。第二部分中，我们探讨一般的中心对称多胞体 $\mathcal{P}_A$何时具有张成性或整数分解性质。对于第一种性质，我们用 A 的史密斯标准形给出完整的答案；对于第二种性质，我们给出一个必要判据（命题 5.3）。对于这两个问题，我们还考虑对称（余）同调多胞体这一特殊情形。

5.1. 交叉多胞体。

我们首先对产生交叉多胞体的矩阵进行分类。

引理 5.1. 设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 满足 P_A 有 $2s$ 个顶点。那么，当且仅当 A 的秩为 s时，P_A 是一个 s 维交叉多胞体。

证明。 首先假设 A 的秩为 s。我们对 s进行归纳法。若 $s = 1$，则 $\mathcal{P}_A$ 是一条线段，因此是一个一维交叉多胞体。

现在假设结论对 $s < t$ 成立。设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times t}$ 是一个秩为 t 的矩阵。取 A 的一列 F，并令 B 为从 A 中删除 F 后得到的矩阵。由于 B 的秩为 $t-1$，由归纳法可知，$\mathcal{P}_B$ 是一个 $(t-1)$ 维交叉多胞体。由于将 F 加到 B 中会使秩增加 1，因此由 F 和 $-F$ 给出的 $\mathcal{P}_A$ 的顶点不在 $\mathcal{P}_B$ 的仿射张成空间中。由于 $\mathcal{P}_B$ 包含原点，它们必定位于 $\mathcal{P}_B$ 的仿射包两侧。因此，$\mathcal{P}_A$ 是以 F 和 $-F$ 为顶点、以 $\mathcal{P}_B$ 为底的双锥。因此，$\mathcal{P}_A$ 是一个 s 维交叉多胞体。

反向结论显然成立，因为一个 s 维交叉多胞体有 $2s$ 个顶点。 □

在此上下文中形下，引理 5.1可改述如下 s.

推论 5.2. 设 Δ 是一个具有 $f_d(\Delta) = s$ 的 d 维单纯复形。则 P_Δ 是 s 维交叉多胞体，当且仅当 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。

该推论特别意味着，所有来自具有平凡顶维同调且面数固定的某一维单纯复形的对称同调多胞体都具有相同的组合类型，即交叉多胞体的组合类型，而这已是所能达到的最简单情形。

证明。 该结论由引理 5.1 得出，只需注意到秩 $\partial_d = s$ 当且仅当$H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。 □

人们可能会问，在何种条件下对称上同调多胞体与交叉多胞体组合等价。由于单纯复形的顶边界映射从不是单射，因而总具有非平凡的线性依赖，所以这种情况永远不会发生。与一个交叉多胞体组合等价。

5.2. **整数分解性质**。 我们首先完整刻画中心对称多胞体给定为 $\mathcal{P}_A$时何时是张成的。由此也得到 $\mathcal{P}_A$ 具有整数分解性质的一个必要条件。

命题 5.3。 设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 是一个秩为 r 、初等因子为$\alpha_1 \le \cdots \le \alpha_r$的饱和矩阵。那么，当且仅当 $\alpha_r = 1$时，P_A是张成的。特别地，如果 $\alpha_r > 1$，则 P_A不具有整数分解性质。

证明。 设 $D = S^{-1}AT^{-1}$ 是 A的史密斯标准形，其中 $S \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ 和 $T \in \mathbb{Z}^{s\times s}$ 是弱幺模矩阵。根据构造， A 和 D 的列张成同构的格，且该同构可扩展为 $\mathsf{aff}([A|-A])$ 与 $\mathsf{aff}([D|-D])$ 之间的同构。因此，$\mathcal{P}_A$是张成的，当且仅当 $\mathsf{aff}([D|-D])$ 中的每个格点都可以表示为 D各列的整数线性组合。由于 r^{th}单位向量属于 $\mathsf{aff}([D|-D])$，但不属于由 D 张成的格 $\mathsf{im}_{\mathbb{Z}}\, D$ （因为 $\alpha_r > 1$），因此 $\mathcal{P}_A$ 不是张成的，因而不具有整数分解性质。我们还注意到，同样的论证表明，当$\alpha_r = 1$时，$\mathcal{P}_A$ 是张成的。□

在对称（余）同调多胞体的背景下，命题5.3 可以作如下拓扑解释。

推论5.4. 设 Δ 是一个 d维单纯复形，且 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 含有挠元。那么 P_Δ 和 P^Δ 不具有整数分解性质。

证明. 根据定理2.6， ∂ (因而， $\partial^\top$) 有一个初等因子 $\alpha_r > 1$ 当且仅当$H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 含有挠元。由此可直接得出结论，依据命题5.3。□

换言之，上一条推论指出，对于一个 d 维复形 Δ，若 $\mathcal{P}_\Delta$或$\mathcal{P}^\Delta$ 具有整数分解性质，那么 Δ 的 $(d-1)^{\text{st}}$ 同调群必定无挠。下一个例子表明，反向陈述一般并不成立。

例 5.5 (一个非整数分解对称同调多胞体)。 设 $\mathcal{B}$ 为例 2.3中的二维单纯复形。由于 $H_1(\mathcal{B};\mathbb{Z}) = 0$，我们不能应用推论 5.4。使用 Sage [40]，我们计算得 h^*-多项式$\mathcal{P}_\mathcal{B}$ 为

$$t^{10} + 12t^9 + 67t^8 + 232t^7 + 562t^6 + 1276t^5 + 562t^4 + 232t^3 + 67t^2 + 12t + 1,$$

而 $K[\mathcal{P}_\mathcal{B}]$的希尔伯特级数的分子多项式为

$$t^{10} + 12t^9 + 67t^8 + 232t^7 + 814t^6 + 1024t^5 + 562t^4 + 232t^3 + 67t^2 + 12t + 1.$$

由于这两个多项式不同，$\mathcal{P}_\mathcal{B}$ 不具有整数分解性质（见第3节之前的最后一段）。一个破坏整数分解性质的 5th 倍膨胀后的 $\mathcal{P}_\mathcal{B}$ 中的格点示例如下：

$$(-1,-1,0,1,1,-1,0,0,0,-1,-1,0,0,-1,0) \in \mathbb{R}^{15},$$

这对应于

$$-[12] - [13] + [15] + [16] - [23] - [34] - [35] - [46] \in C_1(\mathcal{B})$$

此外，计算表明恰有 $252 = 1276 - 1024$ 个这样的点。

现在给出一个非整数分解性质的自反对称同调多胞体示例，它与交叉多胞体组合等价，并且导致整数分解性质失效的点可以从拓扑角度加以理解。

例 5.6 (非整数分解性质对称同调多胞体与单纯复形的挠元)。设 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ 为例 2.1中实射影平面的三角剖分。于是，由于$H_1(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$ 且 $H_2(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z}) = 0$，推论 5.2 和 5.4 直接推出 $\mathcal{P}^\Delta{}_{\mathbb{RP}^2}$ 是一个非整数分解性质的交叉多胞体。注意到这一点也可看出：

$$\frac{1}{10}F_1 + \cdots + \frac{1}{10}F_{10} = \frac{1}{5}\mathbf{1}$$

其中 F_i 遍历 ∂_2 的各列，而$\mathbf{1}$ 是 $\mathbb{R}^{15}$中的全 $\mathbf{1}$ 向量。特别地，我们有 $\mathbf{1} \in 5\mathcal{P}^\Delta{}_{\mathbb{RP}^2}$，但不可能将向量$\mathbf{1}$ 分解为$\mathcal{P}^\Delta{}_{\mathbb{RP}^2}$中的五个格点之和。

需要指出的是，破坏 $\mathcal{P}^\Delta{}_{\mathbb{RP}^2}$ 的整数分解性质的格点，对应于 $H_1(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z})$ 中的挠生成元，该挠生成元见于（2），其中每个面都以系数 $\mathbf{1}$ 出现。

注 5.7 (正则幺模三角剖分与平方自由初始理想)。 例5.6表明$\mathcal{P}^\Delta{}_{\mathbb{RP}^2}$ 不具有整数分解性质，因此相对于格 $\mathbb{Z}^9$ 不可能有正则幺模三角剖分（例如，参见 [17, 定理 2。1]）。另一方面，由于$H_2(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\ \mathbb{Z}) = 0$ 根据定理 4.1 和注 4.2有一个平方自由的 Gröbner 基。由定理 2.15，$\mathcal{P}^\Delta{}_{\mathbb{RP}^2}$ 因此相对于环境格 $\mathcal{P}_{\Delta_{\mathbb{RP}^2}} \cap \mathbb{Z}^9$有正则幺模三角剖分。此例很好地展示了讨论幺模三角剖分时，所考虑的格对结论有着微妙的影响。

6. 自反性

本节关注的问题是：给定一个中心对称多胞体 $\mathcal{P}_A$，它何时是自反的。具体而言，我们希望找到一个仅用矩阵A表述的答案。我们不打算给出完全一般的答案（相关结果见 [32, 引理 2。11] ），而主要将讨论范围限制在多胞体为交叉多胞体的情形。第 4 节中，饱和矩阵是合适的表示；而要验证自反性，知道多胞体的顶点就足够了。与引理 5.1类似，我们因此要求 $\mathcal{P}_A$ 的顶点数等于$[A| - A]$ 的列数（参见引理 3.3），并将这样的矩阵称为约化的。若 A 是约化的，那么特别地， A 任意两列都不线性相关。

下文中，我们将先考虑一般的中心对称格多胞体，然后将我们的结果应用于对称同调多胞体。

6.1. **一般中心对称格多胞体的自反性**。 证明多胞体自反的一种通用方法，是证明由该多胞体顶点构成的矩阵是全幺模的（见定理 2.12）。这一方法已成功应用于对称边多胞体 [21] 以及推广到正则拟阵的情形 [8]。由于我们不要求矩阵是全幺模的，因此无法采用这一方法。

令$\{F_1, \dots, F_n\}$ 表示 A的列集合。根据多胞体与其极多胞体的面格之间众所周知的对偶关系（例如见 [43]），极多胞体的顶点$\mathcal{P}_A^\vee$与$\mathcal{P}_A$ 的面相对应，具体如下：给定$\mathcal{P}_A$的一个面$\mathcal{F}$，令 $A_\mathcal{F}$ 表示$[A| - A]$ 的子矩阵，其列由 $[A| - A]$ 中与$\mathcal{F}$内顶点相对应的列组成。此外，令$\overline{A_\mathcal{F}}$表示 $[A_\mathcal{F}| - A_\mathcal{F}]$的补子矩阵，即由 $[A| - A]$ 中不属于 $[A_\mathcal{F}| - A_\mathcal{F}]$的列组成的矩阵。与$\mathcal{F}$ 相对应的$\mathcal{P}_A^\vee$ 的顶点，是线性不等式组$\mathbf{v}_\mathcal{F} \in$aff($\mathcal{P}_A$)的唯一解

$$A_\mathcal{F}^\top \mathbf{x} = \mathbf{1} \quad \text{such that } \overline{\mathbf{A}}_\mathcal{F}^\top \mathbf{x} < \mathbf{1}.$$

根据定义，多胞体 $\mathcal{P}_A$ 是自反的，当且仅当对于每个面$\mathcal{F}$ of$\mathcal{P}_A$，$\mathbf{v}_\mathcal{F}$ 都是整数的。

在这种情况下，必有 $-A_\mathcal{F}^\top \mathbf{v}_\mathcal{F} = -1$ 和 $A^\top{}_\mathcal{F} \mathbf{v}_\mathcal{F} = 0$，后者由 A、$\mathbf{v}_\mathcal{F}$ 为整数且 $[A| - A]$ 包含每一列的负向量可知。综上所述，多胞体 $\mathcal{P}_A$ 是自反的，当且仅当对于多胞体 $\mathcal{P}_A$ 的每个面$\mathcal{F}$，

$$A^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}^\mathcal{F}, \qquad \text{where} \qquad \mathbf{b}_i^\mathcal{F} = \begin{cases} 1, & \text{if } F_i^+ \in \mathcal{F} \\ -1, & \text{if } F_i^- \in \mathcal{F} \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{8}$$

存在一个整数解，且该解属于$\mathcal{P}_A$的仿射包。

然而，使用这一判据需要知道多胞体$\mathcal{P}_A$的所有面（及其顶点），而定理3.6 中的描述不够精确。因此，要完整刻画多胞体$\mathcal{P}_A$ 的自反性似乎极具挑战，难以实现。接下来我们将重点讨论面结构较为清楚的情形，即$A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 满秩 s，这对应于多胞体$\mathcal{P}_A$ 是一个交叉多胞体。

为了验证（8）是否存在整数解，我们将使用以下关于整数方程解的刻画。有关此类判据的更多详细信息，请参见 [37]。

定理 6.1。 [37, 定理 4.1，第 51] 页 设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 为一个整矩阵，且$\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^s$.

(1) [37, 推论 *4.1a*] 方程组 $A^\top x = b$ 有整数解 x，当且仅当对所有使得 Ay 为整数的 $y \in \mathbb{Q}^s$，$y^\top b$ 为整数。*(2)* [37, 第 51] 页 若 A 的秩为 s，则 $A^\top x = b$ 有整数解 x，当且仅当 A 的 s阶子式的最大公约数整除 $[A^\top|b]$的所有 s阶子式。

注意，定理 6.1 (2) 可以用 A的初等因子来重新表述。这一视角是 [32, 引理 2.11], 的一种实用变式，其基本内容是：若一个m秩为 $m \times s$的矩阵 A 的所有非零 m 阶子式 ± 1 均等于 $\mathcal{P}_A$，则多胞体是自反的。正如我们很快将看到的，初等因子的表述方式使我们可以假设子式的最大公约数等于 1。

我们将利用定理 6.1 来研究$\mathcal{P}_A$ 的自反性，其中 A 满列秩。我们先讨论初等因子全都等于 1 的情形。

引理 6.2. 设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 是一个秩为 s、初等因子为 $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_s = 1$的矩阵。则 P_A 是自反的。

证明。我们仅考虑 P_A 是满维的情形。否则，由于幺模变换保持自反性和初等因子不变，我们可以对 P_A 施行幺模变换 ψ，使得 $\psi(\mathrm{P}_A) = \mathrm{P}_B$，其中 P_B 是一个满维多胞体。由引理 5.1，P_A 是一个 s 维交叉多胞体。由于初等因子全都等于 1，因此 A 的 s 阶子式的最大公约数等于 1。（注意，对于任意 $1 \le i \le s$，i 阶子式的最大公约数也成立。）显然，1 整除任何数，所以 1 整除 $[A^\top|\mathbf{b}]$ 的 s 阶子式。由定理 6.1 (2)，我们得出，对于每个 $\mathbf{b} \in \mathbb{Z}^s$，$A^\top\mathbf{x} = \mathbf{b}$ 都有一个整数解。特别地，取 $\mathbf{b}$ 为向量 $\mathbf{b}^{\mathcal{F}}$（对于 P_A 的一个面 F），该向量在式 (8) 中定义，则对于 P_A 的每个面 F，式 (8) 都有整数解。□

现在转向一般情形：矩阵 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 的初等因子为$1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_t < \alpha_{t+1} < \cdots < \alpha_r$，其中 α_i 整除 α_{i+1}。此外，设 $S \in \mathbb{Z}^{m\times m}$ 和 $T \in \mathbb{Z}^{s\times s}$ 弱幺模，且 A 的史密斯标准形为 $D = S^{-1}AT^{-1}$。根据初等因子的假设，我们有典范同构

$$(\mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, D \cap \mathbb{Z}^m)/\,\mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, D \cong \underbrace{\{\mathbf{0}\}}_{\in\mathbb{Z}^t} \times \mathbb{Z}_{\alpha_{t+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\alpha_r} \times \underbrace{\{\mathbf{0}\}}_{\in\mathbb{Z}^{m-r}} \cong \mathbb{Z}_{\alpha_{t+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\alpha_r}. \tag{9}$$

此外，由于 D 是 A 的史密斯标准形，$\mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, D \cap \mathbb{Z}^m$ 与 $\mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, A \cap \mathbb{Z}^m$ 之间存在一个同构，由下式给出

$$\mathbf{x} = D \cdot \mathbf{v} \mapsto S \cdot D \cdot \mathbf{v} = A(T^{-1}\mathbf{v}) = A(T^{-1}\tilde{\mathbf{x}}). \tag{10}$$

其中 $\mathbf{v} \in \mathbb{Z}^s$，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_r, 0, \ldots, 0)$，且 $\tilde{}\mathbf{x} = (x_1/\alpha_1, \ldots, x_{r-1}/\alpha_{r-1}, x_r/\alpha_r, 0 \ldots, 0$。由于$T$ 弱幺模，我们有 $T^{-1}\tilde{}\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s$ 当且仅当 $\tilde{}\mathbf{x} \in \mathbb{Z}^s$，而这又当且仅当 $\mathbf{x} \in \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, D$。因此，上述同构限制为从 $\mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, D$ 到 $\mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A$ 的同构。结合 (9) 和 (10)，我们得到一个同构

$$\Phi_A : \mathbb{Z}_{\alpha_{t+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\alpha_r} \to (\mathrm{im}_{\mathbb{R}}\, A \cap \mathbb{Z}^m)/\,\mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A, \tag{11}$$

其中 $\Phi_A(\ell_{t+1}、\ldots\ldots、\ell_r) = S\cdot(\ell_{t+1}\cdot\mathbf{e}_{t+1} + \cdots + \ell_r\cdot\mathbf{e}_r) + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A$ 对于 $0 \le \ell_j \le \alpha_j - 1$ 对于$t+1 \le j \le r$。令 $\mathbf{w}_{A,j} := S\mathbf{e}_{t+j} \in \mathbb{Z}^m$ 对于 $1 \le j \le r-t$。注意，对于 $1 \le j \le r-t$

$$\Phi_A(\mathbf{e}_j) = \mathbf{w}_{A,j} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A = S\mathbf{e}_{t+j} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A = SD\frac{1}{\alpha_{t+j}}\mathbf{e}_{t+j} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A = A(T^{-1}\frac{1}{\alpha_{t+j}}\mathbf{e}_{t+j}) + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A. \tag{12}$$

注意，在（12）中，我们使用 $\mathbf{e}^j$ 和 $\mathbf{e}^{t+j}$ 表示不同环境空间中的标准单位向量。我们令 $\mathbf{v}_{A,j} = T^{-1}\,{}^{1}_{\alpha_{t+j}}\,\mathbf{e}^{t+j}$ 对于 $1 \le j \le r-t$。

下一个陈述指出，若 A 满列秩，则 $\mathcal{P}_A$ 的自反性仅取决于向量 $\mathbf{v}_{A,j}$ 的各分量的带符号和。

定理 6.3. 设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 是一个初等因子为 $1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_t < \alpha_{t+1} < \cdots < \alpha_s$ 的矩阵。那么，对于所有 $\mathbf{b} \in \{-1, 1\}^s$ 以及所有 $1 \le j \le s-t$，P_A 是自反的，当且仅当 $\mathbf{v}_{A,j}^\top \mathbf{b}$ 是整数。

证明。由引理 5.1 可知，$\mathcal{P}_A$ 在组合上等价于一个交叉多胞体。结合这一事实与（8），可得 $\mathcal{P}_A$ 是自反的，当且仅当 $A^\top \mathbf{x} = \mathbf{b}$ 对所有 $\mathbf{b} \in \{-1,1\}^s$ 都有整数解。根据定理 6.1 (1)，这等价于对每个满足以下条件的 $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^s$ $A\mathbf{y}$ 是整数向量，$^\top\mathbf{b}$ 为整数。

现在假设 $\mathcal{P}_A$ 是自反的。由于 $\mathbf{w}_{A,j} \in \mathbb{Z}^m$ 以及 $A\mathbf{v}_{A,j} - \mathbf{w}_{A,j} \in \operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A \subseteq \mathbb{Z}^m$ 根据（12），我们得出 $A\mathbf{v}_{A,j} \in \mathbb{Z}^m$。由定义，$\mathbf{v}_{A,j} \in \mathbb{Q}^s$，上一段意味着对于所有 $\mathbf{b} \in \{-1,1\}^s$，$\mathbf{v}_{A,j}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$。

反过来，假设对于所有 $\mathbf{b} \in \{-1, 1, \}^s$ 以及 $1 \le j \le s-t$，$\mathbf{v}_{A,j}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$。设 $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^s$ 满足 $A\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^m$。若 $\mathbf{y} \in \mathbb{Z}^s$，则显然，对于 $\mathbf{b} \in \{-1, 1\}^s$，$\mathbf{y}^\top\mathbf{b}$。因此我们假设 $\mathbf{y} \in \mathbb{Q}^s \setminus \mathbb{Z}^s$。由于 A 的秩为 s，乘以 A 是单射，因此可得 $A\mathbf{y} \in (\operatorname{im}_{\mathbb{R}} A \cap \mathbb{Z}^m) \setminus \operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A$。利用（11），存在 $(\ell_{t+1}, \ldots, \ell_s) \in \mathbb{Z}_{\alpha_{t+1}} \times \cdots \times \mathbb{Z}_{\alpha_s}$，使得

$$S \cdot (\ell_{t+1} \cdot \mathbf{e}_{t+1} + \cdots + \ell_s \cdot \mathbf{e}_s) - A\mathbf{y} \in \operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A.$$

因此，利用（12），存在 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^s$ 使得

$$A\mathbf{z} = S \cdot (\ell_{t+1} \cdot \mathbf{e}_{t+1} + \cdots + \ell_s \cdot \mathbf{e}_s) - A\mathbf{y} = \sum_{j=1}^{s-t} \ell_{t+j} \cdot A \cdot \mathbf{v}_{A,j} - A\mathbf{y} = A\left(\sum_{j=1}^{s-t} \ell_{t+j}\mathbf{v}_{A,j} - \mathbf{y}\right).$$

再次利用乘以 A 是单射这一点，我们得出 $\mathbf{z} = \sum_{j=1}^{s-t} \ell_{t+j}\mathbf{v}_{A,\,j} - \mathbf{y}$。由于 $\mathbf{z} \in \mathbb{Z}^s$ 且 $\mathbf{v}_{A,\,j}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ 对所有 $\mathbf{b} \in \{-1,\ 1\}^s$ 以及所有 $1 \le j \le s-t$ 都由假设成立，因此可得

$$\mathbf{y}^\top\mathbf{b} = \sum_{j=1}^{s-t} \ell_{t+j}\mathbf{v}_{A,j}^\top\mathbf{b} - \mathbf{z}^\top\mathbf{b} \in \mathbb{Z},$$

由此证明完毕。 □

注 6.4. 我们想强调的是，定理 6.3 的证明在将 $\mathbf{w}_{A,j}$ $(1 \le j \le s-t)$ 替换为任意满足以下条件的 $\mathbf{w}_j \in (\operatorname{im}_{\mathbb{R}} A \cap \mathbb{Z}^m)$ $(1 \le j \le s-t)$ 时仍然成立：$\mathbf{w}_1 + \operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A, \ldots, \mathbf{w}_{s-t} + \operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A$ 生成 $(\operatorname{im}_{\mathbb{R}} A \cap \mathbb{Z}^m)/\operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A$。特别地，在定理 6.3 的陈述中，若 $1 \le \ell_j \le \alpha_{t+j} - 1$ 不整除 α_{t+j}，甚至可以取 $\operatorname{im}_{\mathbb{Z}} A + {}^{\ell}_{\alpha_{t+j}}\, T^{-1}\mathbf{e}_S$ 中的任意代表元，用 $\ell_j\mathbf{v}_{A,j}$（而非 $\mathbf{v}_{A,j}$）。这一视角在将定理 6.3 转换为更具拓扑性的语言时会有所帮助。

定理 6.3 给出了判断 $\mathcal{P}_A$ 是否自反的判据。仔细考察其证明可知，初等因子的取值可以解释为衡量 P_A 距离自反有多远的一种方式。更准确地说，我们有如下陈述：

推论 6.5. 设 $A \in \mathbb{Z}^{m\times s}$ 是一个初等因子为 $1 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_t < \alpha_{t+1} < \cdots < \alpha_s$ 的矩阵。那么 $\alpha_s P_A^\vee$ 是一个格多胞体。

证明. 对于 $\alpha_s = 1$，该陈述可直接由引理 6.2得出。

假设 $\alpha_s > 1$。按照定理 6.3 证明中的相同推理，我们需要证明，对于每个 $\mathbf{b} \in \{-1, 1\}^s$，$A^\top \mathbf{x} = \alpha_s \cdot \mathbf{b}$ 都有整数解。由于 $A = SDT$，这等价于说，对于所有 $\mathbf{b} \in \{-1, 1\}^s$，$D^\top S^\top \mathbf{x} = (T^{-1})^\top \cdot \alpha_s \cdot \mathbf{b}$ 都有整数解。注意，由于 S 是弱幺模的，为 $D^\top S^\top \mathbf{x} = (T^{-1})^\top \cdot \alpha_s \cdot \mathbf{b}$ 求解，等价于为 $D^\top \mathbf{y} = (T^{-1})^\top \cdot \alpha_s \cdot \mathbf{b}$ 求解，因为我们可以令 $\mathbf{y} = (S^{-1})^\top \mathbf{x}$。后一个方程组的解为 $\tilde{\mathbf{y}} = (\alpha_s \cdot D^{-1})(T^{-1})\mathbf{b}$，其中 $(\alpha_s \cdot D^{-1})$ 是一个整数矩阵，因为对所有 i，α_i 都整除 α_s。由于 T 是弱幺模的，其逆矩阵 T^{-1} 是一个整矩阵，这意味着 $(\alpha_s D^{-1})(T^{-1})^\top \cdot \mathbf{b} = \tilde{\mathbf{y}}$ 是整数。□

我们想指出，推论 6.5 证明的关键在于，由于α_s 是 A的初等因子的最小公倍数，$\alpha_s{}^{\text{th}}$ 任意整数向量在 $\mathsf{im}_{\mathbb{R}} A$ 中的$\mathbb{Z}$ A倍数已经属于 $\mathsf{im}_{\mathbb{Z}} A$。

我们用几句话来结束本小节，谈谈当多胞体 $\mathcal{P}_A$不是 交叉多胞体时会发生什么。为简化记号，给定 $[A|-A]$的列的任意子集 B，我们将由满足$\{F, -F\} \cap B \neq \emptyset$的列 F组成的 A的子矩阵记为 B。$\tilde{}$可以看作 B的无符号版本。若交叉多胞体的面 F具有形如$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} = 1\}$ 的支撑超平面，其中$\omega \in \mathbb{Z}^m$，则称该面为自反面。

下一个陈述大致可由定义直接推出。

Pr命题 6.6。 设 $A \in \mathbb{Z}^{m \times s}$ 的秩为 r。以下条件等价：

(1) P_A 是自反的。*(2)* 对于 P_A的每个面 F，都存在 F 的顶点的一个线性无关子集 B，满足 $|B| = r$，使得 B 的顶点构成 r维交叉多胞体 $P_{\tilde{B}}$的一个反射面。*(3)* 对于 P_A的每个面 F，以及 F 的顶点的所有满足 $|B| = r$ 的线性无关子集 B，B 的顶点都构成 r维交叉多胞体 $P_{\tilde{B}}$的一个反射面。

特别地，如果对于 P_A的每个面 F，都存在 F 的顶点的一个线性无关子集 B，满足 $|B| = r$，使得 r维交叉多胞体 $P_{\tilde{B}}$ 是自反的，那么 P_A就是自反的。

请注意，(2) 和 (3) 中的关键条件是多胞体 $\mathcal{P}_B$ 有一个特定的自反面。由于矩阵 B 的秩假设为 r，多胞体 $\mathcal{P}_B$ 必定是交叉多胞体，见引理 5.1。此外，在 (2)中，无须要求 B 线性无关，因为这已经由 $\mathcal{P}_{\tilde{B}}$ 是 r维的这一条件保证。不过，我们在陈述中保留了这一要求，以便更明显地体现与 (3) 的类比。

Proof. 我们首先证明 (1) 推出 (3)。因此，假设 $\mathcal{P}_A$ 是反身的 e.

若 $r = s$，则根据引理 5.1，$\mathcal{P}_A$ 本身就是一个交叉多胞体，并且对于 P 的每个 $\mathcal{P}_A$面，唯一的基数为 B 的线性无关子集 r 就是 $\mathcal{F}$ 本身的顶点集合。结论显然成立，因为在这种情况下 $\mathcal{P}_A = \mathcal{P}_{\tilde{B}}$。

接下来，假设 $r < s$。令 $\mathcal{F}$ 为$\mathcal{P}_A$的一个面。由于根据假设，$\mathcal{P}_A$ 是自反的，因此存在 $\omega \in \mathbb{Z}^m$，使得

$$\mathcal{F} = \mathcal{P}_A \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} = 1\} \qquad \text{and} \qquad \mathcal{P}_A \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} \leq 1\}.$$

令 B 为F 的顶点的一个线性无关子集，满足 $|B| = r$。由引理 5.1，$\mathcal{P}_{\tilde{B}}$ 是一个 r 维交叉多胞体，且包含于 $\mathcal{P}_A$。此外，根据构造，凸包(B) 是 $\mathcal{P}_{\tilde{B}}$ 的一个面，其支撑超平面为 $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} = 1\}$。

这 (3)说明 (2) 显然成立，因此只需证明 (2) 推出 (1)。设 $\mathcal{F}$是 $\mathcal{P}_A$的一个面。由于 (2) 成立，存在 B，它是 $\mathcal{F}$ 的顶点的一个子集，满足 $|B| = r$，使得 $\mathcal{P}_{\tilde{B}}$ 是一个 r 维交叉多胞体，其自反面为 conv(B)。由此可知存在 $\omega \in \mathbb{Z}^m$ 使得

$$\operatorname{conv}(B) = \mathcal{P}_B \cap \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} = 1\} \quad \text{and} \quad \mathcal{P}_B \subseteq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} \le 1\}.$$

由于 $\dim \mathcal{F} = \dim \operatorname{conv}(B) = r$ 且 $\operatorname{conv}(B) \subseteq \mathcal{F}$，conv($B$) 的仿射包与 $\mathcal{F}$的仿射包重合。特别地，$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m : \omega^\top \mathbf{x} = 1\}$ 是 $\mathcal{F}$的一个支撑超平面。这表明 $\mathcal{P}_A$ 是自反的。 □

6.2. 对称同调多胞体的自反性。 现在我们将把上一小节的结果应用于对称同调多胞体。

我们的主要结果如下：

定理 6.7. 设 Δ 是一个 d 维单纯复形，满足 $f_d(\Delta) = s$ 且 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。那么，当且仅当以下情形之一成立时，$P_\Delta$ 是自反的：

(1) $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$；*(2)* d 为偶数，且 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\ell \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ 对某个 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立；*(3)* d 为奇数，$H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\ell \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_2$ 对某个 $\ell \in \mathbb{N}$ 成立，并且存在 $v_{\Delta,1}, \ldots, v_{\Delta,r} \in \{\pm\frac{1}{2}, 0\}^s \setminus \{0\}$，其非零项个数为偶数，使得 $\partial_d v_{\Delta,1} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d, \ldots, \partial_d v_{\Delta,r} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$ 生成 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 中的挠元。

我们想强调的是，这一定理特别指出：如果 Δ 的 $(d-1)^{\text{st}}$ 同调群对某个 $q \ge 3$ 含有 q-挠元，那么 $\mathcal{P}_\Delta$ 永远不是自反的。

其证明将直接由以下引理6.8、6.10 和6.12 以及下面的注记6.13 得出。

我们首先注意到，就对称同调多胞体而言，定理$\mathbf{v}_{A,\,j}$ 中的构造6.3 对应于取同调中的挠元生成元。这种解释使我们能够将引理6.2 和定理6.3 解释如下。

Le理 6.8。 设 Δ 是一个 d 维单纯复形，具有 $f_d(\Delta) = s$ 和 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。（*1*）若 $H_{d-1}(\Delta,\mathbb{Z}) = 0$，则 P_Δ 是自反的。（2）设 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^\ell \oplus \mathbb{Z}_{q_1} \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}_{q_r}$，其中某些 $\ell \in \mathbb{N}$、$1 < q_1$ 满足 q_i 可被 q_{i+1} 整除，且对 $1 \le i \le r-1$ 成立。令 v_Δ, $1, \ldots, v_{\Delta,r} \in \mathbb{Q}^s \setminus \mathbb{Z}^s$ 满足：$v_{\Delta,1} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$、…、$\partial_d v_{\Delta,r} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$ 生成 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 的挠元。那么，当且仅当对每个 $b \in \{-1, 1\}^s$ 及所有 $1 \le j \le r$，$v_{\Delta,j}^\top b \in \mathbb{Z}$ 时，P_Δ 是自反的。

证明。令 $\alpha_1 \le \ldots \le \alpha_s$为 ∂_d的初等因子。由于 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$，映射 ∂_d具有（满）秩 s，因此我们得到 $\alpha_s \ge 1$。

若 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$，则定理 2.6 推出 $\alpha_s = 1$，因此 $\mathcal{P}_\Delta$ 由引理6.2可知是自反的。这证明了 (1)。

现在证明 (2)。定理 2.6 推出 $\alpha_{s-r+i} = q_i$ 对于 $1 \le i \le r$成立。由于 $\partial_d \mathbf{v}_{\Delta,\,1}$ +像$_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$，……，$\partial_d \mathbf{v}_{\Delta,\,r}$ + 像$_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$生成了 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 中的挠元，结合定理6.3 与注记 6.4，□

现在我们给出一些具体例子，说明如何应用本节的结果，找出源自组合拓扑的自反（和非自反）多胞体族。关于单纯复形中特殊类别的更具体陈述，可见第 8 节。

例6.9 (自反性与 3-挠元)。 我们考察例 *2.7*$\mathcal{M}^1_{\mathbb{Z}_3}$ 中 $\mathbb{Z}_3$ Moore空间的三角剖分 M。我们已经看到，它具有 $H_2(\mathcal{M}^1_{\mathbb{Z}_3}) = 0$ 和$H_1(\mathcal{M}^1_{\mathbb{Z}_3}) = \mathbb{Z}_3$。计算表明，当坐标按字典序排列时，一个挠生成元对应于

$$\mathbf{v}_{\partial_2} = \frac{1}{3}(1,1,1,2,2,2,2,1,1,1,1,1,1,2,2,2,1,2,1)^\top.$$

By 引理 6.8，$\mathcal{P}^{\mathcal{M}^1_{\mathbb{Z}_3}}$ 是自反的，当且仅当 $\mathbf{v}_{\partial_2}^\top \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$ 对所有 $\mathbf{b} \in \{-1, 1\}^1$ [9].

例如，

$$\mathbf{v}_{\partial_2}^\top \mathbf{1}^\top = 9 \in \mathbb{Z},$$

改变最后一个坐标可得

$$\mathbf{v}_{\partial_2}^\top (1,\ldots,1,-1)^\top = 9 - \frac{2}{3} = \frac{25}{3} \notin \mathbb{Z}$$

以及引理 6.8 因此推出$\mathcal{P}^{M^1_3}$ 不是自反的。

事实证明，例 6.9 属于一种更一般的现象；该现象还表明，在引理6.8 (2) 中，只要存在高阶挠，就绝不可能出现自反性。更准确地说，有如下陈述：

引理6.10。 设 Δ 是一个 d 维单纯复形，使得 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。若对于某个 $q \geq 3$，$H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 含有 q-挠元，则 P_Δ 不是自反的。

证明。设 $f_d(\Delta) = s$。反设 P_Δ 是自反的，并令 $\mathbf{v}_\Delta \in \mathbb{Q}^s \setminus \mathbb{Z}^s$ 满足 $\partial_d \mathbf{v}_\Delta + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$ 生成了 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 的 q-挠元的一个分量。于是根据引理 6.8 (2)，对于所有 $\mathbf{b} \in \{-1,1\}^s$，都有 $\mathbf{v}_\Delta^\top \mathbf{b} \in \mathbb{Z}$。特别地，$\mathbf{v}_\Delta^\top \cdot \mathbf{1} = \sum_{\ell=1}^s (\mathbf{v}_\Delta)_\ell \in \mathbb{Z}$。由于按构造，$q\mathbf{v}_\Delta \in \mathbb{Z}^s$ 且 $\mathbf{v}_\Delta \notin \mathbb{Z}^s$，容易看出存在 $1 \leq i \leq s$，且它与 q 互素，使得 $(\mathbf{v}_\Delta)_i = \frac{a}{q}$：事实上，若不存在这样的 $a \in \mathbb{Z}$，则对于某个 $q' < q$ 有 $q'\mathbf{v}_\Delta \in \mathbb{Z}^s$，这意味着 $\partial_d \mathbf{v}_\Delta + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$ 不会生成 q-挠元。注意，根据假设，$\mathbf{v}_\Delta^\top \mathbf{1} \in \mathbb{Z}$。令 $\mathbf{b} = \mathbf{1} - 2\mathbf{e}_i \in \{-1,1\}^s$，得到

$$\mathbf{v}_\Delta^\top \mathbf{b} = \mathbf{v}_\Delta^\top \mathbf{1} - 2 \cdot \frac{a}{q} \notin \mathbb{Z},$$

这里用到了 $2 \cdot \frac{a}{q} \notin \mathbb{Z}$ 与 a 互素，且 q 和 $q \geq 3$。 □

鉴于引理 6.10，给定一个 d维单纯复形 Δ，其同调次数 $d-1$ 上有挠元且顶维同调平凡，多胞体 $\mathcal{P}_\Delta$ 似乎很少是自反的。然而，下一个例子表明，2-挠不一定会妨碍自反性。特别是，在这种情况下，引理 6.8 (2)中的条件可能成立。

例 6.11（自反性与 2-挠：并非一切都无法自反）。考虑例 2.3 中的三角剖分 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$。$H_1(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z})$ 的 2-挠生成元对应于向量 $\mathbf{v}_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1}^\top \in \mathbb{R}^{10}$。根据引理 6.8 (2)，$\mathrm{P}^{\Delta_{\mathbb{RP}^2}}$ 自反等价于陈述：对于所有 $\mathbf{b} \in \{-1,1\}^{10}$，$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{10} b_i \in \mathbb{Z}$。事实上，由于我们加上的是偶数个 $\pm\frac{1}{2}$，结果总是一个整数。因此，尽管 $H_1(\Delta_{\mathbb{RP}^2};\mathbb{Z})$ 有 2-挠元，$\mathrm{P}^{\Delta_{\mathbb{RP}^2}}$仍是自反的。

与例 6.9 类似，前一个例子是下述更一般现象的特例，该现象也表明 2-挠的表现可能与高阶挠完全不同。

引理 6.12. 设 Δ 为一个 $2k$ 维单纯复形，使得 $H_{2k}(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。若 $H_{2k-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 仅有 2-挠，且在其余情况下是自由的，则 P_Δ 是自反的。

证明。令 $f_d(\Delta) = s$。令 $\mathrm{v}_{\Delta,1}, \dots, \mathrm{v}_{\Delta,r} \in \mathbb{Q}^s \setminus \mathbb{Z}^s$，使得 $\partial_d \mathrm{v}_{\Delta,1} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d, \dots, \partial_d \mathrm{v}_{\Delta,1} + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_d$ 生成 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 的 2-挠。利用 (12)，我们可以假设 $\mathrm{v}_{\Delta,j} \in \frac{1}{2}\mathbb{Z}^s$ for $1 \le j \le r$。此外，由于对于任意 $\mathrm{v} \in \mathbb{Z}^s$，都有 $\partial_d \mathrm{v} \in \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, A$，我们甚至可以选择 $\mathrm{v}_{\Delta,j} \in \{0, 1\ 2\}^s$（另见注 6.4）。

根据引理 6.8 (2)，P_Δ 是自反的，当且仅当对于每个 $\mathrm{b} \in \{-1, 1\}$ 和 $1 \le j \le r$，$\mathrm{v}_{\Delta,j}^\top \mathrm{b} \in \mathbb{Z}$。由于 $\mathrm{v}_{\Delta,j} \in \{0, 1\ 2\}^s$，这等价于证明集合 $S_j := \{1 \le i \le s : (\mathrm{v}_{\Delta,j})_i = \frac{1}{2}\}$ 各自的基数均为偶数。固定 $1 \le j \le r$，令 $\sigma_1, \dots, \sigma_t$ 为与 S_j 中的元素相对应的 Δ 的面。

根据 ∂_d 的定义，对于脊 $\tau \in \Delta$，$\partial_d(2\mathrm{v}_{\Delta,\,j})$ 中对应于 τ 的项等于 $\partial_d(2\mathrm{v}_{\Delta,\,j})_\tau = \#\{1 \le i \le t : \tau \subseteq \sigma_j\}$。由于根据对 $\mathrm{v}_{\Delta,\,j}$ 的假设，$\partial_d(2\mathrm{v}_{\Delta,\,j})$ 的所有项都是偶数，因此尤其有 $\partial_d(2\mathrm{v}_{\Delta,\,j})_\tau$ 为偶数。特别地，$\sum_{\tau \in \Delta,\ |\tau|=2k} \partial_d(2\mathrm{v}_{\Delta,\,j})_\tau$ 的各项之和为偶数。由于 Δ 的每个面都包含 $2k+1$ 个脊，双重计数论证表明该和等于 $t(2k+1)$。因此我们得出结论：t 是偶数。 □

注 6.13。 注意，引理 6.12 的证明表明，对于一个 d 维单纯复形 Δ，若 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$ 和 $H_{d-1}(\Delta;\mathbb{Z})$ 对 $q \ge 3$ 没有 q-挠元，那么多胞体 $\mathcal{P}_\Delta$ 自反，当且仅当 2-挠可由非零项个数为偶数且绝对值均为 1 的向量生成。Lutz 的流形页面 [27] 中的下一个例子表明，对于奇数维单纯复形，这并非总是成立。

例 6.14 (具有非自反对称同调多胞体的流形)。令 Δ 为以下扭曲球面乘积的最小三角剖分 *twisted sphere product* $S^2 \tilde{\times} S^1$（见 [28, 表 5]）：

$\Delta = \langle 1234,\ 1235,\ 1246,\ 1257,\ 1268,\ 1278,\ 1345,\ 1456,\ 1567,\ 1679,\ 1689,\ 1789,\ 2349,\ 2359,\ 2456,$
$2459,\ 2567,\ 2678,\ 3458,\ 3478,\ 3479,\ 3589,\ 3678,\ 3679,\ 3689,\ 4589,\ 4789 \rangle$。

它可以在 [27] 的 9 个顶点三维流形列表中找到，名称为 `manifold 3 9 989`。Δ 是一个三维伪流形（甚至是一个流形），具有 $H_3(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$，$H_2(\Delta;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}_2$，其 f-向量为 (1, 9, 36, 54, 27)。令 $\mathrm{v}_\Delta = \frac{1}{2} \cdot \mathbf{1} \in \mathbb{Z}^{27}$，可以证明 $\partial_2 \mathrm{v}_\Delta + \mathrm{im}_{\mathbb{Z}}\, \partial_3$ 生成 $H_2(\Delta;\mathbb{Z})$（另见注 6.13）。特别地，由于 $\mathrm{v}_\Delta^\top \mathbf{1} = \frac{27}{2} \notin \mathbb{Z}$，引理 6.8 (2) 蕴含 P_Δ 不是自反的。

本节最后给出一个充分判据：当底层单纯复形允许具有非零顶维同调时，对称同调多胞体何时是自反的。

推论 6.15. 设 Δ 是一个 d 维单纯复形。若对 $\mathcal{P}_\Gamma$ 的每个单纯生成森林 Γ，Δ 都成立，则 $\mathcal{P}_\Delta$ 是自反的。特别地，若每个单纯生成森林 Γ 都满足定理 6.7 中的某个条件，则 $\mathcal{P}_\Delta$ 是自反的。

证明。第一个陈述直接由定理 3.6 和命题 6.6 得出。对于第二个陈述，只需注意到，根据定义，每个单纯森林 Γ 的顶维同调都为零，因此多胞体 $\mathcal{P}_\Gamma$ 是一个交叉多胞体，而交叉多胞体的自反性由定理 6.7 刻画。 □

7. 对称上同调多胞体与对称边多胞体

本节中，我们将注意力转向对称上同调多胞体。我们感兴趣的问题是：何时可以将一个对称上同调多胞体识别为

（广义）对称边多胞体或对称同调多胞体？我们将给出维度 1 情形的完整答案，以及维度 2 情形的部分答案。

最简单的情形是底层单纯复形 Δ为一个图。在这种情况下，同调多胞体 $\mathcal{P}_\Delta$ 就是众所周知的 Δ的对称边多胞体。利用图的边界矩阵 ∂_1 是全幺模矩阵这一事实，并结合 [8], 中的结果，我们能够在幺模等价意义下刻画这种情况下的上同调多胞体。

命题 7.1 (图的对称上同调多胞体)。 设 $n \geq 3$，且 G 是一个具有 n 个顶点的连通图。那么，P^G 与一个具有 n个顶点的圈的对称边多胞体幺模等价。

证明。 对于图 G，其边界映射 ∂_1 由它的有向关联矩阵给出，并且众所周知，后者是一个全幺模矩阵。特别地， $\partial_1^\top$也是如此。由命题 2.9， $\partial_1^\top$因此表示一个正则拟阵 $M[\partial_1^\top]$。由于 $\partial_1^\top$的核由向量 **1**生成，我们得出结论， $M[\partial_1^\top]$ 必为一个具有 n个元素、秩为 $n-1$ 的均匀拟阵。特别地， $M[\partial_1^\top]$ 与由圈图 C_n 的边界映射实现的正则拟阵同构，该圈图具有 n 个顶点，见例 2.8。结论由定理 2.14直接得出。 □

现在我们来关注通过对图进行锥化而得到的二维单纯复形。我们需要用到 [10] 中的一些预备概念。

如果纯的 d 维单纯复形 Δ 的面存在一个序 $\sigma_0, \ldots, \sigma_{k-1}$，使得对于所有 $0 \leq i \leq k-1$，都有 $\dim(\sigma_i \cap \sigma_{i+1}) = d-1$，并且当 $j \neq i+1$ 时也满足相应条件（两种情况下的指标都按模 k 计算），则称其为一个圈复形 。

注意，任何圈复形都是一个伪流形（见第 2 节）。任何可定向圈复形称为 圆柱复形，任何不可定向圈复形称为M¨莫比乌斯复形。

在 [10, 定理 5.13] 中已证明，二维 M¨莫比乌斯复形是使第二边界映射 ∂_2 不成为全幺模矩阵的唯一障碍。

定理 7.2。 [10, 定理 5。13] 设 Δ 是一个2维单纯复形。当且仅当 Δ 不包含2维莫比乌斯复形时，∂_2是全幺模的。

定理7.2成立的一个特殊情形是 Δ 是图 G上的锥 Δ。这里，如果 Δ 的面都是形如 $e \cup \{v\}$ 的集合， Δ 称为以 v为顶点的 G 上的锥 $\Delta e \in E$是$G()$，而 $v \notin V(G$是一个新顶点。

引理 7.3。 设 G 是一个图，且 Δ 是 G上的锥。那么， Δ 的顶边界映射 ∂_2是全幺模的。

证明。 由于 Δ 是一个 2 维锥，对于任意两个面 σ_1， σ_2 属于 Δ， $v \in \sigma_1 \cap \sigma_2$。特别地， Δ 不包含莫比乌斯复形¨，由定理7.2可得结论。 □

引理 7.3 为我们提供了一种构造对称上同调多胞体的方法，这些多胞体是自反的，但与任何对称边多胞体都不幺模等价。我们将这一观察记录在以下结果中。

命题 7.4。 设 G 为一个图，且 Δ 为覆盖 G的锥。设 H 为由 Δ的顶点和边组成的图。当且仅当 H 是平面图时，P^Δ 与某个图的对称边多胞体幺模等价。在这种情况下，$P^\Delta \cong_u P_{H^*}$，其中 H^* 是 H的平面图对偶。

关于平面图的平面图对偶的定义，请参阅 [11]。

证明。 根据引理 7.3，矩阵 $[\partial_2^\top]$ 是全幺模的，因此 $\mathcal{P}^\Delta$ 可解释为拟阵 $\mathcal{P}^{M[\partial_2^\top]}$ 的广义对称边多胞体 $M[\partial_2^\top]$。根据命题 2.11，后者与拟阵 $M[\partial_1]^*$同构。由于按构造， ∂_1 是 H的关联矩阵，因此 $M[\partial_1]$ 是 H的图拟阵。

现在假设 H 是平面的。那么，根据 [36, 定理 5.2。2], 拟阵 $M[\partial_1]^*$ 也是图拟阵。特别地， $M[\partial_1]^*$与 $M[H^*]$的图拟阵 H^*同构。由于根据定理 2.14，多胞体 $\mathcal{P}^{M[\partial_2^\top]}$ 和 $\mathcal{P}^{M[H^*]}$ 幺模等价，故结论成立。

反过来，假设 H 不是平面图。在这种情况下，根据 [36, 定理 5.2，2],拟阵 $M[\partial_1]^*$ 不是图拟阵。由于根据 [8, 定理 4.5 和注 3，2], 广义对称边多胞体（相对于一个全幺模矩阵）决定了底层拟阵（在同构意义下），因此 $\mathcal{P}^{M[\partial_2^\top]}$ （进而 $\mathcal{P}^\Delta$）不与任何图拟阵的对称边多胞体幺模等价。结论得证。□

有人可能会问，在命题 7.4的情形下，图的对称上同调多胞体至少是否与某个对称边多胞体组合等价。下一个例子表明，一般而言，答案是否定的。

例 7.5 (组合等价也未必成立)。 令 Δ 为完全二部图 $K_{3,3}$上的锥。由于 $K_{3,3}$ 不是平面图，因此由命题 7.4可知 $\mathcal{P}^\Delta$ 不与任何图的对称边多胞体幺模等价。

由于 Δ 有 15 条边，且每个面都只包含一条自由脊，引理 3.3 推出 $\mathcal{P}^\Delta$ 有 30 个顶点。此外，由于 $H_2(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$，根据命题 3.4 可知，$\mathcal{P}^\Delta$ 是 9 维的。若 $\mathcal{P}^\Delta$ 与某个连通图 G 的对称边多胞体组合等价， G 则该图必须有 15 条边和 10 个顶点。利用 Sage 可以通过计算验证， f多胞体 $\mathcal{P}^\Delta$ 的 - 向量不等于任何此类图的对称边多胞体的 f- 向量。此外，由于非连通图的对称边多胞体与其各连通分量的 1-和具有相同的 f- 向量，因此 $\mathcal{P}^\Delta$ 与任何对称边多胞体都不组合等价。

8. （伪）流形与球面的对称（余）同调多胞体

本节着重研究单纯伪流形的对称（余）同调多胞体。对于面数固定的可定向伪流形的对称同调多胞体，结果表明，除幺模等价外，这类多胞体只有两种，具体取决于伪流形是否有边界。对于可定向伪流形的对称上同调多胞体，情况则更为复杂：不过，我们将证明，每个这样的多胞体都幺模等价于面-脊图的对称边多胞体（加悬挂边后）的一个投影。

我们先陈述引理6.12的一个拓扑推论。

推论 8.1 设 Δ 是一个无边界的不可定向 $2k$ 维伪流形。那么 P_Δ 是自反的。

证明。 由 [18], 可知 $H_{2k}(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$ 且 $H_{2k-1}(\Delta;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}^\ell \oplus \mathbb{Z}_2$ 其中 $\ell \in \mathbb{N}$。结论可直接由引理 6.12得出。 □

推论 8.1 中将范围限制为偶数维伪流形确有必要，正如例 6.14所示。在此例中，自反性的障碍在于 Δ 含有 2-挠，而且挠生成元的非零系数个数为奇数（27）。我们的结果引出了一个自然问题： $\mathcal{P}_\Delta$ 的自反性是否仅取决于 Δ的拓扑。下面的例子以及上述讨论表明，一般来说并非如此。

例 8.2（自反性不是拓扑性质）。令 Δ' 为由 Δ 经对面 1234 进行星形细分所得的单纯复形，即用 $123x$、 $124x$、 $134x$ 和 $234x$ 替换面 1234，其中 x 是一个新顶点。注意，Δ' 有 30 个面。由于 Δ 是 Δ' 的细分，这两个复形作为拓扑空间是同胚的。可以证明，Δ' 的 2-挠由 $\mathbf{v}_{\Delta'} = \frac{1}{2}\cdot\mathbf{1} \in \mathbb{Z}^{30}$ 生成。由于对于所有 $\mathbf{b} \in$ ，都有 $\mathbf{v}_\Delta^\top \cdot \mathbf{b} \in \mathbb{Z} -1, \mathbf{1}^{30},$ ，由引理 5.1 可知 $\mathbf{P}_{\Delta'}$ 是自反的。这个例子表明，尽管我们能够推导出自反性的拓扑障碍，但这一性质不仅取决于拓扑，也取决于 Δ 的面数。

由定理 2.4 可知，任意无边界可定向伪流形的顶边界映射都是全幺模的。因此，由定理 2.12 可得，可定向伪流形的同调多胞体和上同调多胞体都是自反的。下面的陈述表明，在这种情况下，这些多胞体甚至与某个图的对称边多胞体幺模等价。

定理 8.3. 设 Δ 是一个无边界的 d 维可定向伪流形， G是 Δ 的面-脊图。那么

(1) $P_\Delta \cong_u P_{C_s}$，其中 $f_d(\Delta) = s$，且
(2) $P^\Delta \cong_u P_G$。

证明。 由于根据定理 2.4，边界映射 ∂_d 是全幺模的，$\mathcal{P}_\Delta$ 和$\mathcal{P}^\Delta$ 可以视为广义对称边多胞体。我们分别证明每个陈述。

(1) 由于 Δ 是无边界的可定向伪流形，我们知道 $H_d(\Delta;\ \mathbb{Z}) =\mathbb{Z}$。这意味着 ∂_d的列之间存在唯一的（相差一个比例因子）线性依赖。此外，由于 Δ 的面-脊图 G 连通，且每个脊恰好位于两个面中，因此该线性依赖涉及每一列。特别地，由 ∂ 表示的拟阵同构于 C_s 的图拟阵，结论由定理 2.14得证。

(2) 设 $\sigma_1, \ldots, \sigma_s$ 为 Δ的面。由 (1) 的证明可知， ∂ 的所有列之间存在一种线性依赖，其系数仅为 $+1$和 -1。特别地，存在 $\epsilon_i \in \{-1, +1\}$ ，对于 $1 \le i \le s$ 满足

$$\varepsilon_1 \partial_d(\sigma_1) + \cdots + \varepsilon_s \partial_d(\sigma_s) = 0.$$

令 $D(\varepsilon)$ 为对角线元素为 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_s$ 的 $(s \times s)$ 对角矩阵。由于 Δ是伪流形， ∂_d的每一行恰有两个非零元素，因此 $\partial_d \cdot D(\varepsilon)$ 等于 G的关联矩阵的转置，即 $D(\varepsilon) \cdot \partial_d^\top$等于 G的关联矩阵。由于 $D(\varepsilon)$ 是弱幺模的， $D(\varepsilon) \cdot \partial_d^\top$和 $\partial_d^\top$定义相同的拟阵。结论由定理 2.14 得出。
□

在陈述定理 8.3关于带边界可定向伪流形的类比结果之前，我们需要先引入一些记号。给定一个带边界伪流形 Δ，其面-脊图 $G = G(\Delta)$ 以及其顶点的一个子集 A， G在 上的加悬挂边 在 G 处 A，记作

$w(G,\ A)$，是通过给 A 中的每个顶点添加一个与之相邻的叶顶点而得到的图。如果 A 是 G 的全体顶点集合，这种构造在交换代数文献中已多次出现 [41], ，用于研究分段线性球面 [23], 、图论 [4]等领域。此外，我们还需要以下关于带边界伪流形的结果。我们认为该结果众所周知，但未能在文献中找到，因此在此给出完整证明。

引理 8.4. 设 Δ 为一个 d维带边界伪流形。则 $H_d(\Delta;\mathbb{Z}) = 0$。

证明. 用反证法假设 $H_d(\Delta;\ \mathbb{Z}) \neq 0$，即 Δ 包含一个 d-同调循环 τ。设 Γ 为 Δ 的纯子复形，其面是出现在 τ中的 Δ 的面。由于 τ 是同调循环，Γ 的每条脊都必须包含于 Γ的至少两个面中。此外，由于 Δ 是伪流形，可知 Γ 的每条脊都必须恰好包含于 Γ的两个面中，且 Δ 中没有其他面包含它。特别地，这表明 Γ 是强连通的，从而 $\Gamma = \Delta$。这是一个矛盾，因为 Δ 有边界。□

定理 8.3关于带边界可定向伪流形的类似陈述如下:

定理 8.5。 设 Δ 是一个带边界的 d维可定向伪流形，且$G = (V, E)$ 是 Δ的面-脊图。设 A 为 G 的顶点集合，其中的顶点对应于包含自由脊的 Δ 的面。那么

(1) P_Δ 与一个 s维交叉多胞体幺模等价，其中 $f_d(\Delta) = s$。*(2)* $P^\Delta \cong_u \pi_V(P^{w(G,A)})$，其中 π_V 是投影到对应于V的坐标上的投影。

证明。 由于根据定理 2.4，边界映射 ∂_d 是全幺模的，我们可以将 $\mathcal{P}_\Delta$ 和 $\mathcal{P}^\Delta$ 都解释为广义对称边多胞体。首先注意，根据引理 3.3，如果 Δ 的一个面包含多个自由脊，则只有一个自由脊成为 $\mathcal{P}^\Delta$的顶点。我们分别证明每个陈述:

(1) 直接结合推论 5.2 与引理 8.4即可得出。

(2) 由于 Δ是一个带边界的可定向伪流形，我们知道 $H_d(\Delta, \partial\Delta; \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$。换言之，表示顶维相对边界映射的矩阵 ∂_d^* 只有一个线性依赖（相差一个比例因子），且该线性依赖中的系数为 $+1, -1$。将定理 8.3 (2) 的证明中相同的论证应用于 ∂_d^* 而非 ∂_d，可得$D(\epsilon) \cdot (\partial_d^*)^\top$ 等于 G 的关联矩阵，其中 $D(\epsilon)$ 是一个对角矩阵，其对角线上的元素为 $+1$ 和 -1。令 ∂_d' 为由 $D(\varepsilon) \cdot \partial_d^\top$得到的矩阵，并为每个边界脊添加一行，使得每个新增行中唯一的非零项为 ± 1，位于与相应自由脊关联的列中，且其符号与该列中另一个非零项的符号相反。

根据构造，矩阵 ∂_d' 是图 $w(G,\ A)$ 的关联矩阵；特别地，对称上同调多胞体 $\mathcal{P}^\Delta$ 是通过将对称边多胞体 $\mathcal{P}^{w(G,A)}$ 投影到不对应悬挂边的坐标上得到的。□

注意到，根据定理 8.3，在幺模等价意义下，球面（或更一般地，不带边界的可定向伪流形）的对称同调多胞体仅取决于该球面的面数。这可以看作是 [14, 定理 4。6], 的一个类似结果，其中作者证明了球面的顶层临界群仅取决于单纯复形的面数。此外，我们还想指出

从定理 8.3(1)的证明可以看出，这一陈述对带边界的不可定向伪流形也成立。

下文中，我们将使用可剖分单纯复形这一概念，但不对其加以定义，因为这里只会在下一个推论中用到它。定义可参见 [3, 第 10]章。2024年，Yang [42, 定理 1。2] 证明了，如果 Δ_1 和 Δ_2 是可剖分单纯复形，且它们的几何实现与球面同胚（或简称为单纯球面），那么 Δ_1 和 Δ_2 组合等价，当且仅当它们的面-脊图 $G(\Delta_1)$ 和 $G(\Delta_2)$ 同构。鉴于 Yang 的结果以及 [8], 中的结果，我们得到定理8.3的以下推论。

推论 8.6。设 Δ_1 和 Δ_2 是可剖分单纯球面。那么，$P^{\Delta_1} \cong_u P^{\Delta_2}$ 当且仅当 Δ_1 和 Δ_2 组合等价，当且仅当 $G(\Delta_1)$ 和 $G(\Delta_2)$ 同构。

证明。 由 [42, 定理 1.2] 可知，我们只需证明$\mathcal{P}^{\Delta_1} \cong_u \mathcal{P}^{\Delta_2}$ 当且仅当 Δ_1和 Δ_2 组合等价。

令 $d_i = \dim \Delta_i$，其中 $i = 1,2$。

如果 Δ_1 和 Δ_2 组合等价，那么它们的面-脊图 $G(\Delta_1)$ 和$G(\Delta_2)$ 同构。定理 2.14 和 8.3 因此可推出

$$\mathcal{P}^{\Delta_1} \cong_u \mathcal{P}_{G(\Delta_1)} \cong_u \mathcal{P}_{G(\Delta_2)} \cong_u \mathcal{P}^{\Delta_2}.$$

反过来，如果$\mathcal{P}^{\Delta_1} \cong_u \mathcal{P}^{\Delta_2}$，那么定理8.3直接推出$\mathcal{P}_{G(\Delta_1)} \cong_u \mathcal{P}_{G(\Delta_2)}$。我们区分以下两种情形：

情形 1： $d_i \geq 2$ 当 $i = 1,2$ 时。由于每个 d-球面的三角剖分的面-脊图都是$(d+1)$-连通的 [25, 5，定理]， $G(\Delta_1)$ 和 $G(\Delta_2)$ 均为 3-连通，因此结论由 [8, 推论 4.7] 和 [42, 定理 1.2]得出。

情形 2： $d_1 = 1$。在这种情况下， Δ_1 ，因此， G（Δ_1）是长度相同的圈s。因此， G（Δ_1）的图拟阵是定义在 s 个元素上的秩为 $s-1$ 的均匀拟阵。[8, 定理 4。6] 表明， G（Δ_1）和 G（Δ_2）所对应的拟阵同构。由于具有 s 条边的圈图是其图拟阵为定义在 s 个元素上的秩为 $s-1$ 的均匀拟阵的唯一图，我们可以得出， G（Δ_2）也是一个 s圈， Δ_2也一样。由此可得所述结论。特别地，我们还有 $d_2 = 1$ ，且不存在其他需要考虑的情形。□

鉴于推论8.6 ，人们可能会问，可壳球面的上同调多胞体的较粗不变量（例如其 f-向量或 h^*-向量）是否已经能够确定其幺模类型。这也意味着，球面的组合类型可由这些不变量确定。下一个例子表明，这并非如此，尽管这并不十分令人意外。

例8.7。考虑如下定义的两个单纯2-球面 Δ_1 和 Δ_2 ：

$\Delta_1 = \langle 123, 125, 136, 159, 168, 189, 234, 245, 347, 367, 459, 478, 489, 678 \rangle$ 和

$\Delta_2 = \langle 123, 124, 135, 145, 237, 248, 279, 289, 356, 367, 456, 467, 478, 789 \rangle$。

另一方面，Sage [40] 计算表明，两个上同调多胞体的 h^*-向量均为

$$(1, 29, 384, 3016, 14955, 45327, 80048, 80048, 45327, 14955, 3016, 384, 29, 1).$$

另一方面，很容易看出 Δ_1 和 Δ_2 的面-脊图不同构（例如， $G(\Delta_2)$ 含有一个三角形，而 $G(\Delta_1)$ 则不含），见图 6 ），并且特别地，Δ_1 和 Δ_2 并非组合等价。推论 8.6 意味着 $\mathcal{P}^{\Delta_1}$ 和 $\mathcal{P}^{\Delta_2}$

并非幺模等价。这个例子表明，可壳球面的上同调多面体的 h^*-向量无法确定该多胞体在幺模等价意义下的形式。

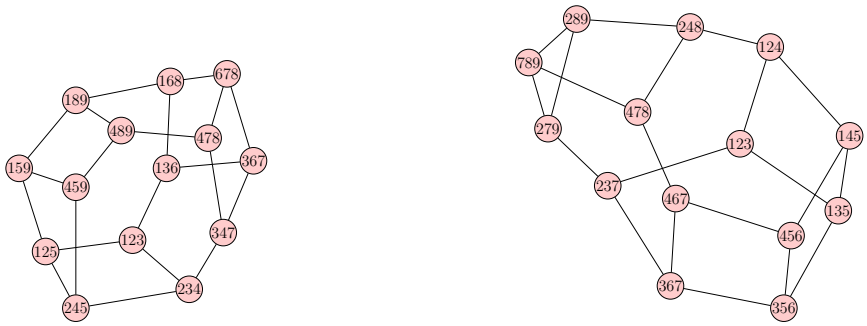

图 6. Δ_1 和 Δ_2 的面脊图，见例 8.7

9. 更多示例与研究方向

本文始终围绕单纯复形 Δ的边界映射和余边界映射所产生的多胞体展开介绍与研究。鉴于我们的大多数结果（命题7.1除外），人们或许会认为，对称上同调多胞体比其同调对应物更复杂。然而，下一个例子表明，在某些例子中，两类多胞体都可能比其对应物具有更好的性质。

例 9.1. (1) 考虑例 $\Delta_{\mathbb{RP}^2}$ 和 $\mathcal{B}$ 2.3中的单纯复形。容易验证，$\mathrm{P}_{\mathbb{RP}^2}$ 和 $\mathcal{P}^{\mathbb{RP}^2}$ 都不具有整数分解性质：对于 $\mathcal{P}_{\mathbb{RP}^2}$，这可由例 5.6得出；对于 $\mathcal{P}^{\mathbb{RP}^2}$，可以验证，其 h^*-多项式与环面理想的希尔伯特级数的分子多项式不同。

此外，尽管对称同调多胞体 $\mathcal{P}_{\mathbb{RP}^2}$ 根据引理 6.12具有自反性，但可以验证，其上同调对应物 $\mathcal{P}^{\mathbb{RP}^2}$ 并不具有自反性（例如，检查 h^*-向量并非对称即可）。因此，这是一个同调多胞体表现更好的例子。

(2) 对于例 $\mathcal{B}$ 中的单纯复形 5.5，我们看到 $\mathcal{P}_{\mathcal{B}}$ 具有自反性，但不具有整数分解性质。相比之下，$\mathcal{P}^{\mathcal{B}}$ 既具有自反性，也具有整数分解性质，而且其 h^*-向量等于 $\mathcal{P}^{\mathbb{RP}^2}$ 的环面理想的希尔伯特级数。这说明上同调多胞体具有更好的性质。

如果 Δ 的顶维同调消失，那么我们所见的对称同调多胞体不具自反性的唯一障碍就是高阶挠。下一个例子表明，对于具有非平凡顶维同调的单纯复形，即使单纯复形具有非常好的拓扑（及组合）性质，也可能不具有自反性。

例 9.2 (不具自反性的大型复形)。 令 Δ 为 6 维单形的 3-骨架，即，

$$\Delta = \langle A \colon A \subseteq [7];\ |A| = 4 \rangle.$$

容易验证， Δ 不含挠元。因此，$\mathcal{P}_\Delta$ 非自反并不存在明显的障碍。然而，计算 h^*-多项式可得

$$1+50t+1240t^2+19930t^3+226115t^4+1863268t^5+11080490t^6+46179088t^7+130616924t^8+245464888t^9+303300596t^{10}+245633728t^{11}+130718060t^{12}+46194712t^{13}+11080490t^{14}+1863268t^{15}+226115t^{16}+19930t^{17}+1240t^{18}+50t^{19}+t^{20},$$

它不是对称的。这表明 $\mathcal{P}_\Delta$ 不是自反的。

作为命题6.6 的自然推广，可以提出以下问题：

问题9.3。 设 Δ 是一个单纯复形，使得$\mathcal{P}_\Delta$ 是自反的。对于任意满足 $\dim\Delta=\dim\Gamma$ 的子复形 Γ，$\mathcal{P}_\Gamma$是否也自反?

我们注意到，命题6.6 已经表明逆命题成立。尽管我们可以设想任意子复形都可能具有挠元，因此相应的对称同调多胞体可能不是自反的，但我们未能找到这样的例子。若问题9.3得到肯定回答，我们就能在不知道$\mathcal{P}_\Delta$的面的情况下检验其自反性。

一个仍悬而未决的猜想是：[33, 猜想 5.11]经典对称边多胞体的 h^* 多项式是 γ-正的。[9, 第 4] 节证明，在更一般的广义对称边多胞体情形下，这一结论并不成立。其中给出的反例来自一个非平面图的图拟阵的对偶拟阵。特别地，其底层拟阵不是图拟阵。由于它的回路大小均为 3，可以得出结论：不可能通过某个单纯复形的边界映射来实现该拟阵。大量计算引出了以下问题：

问题9.4. 任意自反对称（上）同调多面体的 h^*-多项式是否为 γ-正?

为了研究这个问题，第一步是更好地理解这些多胞体的 h^*-向量。可能的方法包括使用 Gr¨obner 基（参见定理 4.1），或者尝试将图的对称边多胞体的 h^*-向量从 [24] 推广到单纯复形这一更一般的情形。

另一个值得进一步研究的方向自然源于以下联系：我们在推论 3.8 中看到，$\mathcal{P}_\Delta$ 的面对应于 Δ 的子复形，且这些子复形包含 Δ 的单纯生成森林。鉴于我们使用的工具（例如边界映射的史密斯标准形）与研究单纯复形临界群时所用工具之间存在相似之处（参见例如 [13]），人们或许会想知道单纯复形的临界群与对称（余）同调多胞体之间是否存在联系。在 [13] 中，作者证明，给定单纯复形 Δ 的临界群的阶等于 Δ 的单纯生成树的挠加权枚举。由于当 Δ 存在单纯生成树时，$\mathcal{P}_\Delta$ 的面对应于包含单纯生成树的子复形，而高阶挠是自反性的一个障碍（见引理 6.10），因此或许可以根据 Δ 的（最高阶）临界群的大小以及 $\mathcal{P}_\Delta$ 的面的数量，给出一个判据来说明对称同调多胞体 $\mathcal{P}_\Delta$ 不是自反的。

致谢。 我们感谢 Matthias Beck 就本文内容与我们进行了多次讨论。我们也感谢 Bernd Sturmfels 帮助澄清了一些

我们在撰写 Gr¨obner 基一节时遇到的困惑。本研究得到了德国研究联合会（DFG）通过 SPP 2458 组合协同项目的资助，项目编号为 JU 3097/6-1。

参考文献

[1] Mathias Beck 和 Sinai Robins。《离散地计算连续：多面体中的整点计数》。数学本科生教材。Springer New York，第二版，2015年。[2] Norman Biggs。《代数图论》，剑桥数学论丛第67卷。剑桥大学出版社，伦敦，1974年。[3] Anders Bj¨orner。《拓扑方法》。载于《组合学手册》第1、2卷，第1819–1872页。Elsevier Sci. B. V.，阿姆斯特丹，1995年。[4] Jason I. Brown 和 Ben Cameron。关于极大覆盖图的独立多项式的单峰性。《离散数学》，341(4)：1138–1143，2018年。[5] Tianran Chen、Robert Davis 和 Evgeniia Korchevskaia。对称边多胞体的面与面子图。《离散应用数学》，328：139–153，2023年。[6] Giulia Codenotti、Roberto Riccardi 和 Lorenzo Venturello。对称边多胞体的边数。arXiv：2512.16572，2025年。[7] Alessio D'Al`ı、Emanuele Delucchi 和 Mateusz Micha lek。对称边多胞体的许多面。《电子组合学杂志》，29(3)：论文编号3.24，42页，2022年。[8] Alessio D'Al`ı、Martina Juhnke-Kubitzke 和 Melissa Koch。关于对称边多胞体向正则拟阵的推广。《国际数学研究通知》IMRN，第10844–10864页，2024年。[9] Robert Davis、Akihiro Higashitani 和 Hidefumi Ohsugi。关于广义对称边多胞体的埃尔哈特理论。2025年。[10] Tamal K. Dey、Anil N. Hirani 和 Bala Krishnamoorthy。最优同调圈、全单模性与线性规划。《SIAM 计算杂志》，40(4)：1026–1044，2011年。[11] Reinhard Diestel。《图论》。施普林格出版社，纽约，第3版（电子版），2005年。[12] David S. Dummit 和 Richard M. Foote。《抽象代数》。John Wiley & Sons, Inc.，霍博肯，新泽西州，第三版，2004年。[13] Art M. Duval、Caroline J. Klivans 和 Jeremy L. Martin。单纯形矩阵树定理。《美国数学会汇刊》，361(11)：6073–6114，2009年。[14] Art M. Duval、Caroline J. Klivans 和 Jeremy L. Martin。立方复形的胞腔生成树与拉普拉斯算子。《应用数学进展》，46(1-4)：247–274，2011年。[15] Art M. Duval、Caroline J. Klivans 和 Jeremy L. Martin。单纯复形的临界群。《组合学年刊》，17(1)：53–70，2013年。[16] Art M. Duval、Caroline J. Klivans 和 Jeremy L. Martin。胞腔复形的割与流。《代数组合学杂志》，41(4)：969–999，2015年。[17] Luis Ferroni 和 Akihiro Higashitani。埃尔哈特理论中的例子与反例。《EMS 数学科学综述》，09 2024。[18] Alexandre Freire。关于伪流形同调的笔记。在线 उपलब्ध于 https://web.math.utk.edu/~afreire/teaching/m663f21/Pseudomanifold_homology.pdf。[19]Masahiro Hachimori。Hachimori 的单纯复形库。在线 उपलब्ध于 https://infoshako.sk.tsukuba.ac.jp/~hachi/math/library/bjorner_eng.html。[20] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002年。[21]Akihiro Higashitani。由有限有向图产生的光滑法诺多胞体。《京都数学杂志》，55(3)：579–592，2015年。[22] Akihiro Higashitani、Katharina Jochemko 和 Mateusz Micha lek。对称边多胞体的算术方面。《 Mathematika 》，65(3)：763–784，2019 年。[23] Fillip D. Jevti´c、Marinko Timotijevi´c 和 Rade T. ˇZivaljevi´c。加权圈的多胞体 Bier 球面与 Kantorovich-Rubinstein 多胞体。《离散与计算几何》，65(4)：1275–1286，2021年。[24] Tam´as K´alm´an 和 Lilla T´othm´er´esz。利用剖分生成树的活动数研究图多胞体的 h^*-向量。《代数组合学》，6(6)：1637–1651，2023年。[25] Victor Klee。具有 d个顶点的 f_0-伪流形至少有 $df_0 - (d-1)(d+2)$个 d-单纯形。《休斯顿数学杂志》，1(1)：81–86，1975年。

[26] Caroline J. Klivans。《芯片发射的数学》。《离散数学及其应用》（博卡拉顿）。CRC出版社，博卡拉顿，佛罗里达州，2019年。[27]Frank Lutz。《流形页面》。在线 उपलब्ध于：https://www3.math.tu-berlin.de/IfM/Nachrufe/Frank_Lutz/stellar/mixed.html。[28] Frank Lutz。少顶点三角剖分流形：组合流形。arXiv：math/0506372，07 2005。[29] Tetsushi Matsui、Akihiro Higashitani、Yuuki Nagazawa、Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。由图产生的埃尔哈特多项式的根。《代数组合学杂志》，34(4)：721–749，2011年。[30] Peter McMullen 和 Geoffry C. Shephard。中心对称多胞体的图示。《Mathematika》，15：123–138，1968年。[31] James R. Munkres。《代数拓扑基础》。艾迪生-韦斯利出版公司，门洛帕克，加利福尼亚州，1984年。[32] Hidefumi Ohsugi 和 Takayuki Hibi。整数矩阵的中心对称构型。《名古屋数学杂志》，216：153–170，2014年。[33] Hidefumi Ohsugi 和 Akiyoshi Tsuchiya。局部反阻塞格多胞体的 h^*-多项式及其 γ-正性。《离散与计算几何》，66：701–722，2021年。[34] Hidefumi Ohsugi 和 Akiyoshi Tsuchiya。对称边多胞体与匹配生成多项式。《组合理论》，1：论文编号9，19页，2021年。[35] Shmuel Onn。非线性离散优化。苏黎世高级数学讲座。欧洲数学会，Z¨urich，2010年。算法理论。[36] James G. Oxley。《拟阵理论》。牛津科学出版物。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1992年。[37] Alexander Schrijver。《线性规划与整数规划理论》。Wiley-Interscience 离散数学系列。John Wiley & Sons, Ltd.，奇切斯特，1986年。Wiley-Interscience 出版物。[38] Richard P. Stanley。组合学中的史密斯标准形。《组合理论杂志》A辑，144：476–495，2016年。[39] Bernd Sturmfels。格 ¨obner 基与凸多胞体。大学讲座系列第8卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1996年。[40] Sage 开发团队。SageMath，Sage 数学软件系统（版本 10.2），2023-12-03。https://www.sagemath.org。[41] Rafael H. Villarreal。科恩-麦考利图。《数学手稿》，66(3)：277–293，1990年。[42] Yirong Yang。从面-脊图重构可壳球面。arXiv：2401.04220，2024年。[43] G¨unter M. Ziegler。《多胞体讲义》。数学研究生教材第152卷。施普林格出版社，纽约，1995年。

（T. Donzelmann）奥斯纳布吕克大学，阿尔布雷希特街28a号，49076 Osnabr¨uck，德国 电子邮件地址： torben.donzelmann@uos.de（T. Holleben）数学与统计系，达尔豪斯大学，6297 Castine Way，邮政信箱15000，哈利法克斯，新斯科舍省，加拿大 B3H 4R2 电子邮件地址： hollebenthiago@dal.ca（M. Juhnke）奥斯纳布吕克大学，阿尔布雷希特街28a号，49076 Osnabr¨uck，德国

电子邮件地址： martina.juhnke@uni-osnabrueck.de