arXiv:2602.17338v1 [math.LO] 19 Feb 2026

迈向对称扩张理论

ASAF KARAGILA 和 JONATHAN SCHILHAN

摘要。对称扩张这一技术源自强迫，是研究无选择公理模型最重要的工具之一。尽管自20世纪60年代以来，这一技术取得了极大成功，但与强迫理论相比，我们对它的理解仍相当有限。强迫理论发展出了积和迭代，但在此之前，除了 [10], 仅讨论有限支撑迭代的工作外，几乎没有人认真尝试建立迭代对称扩张的一般框架。本文发展了对称扩张理论，涵盖不同类型的迭代、商、等价关系，以及能够用这种语言描述的结构性结果。特别是，我们对Grigorieff的一些重要定理作了现代阐述，研究了对称扩张中的Kinna–Wagner原理，并证明了ZF 可以推出每个集合都属于遗传序数可定义集的某个对称扩张。

目录

1. 引言 2
2. 对称系统与扩展 2
3. 两步迭代 6
4. 理想支撑迭代 9
5. 对称系统的等价性 15
6. 积与约化两步迭代 20
7. 商 23
8. 对称扩张的种子 30
9. 系统的完备化 32
10. 刻画对称扩张 34
11. Kinna–Wagner 原理 36
12. 关于遗传序数可定义集的泛型性 37
参考文献 39

致谢。 作者的部分研究工作获得了英国研究与创新署未来领袖奖学金 [MR/T021705/2] 的资助。第一作者获得了英国研究与创新署未来领袖奖学金 [MR/Y034058/1] 的资助。本研究全部或部分由奥地利科学基金会（FWF） [10.55776/ESP5711024] 资助。为满足开放获取要求，作者已对本次投稿所产生的任何作者接受稿版本采用知识共享署名许可协议（CC BY）公共版权许可。作者谨向 Peter Holy 致以特别感谢，感谢他就本文早期稿件进行的多次讨论并提出宝贵意见。

日期：2026年2月20日 .
2020 数学学科分类。 主要分类 03E35；次要分类 03E25、03E40。

1. 引言

迭代是数学中一种常见的方法。它使我们能够将一个大问题拆解成许多小问题，然后逐个解决。集合论也不例外；Cohen 发表关于强迫的两篇论文后不久，[1,2] 首批迭代强迫实例也被发现了。最著名的是，Solovay 和 Tennenbaum [18] 利用迭代强迫证明了 Suslin 假设的一致性；自这项技术诞生以来的数十年间，它也得到了显著拓展。

强迫对于研究 ZFC 模型非常有用，因为它保留了选择公理，[1] 这无疑是一项理想的性质，但也使得研究无选择宇宙更加困难。然而，Cohen 在其早期工作中就已注意到，我们可以转向扩展的一个内模型，即中间模型，在那里选择公理不成立。这最终催生了对称扩张 这一技术：除了强迫概念之外，我们还给定一个自同构群和一个子群滤子，它们使我们能够预先确定一个 ZF 中间模型，并运用强迫论工具对其进行研究。Grigorieff 对这一概念作了更抽象的研究 [3], ，并获得了关于对称扩张的若干结构性结果。

迭代对称扩张数十年来一直见于数学文献，但在 [10] 之前，这种做法始终是特设的，从未纳入一般化框架。 [14,16,17]中的研究便是其中令人瞩目的例子。

本文第一作者曾于 [10] 首次尝试构建一个用于迭代对称扩张的通用框架。该框架的阐述确实较为困难，因为目前其应用仍然有限。此外，该框架仅允许有限支撑迭代，因此更难保留某些选择公理，例如依赖选择；依赖选择很自然地适用于可数闭扩展所保留的情形。

本文扩展并重新梳理了对称扩张的基础理论及其迭代框架。事实上，我们旨在精简 [10]中的定义和记号，使该方法的应用更加简单。本文的目标是让对称扩张及其扩展更易于理解。

我们与强迫理论并行发展对称扩张理论。我们研究对称扩张、迭代和积的基础知识，以及一种中间概念——约化积。[2] 这些概念自然引出对称系统的完备化、嵌入和商。

所有这些理想为我们提供了一种新颖且更易于使用的语言，使我们能够阐述并更新、推广 Grigorieff 原论文中的定理。进而，我们得以证明，从一个ZFC模型出发，每个对称扩张都关联着一个基数 κ，使得 $\mathsf{KWP}^*_{\kappa^+}$ 必定在该对称扩张中成立（见定理 11.7）。我们还运用这种新语言证明，每个集合都属于 遗传序数可定义集 的一个对称扩张（见定理 12.2）。

2. 对称系统与扩展

本节将用新的记号和术语重新介绍对称系统和对称扩张。我们认为这样更加简洁，也有望更有利于今后的研究。我们遵循强迫的标准处理方式，即强迫概念是一个带有最大元的预序集 $\mathbb{P}$，最大元通常记作 $\mathbb{1}_{\mathbb{P}}$。 $\mathbb{P}$ 的元素称为条件，我们用 $q \leq p$ 表示

[1]也就是说，从一个 ZFC 模型出发，任何强迫扩张都是一个 ZFC 模型。[2]约化积对应于 [10] 中的“生产性迭代”。

也就是说， q 比 p更强，或者说 q 扩展了 p。如果两个条件有公共扩展，则称它们相容；否则称它们不相容。

$\mathbb{P}$-名称的类， $V^{\mathbb{P}}$ 由以下递归定义： $V_\alpha^{\mathbb{P}} = \bigcup\{\mathcal{P}(\mathbb{P} \times V_\beta^{\mathbb{P}}) : \beta < \alpha\}$，其中 $V^{\mathbb{P}} = \bigcup_{\alpha\in\text{序数}} V_\alpha^{\mathbb{P}}$。给定一个 $\mathbb{P}$-名称集合 X，我们用 $X^\bullet$ 表示它生成的“显然”名称。也就是说，

$$X^\bullet = \{(\mathbb{1}, \dot{x}) : \dot{x} \in X\}.$$

我们将这一记号扩展到有序对，以及定义域为 $\bullet$-名称的序列和函数。利用这一记号，我们可以定义典型地基模型名称： $\check{}x = \{\check{}y : y \in x\}^\bullet$。

2.1. **对称系统**。

定义 2.1. 设 $\mathcal{G}$ 是一个群。那么， $\mathcal{G}$ 的子群集合 $\mathcal{F}$ 称为滤子，若

(1) $\forall H_0 \leq H_1 \leq \mathcal{G}(H_0 \in \mathcal{F} \rightarrow H_1 \in \mathcal{F})$, (2) $\forall H_0, H_1 \in \mathcal{F}(H_0 \cap H_1 \in \mathcal{F})$.

$\mathcal{F}$ 是正规 的，若对每一个 $\pi \in \mathcal{G}$， $H \in \mathcal{F}$，则也有 $\pi H \pi^{-1} \in \mathcal{F}$。

定义 2.2. 一个对称系统 是三元组 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$，其中 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念， $\mathcal{G}$ 是 $\mathbb{P}$ 上的自同构群，并且 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{G}$的正规子群滤子。

在许多情形下，我们实际上可以允许 $\mathcal{G}$ 并不字面上由作用在 $\mathbb{P}$上的自同构构成。相反，有时仅仅存在 $\mathcal{G}$ 在 $\mathbb{P}$上的隐含作用。这纯粹是一种技术性区分，不影响任何论证，也不影响对称扩张的实践。特别地，我们在下文定义的所有概念都可以用类似的方式在这种更一般的情形下导出。正式定义仍然是定义2.2。

每当 π 是 $\mathbb{P}$的自同构时， π 依递归定义自然地扩张到 $\mathbb{P}$-名称：

$$\pi(\dot{x}) = \{(\pi(p), \pi(\dot{y})) : (p, \dot{y}) \in \dot{x}\}.$$

这一作用相对于强迫关系是良态的。换言之，如果 $p \Vdash \varphi(\dot{x})$，则 $\pi(p) \Vdash \varphi(\pi(\dot{x}))$。

在本节余下部分，固定一个对称系统 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$。

定义 2.3。 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$ 称为$\mathcal{S}$-对称的，当且仅当 $\text{sym}_\mathcal{S}(\dot{x}) \in \mathcal{F}$，其中

$$\text{sym}_\mathcal{S}(\dot{x}) := \{\pi \in \mathcal{G} : \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}.$$

由于 $\text{sym}_\mathcal{S}(\dot{x})$ 仅取决于 $\dot{x}$ 和群 $\mathcal{G}$，我们有时也可以写作 $\text{sym}_\mathcal{G}(\dot{x})$。此外，只要 $\mathcal{S}$ 的含义可由上下文确定，我们也可以直接写作 $\text{sym}(\dot{x})$。按照惯例，这同样适用于我们给出的所有定义。

定义 2.4。秩为 $\leq \alpha$ 的遗传$\mathcal{S}$-对称名称集合，按 α 递归定义如下

$$\mathsf{HS}_{\alpha,\mathcal{S}} = \left\{ \dot{x} \subseteq \mathbb{P} \times \bigcup_{\beta<\alpha} \mathsf{HS}_{\beta,\mathcal{S}} : \dot{x} \text{ is } \mathcal{S}\text{-symmetric} \right\}.$$

遗传 S-对称名称的类为

$$\mathsf{HS}_\mathcal{S} = \bigcup_{\alpha\in\text{Ord}} \mathsf{HS}_{\alpha,\mathcal{S}}.$$

$\mathsf{HS}_\mathcal{S}$ 的元素也称为$\mathcal{S}$-名称。

$\mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$ 的一个基本性质是，在$\mathcal{G}$的作用下具有封闭性：对于每个 $\dot{x} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$，任意 $\pi \in \mathcal{G}$ $\pi(\dot{x}) \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$。这由$\mathcal{F}$的正规性以及 $\mathrm{sym}_{\mathcal{S}}(\pi(\dot{x})) = \pi\,\mathrm{sym}_{\mathcal{S}}(\dot{x})\pi^{-1}$这一事实可得。

通过从强迫概念转向其布尔完备化，并从自同构群转向整个自同构群，我们可以稍微弱化正规性的定义，从而得到一种更统一的对称扩张定义，而该定义现在完全取决于子群滤子。这见于 Grigorieff 的工作 [3], 但在实践中，将其应用于标准情形会稍微繁琐一些，因此限制群的范围往往很有用。在其他手稿中，$\mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$ 通常记作$\mathrm{HS}_{\mathcal{F}}$，因为同一个群可能对应不同的滤子。但随着我们在本节余下部分逐步引入新记号，选择$\mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$ 会更有道理。

定义 2.5。$\mathcal{S}$ 称为坚韧，如果存在条件的稠密集 $p \in \mathbb{P}$，使得 $\mathrm{fix}(p) \in \mathcal{F}$，其中 $\mathrm{fix}(p) := \{\pi \in \mathcal{G} : \pi(p) = p\}$。

2.2. **对称扩张**。回顾一下，G上的滤子是 $\mathbb{P}$ 的一个非空向上封闭子集，并且对于任意 $p, q \in G$，都存在 $r \in G$ 使得 $r \leq p, q$。

定义 2.6. 设 G 是 $\mathbb{P}$上的一个滤子。则我们定义模型

$$V[G]_{\mathcal{S}} := \{\dot{x}^G : \dot{x} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}\}.$$

定理 2.7 (例如参见 [8])。设 G 是 V上的一个 $\mathbb{P}$-泛型滤子。则 $V[G]_{\mathcal{S}} \models \mathsf{ZF}$。

此外，我们可以为对称扩张定义一个强迫关系 $\Vdash_{\mathcal{S}}$。更具体地说，每当 φ 是集合论语言中的一个公式，且 $p \in \mathbb{P}$ 和$\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$是 $\mathbb{P}$-名称，并满足 $\Vdash \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n \in V[G]_{\mathcal{S}}$时，

$$p \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)$$

当且仅当对于每个包含 p的、 V上的 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，都有 $V[G]_{\mathcal{S}} \models \varphi(\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_n^G)$。注意，当 φ 是 Δ_0时， $p \Vdash \varphi$ 与 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi$并无区别。

事实证明， $\mathbb{P}$-泛型性对于定理 2.7而言远非必要。[3]

定义 2.8。我们称 G 为 V 上的$\mathcal{S}$-泛型滤子，当且仅当 G是 $\mathbb{P}$上的滤子，且对于每个 $D \subseteq \mathbb{P}$，只要 $G \cap D \neq \emptyset$、 $D \in V$满足

(1) D 在 $\mathbb{P}$ 中稠密，且 (2) D 是$\mathcal{S}$-对称的，即存在 $H \in \mathcal{F}$ 使得 π“$D = D$ 对每个 $\pi \in H$成立。

在这些假设下， D 称为对称稠密。我们也可以称 G为对称泛型，以表明它未必是 $\mathbb{P}$-泛型。

定理 2.9 （对称迫引用定理）。设 $p \in \mathbb{P}$、 $\dot{x}_0$、……、 $\dot{x}_n$ 是 $\mathcal{S}$-名称，且 φ 是集合论语言中的一个公式。那么 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0$、……、 $\dot{x}_n)$ 当且仅当对于任意包含 p的、 V上的 $\mathcal{S}$-泛型滤子 G，都有 $V[G]_{\mathcal{S}} \models \varphi(\dot{x}_0^G$、……、 $\dot{x}_n^G)$。特别地，$V[G]_{\mathcal{S}}$ 是ZF的一个模型。

证明。只需注意，在强迫定理通常的归纳证明中，我们唯一需要命中的稠密集都是对称的，即可轻松验证这一点。我们使用已经了解的关于强迫关系 $\Vdash_{\mathcal{S}}$ 的标准事实，因此证明相当简短。

根据 $\dot{x}$和$\dot{y}$的秩对 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} \subseteq \dot{y}$ 和 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} \in \dot{y}$ 进行归纳。若 $\mathrm{rk}(\dot{x})$、$\mathrm{rk}(\dot{y}) \leq \alpha$，则 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} \subseteq \dot{y}$当且仅当对于每个 $(r, \tau) \in \dot{x}$， $r \parallel p$，集合$D_{(r,\tau)} = \{q : \exists (r', \sigma) \in \dot{y} : q \leq r' \wedge q \Vdash_{\mathcal{S}} \tau = \sigma\}$在$\{q : q \leq p, r\}$中是稠密的。上面的集合$D_{(r,\tau)}$ 是 S-对称的，并且 $D_{(r,\tau)} = D_{(r,\tau)} \cup \{q : q \perp D_{(r,\tau)}\}$是对称稠密的。因此 $G \cap \tilde{D}_{(r,\tau)} \neq \emptyset$，且如果 p、 $r \in G$，那么对于任意 $q \in G \cap \tilde{D}_{(r,\tau)}$，存在 $q' \leq q$、 p、 r，从而必然有 $q \in D_{(r,\tau)}$和 $G \cap D_{(r,\tau)} \neq \emptyset$。根据归纳假设，由于 $q \Vdash_{\mathcal{S}} \tau = \sigma$ 且 $q \in G$， $\tau^G = \sigma^G \in \dot{x}^G \cap \dot{y}^G$. 把一切内容

[3]这一点在 [10]的第 8 节中是隐含的。

结合起来，我们得到 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} \subseteq \dot{y}$ 和 $p \in G$蕴含 $\dot{x}^G \subseteq \dot{y}^G$。另一方面，如果对于每个 $\mathcal{S}$-泛型 $G \ni p$、$\dot{x}^G \subseteq \dot{y}^G$，则所有集合 $D_{(r,\tau)}$ 都必须在 $\{t : t \leq p, r\}$ 中稠密；否则存在一个对称泛型 G，使得 $p, r \in G$，但 $G \cap D_{(r,\tau)} = \emptyset$。然而，随后我们利用归纳假设得到 $\tau^G \in \dot{x}^G \setminus \dot{y}^G$。因此确实有 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} \subseteq \dot{y}$。这样我们也证明了 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} = \dot{y}$的定理。关于 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} \in \dot{y}$ 的证明建立在此基础上，且类似。

一旦我们证明了原子公式的定理，其余部分就可以通过对 φ 的复杂度进行归纳轻松得出。

如果 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi$，$p \in G$，那么 $V[G]_{\mathcal{S}} \not\models \varphi$，因为否则对于某个 $q \in G$，从而对于某个 $r \leq p, q$，$r \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi$，由归纳假设可知。因此 $V[G]_{\mathcal{S}} \models \neg\varphi$。另一方面，如果 $p \nVdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi$，则存在 $q \leq p$，使得 $q \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi$，从而存在一个$\mathcal{S}$-泛型，其满足 $q \in G$ 且 $V[G]_{\mathcal{S}} \models \varphi$。

最后，$p \Vdash_{\mathcal{S}} \forall x\varphi(x)$ 当且仅当对每个 $\mathcal{S}$-名称 $\dot{x}$，$p \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x})$；当且仅当对每个 $\mathcal{S}$-名称 $\dot{x}$ 以及任意 $\mathcal{S}$-泛型 $G \ni p$，$V[G]_{\mathcal{S}} \models \varphi(\dot{x}^G)$；当且仅当对每个 $\mathcal{S}$-泛型 $G \ni p$，$V[G]_{\mathcal{S}} \models\forall x\varphi(x)$。□

上述证明中隐含着如下事实：若 $\dot{x}$ 是 $\mathcal{S}$-对称的，则 $\{p \in \mathbb{P} : p \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}) \vee p \Vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi(\dot{x})\}$ 是一个对称稠密开集。我们要指出，尽管强迫关系 $\Vdash_{\mathcal{S}}$可以取任意名称 $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n$，只要它们被 $\mathbb{P}$ 强迫为对称扩张的元素，但在上述力迫定理中，我们严格要求这些名称是遗传对称的。例如，考虑如下情形：$\mathcal{G} = \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$，$\mathcal{F} = \{\mathcal{G}\}$，并设 $\mathbb{P} = 2^{<\omega}$。于是容易看出，任意$x \in 2^\omega$ 都诱导一个 $\mathcal{S}$-泛型 $G_x = \{x \restriction n : n \in \omega\}$。设 $A \subseteq 2^{<\omega}$ 为一个极大反链，且 $x \in 2^\omega$ 使得 $G_x \cap A = \emptyset$。名称 $\dot{y} = \{(s, \check{0}) : s \in A\}$ 显然被强迫属于对称扩张，因为它被强迫等于 $\{0\}$。另一方面，$\dot{y}^{G_x} = \emptyset$。

定义 2.10。V的对称扩张是任何形如 $V[G]_{\mathcal{S}}$ 的模型，其中 $\mathcal{S}$ 是一个对称系统，且 G 是$\mathcal{S}$-泛型的，且其基模型为 V。

传统上，以及在大多数文献中，对称扩张只通过 $\mathbb{P}$-泛型滤子构造。但事实上，正如我们稍后将看到的，这两个概念完全一致。更准确地说，我们将证明，只要 G 是 $\mathcal{S}$-泛型的，就也存在一个 $\mathbb{P}$-泛型 H，使得 $V[G]_{\mathcal{S}} = V[H]_{\mathcal{S}}$（见定理 7.21）。不过，鉴于一般理论，考虑这种更一般形式的泛型性是有意义的，这一点将在定理3.3中显现。

2.3. **闭名称**。

定义 2.11。对于一个$\mathcal{S}$-名称 $\dot{x}$ 和一个序数 α，定义

$$\mathrm{cl}_\alpha(\dot{x}) := \{(p, \dot{y}) : \dot{y} \in \mathsf{HS}_\alpha \wedge p \Vdash \dot{y} \in \dot{x}\}.$$

此外，我们令 $\mathrm{cl}(\dot{x}) := \mathrm{cl}_\alpha(\dot{x})$，其中 α 是使得 $\Vdash \dot{x} = \mathrm{cl}_\alpha(\dot{x})$ 成立的最小值。若 $\dot{x} = \mathrm{cl}(\dot{x})$，则称 $\dot{x}$ 是闭的。

当然要注意，$\mathrm{cl}(\mathrm{cl}(\dot{x})) = \mathrm{cl}(\dot{x})$，这也说明了这一术语的合理性。下面的引理显然成立，但意义却相当重大。它表明，我们可以从名称在强迫等价下的每个等价类中统一选取代表元（$\dot{x} \sim \dot{y}$ 当且仅当 $\Vdash \dot{x} = \dot{y}$）。在 ¬选择公理的语境下，这是一个特别有用的观察。

引理 2.12. 每个 $\mathcal{S}$-名称都强迫等价于唯一的闭合 $\mathcal{S}$-名称。

引理 2.13. 设 $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n$ 是 $\mathcal{S}$-名称，且 φ 是一个公式，使得

$$\Vdash_{\mathcal{S}} \exists! y \varphi(y, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n).$$

于是存在唯一的闭合 $\mathcal{S}$-名称 $\dot{y}$，使得 $\Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{y}, \dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n)$，并且我们有 对称群（$\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n$） $\leq$ 对称群（$\dot{y}$）。

证明。 只需令

$$\dot{y} = \{(p, \dot{z}) : \dot{z} \in \mathsf{HS}_\alpha \wedge p \Vdash_{\mathcal{S}} \forall y(\varphi(y, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n) \to \dot{z} \in y)\},$$

其中 α 是使其成立的最小值。 □

因此，每当我们用一个可定义函数（例如 P(·)、(·, ·) ⋃、传递闭包 . . .）扩展 ZF 的语言时——我们一直都在隐式地这样做——都可以将其典范地扩展到 S-名称（当然也同样可以扩展到 $\mathbb{P}$-名称）。下一节将出现这一做法的一个具体实例：当 f 是一个 S-名称，表示一个函数，而 $f(\dot{x})^{\cdot}$ 表示唯一满足 $\Vdash (\dot{x}, \dot{y}) \in f$ 的闭名称 $\dot{y}$ 时。引理 2.13 的另一个重要用途如下，它是一种非常实用的技巧，也可以看作混合的一种弱形式。

引理 2.14。 设 $\dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$ 是 $\mathcal{S}$-名称，且 $p \in \mathbb{P}$ 满足某个公式 χ

$$p \Vdash_{\mathcal{S}} \chi(\dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n).$$

假设存在某个 $\mathcal{S}$-名称 $\dot{z}$，使得 $\Vdash_{\mathcal{S}} \chi(\dot{z}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)$。

那么存在一个 $\mathcal{S}$-名称 $\dot{y}$，它可由 $\dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$ 和 $\dot{z}$ 一致地定义，使得 对称群$(\dot{z}, \dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n) \leq$ 对称群$(\dot{y})$，$p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{y} = \dot{x}$，并且 $\Vdash_{\mathcal{S}} \chi(\dot{y}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)$。

证明。 只需考虑公式

$$\varphi(\dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n, \dot{z}, y) = (\chi(\dot{x}, \dot{x}_0, \dots) \wedge y = \dot{x}) \vee (\neg\chi(\dot{x}, \dot{x}_0, \dots) \wedge y = \dot{z}).$$

通过引理 $\dot{y}$ 得到的名称 2.13 显然可行。 □

这个引理的实际含义是，在许多情况下，当我们考虑具有某种性质 χ 的对象 $x \in V[G]_{\mathcal{S}}$ 时，存在一个名称 $\dot{y}$ 对应于 x，使得 $\Vdash_{\mathcal{S}} \chi(\dot{y})$ 已经成立。在许多常见的此类情况下，我们有 对称群$(\dot{z})$ = 对称群$(\dot{x}_0)$ = $\mathcal{G}$，因此对称群$(\dot{y})$ = 对称群$(\dot{x})$。例如，如果 $\mathbb{Q}$ 是一个 $\mathcal{S}$-名称，用于某个强迫偏序集，那么对称群$(\mathbb{Q})$ = $\mathcal{G}$，并且 $p \Vdash \dot{q} \in \mathbb{Q}$，我们可以直接假设 $\Vdash_{\mathcal{S}} \dot{q} \in \mathbb{Q}$，因为 $\mathbb{Q}$ 的最大条件是 $\mathbb{Q}$ 中某个元素的典范见证。对于 $p \Vdash \dot{\pi} \in H$，其中 $\Vdash H \leq \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$，存在恒等映射 id，等等。

虽然引理 2.14 看起来相当平常，但它是我们重新阐述迭代时的关键点，消除了 [10] 中产生的许多技术困难。

例 2.15（基本 Cohen 模型）。令 $\mathbb{P} = \mathrm{Add}(\omega, \omega)$，也就是说，$\mathbb{P}$ 由有限部分函数 $p\colon \omega \times \omega \to 2$组成。令 G 为 ω 上的有限支撑置换群 π，它在条件 p 上的作用为 $\pi(p)(\pi(n)\ m) = p(n, m)$。滤子 F 由 G 中形如 $\mathrm{fix}(n) := \{\pi \in \mathrm{G} : \pi(n) = n\}$ 的子群生成。系统 C = (ℙ, G, F) 生成了所谓的基本 Cohen 模型。

如果 $\dot{c}_n$ 是第 n 个 Cohen 实数的典范名称，那么 $\pi(\dot{c}_n) = \dot{c}_{\pi(n)}$，由此可得 $\mathrm{sym}(\dot{c}_n) = \mathrm{fix}(n)$。$\dot{c}_n$ 中出现的唯一名称是检验名称，因此 $\dot{c}_n \in \mathsf{HS}$。此外，$\dot{A} := \{\dot{c}_n : n \in \omega\}^\bullet \in \mathsf{HS}$，因为 sym$(\dot{A}) = \mathcal{G}$；但是，在 $V[G]_{\mathcal{C}}$ 中，$\dot{A}^G$ 无法良序，事实上它是戴德金有限的。关于基本 Cohen 模型的更多信息，参见 [8]。

3. 两步迭代

定义 3.1. 设 $\mathcal{S}_0 = (\mathbb{P}_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{F}_0)$ 是一个对称系统，并设 $\mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{F}_1)^\bullet$ 是一个 $\mathcal{S}_0$-名称，使得 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \mathcal{S}_1$ 是一个对称系统，且 $\mathrm{sym}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{G}_0$。我们将两步迭代 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 定义如下。

(1) $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 *_{\mathcal{S}_0} \mathbb{P}_1$ 由满足以下条件的有序对 $(p, \dot{q})$ 构成：$p \in \mathbb{P}_0$ 且 $\dot{q}$ 是一个闭的 $\mathcal{S}_0$-名称，使得 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot{q} \in \mathbb{P}_1$。扩张关系定义为 $(p', \dot{q}') \leq$

$(p, \dot{q})$ 当且仅当 $p' \leq p$ 且 $p' \Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot{q}' \leq \dot{q}$。注意，这使得 $\mathbb{P}$ 成为通常强迫迭代 $\mathbb{P}_0 * \dot{\mathbb{P}}_1$的一个稠密子偏序集。[4]

(2) 任意 $\bar{\pi} = (\pi_0, \dot{\pi}_1)$，其中 $\pi_0 \in \mathcal{G}_0$，$\dot{\pi}_1$ 是一个 $\mathcal{S}_0$-名称，且 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot{\pi}_1 \in \mathcal{G}_1$，被视为由下式给出的映射

$$\bar{\pi}(p, \dot{q}) = (\pi_0(p), \dot{\pi}_1(\pi_0(\dot{q}))).$$

$\mathcal{G}$ 是所有此类 $\bar{\pi}$的群。[5]

(3) 设 (H_0, H_1) 满足 $H_0 \in \mathcal{F}_0$，H_1 是一个 $\mathcal{S}_0$-名称，$H_0 \leq$ 对称群(H_1)，且 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} H_1 \in \mathcal{F}_1$。于是，我们将 (H_0, H_1) 与$\mathcal{G}$ 中由所有自同构 $\bar{\pi} = (\pi_0, \dot{\pi}_1)$ 构成的子群等同，其中 $\pi_0 \in H_0$ 且 $\Vdash \dot{\pi}_1 \in H_1$。$\mathcal{F}$ 由这些子群生成。

定义和表示两步迭代有许多不同且等价的方式。对我们而言，目的是至少给出一个技术上精确且可行的定义，以便研究其基础理论。不过我们希望，最终就像强迫理论一样，在澄清了更根本的问题并建立了足够的直觉之后，精确定义在实际应用中就不再那么重要。关于这一点，我们来谈几点看法。

在 (1) 中使用闭名称，目的只是确保由成对的 $\bar{\pi}$ 所诱导的映射是良定义的，并构成自同构。当然，要解决这个问题还有许多其他方法。首先，除了定义 2.11 中的闭名称之外，我们当然还可以选用其他名称代表元。更有意思的是，在实际使用中，我们或许可以完全不提闭名称，只需将 $(p, \dot{q})$ 与 $(p, \mathrm{cl}(\dot{q}))$等同起来，其中 $\dot{q}$ 是任意的$\mathcal{S}_0$-名称。这正是我们已经在使用的那种记号滥用，例如写作 $(\pi_0, \dot{\pi}_1)$ 等等。[6]

引理 3.2。$\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$ 是一个对称系统。

证明。要验证每个 (H_0, H_1)，尤其是 $\mathcal{G} = (\mathcal{G}_0, \mathcal{G}_1)$ 是一个群，我们先计算复合的公式：

$$\begin{aligned}(\pi_0, \dot{\pi}_1) \circ (\sigma_0, \dot{\sigma}_1)(p, \dot{q}) &= (\pi_0, \dot{\pi}_1)(\sigma_0(p), \dot{\sigma}_1(\sigma_0(\dot{q}))) \\ &= ((\pi_0 \circ \sigma_0)(p), \dot{\pi}_1(\pi_0(\dot{\sigma}_1(\sigma_0(\dot{q}))))) \\ &= ((\pi_0 \circ \sigma_0)(p), \dot{\pi}_1 \circ \pi_0(\dot{\sigma}_1)(\pi_0 \circ \sigma_0(\dot{q}))) \\ &= (\pi_0 \circ \sigma_0, \dot{\pi}_1 \circ \pi_0(\dot{\sigma}_1))(p, \dot{q}).\end{aligned}$$

由于 $\pi_0, \sigma_0 \in H_0$，因此 $\pi_0 \circ \sigma_0 \in H_0$；又由于 $\Vdash \dot{\sigma}_1 \in H_1$ 和 π_0 逐点固定子群 H_1，因此 $\Vdash \pi_0(\dot{\sigma}_1) \in H_1$，所以 $\Vdash \dot{\pi}_1 \circ \pi_0(\dot{\sigma}_1) \in H_1$。同样容易看出

$$(\sigma_0, \dot{\sigma}_1)^{-1} = (\sigma_0^{-1}, \sigma_0^{-1}(\dot{\sigma}_1^{-1})) \in (H_0, \dot{H}_1).$$

我们来验证 $\mathcal{F}$ 是正规的。设 $(H_0, H_1) \in \mathcal{F}$，且 $\bar{\sigma} = (\sigma_0, \dot{\sigma}_1) \in \mathcal{G}$ 任意。考虑 $H_0' = H_0 \cap \mathrm{sym}(\sigma_0^{-1}(\dot{\sigma}_1^{-1}))$，于是 $(H_0', \dot{H}_1) \in \mathcal{F}$ 是

[4]还要注意，$\mathbb{P}$ 确实是一个集合，而不是真类，因为对于 $\dot{\mathbb{P}}_1$ 的元素，闭名称只有集合多个。[5]请注意，根据引理 2.13 之后的约定，集合 $\dot{\pi}_1(\pi_0(\dot{q}))$ 是另一个闭名称。不难验证，由 $\bar{\pi}$ 诱导的映射确实是一个自同构；我们将在引理 3.2 中验证 G 构成一个群。还要指出，不同的对 $(\pi_0, \dot{\pi}_1)$ 可能会产生相同的映射。[6]我们也可以注意到，每当 $(\pi_0, \dot{\pi}_1)$ 和 $(\sigma_0, \dot{\sigma}_1)$ 诱导相同的映射时，实际上 $\pi_0 = \sigma_0$ 和 $\Vdash \dot{\pi}_1 = \dot{\sigma}_1$。

$\dot{(}H_0, H_1)$。设 $(\pi_0, \dot\pi_1) \in (H_0', H_1)$ 任意。则：

$$\begin{aligned}(\sigma_0, \dot\sigma_1) \circ (\pi_0, \dot\pi_1) \circ (\sigma_0, \dot\sigma_1)^{-1} &= (\sigma_0, \dot\sigma_1) \circ (\pi_0, \dot\pi_1) \circ (\sigma_0^{-1}, \sigma_0^{-1}(\dot\sigma_1^{-1})) \\ &= (\sigma_0, \dot\sigma_1) \circ (\pi_0 \circ \sigma_0^{-1}, \dot\pi_1 \circ \pi_0(\sigma_0^{-1}(\dot\sigma_1^{-1}))) \\ &= (\sigma_0, \dot\sigma_1) \circ (\pi_0 \circ \sigma_0^{-1}, \dot\pi_1 \circ \sigma_0^{-1}(\dot\sigma_1^{-1})) \\ &= (\sigma_0 \circ \pi_0 \circ \sigma_0^{-1}, \dot\sigma_1 \circ \sigma_0(\dot\pi_1 \circ \sigma_0^{-1}(\dot\sigma_1^{-1}))) \\ &= (\sigma_0 \circ \pi_0 \circ \sigma_0^{-1}, \dot\sigma_1 \circ \sigma_0(\dot\pi_1) \circ \sigma_0\sigma_0^{-1}(\dot\sigma_1^{-1})) \\ &= (\sigma_0 \circ \pi_0 \circ \sigma_0^{-1}, \dot\sigma_1 \circ \sigma_0(\dot\pi_1) \circ \dot\sigma_1^{-1}) \\ &= (\sigma_0 \circ \pi_0 \circ \sigma_0^{-1}, \dot\sigma_1 \circ \dot\tau \circ \dot\sigma_1^{-1}),\end{aligned}$$

其中 $\Vdash \dot\tau \in \sigma_0(H_1)$。注意 $\Vdash \sigma_0(H_1) \in \mathcal{F}_1$，因为对称群$(\mathcal{S}_1) = \mathcal{G}_0$。因此，若令 $\dot K_1$ 为 $\dot\sigma_1\sigma_0(\dot H_1)\dot\sigma_1^{-1}$的一个名称，且 $K_0 = H_0' \cap \sigma_0 H_0' \sigma_0^{-1} \cap$ 对称群$(\dot K_1)$，则 $(K_0, \dot K_1) \in \mathcal{F}$ 且 $(K_0, \dot K_1) \subseteq \bar\sigma(H_0', \dot H_1)\bar\sigma^{-1} \subseteq \bar\sigma(H_0, \dot H_1)\bar\sigma^{-1}$。□

下面的因子分解定理表明，这是两步迭代的一个正确定义。

定理 3.3 (因子分解定理)。设 $\mathcal{S} = \mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$ 是如上所述的两步迭代。每当 G 在 V 上是 $\mathcal{S}$-泛型时，$G_0 =$ 定义域 G 在 V 上是 $\mathcal{S}_0$-泛型，并且 $G_1 = \{\dot q^{G_0} : \exists p \in G_0((p, \dot q) \in G)\}$在 $V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$上是 $\mathcal{S}_1$-泛型，其中 $\mathcal{S}_1 = \dot{\mathcal{S}}_1^{G_0}$，且

$$V[G]_{\mathcal{S}} = V[G_0]_{\mathcal{S}_0}[G_1]_{\mathcal{S}_1}.$$

另一方面，每当 G_0 在 V 上是 $\mathcal{S}_0$-泛型，且 G_1 在$V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$上是 $\mathcal{S}_1$-泛型时，那么 $G = G_0 * G_1 = \{(p, \dot q) : \ p \in G_0 \wedge \dot q^{G_0} \in G_1\}$ 在 V上是 $\mathcal{S}$-泛型，且$V[G]_{\mathcal{S}} = V[G_0]_{\mathcal{S}_0}[G_1]_{\mathcal{S}_1}$.

证明。证明的思路与强迫的情形基本相同，依赖于这样一个观察：$\mathbb{P}$ 的对称稠密子集，本质上等同于 $\mathbb{P}_1$的一个$\mathcal{S}_0$-名称，它表示 $\mathbb{P}_1$的一个$\mathcal{S}_1$-对称稠密子集。

首先，设 G 在 V上是 S-泛型。设 D_0 是$\mathbb{P}_0$ 的一个对称稠密子集，其见证为 $H \in \mathsf{F}_0$。那么 $D = \{(p, \dot q) \in \mathbb{P} : \ p \in D_0\}$是 $\mathbb{P}$ 的一个对称稠密子集，其见证为$(H, \dot{\mathsf{G}}_1) \in \mathsf{F}$。由于 $G \cap D \neq \emptyset$，我们也有 $G_0 \cap D_0 \neq \emptyset$。因此，$G_0$ 在 V上是 S_0-泛型。接下来，设 $D_1 \in V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$ 是 $\mathbb{P}_1$ 的一个对称稠密子集，其见证为 $H_1 \in \mathsf{F}_1$。那么存在 S_0-名称 $\dot D_1$ 和 $\dot H_1$，使得 $\dot D_1^{G_0} = D_1$, $\dot H_1^{G_0} = H_1$, $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot D_1$ 是稠密的，$\Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot H_1 \in \dot{\mathsf{F}}_1$，且 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \forall \pi \in \dot H_1 (\pi\text{“}\ \dot D_1 = \dot D_1)$。[7] 考虑

$$D = \{(p, \dot q) : p \Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot q \in \dot D_1\} \in V.$$

D 显然是稠密且对称的，其见证为 $(\mathrm{sym}(\dot D_1, \dot H_1)\ \dot H_1)$：

对于$(\pi_0, \dot\pi_1) \in$(对称群$(\dot D_1, \dot H_1), \dot H_1)$,

$$\begin{aligned}(\pi_0, \dot\pi_1)(p_0, \dot q) \in D &\text{ iff } (\pi_0(p_0), \dot\pi_1(\pi_0(\dot q))) \in D \\ &\text{iff } \pi_0(p_0) \Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot\pi_1(\pi_0(\dot q)) \in \dot D_1 \\ &\text{iff } p_0 \Vdash_{\mathcal{S}_0} \pi_0^{-1}(\dot\pi_1(\pi_0(\dot q))) \in \pi_0^{-1}(\dot D_1) \\ &\text{iff } p_0 \Vdash_{\mathcal{S}_0} \pi_0^{-1}(\dot\pi_1)(\dot q) \in \dot D_1 \\ &\text{iff } p_0 \Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot q \in \dot D_1, \text{ since } p_0 \Vdash_{\mathcal{S}_0} \pi_0^{-1}(\dot\pi_1) \in \pi_0(\dot H_1) = \dot H_1, \\ &\text{iff } (p_0, \dot q) \in D.\end{aligned}$$

[7] 若 $\dot D_1'^{G_0} = D_1$，$\dot H_1'^{G_0} = H_1$ 是任意的，我们就能找到典范的 $\mathcal{S}$-名称 $\dot D_1$，$\dot H_1$ 使得以下命题被强制成立：“若 $\dot D_1'$ 是对称稠密的，其见证为 $\dot H_1'$，那么 $\dot D_1 = \dot D_1'$，$\dot H_1 = \dot H_1'$ 否则 $\dot D_1 = \dot{\mathbb{P}}_1$，$\dot H_1 = \dot{\mathcal{G}}_1$”。这是引理 2.14的一个实例。

因此 $G\cap D\neq\emptyset$ 和 $G_1\cap D_1\neq\emptyset$。

反过来，假设 G_0 在 V 上是 $\mathcal{S}_0$-泛型的， G_1 在 $V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$ 上是 $\mathcal{S}_1$-泛型的，并且 G 按定理陈述中的方式定义。设 (H_0,H_1) 见证 $\mathbb{P}$ 的一个对称稠密子集 D。那么 $D_1:=D$ 实际上是一个带有 $H_0\subseteq\mathrm{sym}(D_1)$ 的 $\mathcal{S}_0$-名称，因为

$$\pi_0(\dot D_1)=\{(\pi_0(p),\pi_0(\dot q)):(p,\dot q)\in D\}=(\pi_0,\dot{\mathrm{id}})\text{“}D=D=\dot D_1,$$

对任意 $\pi_0\in H_0$ 都成立。此外， D_1 是一个稠密集的名称，并且每当 $\dot\pi_1$ 满足 $\Vdash\dot\pi_1\in H_1$ 时， $D_1=D=(\mathrm{id}\ \dot\pi_1)\text{“}D=\{(p,\dot\pi_1(\dot q)):(p,\dot q)\in D\}$ 就是一个关于 $\dot\pi_1$ 的 $\mathcal{S}_0$-名称，因此

$$\Vdash\dot\pi_1\text{“}\dot D_1=\dot D_1.$$

因此 $G_1\cap\dot D_1^{G_0}\neq\emptyset$，也就是说，存在 $(p,\ \dot q)\in\dot D_1=D$ 使得 $p\in G_0$ 且 $\dot q^{G_0}\in G_1$。根据定义，$(p,\ \dot q)\in G$，因此 $G\cap D\neq\emptyset$。

最后，为了证明 $V[G]_{\mathcal{S}}=V[G_0]_{\mathcal{S}_0}[G_1]_{\mathcal{S}_1}$，注意到我们可以将一个$\mathcal{S}$-名称$\dot x$ 与一个$\mathcal{S}_0$-名称对应起来，其中后者是一个$\mathcal{S}_1$-名称；具体做法是递归地定义

$$[\dot x]=\{(p,(\dot q,[\dot y])^\bullet):((p,\dot q),\dot y)\in\dot x\}.$$

容易验证 $\dot x^G=([\dot x]^{G_0})^{G_1}$。类似地，当 $\dot x$ 是一个$\mathcal{S}_0$-名称，且后者是一个$\mathcal{S}_1$-名称时，我们定义

$$]\dot x[=\{((p,\dot q),]\dot y[):p\Vdash_{\mathcal{S}_0}(\dot q,\dot y)^\bullet\in\dot x\}.\qquad\square$$

同样容易推出，任意 $\mathsf{S}_0{*}\mathsf{S}_1$-泛型都具有上述形式 G_0*G_1。注意，与完全强迫泛型滤子相比，使用对称泛型对于因子分解定理而言是绝对必要的。例如，考虑系统 $\mathsf{S}_0=(\mathbb{C},\mathrm{Aut}(\mathbb{C}),\{\mathrm{Aut}(\mathbb{C})\})$，其中 $\mathbb{C}=\mathrm{Add}(\omega,1)$ 是 Cohen力迫。对 S_0-名称 $\dot x$ 的秩进行归纳，容易看出 $\Vdash_{\mathcal{S}_0}\dot x=\check{}x$，其中某个集合为 x。因此，该系统不会添加任何新集合。但是，一个 $\mathbb{C}$-泛型是一个 Cohen 实数c，并且 $V[c]_{\mathcal{S}_0}=V$。现在令 $\mathsf{S}_1=(\mathbb{C},\{\mathrm{id}\},\{\{\mathrm{id}\}\})\in V[c]_{\mathcal{S}_0}$。这个第二个系统恰好在 $V[c]_{\mathcal{S}_0}$上添加一个 Cohen 实数，而 $V[c]_{\mathcal{S}_0}$本身就是这个实数。但 (c,c) 显然不是 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$-泛型的（相对于 V）。不过，它确实对应于一个针对 $\mathsf{S}_0{*}\mathsf{S}_1$的对称脱殊滤子。

这并非一个病态的例子。事实上，根据 Grigorieff 的结果 [3], ，正如我们稍后将重新证明的，对于任意对称系统$(\mathbb{P},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F})$ 以及一个 $\mathbb{P}$-泛型 G（相对于 V），G 本身就是某个强迫概念下的泛型；如果 $V[G]\neq V[G]_{\mathcal{S}}$，该强迫必定是非平凡的。

4. 理想支撑迭代

承接上一节的内容，我们现在引入对称系统的超限迭代，具体而言，是支撑取自序数上某个任意理想的迭代。这里所写的部分内容，也可以在第二作者与 P. Holy 的合作论文中找到原样的表述 [5], ，该论文在此处发展的框架下讨论了有限支撑迭代这一特例。

4.1. **一般迭代**。我们先给出一些初步定义，说明迭代应当是什么样子以及如何构造。我们将这些称为预迭代，并验证一些基本性质。我们暂且不称它们为“真正的”迭代，是因为预迭代的初始阶段甚至不必对应于中间模型。我们可以添加几个简单的条件（定义4.3）来确保这一点，但先给出这些条件会使表述更加清晰。

定义 4.1。考虑如下形式的序列

$$\langle\mathcal{S}_\alpha,\dot{\mathcal{T}}_\alpha:\alpha<\delta\rangle=\langle(\mathbb{P}_\alpha,\mathcal{G}_\alpha,\mathcal{F}_\alpha),(\dot{\mathbb{Q}}_\alpha,\dot{\mathcal{H}}_\alpha,\dot{\mathcal{E}}_\alpha)^\bullet:\alpha<\delta\rangle,$$

其中每个 $\mathcal{S}_\alpha$ 都是一个对称系统，$\mathcal{T}_\alpha$ 是一个对称系统的$\mathcal{S}_\alpha$-名称，且 $\mathrm{sym}(\mathcal{T}_\alpha) = \mathcal{G}_\alpha$。那么，如果对每个 $\alpha < \delta$ 都成立，我们称此序列为长度为 δ 的预迭代

(1) (a) $\mathbb{P}_\alpha$ 由序列 $\bar{p} = \dot{p}(\beta)\colon\ \beta < \alpha$ 组成，其中 $\bar{p} \restriction \beta \in \mathbb{P}_\beta$ 且$\dot{p}(\beta)$ 是 $\dot{\mathbb{Q}}_\beta$ 中某个元素的 S^β 名称，对所有 $\beta < \alpha$、[8]均成立；(b) G_α 由 $\mathbb{P}_\alpha$ 的自同构组成；如下文详述，这些自同构由序列 $\bar{\pi} = \dot{\pi}(\beta)\colon\ \beta < \alpha$ 表示，其中 $\bar{\pi} \restriction \beta \in \mathsf{G}^\beta$，且 $\dot{\pi}(\beta)$ 是 H^β 中某个元素的 S^β名称，对所有 $\beta < \alpha$均成立；(c) F_α 由 G_α 的子群生成；如下文详述，这些子群由序列 $H = H(\beta)\colon\ \beta < \alpha$ 表示，其中 $H \restriction \beta \leq$ 对称群$(H(\beta))$，对所有 $\beta < \alpha$均成立，

(2) $\mathcal{S}_{\alpha+1}$ 如定义 3.1 中各对称系统为序列 $\bar{p}^\frown\dot{q}$，$\bar{\pi}^\frown\dot{\sigma}$ 和 $H^\frown K$。

对于 α 极限，

(3) (a) $\mathbb{P}_\alpha$ 上的序由 $\bar{q} \leq \bar{p}$ 给出，当且仅当对每个 $\beta < \alpha$，$\bar{q} \restriction \beta \leq \bar{p} \restriction \beta$；

(b) 对任意 $\bar{p} \in \mathbb{P}_\alpha$ 和 $\bar{\pi} \in \mathcal{G}_\alpha$，

$$\bar{\pi}(\bar{p}) = \bigcup_{\beta<\alpha} \bar{\pi} \restriction \beta(\bar{p} \restriction \beta),$$

(c) for any $\bar{\pi} \in \mathcal{G}_\alpha$, $\bar{H} \in \mathcal{F}_\alpha$, $\bar{\pi} \in \bar{H}$ iff $\bar{\pi} \restriction \beta \in \bar{H} \restriction \beta$ for all $\beta < \alpha$.

请注意，在每种情形中，“如下所述”既指从 (2) 中获得的信息，例如，在已知 $\bar{\pi}$ 所代表的内容的前提下，$\bar{\pi}^\frown\dot{\sigma}$表示哪个自同构；也指 (3) 中关于极限步骤的信息。因此，$\bar{\pi}$ 的作用以及 H 的含义，可以看作是通过归纳给出的。另一方面，上述内容仅仅是一个定义，对于 $\langle \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\colon\ \alpha < \delta\rangle$而言，未必成立。当然，实际上，定义4.1 应当被理解为如何构造一次迭代的指示。[9]

请注意定义中一个可能显得怪异、但对应于大多数迭代强迫表述中同样出现的问题（更确切地说是非问题）的方面。具体而言，若仔细阅读，$\mathbb{P}_0$ 只能是平凡力迫，因为它只能包含空序列。这无非是在说，按照正式定义，迭代从一个平凡对称系统$\mathcal{S}_0$开始。在实践中，这当然无关紧要，我们可以放心地忽略这一点。

此外，在实践中，人们只考虑具有最后一步的迭代，即我们想用以扩张的那个系统。但为了使此处的表述有意义，定义需要更为一般。形如$\langle \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\colon \alpha \leq \delta\rangle$ 的迭代只是特殊情形，其中 $\leq \delta$ 被视为 $< \delta + 1$。

现在让我们对预迭代作一些简单的观察。如同在引理 3.2 中那样，我们计算自同构之复合与逆的若干公式。面向一般的支撑迭代，我们还定义支集$(\bar{p}) := \{\alpha : \not\Vdash_{\mathcal{S}_\alpha} \dot{p}(\alpha) = \mathbb{1}\}$，支集$(\bar{\pi}) := \{\alpha : \not\Vdash_{\mathcal{S}_\alpha} \dot{\pi}(\alpha) = \mathrm{id}\}$ 以及支集$(H) := \{\alpha : \not\Vdash_{\mathcal{S}_\alpha} H(\alpha) = \mathsf{H}_\alpha\}$。在每种情形中，我们将上述内容称为支撑。

引理 4.2. 设 $\langle \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha\colon\ \alpha < \delta\rangle$ 是如上所述的预迭代，$\alpha < \delta$ 任意。

(1) 对任意 $\bar{p} \in \mathbb{P}_\alpha$，$\bar{\pi} \in \mathcal{G}_\alpha$，$\bar{\pi}(\bar{p}) = \langle \dot{\pi}(\beta)(\bar{\pi} \restriction \beta(\dot{p}(\beta)))\colon \beta < \alpha\rangle$ 且 支集$(\bar{p}) =$ 支集$(\bar{\pi}(\bar{p}))$。*(2)* 对任意 $\bar{p} \in \mathbb{P}_\alpha$，$\bar{\pi} \in \mathcal{G}_\alpha$，$\beta \leq \alpha$，$\bar{\pi}(\bar{p}) \restriction \beta = (\bar{\pi} \restriction \beta)(\bar{p} \restriction \beta)$。

[8]这些可能是也可能不是所有序列。[9]按照我们对两步迭代的正式定义，也有必要指出，条件中的每个 $\dot{p}(\beta)$ 都是一个闭名称。同样，这只是一个相当无关紧要的问题。

(3) 对任意 $\bar\pi,\bar\sigma\in G_\alpha$, $\bar\pi\circ\bar\sigma=\langle\dot\pi(\beta)\circ\bar\pi\restriction\beta(\dot\sigma(\beta)):\beta<\alpha\rangle$ 且支集$(\bar\pi\circ\bar\sigma)$ $\subseteq$支集$(\bar\pi)\cup$支集$(\bar\sigma)$。*(4)* 对任意 $\bar\pi\in G_\alpha$, $\bar\pi^{-1}=\langle\bar\pi\restriction\beta^{-1}(\dot\pi(\beta)^{-1}):\beta<\alpha\rangle$ 且支集$(\bar\pi^{-1})$ =支集$(\bar\pi)$。*(5)* 对任意 $\bar\sigma\in G_\alpha$ 和 $\bar H\in F_\alpha$，其中 $\bar H\restriction\beta\leq$ 对称群$(\bar\sigma\restriction\beta^{-1}(\dot\sigma(\beta)^{-1}))$，对每个 $\beta<\alpha$，我们有

$$\bar\sigma\bar H\bar\sigma^{-1}=\langle\dot\sigma(\beta)\bar\sigma\restriction\beta(\dot H(\beta))\dot\sigma(\beta)^{-1}:\beta<\alpha\rangle$$

且 $\bar\sigma\bar H\bar\sigma^{-1}$ 的支集 $=\bar H$ 的支集。

(6) 对任意 $\bar\sigma\in G_\alpha$ 和 $H\in F_\alpha$，其中 $H\restriction\beta\leq$ 对称群$(\dot\sigma(\beta))$，对每个 $\beta<\alpha$，我们都有

$$\bar\sigma^{-1}\bar H\bar\sigma=\langle(\bar\sigma\restriction\beta)^{-1}\left(\dot\sigma(\beta)^{-1}\dot H(\beta)\dot\sigma(\beta)\right):\beta<\alpha\rangle$$

且 $\bar\sigma\bar H\bar\sigma^{-1}$ 的支集 $=\bar H$ 的支集。

证明。这些都是关于 α 的相当简单的归纳证明。

(1) 在后继步骤中，假设给定了 $\bar p=\bar r^\frown\dot s$ 和 $\bar\pi=\bar\rho^\frown\dot\sigma$。那么 $\bar\pi(\bar p)=\bar\rho(\bar r)^\frown\dot\sigma(\bar\rho(\dot s))$（见定义 3.1）。我们已经知道 $\bar\rho(\bar r)$ 的支集 $=\bar r$ 的支集，并且只需注意，$\Vdash\dot\sigma(\bar\rho(\dot s))=\mathbb{1}$ 当且仅当 $\Vdash\dot s=\mathbb{1}$。对于极限步骤，直接应用归纳假设和定义 4.1 的 (3)(b)。

(2) 由 (1) 立即得出。

(3) 下面检查后继步骤。给定 $\bar\pi=\bar\rho^\frown\dot\mu$，$\bar\sigma=\bar\tau^\frown\dot\upsilon$。那么根据引理 3.2 中计算出的复合公式，

$$(\bar\rho^\frown\dot\mu)\circ(\bar\tau^\frown\dot\upsilon)=(\bar\rho\circ\bar\tau)^\frown\dot\mu\circ\bar\rho(\dot\upsilon).$$

利用归纳假设，这恰好对应于所要证明的内容。关于支撑的断言同样简单。同样，其余部分由自同构在极限情形下的作用方式直接得出。

(4) 与前面完全相同。(5) 与前面类似，沿用引理 3.2 证明的最后一段。(6) 直接应用 (4) 和 (5)。□

定义 4.3。$\langle\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{T}_\alpha:\alpha<\delta\rangle$ 称为一个迭代，如果对每个 $\alpha<\gamma<\delta$，

(1) 对任意 $\bar p\in\mathbb{P}_\alpha$, $\bar p^\frown\dot{\mathbb{1}}_\beta:\beta\in[\alpha,\gamma)\in\mathbb{P}_\gamma$，其中 $\dot{\mathbb{1}}_\beta$ 是 T_β 的平凡条件对应的闭 S_β-名称，

(2) 对任意 $\bar\pi\in\mathrm{G}_\alpha$, $\bar\pi^\frown\mathrm{id}_\beta:\beta\in[\alpha,\gamma)\in\mathrm{G}_\gamma$，其中 id_β 是 T_β（的强迫）的平凡自同构对应的闭 S_β-名称，

(3) 对任意 $H\in\mathrm{F}_\alpha$, $H^\frown\mathrm{H}_\beta:\beta\in[\alpha,\gamma)\in\mathrm{F}_\gamma$。

正如我们稍后将看到的，这些条件足以证明$\mathcal{S}_\alpha$ 是一个完备子系统(定义 7.1)$\mathcal{S}_\gamma$ 对每个 $\alpha<\gamma<\delta$都成立。这尤其意味着，$\mathcal{S}_\alpha$ 扩展总是介于一个$\mathcal{S}_\gamma$ 扩展之间。这是大多数迭代论证中至关重要却隐含的一部分。例如，在阶段 α 我们选择$\mathcal{T}_\alpha$，专门用于在$\mathcal{S}_\alpha$-扩展中完成某项任务时，我们希望最终的迭代扩展中确实完成了这项任务，也就是说，确实存在一个相应的中间$\mathcal{S}_{\alpha+1}=\mathcal{S}_\alpha*\mathcal{T}_\alpha$ 扩展。

4.2. **理想支撑迭代**。

定义 4.4。设 δ 为一个序数，$\mathcal{I}$ 为 δ 上的一个理想，且包含所有有限集。设$\langle\mathcal{S}_\alpha,\mathcal{T}_\alpha:\alpha<\delta\rangle$ 是一个预迭代。若对每个极限 $\alpha<\delta$都有以下性质，则称其为$\mathcal{I}$-支撑迭代：

(1) $\mathcal{F}_\alpha$ 由以下元素生成：H 如定义 4.1 的 (1)(c) 中所述，且满足 支集$(H)\in\mathcal{I}$，(2) $\mathbb{P}_\alpha$ 恰由以下元素组成：$\bar p$ 如定义4.1 的 (1)(a) 中所述，且满足

(a) 支集$(\bar{p})\in$I，且 (b) 存在一个如上所述的生成元H，使得对每个$\beta<\alpha$，$H\restriction\beta\leq$对称群$s_\beta(\dot{p}(\beta))$；(3) G$_\alpha$恰由以下元素组成：$\bar{\pi}$如定义 4.1 的 (1)(b) 中所述，且满足 (a) 支集$(\bar{\pi})\in$ I，且 (b) 存在一个如上所述的生成元H，使得对每个$\beta<\alpha$，$H\restriction\beta\leq$对称群$s_\beta(\dot{\pi}(\beta))$。

结合预迭代的定义，这就准确说明了如何构造$\mathcal{I}$-支撑迭代：只需说明极限步骤中该怎么做。立即通过简单归纳可知，$\mathcal{I}$-支撑迭代是定义 4.3所说的迭代。我们说有限-、可数-，或更一般地说$<\kappa$-支撑迭代时，指的是在$\mathcal{I}$-支撑迭代中，$\mathcal{I}$分别是有限、可数或$<\kappa$大小的δ子集所构成的理想。

对于有限支撑迭代，显然条件 (2) 和 (3) 中包含条件 (b) 是多余的；对于具有σ-完备滤子的系统的可数支撑迭代，情况也类似。不过一般而言，这确实是一个相当重要的条件。若要求生成元满足$H\restriction\beta\leq\mathrm{sym}(H(\beta))$（这已包含在定义 4.1 中），则要使$H$成为一个群，就需要这一条件。(3)(b) 对于证明如上定义的 F$_\alpha$构成正规滤子至关重要（详见引理 4.6）。表面看来，(2)(b) 似乎不那么重要；原则上，移除这一条件并没有问题。但这样做很可能无法得到一般情况下所期望的迭代。例如，考虑长度为ω的迭代中的一个条件$\bar{p}=\dot{p}(n):n<\omega$。经过第一次对称扩张后，我们希望将$\bar{p}=\dot{p}(n):0<n<\omega$视为该迭代某种尾部中的一个条件。每个$\dot{p}(n)$都由群$H^n\in$ F$_n$见证为对称，但没有理由假定例如$\bigcap_n H^n(0)\in$ F$_0$。那么，该条件的尾部为何能以有意义的方式成为这个第一次扩张中的一个元素呢?

就目前而言，上述内容只是一个定义。不过，要使它在实际应用中真正有意义，就需要检验：按照上述方式构造极限步骤时，得到的确实仍然是对称的。首先，下面这些性质可以像引理中那样通过归纳法轻松验证4.2。

引理 4.5. 设$\langle S_\alpha,T_\alpha:\alpha<\delta\rangle$是如上所述的$I$-支撑迭代，且$\alpha<\delta$任意。

(1) 所有$\bar{p}\in\mathbb{P}_\alpha$，$\bar{\pi}\in G_\alpha$，$H\in F_\alpha$的支撑都属于$I$。事实上，$F_\alpha$恰好由那些$H$生成，其中$\mathit{supp}(H)\in I$，且对每个$\beta$，$H\restriction\beta\leq H(\beta)$。$G_\alpha$和$\mathbb{P}_\alpha$也类似。[10] *(2)* 对于任意生成元$H,K\in F_\alpha$，$E=\langle E(\beta):\beta\leq\alpha\rangle\in F_\alpha$都是一个生成元，其中$E(\beta)$是$H(\beta)\cap K(\beta)$的典范闭$S^\beta$名称，对每个$\beta<\alpha$，$\mathit{supp}(E)\subseteq\mathit{supp}(H)\cup\mathit{supp}(K)$，且$E\leq H\cap K$。

引理 4.6. 设$\langle\mathcal{S}^\beta,\mathcal{T}^\beta:\beta<\alpha\rangle$是一个$\mathcal{I}$-支撑迭代，并设$\mathcal{S}_\alpha=(\mathbb{P}_\alpha,\mathcal{G}_\alpha,\mathcal{F}_\alpha)$恰如定义 4.4 的 *(1)*、*(2)* 和 *(3)* 所述。则$\mathcal{S}_\alpha$是一个对称系统。

证明。$\mathbb{P}_\alpha$当然是一个强迫偏序集。我们将验证每个$\bar{\pi}$确实表示一个$\mathbb{P}_\alpha$的自同构，每个H表示一个群，并且$\mathcal{F}_\alpha$是一个正规滤子。

首先，我们先注意几点。设$\bar{\pi}$，H如 (3)(b) 中所述。那么，利用引理 4.2 的 (6) 以及 对称群$(\sigma^{-1}(\dot{x}))=\sigma^{-1}$对称群$(\dot{x})\sigma$在任意对称

[10]这当然是显然的，也是极限α定义的一部分；但在后继情形下，我们必须用到$\mathcal{I}$包含所有单元素集合这一事实。由于这并非字面上的定义，我们将其作为一个独立事实陈述。

系统，可得

$$\begin{aligned}\bar{K} &:= \langle (\bar{\pi} \restriction \beta)^{-1} \left(\dot{\pi}(\beta)^{-1} \dot{H}(\beta) \dot{\pi}(\beta)\right) : \beta < \alpha \rangle \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} (\bar{\pi} \restriction \beta)^{-1} (\bar{H} \restriction \beta)(\bar{\pi} \restriction \beta)\end{aligned}$$

也意在表示一个$\mathcal{F}_\alpha$的生成元。[11] 此外，若我们定义

$$\bar{\tau} := \langle (\bar{\pi} \restriction \beta)^{-1} (\dot{\pi}(\beta)^{-1}) : \beta < \alpha \rangle = \bigcup_{\beta<\alpha} (\bar{\pi} \restriction \beta)^{-1},$$

那么 $K \restriction \beta \leq \dot{\tau}(\beta)$，对每个 $\beta < \alpha$，并且 $\mathrm{supp}(\bar{\tau}) = \mathrm{supp}(\bar{\pi})$。特别地，$\bar{\tau}$ 是意在表示$\mathcal{G}_\alpha$中的一个自同构，实际上是 H的一个元素。最后，利用引理 4.2 的 (5)，若 $E \leq H \cap K$ 按引理 4.5 中的方式定义，则

$$\begin{aligned}\bar{L} &:= \langle \dot{\pi}(\beta) \bar{\pi} \restriction \beta (\dot{H}(\beta)) \dot{\pi}(\beta)^{-1} : \beta < \alpha \rangle \\ &= \bigcup_{\beta<\alpha} (\bar{\pi} \restriction \beta)(\bar{E} \restriction \beta)(\bar{\pi} \restriction \beta)^{-1}\end{aligned}$$

表示$\mathcal{F}_\alpha$中的一个生成元。

我们来验证 $\bar{\pi}$ 确实表示 $\mathbb{P}_\alpha$的一个自同构。令 $\bar{p} \in \mathbb{P}_\alpha$任意给定，不妨利用引理 4.5，假设对于所有 β，也有$H \restriction \beta \leq \mathrm{sym}(\dot{p}(\beta))$。于是 $\bar{\pi}(\bar{p}) = \dot{\pi}(\beta)\bar{\pi} \restriction \beta(\dot{p}(\beta)) : \beta < \alpha$，并且$\mathrm{supp}(\bar{\pi}(\bar{p})) = \mathrm{supp}(\bar{p}) \in \mathrm{I}$。此外，对每个 β，都有 $L \restriction \beta \leq \mathrm{sym}(\dot{\pi}(\beta)\bar{\pi} \restriction \beta(\dot{p}(\beta)))$，因此$\bar{\pi}(\bar{p}) \in \mathbb{P}_\alpha$。由 $\bar{\pi}$ 保序这一事实直接可知，它保序是因为极限步骤中 $\mathbb{P}_\alpha$ 上的序以及 $\bar{\pi}$ 的应用方式都是如此定义的，而且每个 $\bar{\pi} \restriction \beta$ 都保序。类似地，$\bar{\tau}$ 表示 $\bar{\pi}$ 的逆映射，因为对于每个 β，$\bar{\tau} \restriction \beta$ 都是 $\bar{\pi} \restriction \beta$ 的逆映射。

现在检验每个 H 是否构成一个群，也同样简单。任取$\bar{\pi} \in \mathcal{G}_\alpha$ 和 $H \in \mathcal{F}_\alpha$，不失一般性，我们总可以假设$\bar{\pi}$ 和 $\bar{H}$ 如 (3)(b) 所示，由此便可构造出 $\bar{L} \leq \bar{\pi} H \bar{\pi}^{-1}$，从而证明该滤子是正规的（或者更直接地构造 $\bar{K} = \bar{\pi}^{-1} H \bar{\pi}$，这就足够了）。□

4.3. 因子分解。 可以证明，$\mathcal{I}$-支撑迭代确实可以因子分解为初始段和尾部，而它们本身也是$\mathcal{I}$-支撑迭代。这类因子分解在大多数迭代强迫论证中并非至关重要，但有时也会派上用场。为简化记号，下面我们提到$\mathcal{I}$-支撑迭代时，实际指的是由 $\mathcal{I}$ 生成的理想。[12]

假设 $\langle \mathbb{S}_\alpha : \alpha \leq \delta + 1 \rangle$ 是一个 I-迭代，并且 $\dot{\mathbb{S}}_\alpha$ 被固定。通过对 $\delta \geq \alpha$ 进行递归，可定义一个 S_α-名称 $\mathrm{S}_{\alpha,\gamma}, \mathrm{T}_{\alpha,\gamma} : \gamma \in [\alpha, \delta]^\bullet$，它对应于一个 I-支撑迭代，并自然地与该迭代的尾段相对应。同时，对于每个 S_δ-名称 $\dot{x}$，可定义一个 S_α-名称 $[\dot{x}]_{\alpha,\delta}$，它对应于一个 $\mathrm{S}_{\alpha,\delta}$-名称，同理，对于每个作为 $\mathrm{S}_{\alpha,\delta}$-名称的 S_α-名称 $\dot{y}$，可定义一个 S_δ-名称 $]\dot{y}[_{\alpha,\delta}$。此外，对于任意 $\bar{p} \in \mathbb{P}_\delta$, $\bar{\pi} \in \mathrm{G}_\delta$ 和如上所述的生成元 $H \in \mathrm{F}_\delta$，可定义 S_α-名称 $[\bar{p} \restriction [\alpha, \delta)]$, $[\bar{\pi} \restriction [\alpha, \delta)]$ 和 $[H \restriction [\alpha, \delta)]$，分别对应于系统 $\mathrm{S}_{\alpha,\delta}$ 中的对象。在给出这些名称的精确构造之前，我们先陈述一个类似于定理 3.3 的因子分解定理。

定理 4.7（迭代的因子分解）。每当 G 是 S_α 上的泛型，且H 是 $\dot{S}^G_{\alpha,\delta}$ 上相对于 $V[G]_{S_\alpha}$ 的泛型时，则 $G * H = \{\bar{p} : \bar{p} \restriction \alpha \in G \wedge [\bar{p} \restriction [\alpha, \delta)]^G \in H\}$ 是 S_δ 上相对于 V 的泛型。类似地，每当 K 是 S_δ 上相对于 V 的泛型时，则 $K = G * H$，其中 $G = \{\bar{p} \restriction \alpha : \bar{p} \in K\}$ 是 S_α 上相对于 V 的泛型，并且 $\{[\bar{p} \restriction [\alpha, \delta)]^G : \bar{p} \in K\}$ 的向上闭包 H 是 $\dot{S}^G_{\alpha,\delta}$ 上相对于 $V[G]_{S_\alpha}$ 的泛型。

[11] 在上述并集中，我们用根据引理 $(\bar{\pi} \restriction \beta)^{-1}(\bar{H} \restriction \beta)(\bar{\pi} \restriction \beta)$ 计算得到的相应序列替换系统 $\mathcal{S}^\beta$ 中的群 4.2。[12] 某个中间扩张 $\mathcal{I}$ 可能不对取子集运算封闭。

在这两种情形下，对每个 S_δ-名称 $\dot{x}$，都有 $([\dot{x}]^G)^H = \dot{x}^{G*H}$；而对于每个 $S_{\alpha,\delta}$-名称 $\dot{y}$，对每个 S_α-名称 $\dot{y}$，都有 $]\dot{y}[^{G*H} = (\dot{y}^G)^H$。特别地，$V[G*H]_{S_\delta} = V[G]_{S_\alpha}[H]_{\dot{\mathcal{S}}^{G}_{\alpha,\delta}}$。

递归构造如下：对于 $\delta = \alpha$，令 $\mathcal{S}_{\alpha,\delta}$ 为平凡系统（$\{1\}$，$\{\mathrm{id}\}$，$\{\{\mathrm{id}\}\}$）的一个名称。$[\bar{p} \restriction [\alpha,\alpha)]$ 只是 1 的一个名称。在每一步 δ，我们按名称的秩进行递归定义

$$[\dot{x}]_{\alpha,\delta} = \{(\bar{p} \restriction \alpha, ([\bar{p} \restriction [\alpha,\delta)], [\dot{z}]_{\alpha,\delta})^\bullet) : (\bar{p},\dot{z}) \in \dot{x}\},$$

类似地，

$$]\dot{y}[_{\alpha,\delta} = \{(\bar{p},]\dot{z}[_{\alpha,\delta}) : \bar{p} \restriction \alpha \Vdash_{\mathcal{S}_\alpha} ([\bar{p} \restriction [\alpha,\delta)], \dot{z})^\bullet \in \dot{y}\}.$$

对于任意 δ，令 $\mathcal{T}_{\alpha,\delta} = [\mathcal{T}_\delta]_{\alpha,\delta}$。对于 $\delta = \gamma+1$，我们定义

$$[\bar{p} \restriction [\alpha,\delta)] = \mathrm{cl}([\bar{p} \restriction [\alpha,\gamma)] ^\frown [\dot{p}(\gamma)]_{\alpha,\gamma})^\bullet,$$

对于 δ 极限，

$$[\bar{p} \restriction [\alpha,\delta)] = \bigcup_{\gamma\in[\alpha,\delta)} [\bar{p} \restriction [\alpha,\gamma)].$$

类似地，对于 $[\bar{\pi} \restriction [\alpha,\delta)]$ 和 $[H \restriction [\alpha,\delta)]$。

这些对象确实如定理前一段所述发挥作用，且定理 4.7 成立，这一点可通过归纳法验证。细节留给读者，因为这基本上只是冗长的形式验证（另见 [5]，关于有限支撑迭代的情形）。后继步骤实质上与定理 4.7 的证明相同。这里只需指出，对于 $[\bar{p} \restriction [\alpha,\delta)]$, $[\bar{\pi} \restriction [\alpha,\delta)]$ 和 $[H \restriction [\alpha,\delta)]$ 成为 $\mathcal{S}_\alpha$-名称，(2)(b) 和 (3)(b) 至关重要。例如，假设 H 和 $\bar{p}$ 如 (2)(b) 所述，则可证明 $H \restriction \alpha \leq$ 对称群$([\bar{p} \restriction [\alpha,\delta)])$。

4.4. 保留定理。 这里只给出两个非常简单的保留结果情形，以示范这一技巧。

命题 4.8。 设 $\langle \mathbb{S}_\alpha, \dot{T}_\alpha : \alpha \leq \delta\rangle$ 是一个 $<\kappa$-支撑迭代，其中 κ 是一个正则基数，依赖选择公理$_{<\kappa}$ 成立，且每个迭代因子的滤子都被迫为 $<\kappa$-完备。那么 $\mathbb{S}_\delta$ 的滤子是 $<\kappa$-完备的。

证明。由依赖选择公理 $\mathrm{DC}_{<\kappa}$，不失一般性，我们可以考虑生成元序列 $\langle \bar{H}^\xi : \xi<\gamma\rangle$,$_{\gamma<\kappa}$，而非 F_α 的任意元素。通过归纳定义 H，令 $\dot{H}(\alpha)$ 为交集 $\dot{H}^\xi(\alpha) : _{\xi<\gamma}\rangle$ 的典范闭 S_α-名称；该交集有一个对称群为 $H \restriction \alpha$ 的 S-名称。另请注意，$\mathrm{supp}(\bar{H}) \subseteq \bigcup_{\xi<\gamma}\mathrm{supp}(\bar{H}^\xi)$，根据 κ 的正则性，其大小为 $<\kappa$。□

证明中隐含地使用了这样一个事实：对于滤子的完备性的每个实例，总有一个规范的见证，即直接取给定的一族滤子元素的交。另一方面，对于对称系统的其他 $\forall\exists$-性质，情况并非总是如此，因此需要某种见证的一致性。

定义 4.9。 我们称 F 见证了 $\mathbb{P}$ 的 $<\kappa$-封闭性，若 F：$\mathbb{P}^{<\kappa} \to \mathbb{P}$ 满足：对于 $\mathbb{P}$中的任意递减序列 $\langle p_\xi : \xi<\gamma\rangle$，$\gamma<\kappa$，$F(\langle p_\xi : \xi<\gamma\rangle)$ 是这些条件的一个公共扩展。

命题 4.10。 设 $\langle \mathbb{S}_\alpha, \dot{T}_\alpha : \alpha \leq \delta\rangle$ 是一个 $<\kappa$-支撑迭代，κ 正则，并假设依赖选择公理$_{<\kappa}$ 成立。假设迭代因子的偏序集一致地是 $<\kappa$-封闭的，也就是说，存在一个序列 $\langle F_\alpha : \alpha \leq \delta\rangle$ 和 $H \in F_\delta$，使得 F_α 是一个 $\mathbb{S}_\alpha$-名称，表示 $\dot{T}_\alpha$ 的偏序集的 $<\kappa$-封闭性的见证，并且 $H \restriction \alpha \leq F_\alpha$对每个 $\alpha<\delta$都成立。那么，$\mathbb{S}_\delta$ 的偏序集 $\mathbb{P}_\delta$ 是 $<\kappa$-封闭的，并且具有一个见证函数。

证明留给读者，因为它并不比前一个证明困难多少。不过，下面这个问题才是真正的目标。

问题 4.11. 设 $\langle \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$ 是一个可数支撑迭代，δ 极限，并且假设对每个 $\alpha < \delta$，$\Vdash_{\mathcal{S}_\alpha}$ 依赖选择公理。$\Vdash_{\mathcal{S}_\delta}$ 依赖选择公理是否成立？如果答案是否定的，是否存在一个与依赖选择公理的保持等价的组合条件？

即使在δ 具有不可数共尾性的情形下，如何着手探讨这样的问题也并非十分明了。

我们以一个范围广得多、且应当引起重大关注的问题结束本节。

问题 4.12。 设 φ 为一个弱选择原理，例如布尔素理想定理或选择公理ω，并设$\langle \mathcal{S}_\alpha, \mathcal{T}_\alpha : \alpha \leq \delta \rangle$ 是某个理想$\mathcal{I}$ 下的$\mathcal{I}$-支撑迭代，且对每个 $\alpha < \delta$, $\Vdash_{\mathcal{S}_\alpha} \varphi$ 都成立。对于$\mathcal{T}_\alpha$ 和$\mathcal{I}$，是否存在能够保证 $\Vdash_{\mathcal{S}_\delta} \varphi$的自然且非平凡的条件？

例如，选择公理ω 在 σ-分配强迫下得以保持。那么，能否找到一个关于$\mathcal{I}$ 的条件，使得选择公理ω 在极限步骤中也得以保持？对于布尔素理想定理，我们基本上还没有找到任何适用于保持该定理的良好组合条件；找到这样的条件将是朝着解决这一问题迈出的重要第一步。

5. 对称系统的等价性

在强迫的语境中，通常会考虑偏序集$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 之间的两种等价概念。第一种称为弱等价，只表示 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 产生完全相同的扩展。第二种称为强等价，表示 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 具有同构的完备布尔代数，且强得多。例如，所有原子偏序集在弱意义下都等价，但它们生成的布尔代数可能不同；另一个不那么显然的例子是，某个强迫概念 $\mathbb{P}$的 $|\mathbb{P}|^+$ 个副本的种彩票和会产生相同的扩展，但它们的布尔完备化确实会非常不同。强等价这一概念更具“范畴性”，因为典型的强迫构造（例如迭代）并不依赖于所选的具体代表（至少在假设选择公理成立时如此）。弱等价则不然。例如，平凡强迫概念的有限支撑积可能是平凡的，也可能不是。

将弱等价推广到对称系统是轻而易举的，但要推广强等价则远没有那么简单。

定义 5.1. 如果对于任意$\mathcal{S}$-泛型 G，都存在一个$\mathcal{T}$-泛型 H，使得 $V[G]_\mathcal{S} = V[H]_\mathcal{T}$，反之亦然，则称两个对称系统$\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$是弱等价 的。

先验地说，这个定义是相对于 V 外部的。但事实证明，S 和 T 的弱等价可以在 V 内部表达。这源于第 7 节的结果。更具体地说，根据定理 7.21，模型 M 是 V 的一个由 T 得到的对称扩张，当且仅当存在一个 M 中的强迫概念，它添加一个在 V 上泛型的滤子 H，使得 $M = V[H]_\mathcal{T}$。因此，要在 V 中表达 S 和 T 的等价，我们可以说 $\Vdash_\mathcal{S}$“存在一个强迫概念，它添加一个在 V 上的 T-泛型 H，使得 $V[G]_\mathcal{S} = V[H]_\mathcal{T}$”，对于 T 也同样如此。[13]

5.1. 名称类。

通常，考虑并非完全遗传对称的名称是有意义的。

定义 5.2. 如果 C 由形如 $(\mathcal{S}\ \dot{x})$ 的有序对组成，其中 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 是一个对称系统，$\dot{x}$ 是一个 $\mathbb{P}$名称并且 $\Vdash_\mathbb{P} \dot{x} \in V[G]_\mathcal{S}$，那么我们称 C 是对称系统中的名称类。我们将 $\mathsf{C}_\mathcal{S}$ 记作满足以下条件的 $\dot{x}$ 的类：$(\mathcal{S}\ \dot{x}) \in \mathsf{C}$，通常

[13]如果要非常严谨地表述，我们可以说，存在一个 α 的闭无界类，使得我们可以在 V_α 上进行强迫，从而满足该等式。当然，引入一个基模型的谓词 V，就可以简化这种表述。

在上下文中 $\mathcal{S}$ 明确时，将 C 与 $\mathsf{C}_{\mathcal{S}}$ 视为相同。N 是最大的名称类，即，$\dot{x} \in$ 当且仅当 $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in V[G]_{\mathcal{S}}$时，$\mathsf{N}_{\mathcal{S}}$。

最重要的例子当然是 HS，即遗传对称名称的类。

定义 5.3。C 若满足：对于任意 $\mathcal{S}$、任意 $\dot{x} \in \mathsf{C}_{\mathcal{S}}$ 以及任意 $\dot{y} \in \mathsf{N}_{\mathcal{S}}$，若$\Vdash \dot{x} = \dot{y}$，则也有 $\dot{y} \in \mathsf{C}_{\mathcal{S}}$，则称 C 强迫稳定。

定义 5.4。设 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 是一个对称系统。那么，若一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$ 满足$\mathcal{S}$-受尊重，则

$$\mathrm{res}_{\mathcal{S}}(\dot{x}) := \{\pi \in \mathcal{G} : \Vdash_{\mathcal{S}} \pi(\dot{x}) = \dot{x}\} \in \mathcal{F}.$$

我们可以写作 $\mathrm{res}_{\mathcal{G}}(\dot{x})$。受尊重名称组成的类 R 显然是一个强迫稳定类。

定义 5.5。对于一个类 C，我们递归地定义其遗传类 HC，其中$\dot{x} \in \mathsf{HC}_{\mathcal{S}}$ 当且仅当 $\dot{x} \in \mathsf{C}_{\mathcal{S}}$，且对于每个 $(p, \dot{y}) \in \dot{x}$，都有 $\dot{y} \in \mathsf{HC}_{\mathcal{S}}$。若 HC 是某个强迫稳定类 C 的遗传类，则称 HC 为遗传强迫稳定。

当然，HS 是对称名称的遗传类。遗传受尊重名称 HR 的类是遗传强迫稳定的。

下面的结论显然可以验证。

引理 5.6. $\mathsf{HS} \subseteq \mathsf{HR} \subseteq \mathsf{N}$。

引理 5.7. 存在一个以 $\mathcal{S}$ 为参数的一致可定义映射，$i\colon \mathsf{HR}_{\mathcal{S}} \to \mathsf{HS}_{\mathcal{S}}$使得 $\Vdash \dot{x} = i(\dot{x})$，对每个 $\dot{x} \in \mathsf{HR}_{\mathcal{S}}$ 都成立。

证明。该映射递归定义如下：

$$i(\dot{x}) = \bigcup_{\pi \in \mathrm{res}(\dot{x})} \pi(\{(p, i(\dot{y})) : (p, \dot{y}) \in \dot{x}\}). \qquad \square$$

5.2. **强等价的概念**。从形式上讲，以下定义可视为在 ZF 的某个保守扩展中进行，例如不含选择公理的 NBG；不过，正如我们稍后将看到的，它也可以用一阶方式表达。

定义 5.8. 设 C 是对称系统中的一个名称类，包含所有检验名称。那么 $\mathcal{S}$ 和$\mathcal{T}$称为 C-等价，记作$\mathcal{S} \cong_{\mathsf{C}} \mathcal{T}$，如果存在映射 $i\colon \mathsf{C}_{\mathcal{S}} \to \mathsf{C}_{\mathcal{T}}, i^* : \mathsf{C}_{\mathcal{T}} \to \mathsf{C}_{\mathcal{S}}$，使得

(1) 对任意 $x, \Vdash_{\mathcal{T}} i(\check{}x) = \check{}x$，反之亦然 $\Vdash_{\mathcal{S}} i^*(\check{}x) = \check{}x$,[14] (2) 对任意 $\dot{x} \in \mathsf{C}_{\mathcal{S}}, \Vdash_{\mathcal{S}} i^*(i(\dot{x})) = \dot{x}$ 且反之亦然，对任意 $\dot{x} \in \mathsf{C}_{\mathcal{T}}$,

$$\Vdash_{\mathcal{T}} i(i^*(\dot{x})) = \dot{x},$$

(3) 对任意 Δ_0-公式 φ（属于集合论语言）以及任意 $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n \in \mathsf{C}_{\mathcal{S}}$,

$$\Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n) \text{ iff } \Vdash_{\mathcal{T}} \varphi(i(\dot{x}_0), \dots, i(\dot{x}_n)),$$

并且反之，对任意 $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n \in \mathsf{C}_{\mathcal{T}}$,

$$\Vdash_{\mathcal{T}} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n) \text{ iff } \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(i^*(\dot{x}_0), \dots, i^*(\dot{x}_n)).$$

简单验证可知，这确实是对称系统之间的等价关系。

引理 5.9。设 $\mathsf{HS} \subseteq \mathsf{C}$，并设 i, i^* 如上所述。那么，对于集合论语言中的任意公式 φ，*(3)* 已经成立。

[14] $\check{x}$ 始终表示上下文中明确的系统里的检验名称。

证明。这是反射定理的推论。设 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 分别为 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 的强迫概念。注意，对于任意 $\mathbb{P}$-泛型 G，$V[G]_{\mathcal{S}} = \bigcup_{\alpha\in\text{序数}} \mathrm{HS}_\alpha^G$，其中并集递增且连续。此外，对于任意 $\mathcal{T}$-名称 $\dot{x}$，存在 α 使得 $\Vdash_{\mathcal{S}} i^*(\dot{x}) \in \mathrm{HS}_\alpha$，因此 $\Vdash_{\mathcal{T}} \dot{x} \in i(\mathrm{HS}_\alpha)$。由此，对于任意 $\mathbb{Q}$-泛型 H，也有 $\bigcup_{\alpha\in\text{序数}} i(\mathrm{HS}_\alpha)^H = V[H]_{\mathcal{T}}$，且并集递增且连续。于是，对于任意 $\varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_n)$，我们可以找到序数闭无界集 S_0, S_1，使得

$$\forall \alpha \in S_0\, [\Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_n) \text{ iff } \Vdash_{\mathcal{S}} \mathsf{HS}_\alpha \models \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_n)]$$

and

$$\forall \alpha \in S_1\, [\Vdash_{\mathcal{T}} \varphi(i(\dot{x}_0),\dots,i(\dot{x}_n)) \text{ iff } \Vdash_{\mathcal{T}} i(\mathsf{HS}_\alpha) \models \varphi(i(\dot{x}_0),\dots,i(\dot{x}_n))]\,.$$

因此，如果 $\alpha \in S_0 \cap S_1$，

$$\begin{aligned} \Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_n) &\text{ iff } \Vdash_{\mathcal{S}} \mathsf{HS}_\alpha \models \varphi(\dot{x}_0,\dots,\dot{x}_n) \\ &\text{iff } \Vdash_{\mathcal{T}} i(\mathsf{HS}_\alpha) \models \varphi(i(\dot{x}_0),\dots,i(\dot{x}_n)) \\ &\text{iff } \Vdash_{\mathcal{T}} \varphi(i(\dot{x}_0),\dots,i(\dot{x}_n)). \end{aligned}$$

反过来也类似。 □

命题 5.10. 设 对称群 $\subseteq \mathsf{C}$。那么，$S \cong_{\mathsf{C}} T$ 蕴含 S 和 T 弱等价。

证明。 根据定理 7.21，存在一个 $\mathcal{S}$-名称，它表示一个强迫概念，该强迫概念迫使其基模型 $V_{\mathcal{S}}$ 具有 $\check{}\, V[G]_{\check{S}}$ 的形式，其中某个 $\check{}\,\mathbb{P}$-泛型 G 属于 $\check{}\, V$。这可以转移到 $\mathcal{T}$。反过来也类似。 □

引理 5.11. $S \cong_{\mathsf{HR}} T$ 等价于 $S \cong_{\mathsf{HS}} T$。

证明。 使用引理5.7。 □

命题 5.12。 对于任意系统 S，存在系统 S'，它可由 S 一致地定义，使得 $S' \cong_{\mathsf{HS}} S$ 且 $S' \cong_{\mathsf{N}} S$，并且 S' 的强迫是一个完备布尔代数。

证明。 令 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$。再令 $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ 为与之对应的、由 $\mathbb{P}$ 的正则开子集构成的完备布尔代数。$\mathbb{P}$ 的任意自同构 π 都可以视为 $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ 上的唯一自同构；该自同构在 $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ 中 $\mathbb{P}$ 的稠密副本上与 π 一致。在此对应下，我们可以考虑系统 $\mathcal{S}' = (\mathcal{B}(\mathbb{P}), \mathcal{G}, \mathcal{F})$。

将 $\mathbb{P}$ 视为 $\mathcal{B}(\mathbb{P})$ 的稠密子集，令 $i\colon \mathrm{HS}_{\mathcal{S}} \to \mathrm{HS}_{\mathcal{S}'}$ 为恒等映射。另一方面，我们定义

$$i^*(\dot{x}) = \{(p, i^*(\dot{y})) : p \in \mathbb{P} \wedge \exists q \geq p((q,\dot{y}) \in \dot{x})\}$$

通过对 $\dot{x}$ 的秩进行递归来定义。(1)、(2)和(3)由关于力迫等价和力迫定理的众所周知的事实推出。对 N 也适用同一定义。 □

仅为陈述下面的定理，我们称遗传类 HC 是良好的，若 $\mathsf{HS} \subseteq \mathsf{HC}$, HC 是遗传强迫稳定的，且 $\mathcal{S} \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{S}'$，其中 $\mathcal{S}'$ 与命题5.12中的定义相同。于是我们可以表述如下的一般性结果。

定理 5.13. 设 $S = (\mathbb{P}, G, F)$ 和 $T = (\mathbb{Q}, H, E)$ 为对称系统。设HC 要么是良好的且 S、T 均坚韧，要么 $\mathsf{HC} = \mathsf{N}$。那么 $S \cong_{\mathsf{HC}} T$ 当且仅当存在同构 $\pi\colon B(\mathbb{P}) \to B(\mathbb{Q})$ 使得 $\pi\text{“}\mathsf{HC}_{\mathcal{S}'} = \mathsf{HC}_{\mathcal{T}'}$。特别地，$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 强迫等价。此外，每当 G 是 $B(\mathbb{P})$-泛型的且在 V 之上时，$V[G\cap\mathbb{P}]_{\mathcal{S}} = V[\pi\text{“}G\cap\mathbb{Q}]_{\mathcal{T}}$，反之亦然。

证明。 首先，假设上述 π 存在，并令 $i(\dot{x}) = \pi(\dot{x})$，$i^*(\dot{x}) = \pi^{-1}(\dot{x})$，那么这显然表明 $\mathcal{S}' \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{T}'$。由于 $\mathcal{S} \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{S}'$ 且 $\mathcal{T} \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{T}'$，所以 $\mathcal{S} \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{T}$。另一方面，假设 $\mathcal{S} \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{T}$，因而 $\mathcal{S}' \cong_{\mathsf{HC}} \mathcal{T}'$，如

由 i 和 i^* 见证。注意，存在一个条件的稠密集 D，其条件为 $p \in \mathbb{P}$，使得 $\dot{x}_p := \{(p, \check{p})\} \in \mathrm{HC}_{\mathcal{S}'}$。对于任意 $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P})$，令

$$\pi(p) := \bigvee_{p' \leq p, p' \in D} [\![i(\dot{x}_{p'}) \neq \emptyset]\!] \in \mathcal{B}(\mathbb{Q}).$$

类似地，使用 i^* 定义 $\pi^*\colon \mathcal{B}(\mathbb{Q}) \to \mathcal{B}(\mathbb{P})$。注意，对于任意 $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P})$ 和任意 φ，

$$\begin{aligned} p \Vdash_{\mathcal{S}'} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n) \text{ iff } & \forall p' \leq p, p' \in D (p' \Vdash_{\mathcal{S}'} \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)) \\ \text{iff } & \forall p' \leq p, p' \in D (\Vdash_{\mathcal{S}'} \dot{x}_{p'} \neq \emptyset \to \varphi(\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)) \\ \text{iff } & \forall p' \leq p, p' \in D (\Vdash_{\mathcal{T}'} i(\dot{x}_{p'}) \neq \emptyset \to \varphi(i(\dot{x}_0), \dots, i(\dot{x}_n))) \\ \text{iff } & \forall p' \leq p, p' \in D ([\![i(\dot{x}_{p'}) \neq \emptyset]\!] \Vdash_{\mathcal{T}'} \varphi(i(\dot{x}_0), \dots, i(\dot{x}_n))) \\ \text{iff } & \pi(p) \Vdash_{\mathcal{T}'} \varphi(i(\dot{x}_0), \dots, i(\dot{x}_n)). \end{aligned}$$

对于 π^* 和 i^* 也同样如此。然后注意，对于任意 $p \in \mathcal{B}(\mathbb{P})$ $p' \in D$，

$$\begin{aligned} p \perp p' \text{ iff } & p \Vdash_{\mathcal{S}'} \dot{x}_{p'} = \emptyset \\ \text{iff } & \pi(p) \Vdash_{\mathcal{T}'} i(\dot{x}_{p'}) = \emptyset \\ \text{iff } & \pi^*(\pi(p)) \Vdash_{\mathcal{S}'} i^*(i(\dot{x}_{p'})) = \dot{x}_{p'} = \emptyset \\ \text{iff } & \pi^*(\pi(p)) \perp p'. \end{aligned}$$

因此 $p = \pi^*(\pi(p))$。类似地，对于每个 $q \in \mathcal{B}(\mathbb{Q})$，$\pi(\pi^*(q)) = q$。所以 $\pi^* = \pi^{-1}$ 和 π 确实是一个自同构。让我们对 $\dot{x} \in \mathrm{HC}_{\mathcal{S}'}$ 和 $\dot{y} \in \mathrm{HC}_{\mathcal{T}'}$ 的秩进行归纳法，检查 $\Vdash_{\mathcal{T}'} \pi(\dot{x}) = i(\dot{x})$ 以及 $\Vdash_{\mathcal{S}'} \pi^{-1}(\dot{y}) = i^*(\dot{y})$。

例如，假设 $q \Vdash_{\mathcal{T}'} \dot{z} \in \pi(\dot{x})$，其中 $\dot{z}$ 的秩低于 $\dot{x}$。那么 $\pi^{-1}(q) \Vdash_{\mathcal{S}'} \pi^{-1}(\dot{z}) \in \dot{x}$，根据归纳假设，$\pi^{-1}(q) \Vdash_{\mathcal{S}'} i^*(\dot{z}) \in \dot{x}$。然后，根据我们之前的观察，$q \Vdash_{\mathcal{T}'} i(i^*(\dot{z})) = \dot{z} \in i(\dot{x})$。

另一方面，如果 $q \Vdash_{\mathcal{T}'} \dot{z} \in i(\dot{x})$，那么 $\pi^{-1}(q) \Vdash_{\mathcal{S}'} i^*(\dot{z}) \in \dot{x}$，并且在必要时扩展 q，我们可以假设，对于某个秩低于 $\dot{x}$ 的 $\dot{z}'$，有 $\pi^{-1}(q) \Vdash_{\mathcal{S}'} i^*(\dot{z}) = \dot{z}' \in \dot{x}$。同样，$q \Vdash_{\mathcal{T}'} i(i^*(\dot{z})) = \dot{z} = i(\dot{z}') = \pi(\dot{z}')$。同时，$q \Vdash_{\mathcal{T}'} \pi(\dot{z}') \in \pi(\dot{x})$，因此 $q \Vdash_{\mathcal{T}'} \dot{z} \in \pi(\dot{x})$。

因此，确实有 $\Vdash_{\mathcal{T}'} \pi(\dot{x}) = i(\dot{x})$，而关于 $\Vdash_{\mathcal{S}'} \pi^{-1}(\dot{y}) = i^*(\dot{y})$ 的论证完全类似。由于 HC 是遗传强迫稳定的，容易通过归纳法得到 $\pi``\mathrm{HC}_{\mathcal{S}'} \subseteq \mathrm{HC}_{\mathcal{T}'}$ 且 $\pi^{-1}``\mathrm{HC}_{\mathcal{T}'} \subseteq \mathrm{HC}_{\mathcal{S}'}$。因此 $\mathrm{HC}_{\mathcal{T}'} = \pi\pi^{-1}``\mathrm{HC}_{\mathcal{T}'} = \pi``\mathrm{HC}_{\mathcal{S}'}$。

对于定理的最后一个断言，注意到只要 G 是 $\mathcal{B}(\mathbb{P})$-泛型，$\pi``G \cap \mathbb{Q}$ 就是 $\mathbb{Q}$-泛型，因为 $\pi$ 是一个同构。于是 $i(\dot{x})^{\pi``G \cap \mathbb{Q}} = \pi(\dot{x})^{\pi``G} = \dot{x}^G$ 且 $i(\dot{x})^{\pi``G \cap \mathbb{Q}} \in V[\pi``G \cap \mathbb{Q}]_{\mathcal{T}}$，因为 $i(\dot{x}) \in \mathsf{N}_{\mathcal{T}}$。因此 $V[G \cap \mathbb{P}]_{\mathcal{S}} \subseteq V[\pi``G \cap \mathbb{Q}]_{\mathcal{T}}$，反方向也同理。□

在经典迫使的设定中，泛型滤子由名称如何求值唯一确定。对于坚韧系统，这一点仍然成立；而且当两个这样的系统等价时，（完全）泛型在一侧与另一侧之间存在一一对应，正如强迫的情形一样。当系统并非坚韧时，一般不能是这种情形。例如，考虑任意强迫 $\mathbb{P}$ 以及彩票和 $\mathbb{P} \oplus \mathbb{P} = \{0,1\} \times \mathbb{P}$，其对合为 $\pi(i,p) = (1-i,p)$。考虑递归定义的映射

$$i(\dot{x}) = \{(p, i(\dot{y})) : \exists i \in 2(((i,p), \dot{z}) \in \dot{x})\}$$

and

$$i^*(\dot{x}) = \{((0,p), i^*(\dot{z})) : (p, \dot{z}) \in \dot{x}\} \cup \{((1,p), i^*(\dot{z})) : (p, \dot{z}) \in \dot{x}\}.$$

很容易看出，这些映射证明了 $(\mathbb{P} \oplus \mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) \cong \mathbb{P}$，其中 $\mathcal{G} = \{\mathrm{id}\ \pi\}$，$\mathcal{F} = \{\mathcal{G}\}$，而 $\mathbb{P}$ 被视为等同于对应于以 $\mathbb{P}$ 进行强迫的系统，即 $(\mathbb{P}, \{\mathrm{id}\}, \{\{\mathrm{id}\}\})$。但是，对于任意 $\mathbb{P}$-泛型 G，$\{0\} \times G$ 和 $\{1\} \times G$ 产生完全相同的求值。

推论 5.14。设 $S = (\mathbb{P}, G, F)$ 和 $T = (\mathbb{Q}, H, E)$ 为对称系统。那么，$S \cong_{\mathsf{N}} T$ 当且仅当存在一个同构 $\pi\colon B(\mathbb{P}) \to B(\mathbb{Q})$，使得每当 G 是 $B(\mathbb{P})$-泛型时，$V[G\cap\mathbb{P}]_S = V[\pi\text{“}G\cap\mathbb{Q}]_T$，反之亦然。

证明。从左到右的方向已包含在定理 5.13 中。另一方面，注意到“对于任意 B($\mathbb{P}$)-泛型 G, $V[G\cap\mathbb{P}]_S = V[\pi\text{“}G\cap\mathbb{Q}]_T$”等价于“对于任意 B($\mathbb{P}$)-泛型 G, $V[G]_{S'} = V[\pi\text{“}G]_T$”，这等价于说，对于任意 B($\mathbb{P}$)-名称 $\dot{x}$，“$\Vdash_{B(\mathbb{P})} \dot{x} \in V[G]_{S'}$ 当且仅当 $\Vdash_{B(\mathbb{Q})} \pi(\dot{x}) \in V[G]_T$”，即 $\pi\mathsf{N}_{S'} \subseteq \mathsf{N}_{T'}$。关于 B($\mathbb{Q}$) 的类似陈述意味着 $\mathsf{N}_{T'} \subseteq \pi\text{“}\mathsf{N}_{S'}$。根据定理 5.13，$\pi\text{“}\mathsf{N}_{S'} = \mathsf{N}_{T'}$ 足以得出 $S' \cong_{\mathsf{N}} T'$。□

命题 5.15. 对于任意系统 S，都存在一个坚韧系统 T，可由 S 一致地定义，使得 $T \cong_{\mathsf{HS}} S$。

证明。令 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$，不失一般性，假设 $\mathbb{P}$ 是一个完备布尔代数。接着令 $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{P}$ 为 $\mathbb{P}$ 中由满足条件 $\mathrm{fix}(p) \in \mathcal{F}$的条件 p组成的子代数。由$\mathcal{G}$自同构可知，$\mathbb{Q}$ 在自同构下封闭，这是因为$\mathcal{F}$是正规的。换言之，对于任意 $\pi \in \mathcal{G}$，$\pi \restriction \mathbb{Q} \in \mathrm{Aut}(\mathbb{Q})$。因此，我们可以考虑系统$\mathcal{T} = (\mathbb{Q}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$。注意，$\mathrm{HS}_{\mathcal{T}} \subseteq \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$。

为证明$\mathcal{S} \cong \mathcal{T}$，对于任意 $\dot{x} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$，定义

$$i(\dot{x}) = \{(q, \dot{y}) : \dot{y} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{T}}, q \in \mathbb{Q}, q \Vdash \dot{y} \in \dot{x}\}$$

并令 $i^*\colon \mathrm{HS}_{\mathcal{T}} \to \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$ 为恒等映射。

根据归纳法，$i(\dot{x}) \in \mathrm{HS}_{\mathcal{T}}$，而且，$\Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x} = i(\dot{x})$。显然，$\Vdash_{\mathcal{S}} i(\dot{x}) \subseteq \dot{x}$。另一方面，若 $p \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{y} \in \dot{x}$ 对于某个 $\dot{y} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$成立，则根据归纳假设，我们可以假设 $\dot{y} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{T}}$。令 $H = \mathrm{sym}(\dot{x}) \cap \mathrm{sym}(\dot{y})$。若$q = \bigvee_{\pi\in H} \pi(p)$，则 $q \in \mathbb{Q}$,$p \leq q$ 和 $(q, \dot{y}) \in i(\dot{x})$。

断言5.16。设 G 是关于 V的 S-泛型。那么 $G \cap \mathbb{Q}$ 是 T-泛型。

证明。设 $D \subseteq \mathbb{Q}$ 是对称稠密集，且 $H \in \mathcal{F}$ 满足 $\pi\text{“}D = D$ 对每个 $\pi \in H$都成立。只需证明 D 在 $\mathbb{P}$中预稠密，因为这样 D 的向下闭包就是$\mathcal{S}$ 中的一个对称稠密集，因此 $G \cap D \neq \emptyset$。于是任取$p \in \mathbb{P}$。令$q = \bigvee_{\pi\in H} \pi(p) \in \mathbb{Q}$。那么存在 $r \in D$ 使得 r 与 q相容。特别地，对于某个 $\pi \in H$，r 与 $\pi(p)$相容。但这样一来，$\pi^{-1}(r) \in D$ 就与 p相容。□

由该断言可知，只要 $\Vdash_{\mathcal{T}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n)$，且 $\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n \in$属于$\mathrm{HS}_{\mathcal{T}}$，那么 $\Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n)$也成立。另一方面，假设 $\Vdash_{\mathcal{S}} \varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n)$，其中$\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n \in$属于$\mathrm{HS}_{\mathcal{S}}$，但存在 $q \in \mathbb{Q}$ 使得 $q \Vdash_{\mathcal{T}} \neg\varphi(i(\dot{x}_0) \ldots, i(\dot{x}_n))$。那么

$$\begin{aligned} q \Vdash_{\mathcal{T}} \neg\varphi(i(\dot{x}_0), \ldots, i(\dot{x}_n)) \text{ iff } & \Vdash_{\mathcal{T}} \dot{x}_q \neq \emptyset \to \neg\varphi(i(\dot{x}_0), \ldots, i(\dot{x}_n)) \\ \text{iff } & \Vdash_{\mathcal{S}} \dot{x}_q \neq \emptyset \to \neg\varphi(i(\dot{x}_0), \ldots, i(\dot{x}_n)) \\ \text{iff } & q \Vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi(i(\dot{x}_0), \ldots, i(\dot{x}_n)) \\ \text{iff } & q \Vdash_{\mathcal{S}} \neg\varphi(\dot{x}_0, \ldots, \dot{x}_n), \end{aligned}$$

其中 $\dot{x}_q = \{(q, \check{}q)\}$。这就产生了矛盾，因此我们证明了（3）。 □

后续结果（定理9.6）将表明，命题5.15 的表述对 $\cong_{\mathsf{N}}$也成立。

推论5.17。$S \cong_{\mathsf{HS}} T$ 和 $S \cong_{\mathsf{N}} T$ 都是一阶可定义的。

证明。定理 5.13 为$\mathcal{S} \cong_{\mathsf{N}} \mathcal{T}$ 以及$\mathcal{S} \cong_{\mathsf{HS}} \mathcal{T}$给出了一阶刻画，当 $\mathcal{S}$、$\mathcal{T}$是坚韧的。对于任意 $\mathcal{S}$、$\mathcal{T}$，$\mathcal{S} \cong_{\mathsf{HS}} \mathcal{T}$当且仅当前一命题中给出的坚韧系统等价。□

结合引理 5.11、定理 5.13 和推论 5.14，我们立即得到以下结论。

推论 5.18. 设 S、T 均为坚韧的。那么 $S \cong_{\mathsf{HS}} T$ 蕴含 $S \cong_{\mathsf{N}} T$。

6. 积与约化两步迭代

自强迫理论早期以来，对称系统的积就得到了广泛应用，因为它们能轻松地产生具体且“局部”的选择公理失效情形（例如参见 [15]）。

定义 6.1. 设 $\mathcal{S}_0 = (\mathbb{P}_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{F}_0)$ 和 $\mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{F}_1)$ 是对称系统。则定义乘积系统 $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$，其中

(1) $\mathbb{P} = \mathbb{P}_0 \times \mathbb{P}_1$，(2) $\mathcal{G} = \mathcal{G}_0 \times \mathcal{G}_1$ 逐坐标作用于 $\mathbb{P}$，(3) 且 $\mathcal{F}$ 由 $\mathcal{G}$ 的如下形式的子群生成：$H_0 \times H_1$，其中 $H_0 \in \mathcal{F}_0, H_1 \in \mathcal{F}_1$。

容易验证，乘积是一个对称系统，并且任何 $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1$-泛型都具有如下形式：$G_0 \times G_1$ 其中 G_0 是一个 $\mathcal{S}_0$-泛型，而 G_1 是一个 $\mathcal{S}_1$-泛型。

本节的目标是证明 $\mathcal{S}_0 \times \mathcal{S}_1$ 等价，事实上是 N-$\check{}$等价于 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$，正如我们所预期的那样。为此，我们证明一个关于约化两步迭代的更一般结果，这一结果在第 7 节也会用到。

定义 6.2。 设 $\mathcal{S}_0 = (\mathbb{P}_0, \mathcal{G}_0, \mathcal{F}_0)$ 和 $\mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{F}_1)$ 是一个 $\mathcal{S}_0$-名称，用于一个对称系统 $\operatorname{sym}(\mathcal{S}_1) = \mathcal{G}_0$。那么，$\mathcal{S}_1$ 的名称见证是一个三元组 $\mathbf{S}_1 = (\mathbf{P}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1)$，由 $\mathcal{S}_0$-名称集合组成，使得

(1) $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{G}_1$ 和 $\mathbf{F}_1$ 在 $\mathcal{G}_0$ 下闭合；(2) $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot{\mathbb{P}}_1 = \mathbf{P}_1^\bullet \wedge \dot{\mathcal{G}}_1 = \mathbf{G}_1^\bullet \wedge \dot{\mathcal{F}}_1 = \mathbf{F}_1^\bullet$，[15]

(3) 对任意 $\dot{p} \in \mathbf{P}_1$ 和 $\dot{\pi} \in \mathbf{G}_1$，，存在唯一的 $\dot{q} \in \mathbf{P}_1$ 使得 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \dot{q} = \dot{\pi}(\dot{p})$；(4) 对任意 Δ_0-公式 ψ 以及任意 $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n \in \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{F}_1$，，如果

$$\Vdash_{\mathcal{S}_0} \exists! x \in \dot{\mathcal{G}}_1 \cup \dot{\mathcal{F}}_1 \psi(x, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n),$$

那么存在 $\dot{x} \in \mathbf{G}_1 \cup \mathbf{F}_1$ 使得 $\Vdash_{\mathcal{S}_0} \psi(\dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)$。

我们要指出，这一定义相当特殊，只是概括了用于证明命题 6.6 的条件。仔细考察证明可以发现，例如，条件 (4) 可以通过限制为一个很小的有限 Δ_0-公式列表而加以弱化。在我们对两步迭代的正式定义（定义 3.1）中，$\mathbf{P}_1$ 所扮演的角色由闭名称承担。

例 6.3. 若 $\mathcal{S}_1 = (\mathbb{P}_1, \mathcal{G}_1, \mathcal{F}_1)$ 是 V 中的对称系统，则 $(\mathbf{P}_1, \mathbf{G}_1, \mathbf{F}_1)$ 是 $\check{\mathcal{S}}_1$，的名称见证，其中 $\mathbf{P}_1 = \{\check{p} : p \in \mathbb{P}_1\}$，$\mathbf{G}_1 = \{\check{\pi} : \pi \in \mathcal{G}_1\}$ 以及 $\mathbf{F}_1 = \{\check{H} : H \in \mathcal{F}_1\}$。

特别要注意，若 $p \Vdash_{\mathcal{S}_0} \psi(\check{x}, \check{x}_0, \dots, \check{x}_n)$，则由 Δ_0-绝对性可知，$\Vdash_{\mathcal{S}_0} \psi(\check{x}, \check{x}_0, \dots, \check{x}_n)$ 已成立。

定义 6.4. 设 $\mathcal{S}_0$, $\mathcal{S}_1$ 和 $\mathbf{S}_1$ 如定义 6.2所述。则我们定义约化两步迭代 $\mathcal{S}_0 \star_{\mathbf{S}_1} \mathcal{S}_1$ 时，完全按照定义 3.1进行，但只使用名称见证 $\mathbf{S}_1$中的名称。

显然可以检查出，这再次构成一个对称系统，与引理的证明完全相同3.2。我们唯一需要修改的是，将名称 $\dot{\pi}(\dot{p})$ 替换为来自 $\mathbf{S}_1$ 的相应唯一名称，并注意到 $\pi \circ \sigma$，σ^{-1}，$\pi H \pi^{-1}$ 等都可以用 Δ_0 公式定义。若令 $\mathbf{P}_1$ 为闭名称的集合

[15] 注意，根据前一条款，$\mathbf{P}_1^\bullet$、$\mathbf{G}_1^\bullet$、$\mathbf{F}_1^\bullet$ 是 $\mathcal{S}_0$-名称。

作为 $\mathbb{P}_1$中元素的名称，并令$\mathbf{G}_1$ 和$\mathbf{F}_1$ 为足够大的名称集合，分别对应 $\mathcal{G}_1$ 和$\mathcal{F}_1$, 中的元素，我们得到$\mathcal{S}_0 \star_{\mathbf{S}_1} \mathcal{S}_1 = \mathcal{S}_0 *\mathcal{S}_1$。

请注意，第 (3) 条中的唯一性并非绝对必要，正如定义中可以不要求使用闭名称一样 3.1。例如，只要 $(p, \dot{q}_0)$ 和 $(p, \dot{q}_1)$ 满足 $\Vdash \dot{q}_0 = \dot{q}_1$，我们就可以将这两个条件视为相同，从而得到一个等价的系统。

此时，人们或许会天真地认为，只需完全照搬原来的方式重新证明因子分解定理 3.3 即可。然而事情并非如此，因为闭名称与更一般的名称见证之间存在一个关键差异，而这一区别会影响定理3.3的证明。具体来说，尽管任何由任意 $\mathcal{S}_0$-名称 $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$ 定义的对象都有唯一的闭名称，并且可以用于定义两步迭代，但第 (3) 条仅对特定的 $\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$保证这一点。例如，若 $[\dot{x}]$ 是一个关于某个 $\mathcal{S}_1$-名称的 $\mathcal{S}_0$-名称，则两步迭代的滤子中存在一个形如 (H_0,对称群 $\cdot_{\mathcal{G}_1}([\dot{x}])$ 的群；但约化迭代中未必如此，因为在 $\mathbf{F}_1$ 中可能根本不存在对称群 $\cdot_{\mathcal{G}_1}([\dot{x}])$ 的名称。事实证明，实际的证明要技术性得多。首先，给出一个关于通常两步迭代的简单引理：

引理 *6.5.* 设 $S_0 * S_1 = (\mathbb{P}, G, F)$ 是定义 *3.1* 中的两步迭代，设 $\dot{x}$ 是任意一个 $\mathbb{P}$-名称，并且 $G = G_0 * G_1$ 是 V上的 $S_0 * S_1$-泛型。此外，设 $(\pi, \dot{\sigma})$、$(\pi, \dot{\tau}) \in (G0, \dot{G}_1)$，并假设 $\dot{\sigma}^{G_0} = \dot{\tau}^{G_0}$。那么同样有 $(\pi, \dot{\sigma})(\dot{x})^G = (\pi, \dot{\tau})(\dot{x})^G$.

证明。 首先注意到

$$\begin{aligned}(\pi, \dot{\sigma})(p, \dot{q}) \in G \text{ iff } & (\pi(p), \dot{\sigma}(\pi(\dot{q}))) \in G \\ \text{iff } & \pi(p) \in G_0 \wedge \dot{\sigma}(\pi(\dot{q})))^{G_0} \in G_1 \\ \text{iff } & \pi(p) \in G_0 \wedge \dot{\sigma}^{G_0}(\pi(\dot{q})^{G_0}) \in G_1 \\ \text{iff } & \pi(p) \in G_0 \wedge \dot{\tau}^{G_0}(\pi(\dot{q})^{G_0}) \in G_1 \\ \text{iff } & \pi(p) \in G_0 \wedge \dot{\tau}(\pi(\dot{q}))^{G_0} \in G_1 \\ \text{iff } & (\pi, \dot{\tau})(p, \dot{q}) \in G.\end{aligned}$$

现在对 $\dot{x}$ 的秩使用归纳法即可得出结论。如果 $(\pi, \dot{\sigma})(\dot{y})^G \in (\pi, \dot{\sigma})(\dot{x})^G$，那是因为 $((p, \dot{q}) \ \dot{y}) \in \dot{x}$ 并且 $(\pi, \dot{\sigma})(p, \dot{q}) \in G_0$。

那么 $(\pi, \dot{\tau})(p, \dot{q}) \in G$，因此 $(\pi, \dot{\tau})(\dot{y})^G \in (\pi, \dot{\tau})(\dot{x})^G$，根据归纳假设，$(\pi, \dot{\tau})(\dot{y})^G = (\pi, \dot{\sigma})(\dot{y})^G$。反方向也可用同样的论证。□

下文中，当 G_0 是$\mathcal{S}_0$-泛型于 V 且 G_1 是 $\dot{\mathcal{S}}_1^{G_0}$-泛型于$V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$时，我们记

$$G_0 \star_{\mathbf{S}_1} G_1 = \{(p, \dot{q}) \in \mathbb{P}_0 \times \mathbf{P}_1 : p \in G_0, \dot{q}^{G_0} \in G_1\}.$$

为增强可读性，我们还将在所有地方省略 $\star_{\mathbf{S}_1}$ 中的下标$\mathbf{S}_1$ 。

命题 *6.6*。设 S_0, S_1 和 S_1 如定义 *6.2* 所述。则 $S_0 *S_1 \cong_{\mathsf{N}} S_0 \star S_1$。此外，只要 $G_0 * G_1$ 是 $S_0 * S_1$-泛型于 V， $G_0 \star G_1$ 就是 $S_0 \star S_1$-泛型于 V；反之亦然。若 G是 $S_0 \star S_1$-泛型，则 $G_0 * G_1$ 是 $S_0 * S_1$-泛型，其中 $G_0 =$ 定义域 G 且 $G_1 = \{\dot{q}^{G_0} : \exists p \in G_0 ((p, \dot{q}) \in G)\}$。在两种情形下，

$$V[G_0 * G_1]_{\mathcal{S}_0 * \dot{\mathcal{S}}_1} = V[G_0 \star G_1]_{\mathcal{S}_0 \star \dot{\mathcal{S}}_1}.$$

证明。 首先，让我们引入一些记号以提高可读性。我们将把 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$ 的强迫概念记为 $\mathbb{P}$，并把 $\mathcal{S}_0 \star \mathcal{S}_1$ 的强迫概念记为$\mathbb{P}_\star$。此外，我们通常会把形如 $\mathcal{S}_0 \star \mathcal{S}_1$ 的下标替换为 $\star$，当

合理时。因此，我们写对称群$_\star(\dot{x})$，而不写对称群$_{\mathcal{S}_0\star\mathcal{S}_1}(\dot{x})$，并把对称群$(\dot{x})$保留给系统 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$。类似地，对于 $H_0 \in \mathcal{F}_0$， $H_1 \in \mathbf{F}_1,$ ，我们令

$$(H_0, \dot{H}_1)_\star = \{(\pi_0, \dot{\pi}_1) : \pi_0 \in H_0, \dot{\pi}_1 \in \mathbf{G}_1, \Vdash \dot{\pi}_1 \in \dot{H}_1\},$$

并且像之前一样保留（H_0， H_1）的含义。

接下来，不失一般性，我们可以假设 P_1 仅由闭名称组成：定义 6.2 的第 (4) 项表明，存在一个名称 $\mathrm{id} \in \mathrm{G}_1$ 表示恒等。也就是说，若 $\dot{\sigma} \in \mathrm{G}_1$ 是任意的，则 $\dot{\sigma} \circ \dot{\sigma}^{-1}$ 是 Δ_0-可定义的。接下来，(3) 中的唯一性条件表明，对于任意 $\dot{p}, \dot{q} \in \mathrm{P1}$, $\Vdash \dot{p} = \mathrm{id}(\dot{p}) = \dot{q}$ 当且仅当 $\dot{p} = \dot{q}$。因此，我们不妨将每个 $\dot{p}$ 替换为 $\mathrm{cl}(\dot{p})$，从而得到一个完全同构的情形。特别地， $\mathbb{P}_\star$ 是 $\mathbb{P}$的稠密子集。这也意味着，例如，对于 $\dot{\pi} \in \mathrm{G1}$, $\dot{p} \in \mathrm{P}_1,$, 闭名称 $\dot{\pi}(\dot{p})$ 已经是唯一的$\dot{q} \in \mathrm{P}_1$，使得 $\Vdash \dot{\pi}(\dot{p}) = \dot{q}$；并且当 $\dot{x}$ 是一个 $\mathbb{P}_\star$-名称时，相对于 $\mathrm{S}_0 \star \mathrm{S}_1$ 或相对于 $\mathrm{S}_0 * \mathrm{S}_1$, 计算 $\bar{\pi}(\dot{x})$,. $\bar{\pi} = (\pi_0, \dot{\pi}_1)$ 并无区别。

现在假设 G 是$\mathcal{S}_0 \star \mathcal{S}_1$-泛型，且 G_0、 G_1 如命题所述。设 D 是一个$\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$-对称稠密集，记为（$H_0$， H_1）“$D = D_\circ$ 注意， G_0 是$\mathcal{S}_0$-泛型，因此存在 $\dot{H}'_1 \in \mathbf{F}_1$ ，使得 $\dot{H}_1^{G_0} = \dot{H}_1'^{G_0}$。此外定义 $\mathrm{sym}(\dot{H}'_1)$。令 E 由 $\mathbb{P}_\star$ 中那些低于 D某个元素的条件组成。那么

$$\tilde{D} = \{(\pi_0, \dot{\pi}_1)(q_0, \dot{q}_1) : (q_0, \dot{q}_1) \in E, (\pi_0, \dot{\pi}_1) \in (H'_0, \dot{H}'_1)_\star\}$$

是 $\mathrm{S}_0 \star \mathrm{S}_1$-对称且稠密的。每当（$\pi_0$， $\dot{\pi}_1$）（q_0， $\dot{q}_1$）$\in G_0 \star G_1 \cap D$ 具有上述形式时，都存在（p_0， $\dot{p}_1$），它 $\in D$ 高于（q_0， $\dot{q}_1$），且 $\dot{\tau}$，使得 $\Vdash \dot{\tau} \in \dot{H}_1$ 和 $\dot{\pi}_1^{G_0} = \dot{\tau}^{G_0}$（参见引理 2.14 及其后的讨论）。于是（$\pi_0$， $\dot{\tau}$） $\in$（H_0， H_1），并且（π_0， $\dot{\tau}$）（p_0， $\dot{p}_1$）$\in G_0 * G_1 \cap D_\circ$ 这说明 $G_0 * G_1$ 是 $\mathrm{S}_0 * \mathrm{S}_1$-泛型。要证明任意一个 $\mathrm{S}_0 * \mathrm{S}_1$-泛型都会导出一个 $\mathrm{S}_0 \star \mathrm{S}_1$-泛型，并不难得多。

最后，让我们证明这两个模型一致。设 $\dot{x}$ 是一个$\mathcal{S}_0 \star \mathcal{S}_1$-对称名称，且 $H_\star = (H_0, H_1)_\star \leq$对称群$_\star(\dot{x})$。那么 $H = (H_0, H_1)$ 是系统 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$ 中的一个群，我们可以定义 $\dot{x}$ 的对称化如下：

$$s(\bar{H}, \dot{x}) = \bigcup_{\bar{\sigma} \in \bar{H}} \bar{\sigma}(\dot{x}).$$

根据引理 6.5，注意到 $s(\bar{H}, \dot{x})^{G_0 * G_1} = \dot{x}^{G_0 * G_1}$，事实上 $\Vdash_{\mathbb{P}} s(\bar{H}, \dot{x}) = \dot{x}.$ 。另外， $H \leq$对称群$(s(H, \dot{x}))$，因此 $s(H, \dot{x})$ 是 $\mathrm{S}_0 * \mathrm{S}_1$-对称的。通过对 $\dot{x}$ 的秩进行递归，定义

$$j(\dot{x}) = \bigcup_{\bar{H}_\star \leq \mathrm{sym}_\star(\dot{x})} s(\bar{H}, \{(r, j(\dot{y})) : (r, \dot{y}) \in \dot{x}\}).$$

然后通过对秩进行归纳法，还可以看出 $j(\dot{x})^{G_0 * G_1} = \dot{x}^{G_0 * G_1}$, $\Vdash_{\mathbb{P}} j(\dot{x}) = \dot{x}$，并且 $j(\dot{x})$ 是一个 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$-名称。这表明 $V[G_0 * G_1]_{\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1} \supseteq V[G_0 \star G_1]_{\mathcal{S}_0 \star \mathcal{S}_1}$。

接下来，假设 $\dot{x}$ 是一个秩最小的 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$-名称，满足 $\neg \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in \mathrm{HS}^\bullet_\star$。定义这个 $\mathbb{P}_\star$-名称

$$\dot{y} = \{(\bar{p}, \dot{z}) \in \mathbb{P}_\star \times \mathsf{HS}_{\gamma,\star} : \bar{p} \Vdash_{\mathcal{S}_0 * \dot{\mathcal{S}}_1} j(\dot{z}) \in \dot{x}\}$$

对于足够大的 γ，并注意到根据 $\dot{x}$ 的极小性， $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{y} = \dot{x}_\circ$ 令 $(H_0, H_1) \leq$对称群$(\dot{x})$。于是存在一个 $p_0 \in \mathbb{P}_0$ 的稠密集，使得 $H'_1 \in \mathrm{F}_1$，且 $p_0 \Vdash H_1 = H'_{1\circ}$ 给定这样的 p_0 和 H'_1，令 $H'_0 = H_0 \cap$对称群(H'_1)，并令 $\dot{x}'$ 为. $\dot{y}$ 关于 $(H'_0, H'_1)_\star$ 的对称化，因此 $\dot{x}' \in \mathrm{HS}_\star$。再次使用引理 6.5，对于任意 $\bar{\pi} \in (H'_0, H'_1)_\star$，$(p_0, 1) \Vdash_{\mathbb{P}} \bar{\pi}(\dot{y}) = \bar{\pi}(\dot{x}) = \dot{x}$，并且进一步，$(p_0, 1) \Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x}' = \dot{x}_\circ$ 由稠密性， $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in \mathrm{HS}^\bullet_\star$，于是得到矛盾。最后，若 $\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in \mathrm{HS}^\bullet_\star$，则存在一个足够大的 α，使得

$$\Vdash_{\mathbb{P}} \dot{x} \in \mathsf{HS}_{\alpha,\star} = j(\mathsf{HS}_{\alpha,\star})$$

尤其是，

$$\Vdash_{\mathcal{S}_0*\dot{\mathcal{S}}_1} \dot{x} \in j(\mathsf{HS}_{\alpha,\star}) \text{ and } \dot{x}^{G_0*G_1} \in j(\mathsf{HS}_{\alpha,\star})^{G_0*G_1} = \mathsf{HS}^{G_0*G_1}_{\alpha,\star} = \mathsf{HS}^{G_0\star G_1}_{\alpha,\star}.$$

对于最后一个等式，只需注意 $G_0 \star G_1 = (G_0 * G_1) \cap \mathbb{P}_\star$。根据定理 5.14 中的刻画，我们有这两个系统是 N-等价的。至此证明完毕。□

以下结论显然可得：

定理 6.7. 设 S_0 和 S_1 是对称系统。那么 $S_0 \times S_1 \cong_{\mathsf{N}} S_0 * S_1$。此外，$G_0 \times G_1$ 是 $S_0 \times S_1$ 泛型，当且仅当 $G_0 * G_1$ 是 $S_0 * S_1$-泛型，并且我们有

$$V[G_0 \times G_1]_{\mathcal{S}_0\times\mathcal{S}_1} = V[G_0 * G_1]_{\mathcal{S}_0*\check{\mathcal{S}}_1}.$$

因此，$S_0 \times S_1 \cong_{\mathsf{N}} S_1 \times S_0$。

7. 商

迭代的对偶概念是商；与强迫的情形类似，了解一个强迫何时是另一个强迫的商会很有用。下面我们定义$\mathcal{S}_0$ 何时是$\mathcal{S}_1$, 的完全子系统，这将意味着通过$\mathcal{S}_1$ 得到的扩张是$\mathcal{S}_0$ 与某个商系统的两步迭代。我们将先定义完全子系统的概念；然后，为了定义商对称扩张，我们会先定义“尊重基”，它在商系统的定义中起着重要作用，之后也会发挥重要作用。

定义 7.1（完全子系统）。设$\mathcal{S}_0 = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F}), \mathcal{S}_1 = (\mathbb{Q}, \mathcal{H}, \mathcal{E})$是对称系统。若$\mathcal{S}_0$ 是 $\mathcal{S}_1$ 的子系统，当且仅当

（1） $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{Q}$的子力迫，即 $\mathbb{P} \subseteq \mathbb{Q}$ ，且扩展关系和不相容关系一致；

（2） $\forall H \in \mathcal{F} \exists K \in \mathcal{E} (K \restriction \mathbb{P} := \{\pi \restriction \mathbb{P} : \pi \in K\} \leq H)$。若另有（3）$\mathbb{P} \lessdot_{\mathcal{S}_0} \mathbb{Q}$, 即 $\mathbb{P}$ 的每个$\mathcal{S}_0$-对称稠密子集在 $\mathbb{Q}$中都是预稠密的，则称$\mathcal{S}_0$ 是$\mathcal{S}_1$ 的完全子系统，记作$\mathcal{S}_0 \lessdot \mathcal{S}_1$ 。

每个对称系统（$\mathbb{P}$、$\mathcal{G}$、$\mathcal{F}$）都是（$\mathbb{P}$、$\{\mathrm{id}\}$、$\{\{\mathrm{id}\}\}$）的完全子系统，这对应于使用 $\mathbb{P}$ 进行强迫。这一点起初可能令人困惑，但如果我们考虑强迫中的标准情形：当 $\mathbb{P}$ 完全嵌入 $\mathbb{Q}$ 时，这意味着为 $\mathbb{Q}$ 添加一个泛型也会为 $\mathbb{P}$ 添加一个泛型，因此从有意义的角度来说，$\mathbb{Q}$ 添加的对象比 $\mathbb{P}$“更多”。在对称扩张的情形中，我们通常可以将$\mathcal{G}$看作保留某种结构，而将$\mathcal{F}$ 看作保留该结构的子集。在这种情况下，缩小 $\mathcal{G}$ 或扩大$\mathcal{F}$，就能让我们保留更多结构或更多子集；而这最终会达到平凡群（或非正常滤子）的情形，此时它将添加所有泛型子集。

如果我们自然地将$\mathcal{S}_0$识别为两步迭代$\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1$的一个子系统，在我们考虑的所有应用中，都有 $\mathbb{P} \lessdot \mathbb{Q}$，即 $\mathbb{P}$ 的每个稠密子集在 $\mathbb{Q}$ 中都是预稠密的；而在两步迭代中尤其如此。不过，（3）是一个稍微更自然的选择，而事实证明它不会增加太多复杂性。

引理 7.2。设 S_0 是如上所述的 S_1 的完全子系统，并设 G 是 S_1-泛型。那么 $G_0 := G \cap \mathbb{P}$ 是 S_0-泛型，并且 $V[G_0]_{\mathcal{S}_0} \subseteq V[G]_{\mathcal{S}_1}$。事实上，每个 S_0-名称都是一个 S_1-名称。

证明。要证明 G_0 是泛型的，根据 (3)，只需验证：如果 $D \subseteq \mathbb{P}$ 是$\mathcal{S}_0$-对称的，那么 D 也 $\mathcal{S}_1$-对称。这立即由 (2) 得出。类似地，如果 $\dot{x}$ 是一个$\mathcal{S}_0$-名称，那么根据 (2)，存在 $K \in \mathcal{E}$ 使得 $K \restriction \mathbb{P} \leq \mathrm{sym}(\dot{x})$,

因此 K 逐点固定子群 $\dot{x}$。这个论证可以遗传地进行，因此 $\dot{x}$ 也是一个$\mathcal{S}_1$-名称。显然，$\dot{x}^G = \dot{x}^{G_0}$，所以 $V[G_0]_{\mathcal{S}_0} \subseteq V[G]_{\mathcal{S}_1}$。□

定义 7.3。令 $\mathbb{P}$ 为 $\mathbb{Q}$的一个子力迫，令 $p \in \mathbb{P}$、$q \in \mathbb{Q}$ 和 H 为 $\mathbb{P}$ 上的自同构群。那么 p 是 q 的一个 H-约化，当且仅当

$$\forall r \in \mathbb{P}, r \leq p \exists \pi \in H(\pi(r) \parallel q).$$

通常的约化概念（例如，[13, 定义 7。1]中给出的定义）对应于 H 为平凡群的情形。

引理 7.4。设 $S = (\mathbb{P}, G, F)$ 且 $\mathbb{P}$ 是 $\mathbb{Q}$的一个子力迫。那么 $\mathbb{P} \lessdot_S \mathbb{Q}$ 当且仅当对每个 $H \in F$ 和 $q \in \mathbb{Q}$，q 在 $\mathbb{P}$ 中都有一个 H-约化。此外，在此情形下，只要 $G \subseteq \mathbb{Q}$ 是一个滤子，且 $G_0 = G \cap \mathbb{P}$ 是 S_0-泛型的，那么对每个 $H \in F$，任意 $q \in G$ 都有一个 H-约化 $p \in G_0$。

证明。假设 $\mathbb{Q}$ 中的每个条件都有一个 H-约化，并且 $D \subseteq \mathbb{P}$ 是由 H 见证的对称稠密开集。取定 $q \in \mathbb{Q}$，并令 p 为一个 H-约化。那么，对某个 $r \in D$，有 $p \parallel r$。令 $r' \in \mathbb{P}$、$r' \leq p$，r 和 $\pi \in H$ 满足 $\pi(r') \parallel q$。那么 $\pi(r) \in D$，且 $\pi(r) \parallel q$。由于 q 是任意的，D 确实在 $\mathbb{Q}$中预稠密。

另一方面，假设 $\mathbb{P} \lessdot_S \mathbb{Q}$，并令 $q \in \mathbb{Q}$、$H \in \mathcal{F}$ 为任意的。考虑 $E = \{p \in \mathbb{P} : \forall \pi \in H (\pi(p) \perp q)\}$ 与 $D = E \cup \{p \in \mathbb{P} : p \perp E\}$。$D$ 在 $\mathbb{P}$ 中显然是稠密的，而且 π“$D = D$。因此 D 在 $\mathbb{Q}$ 中是预稠密的，并且存在 $p \in D$ 使得 $p \parallel q$。显然 $p \notin E$，从而 $p \perp E$。但这样一来，对任意 $r \leq p$，必存在某个 $\pi \in H$ 使得 $\pi(r) \parallel q$。因此 p 是 q的一个 H-约化。

现在，每当 $G \subseteq \mathbb{Q}$ 是一个滤子，使得 $q \in G$ 且 $G_0 = G \cap \mathbb{P}$ 是$\mathcal{S}$-泛型时，在 $D \cap G_0$ 中当然存在这样的 p。□

7.1. 尊重基。

定义 7.5. 设 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 是一个对称系统，且 $\dot{x}$ 是一个 $\mathbb{P}$-名称。那么，$\dot{x}$ 的尊重图为

$$R_{\mathcal{S}}(\dot{x}) := \{(p, \pi) : p \in \mathbb{P}, \pi \in \mathcal{G}, p \Vdash \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}.$$

若集合 $\mathcal{R} \subseteq \mathrm{HS}$ 满足以下条件，则称其为尊重基 $\mathcal{S}$ 的尊重基：

(1) 对每个 $\dot{x} \in \mathrm{HS}$，使得存在 $\dot{x}' \in \mathrm{HS}$ 和 $\dot{y} \in \mathcal{R}$，满足 (a) $p \Vdash \dot{x} = \dot{x}'$ 且 (b) $R_{\mathcal{S}}(\dot{y}) \subseteq R_{\mathcal{S}}(\dot{x}')$ 的 $p \in \mathbb{P}$ 所构成的集合是稠密的。(2) $\mathcal{R}$ 在$\mathcal{G}$作用下封闭。也就是说，$\mathrm{sym}(\mathcal{R}^\bullet) = \mathcal{G}$。

尊重基的一个简单情形是，对于每个 $\dot{x} \in \mathrm{HS}$，都存在 $\dot{y} \in \mathcal{R}$，满足$R_{\mathcal{S}}(\dot{y}) \subseteq R_{\mathcal{S}}(\dot{x})$。这大概是最常见的情形，但条件 (1) 也足以满足要求，并且与命题 8.3有关。

以下是众所周知的结论。

引理 7.6. 假设依赖选择公理$_\kappa$。那么对于任意语言大小为 $\leq \kappa$ 的结构 N，以及任意大小为 $\leq \kappa$ 的 $A \subseteq N$，都存在一个大小为$\leq \kappa$ 的初等子结构 $M \preccurlyeq N$，使得 $A \subseteq M$。

引理 7.7. (ZF +依赖选择公理$_\kappa$) 假设 $|\mathbb{P} \cup G| = \kappa$。那么$\mathrm{HS}_{\kappa^+}$ 是 S 的尊重基。

证明。不失一般性，我们可以假设 $\mathbb{P}$ 和$\mathcal{G}$ 都由 κ的子集编码。令 $\dot{x} \in V_\beta$ 为 $\beta > \kappa^+$，并令 M 为V_β的一个基数为 κ的初等子模型，使得 $\kappa \cup \{\mathbb{P}, \mathcal{G}\ \dot{x}\} \subseteq M$。令 $\iota\colon M \to N$为莫斯托夫斯基塌缩，则 $\iota(\mathbb{P}) = \mathbb{P}$ 且 $\iota(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$。令 $\dot{y} = \iota(\dot{x})$。对于每个 $\pi \in \mathcal{G}$，我们有

$p \Vdash \pi(\dot{x}) = \dot{x}$ 当且仅当 $M \models p \Vdash \pi(\dot{x}) = \dot{x}$ 当且仅当 $N \models p \Vdash \pi(\dot{y}) = \dot{y}$ 当且仅当 $p \Vdash \pi(\dot{y}) = \dot{y}$。令$\alpha = N \cap$为序数，则根据依赖选择公理有 $\alpha < \kappa^+{}_\kappa$。因此，$\dot{y} \in \mathrm{HS}_\alpha$ 且 $R_\mathcal{S}(\dot{y}) = R_\mathcal{S}(\dot{x})$。□

上述计算需要某种形式的选择公理，才能得到初等子模型 M。在缺乏选择公理的情况下，弱 Löwenheim–Skolem 基数仍可用于为尊重基提供一个统一的界。

定义 7.8 (Usuba [19])。若基数 κ 满足以下条件，则称其为 弱 *Löwenheim–Skolem* 基数：对于每个 $\gamma < \kappa$，$\alpha \geq \kappa$ 以及 $x \in V_\alpha$，存在一个初等 $M \prec V_\alpha$，$V_\gamma \cup \{x\} \subseteq M$，且 M 的 Mostowski 塌缩是 V_κ的一个元素。

采用与引理7.7基本相同的证明，这次不依赖于 依赖选择公理$_\kappa$，我们得到：

引理 7.9。设 κ 是一个弱 *Löwenheim–Skolem* 基数，且 $S \in V_\kappa$。那么HS_κ 是 S 的一个尊重基。

在ZFC中，弱 LS 基数恰好是 ℶ-逐点固定子群的不动点。因此，引理7.7 的计算通常远优于引理7.9。在具体例子中，往往可以直接找到尊重基。

注意，对于任意 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$，总有

$$\mathbb{P} \times \mathrm{sym}_\mathcal{S}(\dot{x}) \subseteq \mathbb{P} \times \mathrm{res}_\mathcal{S}(\dot{x}) \subseteq R_\mathcal{S}(\dot{x}).$$

因此，若对于 $H \in \mathcal{F}$我们找到一个名称 $\dot{y}$，使得 $R_\mathcal{S}(\dot{y}) = \mathbb{P} \times H$，那么对于所有满足 $H \leq \mathrm{sym}(\dot{x})$ 的 $\dot{x}$，都有 $R_\mathcal{S}(\dot{y}) \subseteq R_\mathcal{S}(\dot{x})$。这使得在一些具体例子中寻找尊重基变得容易。

例 7.10。令$\mathcal{S}$ 和$\langle \dot{c}_n : n \in \omega \rangle$ 如例2.15所述。那么，所有形如 $\bar{c}_s = \langle \dot{c}_{s(i)} : i < |s| \rangle^\bullet$ 且 $s \in \omega^{<\omega}$ 为单射的名称构成一个尊重基。具体而言，只要 $\pi \notin \mathrm{fix}(\mathrm{ran}(s)) = \mathrm{sym}(\bar{c}_s)$，就有

$$p \Vdash \pi(\bar{c}_s) \neq \bar{c}_s$$

对任意 $p \in \mathbb{P}$。因此 $R_\mathcal{S}(\bar{c}_s) = \mathbb{P} \times$ 逐点固定子群$(\mathrm{ran}(s))$。

问题 7.11. 引理 7.7是否为最优?

备注。假设 $\mathbb{P}$ 是一个完备布尔代数，且 $G = \mathrm{Aut}(\mathbb{P})$。那么

$$R_\mathcal{S}(\dot{y}) \subseteq R_\mathcal{S}(\dot{x}) \leftrightarrow \mathrm{res}_\mathcal{S}(\dot{y}) \subseteq \mathrm{res}_\mathcal{S}(\dot{x}).$$

证明。对于任意 $\pi \in \mathcal{G}$ 和 $p \in \mathbb{P}$，我们可以定义一个对合 $\sigma \in \mathcal{G}$，它在 $p \vee \pi(p)$ 的补以下按恒等映射作用，在 p 以下按 π 作用，并在$\pi(p)$以下按 π^{-1} 作用。接着注意到 $p \Vdash \dot{x} = \pi(\dot{x})$ 当且仅当 $\Vdash \dot{x} = \sigma(\dot{x})$。□

7.2. 商强迫。在本节余下部分中，我们为每个系统 $\mathcal{S}$ 固定一个尊重基 $\mathcal{R}(\mathcal{S})$ 的指定。严格来说，下面给出的定义依赖于这一选择，但所有结果均不受影响。不过，这一具体选择在后文会变得更加重要。目前，我们只需采用指定 $\mathcal{R}(\mathcal{S}) = \mathrm{HS}_{\mathcal{S},\alpha}$，其中 α 是使 $\mathrm{HS}_{\mathcal{S},\alpha}$ 成为尊重基的最小序数。

定义 7.12。令$\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$为一个对称系统，并令 $\mathbb{P} <_\mathcal{S} \mathbb{Q}$。考虑公式

$$\psi(p, r, (\dot{x}_i, \dot{y}_i)_{i<n}) = \forall p' \leq p \exists \pi \in \mathcal{G}(p \Vdash \forall i < n(\pi(\dot{x}_i) = \dot{y}_i) \wedge \pi^{-1}(p') \parallel r)$$

于是我们将一个强迫概念的$\mathcal{S}$-名称定义为

$$\dot{\mathbb{Q}/\mathcal{S}} = \{(p, (\check{r}, \{((\dot{x}_i)\check{}, \dot{y}_i) : i < n\})^\bullet) : \psi(p, r, (\dot{x}_i, \dot{y}_i)_{i<n})\},$$

其中 p, p' 在 $\mathbb{P}$中变化，r 在 $\mathbb{Q}$中变化，$\dot{x}_i, \dot{y}_i$ 在$\mathcal{R}(\mathcal{S})$中变化，而 n 在ω中变化。在 $V^\mathcal{S}$中，$(r_1, a_1) \leq (r_0, a_0)$ 当且仅当 $r_1 \leq r_0$ 且 $a_0 \subseteq a_1$。

以下是一个简单的观察结果。

命题 7.13. 对于任意 $\sigma \in \mathcal{G}$, $\sigma(\mathbb{Q}/\mathcal{S}) = \mathbb{Q}/\mathcal{S}$。

注意，强迫 $\mathbb{P}/\mathcal{S}$ 取决于特定的系统 $\mathcal{S}$，而不仅仅取决于它的 $\cong_{\mathsf{N}}$-等价类。例如，对于 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \{\mathrm{id}\}, \{\{\mathrm{id}\}\})$，$\mathbb{P}/\mathcal{S}$ 是平凡力迫，这正如我们所预期的；但对于 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathrm{Aut}(\mathbb{P}), \langle\{\mathrm{id}\}\rangle)$，商 $\mathbb{P}/\mathcal{S}$ 是平凡力迫的大型彩票和，更具体地说是 $\bigoplus_{\pi\in\mathrm{Aut}(\mathbb{P})^V} \pi$“$G$，其中 G 是泛型滤子（因此其自身是平凡力迫）。

这在某种程度上对于强迫概念的通常方法来说成立。这也不仅仅是由于我们对 $\mathbb{P}/\mathcal{S}$ 的特定定义。作为一个更一般的例子，考虑任意齐次极小力迫 $\mathbb{P}$，例如萨克斯力迫。设 $\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathrm{Aut}(\mathbb{P}), \{\mathrm{Aut}(\mathbb{P})\})$。那么 $\mathcal{S}$ 不会添加任何新集合，因此，为了使 $\mathcal{S} * \mathbb{P}/\mathcal{S}$ 生成一个 $\mathbb{P}$-扩展，$\mathbb{P}/\mathcal{S}$ 必须是一个非平凡强迫概念的名称。但显然，$\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{P} * \mathbb{P}/\mathcal{S}$ 甚至不是弱等价的。

引理 7.14. $\Vdash_{\mathcal{S}} \mathbb{P}/\mathcal{S}$ 是弱齐次的。

证明。 首先注意，利用稠密性论证，我们可以将 ψ 在定义7.12中的

$$\exists \pi \in \mathcal{G}(p \Vdash \forall i < n(\pi(\dot{x}_i) = \dot{y}_i) \wedge \pi^{-1}(p) \leq r)$$

替换为，并得到同一对象的一个$\mathcal{S}$-名称。这就是本证明中我们将使用的名称 $\mathbb{P}/\mathcal{S}$的定义。

令 G 在 V 上是 S-泛型。在 $V[G]_{\mathcal{S}}$中，任取 (r_0, a_0)、$(r_1, a_1) \in \mathbb{P}/\mathsf{S}$。那么存在 p_0, $p_1 \in G$, $\pi_0, \pi_1 \in \mathsf{G}$ 以及 $(p_0, (\check{r}_0, \dot{a}_0)^\bullet)$、$(p_1, (\check{r}_1, \dot{a}_1)^\bullet) \in \mathbb{P}/\mathsf{S}$，分别由 $\pi_0 \in \mathsf{G}$ 和 $\pi_1 \in \mathsf{G}$ 见证，使得 $\dot{a}_0^G = a_0$, $\dot{a}_1^G = a_1$。令$\tau = \pi_1^{-1} \circ \pi_0$。我们定义 $\mathbb{P}/\mathsf{S}$ 的一个自同构 σ，使得

$$\sigma(r, b) = (\tau(r), \{(\tau(\dot{x}), y) : (\dot{x}, y) \in b\}),$$

对于任意 $(r, b) \in \mathbb{P}/\mathsf{S}$。我们需要验证 $\sigma(r, b) \in \mathbb{P}/\mathsf{S}$。一旦证明了这一点，根据 $\leq$的定义以及 σ 存在逆这一事实，显然 σ 是 $\mathbb{P}/\mathsf{S}$的一个自同构。因此，设 $p \in G$, $(p, (\check{r}, \dot{b})^\bullet) \in \mathbb{P}/\mathsf{S}$，其中 $\dot{b}^G = b$，并设 π 是如前所述的一个见证。令 $\pi' = \pi \circ \tau^{-1}$。由于 $\pi^{-1}(p) \leq r$，$\pi'^{-1}(p) = \tau \circ \pi^{-1}(p) \leq \tau(r)$。此外，对于 b中出现的每个 $(\dot{x}, \dot{y})$,

$$p \Vdash \dot{y} = \pi(\dot{x}) = \pi \circ \tau^{-1} \circ \tau(\dot{x}) = \pi'(\tau(\dot{x})).$$

Thus

$$(p, (\tau(r)\check{}, \{(\tau(\dot{x})\check{}, \dot{y}) : ((\dot{x})\check{}, \dot{y}) \text{ appears in } \dot{b}\})) \in \mathbb{P}/\mathcal{S}$$

并且确实有 $\sigma(r, b) \in \mathbb{P}/\mathcal{S}$。最后，注意 $\sigma(r_0, a_0) \parallel (r_1, a_1)$。也就是说，若 $p \leq p_0$, p_1，且由于 $\pi_0^{-1}(p) \leq r_0$ 和 $\pi_1^{-1}(p) \leq r_1$，我们有 $\pi_1^{-1}(p) \leq \tau(r_0)$ r_1。若令 $r = \pi_1^{-1}(p)$，则像之前一样，很容易验证

$$(p, (\check{r}, \dot{a}_1 \cup \{(\tau(\dot{x})\check{}, \dot{y}) : ((\dot{x})\check{}, \dot{y}) \text{ appears in } \dot{a}_0\})^\bullet) \in \mathbb{P}/\mathcal{S},$$

如 π_1 所示。 □

$\mathbb{P}/\mathcal{S}$ 无论 $\mathbb{P}$ 多么不齐次，它都是齐次的，这乍看之下或许有些奇怪。不过，不妨考虑 $\mathbb{P}$ 完全刚性的情形。此时，任何基于 $\mathbb{P}$ 的对称扩张都只是由 $\mathbb{P}$ 得到的强迫扩张，而一种适当的商强迫概念（即一种让我们能从该对称扩张过渡到完整泛型扩张的强迫概念）理应是平凡的，因为这两种扩张是一致的。事实上，不难看出，在这种情形下 $\mathbb{P}/\mathcal{S}$是有向的。从某种意义上说，对称扩张已经知道了 $\mathbb{P}$ 非齐次部分上的泛型；而要过渡到完整的强迫扩张，我们唯一需要的信息，就是 $\mathbb{P}$齐次部分上的泛型。

引理 7.15. 设 $D \in V$ 是一个 S-名称，表示 S 的稠密子集，且 $q \in \mathbb{Q}$ 是任意的。那么存在 $q' \leq q$、$r \geq q'$ 和 $X \in [R(S)]^{<\omega}$，使得

$$q' \Vdash (\check{r}, \{((\dot{x})\check{}, \dot{x}) : \dot{x} \in X\}) \in \dot{D}.$$

证明。设 G 是 $\mathbb{Q}$在 V上的任意泛型，且满足 $q \in G$，并设 $G_0 = G \cap \mathbb{P}$。通过扩展 q，不失一般性，我们可以找到 $\dot{x}_0 \in$R(S) 和 $D' \in$HS，使得 $q \Vdash \dot{D} = \dot{D}'$且 $\mathrm{R}_S(\dot{x}_0) \subseteq \mathrm{R}_S(\dot{D}')$。为简便起见，我们也可以直接假设 $D = D'$。由引理 7.4，存在 q 在 G_0中的一个 sym($\dot{x}_0$)-约化 p'。接着注意到 $\psi(p', q, (\dot{x}_0, \dot{x}_0))$，因此

$$(p', (\check{q}, \{((\dot{x}_0)\check{}, \dot{x}_0)\})^\bullet) \in \dot{\mathbb{Q}}/\dot{\mathcal{S}}.$$

因此，在 $V[G_0]_{\mathcal{S}}$中，我们可以考虑条件 $s = (q, \{(\dot{x}_0, \dot{x}_0^{G_0})\}) \in \mathbb{Q}/$S。由于$\dot{D}^{G_0}$ 是稠密的，存在 $t \leq s$ 属于 $\dot{D}^{G_0}$。根据 $\dot{\mathbb{Q}}/$S 的定义，存在$p \in G_0, r \in \mathbb{Q}, \dot{x}_i, \dot{y}_i \in$ R(S)，以及 $i < n$，其中 $\dot{y}_0 = \dot{x}_0$，使得 $t = (r, \{(\dot{x}_i, \dot{y}_i^G) : i < n\})$ 且 $\psi(p, r, (\dot{x}_i, \dot{y}_i)_{i<n})$。此外，不失一般性，我们可以假设 $p \Vdash \dot{t} \leq \dot{s} \wedge \dot{t} \in \dot{D}$，其中

$$\dot{t} = (\check{r}, \{((\dot{x}_i)\check{}, \dot{y}_i) : i < n\})^\bullet$$

and

$$\dot{s} = (\check{q}, \{((\dot{x}_0)\check{}, \dot{x}_0)\})^\bullet.$$

根据 ψ，存在某个 $\pi \in \mathcal{G}$，使得对每个 $i < n$ 都有 $\pi^{-1}(p) \parallel r$ 且 $p \Vdash \pi(\dot{x}_i) = \dot{y}_i$。特别地，$p \Vdash \pi(\dot{x}_0) = \dot{x}_0$。设 $q' \leq \pi^{-1}(p)$ r属于 $\mathbb{Q}$。由对称性引理，$q' \Vdash \dot{x}_0 = \pi^{-1}(\dot{x}_0)$，并且更一般地 $q' \Vdash \dot{x}_i = \pi^{-1}(\dot{y}_i)$。因此，$(q', \pi^{-1}) \in R_{\mathcal{S}}(\dot{D}) \supseteq R_{\mathcal{S}}(\dot{x}_0)$ 且 $q' \Vdash \dot{D} = \pi^{-1}(\dot{D})$. 总而言之，

$$q' \Vdash \pi^{-1}(\dot{s}) \geq \pi^{-1}(\dot{t}) \in \dot{D},$$

并且由于 $\pi^{-1}(\dot{t}) = (\check{r}, \{((\dot{x}_i)\check{}\ \pi^{-1}(\dot{y}_i)) : i < n\})^\bullet$,

$$q' \Vdash \pi^{-1}(\dot{t}) = (\check{r}, \{((\dot{x}_i)\check{}, \dot{x}_i) : i < n\}) \in \dot{D}.$$

由于 $q' \leq r \leq q$，这就完成了我们所述主张的证明。 □

推论 7.16. 设 G 是 $\mathbb{P}$-泛型，则 $K = G \times [\{(\dot{x}, \dot{x}^G)) : x \in R(S)\}]^{<\omega}$ 是 $\mathbb{P}/S$-泛型 *over* $V[G]_{\mathcal{S}}$，并且 $V[G]_{\mathcal{S}}[K] = V[G]$.

证明. 脱殊性是引理 7.15 的直接推论；又由于 K 是由 G 定义的，因此很容易看出 $V[G]_{\mathcal{S}}[K] \subseteq V[G]$。反过来，注意到$G =$定义域 K，因此 $G \in V[G]_{\mathcal{S}}[K]$，从而 $V[G] \subseteq V[G]_{\mathcal{S}}[K]$ 如所需。 □

事实上，情况还不止于此，我们将在命题 7.18 中看到这一点。

7.3. 系统的商。

定义 7.17. 设 $\mathrm{S}_0 \lessdot \mathrm{S}_1$，其中 $\mathrm{S}_0 = (\mathbb{P}, \mathrm{G}, \mathrm{F})$，且 $\mathrm{S}_1 = (\mathbb{Q}, \mathrm{H}, \mathrm{E})$。令 $\mathrm{H}/\mathrm{S}_0 = \{\sigma \in \mathrm{H} : \sigma \restriction \mathbb{P} \in \mathrm{G}\}$，并令 $\mathrm{E}/\mathrm{S}_0 = \{H \in \mathrm{E} : H \leq \mathrm{H}/\mathrm{S}_0\}$。接着我们定义一个 S_0-名称 $\mathrm{S}_1/\mathrm{S}_0$，对应于系统 $(\mathbb{Q}/\mathrm{S}_0, \mathrm{H}/\mathrm{S}_0, \mathrm{E}/\mathrm{S}_0)$，其中 $\sigma \in \mathrm{H}/\mathrm{S}_0$ 对一个条件的作用为

$$\sigma(r, \{(\dot{x}_i, y_i) : i < n\}) = (\sigma(r), \{(\sigma(\dot{x}_i), y_i) : i < n\}).$$

注意，这确实定义了 $\mathbb{Q}/\mathcal{S}_0$的一个自同构。每当 $\psi(p, r, (\dot{x}_i, \dot{y}_i)_{i<n})$的一个实例 $p' \leq p$由 $\pi \in \mathcal{G}$见证时，则$\psi(p, \sigma(r), (\sigma(\dot{x}_i)\ \dot{y}_i)_{i<n})$的同一实例由 $\pi \circ (\sigma^{-1} \restriction \mathbb{P}) \in \mathcal{G}$见证。

根据定义 7.1 的第（2）项，$\mathcal{H}/\mathcal{S}_0 \in \mathcal{E}$。因此$\mathcal{S}_1$ 与$(\mathbb{Q}, \mathcal{H}/\mathcal{S}_0, \mathcal{E}/\mathcal{S}_0)$ 强等价，通常我们可以不失一般性地假设这一点已经成立

$\mathcal{H} = \mathcal{H}/\mathcal{S}_0$，因此$\mathcal{E} = \mathcal{E}/\mathcal{S}_0$。取这个$\mathcal{H}$ 子群确实只是为了使商的定义有意义而提出的一项技术要求。[16]

命题 7.18。设 G 是关于 V 的 $\mathcal{S}_1$-泛型。那么令

$$K = G \times [\{(\dot{x}, \dot{x}^G) : \dot{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_0)\}]^{<\omega},$$

K 是关于 $V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$ 的 $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0$-泛型，其中 $G_0 = G \cap \mathbb{P}$。

证明。我们先验证 $K \subseteq \mathbb{Q}/\mathrm{S}_0$。任取 $(r, \{(\dot{x}_i, \dot{x}_i^G) : i < n\}) \in K$，并考虑 $H = \bigcap_{i<n} \mathrm{sym}(\dot{x}_i)$。由引理 7.4，存在一个 H-约化p，属于 r 且在 G_0 中。于是只需注意到 $(p, (\check{r}, \{(\check{(}\dot{x}_i)^{\check{}}, \dot{x}_i) : i < n\})^\bullet) \in \mathbb{Q}/\mathrm{S}_0$。 K显然也是一个滤子。

现在令 $D \in V$ 是一个 $\mathrm{S}\mathcal{S}_0$-名称，表示 $\mathbb{Q}/\mathcal{S}_0$ 的对称稠密子集。不失一般性，我们可以假设存在 $H \in \mathcal{E}$，使得 $H \restriction \mathbb{P} \leq \mathrm{sym}(D)$ 且 $\Vdash \forall \sigma \in \check{}H(\sigma\text{“}\ \dot{D} = \dot{D})$ 。[17] 接着注意，若

$$q \Vdash (\check{r}, \{((\dot{x})\check{}, \dot{x}) : \dot{x} \in X\}) \in \dot{D},$$

那么 $\sigma(q) \Vdash (\check{}r, \{((\dot{x})^{\check{}}\ \sigma(\dot{x})) : \dot{x} \in X\}) \in D$，对于任意 $\sigma \in H$。但由于 σ 也被迫使在定义 7.17 所定义的作用下固定 D 7.17，

$$\sigma(q) \Vdash (\sigma(r)\check{}, \{((\sigma(\dot{x}))\check{}, \sigma(\dot{x})) : \dot{x} \in X\}) \in \dot{D}.$$

因此，集合

$$\tilde{D} = \{q \in \mathbb{Q} : \exists r \geq q, X \in [\mathcal{R}(\mathcal{S}_0)]^{<\omega} (q \Vdash (\check{r}, \{((\dot{x})\check{}, \dot{x}) : \dot{x} \in X\}) \in \dot{D})\}$$

是 $\mathcal{S}_1$-对称的，并且根据引理 7.15 它在 $\mathbb{Q}$ 中稠密。由于 G 是 $\mathcal{S}_1$-泛型的，$G \cap \tilde{D} \neq \emptyset$ 因此， $K \cap \dot{D}^{G_0} = K \cap \dot{D}^G \neq \emptyset$。 □

定理 7.19。设 $\mathcal{S}_0 \lessdot \mathcal{S}_1$。则 $\mathcal{S}_1$ 与 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0$ 弱等价。此外：

(1) 若 G 在 V 上是 $\mathcal{S}_1$-泛型的，且 $K = G \times [\{(\dot{x}, \dot{x}^G) : \dot{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_0)\}]^{<\omega}$ 和 $G_0 = G \cap \mathbb{P}$，则 *(a)* G_0 在 V 上是 $\mathcal{S}_0$-泛型的，*(b)* K 在 $V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$ 上是 $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0$-泛型的，*(c)* 且 $V[G]_{\mathcal{S}_1} = V[G_0]_{\mathcal{S}_0}[K]_{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0}$；*(2)* 若 K_0 在 V 上是 $\mathcal{S}_0$-泛型的，且 K 在 $V[K_0]_{\mathcal{S}_0}$ 上是 $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0$-泛型的，$G = \mathrm{dom}\, K$ 和 $G_0 = G \cap \mathbb{P}$，则 *(a)* G 在 V 上是 $\mathcal{S}_1$-泛型的，*(b)* $V[K_0]_{\mathcal{S}_0} = V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$，*(c)* $K = G \times [\{(\dot{x}, \dot{x}^G) : \dot{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{S}_0)\}]^{<\omega}$，*(d)* 且 $V[K_0]_{\mathcal{S}_0}[K]_{\mathcal{S}_1} = V[G]_{\mathcal{S}_1}$。

证明。如前所述，我们不失一般性地假设$\mathcal{H} = \mathcal{H}/\mathcal{S}_0$，因此也有 $\mathcal{E} = \mathcal{E}/\mathcal{S}_0$。这样记号会稍微简洁一些。

首先，考虑约化迭代 $\mathcal{S}_0 \star \dot{\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0} = \mathcal{S}^{0 \star (\mathbf{Q}, \mathbf{H}, \mathbf{E})}$。

$\mathrm{S}_1/\mathrm{S}_0$,其中，Q 是由元素 $\mathbb{Q}/\mathrm{S}_0$, H $= \{\check{}\sigma : \sigma \in \mathrm{H}\}$ 和 E $= \{\check{}H : H \in \mathrm{E}\}$ 的闭名称组成的集合。容易验证 (Q, H,E) 是 $\mathrm{S}_1/\mathrm{S}_0$ 的名称见证。因此，$\mathrm{S}_0 * \mathrm{S}_1/\mathrm{S}_0$ 和 $\mathrm{S}_0 \star \mathrm{S}_1/\mathrm{S}_0$ 的强迫概念相同。我们将采用与命题 6.6 证明开头所述类似的记号。

[16]事实上，在本文的早期草稿中，H $=$ H/S$_0$ 曾是定义 7.1 中的一项明确要求，但后来发现这并非必要。此外，采用这个更宽泛的定义，更容易表述第 10 节的结果。[17]参见定义 7.1 的 (2) 和引理 2.14。更具体地，任取满足 $H \restriction \mathbb{P} \leq \mathrm{sym}(\dot{D})$ 且 $\forall \sigma \in H(\sigma\text{“}\ \dot{D}^G = \dot{D}^G)$ 的 $H \in \mathrm{E}$，考虑 $\chi(\dot{D}, \check{}H) \equiv \forall \sigma \in \check{}H(\sigma\text{“}\ \dot{D} = \dot{D})$，并注意例如 $\Vdash \chi(\dot{\mathbb{Q}}/\mathrm{S}_0, \check{}H)$。

例如 $(H_0, \check{}H_1)_\star$ 表示系统 $\mathcal{S}_0 \star \dot{\mathcal{S}}_1/\mathcal{S}_0$，中的一个群，形如 $\mathcal{S}_0 \star \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0$ 的下标通常会替换为 $\star$ 等。

现在我们定义某些映射 $i\colon \mathrm{HS}_{\mathcal{S}_1} \to \mathrm{HS}_\star$ 和 $i^* : \mathrm{HS}_\star \to \mathrm{HS}_{\mathcal{S}_1}$。我们递归地定义

$$i(\dot{x}) = \{((p, (\check{r}, \emptyset)^\bullet), i(\dot{y})) : \psi(p, r, \emptyset) \wedge (r, \dot{y}) \in \dot{x}\},$$

对于任意 $\dot{x} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}_1}$。接着，通过归纳法，对于 $(\pi, \check{}\sigma) \in (\mathcal{G}, \mathcal{H})_\star$, $(\pi, \check{}\sigma)(i(\dot{x})) = i(\sigma(\dot{x}))$。因此，若 $H_1 \leq$ 对称群$_{\mathcal{S}_1}(\dot{x})$，则 $(\mathcal{G}, \check{}H_1)_\star \leq$ 对称群$_\star(i(\dot{x}))$，并由归纳法得 $i(\dot{x}) \in \mathrm{HS}_\star$。此外，通过归纳法注意到，在定理情形 (1) 的语境下，

$$i(\dot{x})^{G_0 * K} = \dot{x}^G \tag{α}$$

在情形 (2) 中也有，

$$i(\dot{x})^{K_0 * K} = \dot{x}^G. \tag{β}$$

另一方面，对于 $\dot{x} \in \mathrm{HS}_\star$，递归地定义

$$i^*(\dot{x}) = \{(r, i^*(\dot{y})) : \exists((p, \dot{q}), \dot{y}) \in \dot{x}\ \chi(r, p, \dot{q})\},$$

其中

$$\chi(r, p, \dot{q}) \leftrightarrow \exists p' \leq p, r \leq p' \exists X \in [\mathcal{R}(\mathcal{S}_0)]^{<\omega} (p' \Vdash (\check{r}, \{((\dot{z})\check{}, \dot{z}) : \dot{z} \in X\})^\bullet \leq \dot{q}).$$

然后通过归纳法注意到，对于 $\sigma \in \mathcal{H}$，$\sigma(i^*(\dot{x})) = i^*((\sigma \restriction \mathbb{P}, \check{}\sigma)(\dot{x}))$。

如果 $H_1 \leq \check{}H_0 \leq$ 对称群$_\star(\dot{x})$ 且 $H \in \mathcal{E}$ 满足 $H \restriction \mathbb{P} \leq H_0$，那么我们便有 $H \cap H_1 \leq$ 对称群$_{\mathcal{S}_1}(i^*(\dot{x}))$。由归纳法可知，$i^*(\dot{x}) \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}_1}$。与之前一样，我们将 $i^*(\dot{x})$ 定义为在情形 (1) 中，

$$\dot{x}^{G_0 * K} = i^*(\dot{x})^G. \tag{γ}$$

设 φ 为 Δ_0，并假设 $\dot{x} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}_1}$ 且 $\Vdash_{\mathcal{S}_1} \varphi(\dot{x})$，但存在 $p \in \mathbb{P}$, $r \in \mathbb{Q}$和 $(\dot{x}_j, \dot{y}_j)_{j<n}$，使得 $\psi(p, r, (\dot{x}_j, \dot{y}_j)_{j<n})$ 并且

$$(p, (\check{r}, \{((\dot{x}_j)\check{}, \dot{y}_j) : j < n\})) \Vdash_\star \neg\varphi(i(\dot{x})).$$

设 $\pi \in \mathcal{G}$ 使得对所有 $j < n$，$\pi^{-1}(p) \parallel r$ 且 $p \Vdash \pi(\dot{x}_j) = \dot{y}_j$。注意$\Vdash_\star (\pi^{-1}, \mathrm{id})(i(\dot{x})) = i(\dot{x})$。因此由对称性引理

$$(\pi^{-1}(p), (\check{r}, \{((\dot{x}_j)\check{}, \dot{x}_j) : j < n\})) \Vdash_\star \neg\varphi(i(\dot{x})).$$

若 G 是任意在 V 上包含 $\pi^{-1}(p)$ 与 r的 S_1-泛型，则有 $V[G]_{\mathcal{S}_1} \models \varphi(\dot{x}^G)$。然后若 $G_0 * K$ 如 (1) 中所述，则由命题 7.18，它是 $\mathsf{S}_0 * \dot{\mathsf{S}}_1/\mathsf{S}_0$-泛型，且包含上述条件。由命题 6.6，它也是 $\mathsf{S}_0 \star \mathsf{S}_1/\mathsf{S}_0$-泛型。由 ($\alpha$)，$\dot{x}^G = i(\dot{x})^{G_0 * K}$，从而得出矛盾。

现在设 $\dot{x} \in \mathrm{HS}_\star$ 且 $\Vdash_\star \varphi(\dot{x})$，但存在 $r \in \mathbb{Q}$ 使得 $r \Vdash_{\mathcal{S}_1} \neg\varphi(i^*(\dot{x}))$。若 G 是包含 r 的 $\mathcal{S}_1$- 泛型集，则再次有 $i^*(\dot{x})^G = \dot{x}^{G_0 * K}$，从而得到矛盾。

(1)(a) 和 (b) 当然已经由命题 7.18 涵盖。对于 (1)(c)，(α) 和 (γ) 蕴含 $V[G]_{\mathcal{S}_1} = V[G_0 * K]_{\mathcal{S}_0 \star \dot{\mathcal{S}}_1/\mathcal{S}\mathcal{S}_0} = V[G_0 * K]_{\mathcal{S}_0 * \dot{\mathcal{S}}_1/\mathcal{S}\mathcal{S}_0}$。

对于 (2)(a)，设 $D \in V$ 是任意一个 $\mathcal{S}_1$-对称稠密集，并考虑 $\dot{x}_D = \{(q, \emptyset) : q \in D\} \in \mathrm{HS}_{\mathcal{S}_1}$。于是 $\Vdash_{\mathcal{S}_1} \dot{x}_D \neq \emptyset$，从而 $\Vdash_\star i(\dot{x}_D) \neq \emptyset$。将对称迫引用定理应用于系统 $\mathcal{S}_0 \star \dot{\mathcal{S}}_1/\mathcal{S}_0$，，我们有 $i(\dot{x}_D)^{K_0 * K} \neq \emptyset$。由 ($\beta$)，$i(\dot{x}_D)^{K_0 * K} = \dot{x}_D^G$，因此 $G \cap D \neq \emptyset$。

对于 (2)(c)，设 $(p, (\check{r}, \{((\dot{x}_j)\check{}, \dot{y}_j) : j < n\}))$ 为如前所述的一个条件，并假设对某个 $j' < n$，

$$(p, (\check{r}, \{((\dot{x}_j)\check{}, \dot{y}_j) : j < n\})) \Vdash_{\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0} \dot{y}_{j'} \neq i(\dot{x}_{j'}).$$

和之前一样，我们找到一个自同构 π，使得

$$(\pi^{-1}(p), (\check{r}, \{((\dot{x}_j)\check{}, \dot{x}_j) : j < n\})) \Vdash_{\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0} \dot{x}_{j'} \neq i(\dot{x}_{j'}).$$

这里注意，由于 $\dot{y}_{j'}$ 是一个 $\mathcal{S}_0$-名称，$(\pi^{-1},\ \mathrm{id})(\dot{y}_{j'}) = \pi^{-1}(\dot{y}_{j'})$ 我们再次从（α）中得出矛盾。

(2)(b) 类似于 (c)。设 $\dot{x} \in \mathcal{S}_0$ 与 $(p,(\check{r},\{(\dot{x}_j)^{\check{}}\ \dot{y}_j) : j < n\}))$ 为任意的。设 $\pi \in \mathcal{G}$ 如前所述。则

$$(\pi^{-1}(p),(\check{r},\{((\dot{x}_j)^{\check{}},\dot{x}_j) : j < n\})) \Vdash_{\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0} i(\dot{x}) \neq \dot{x},$$

根据 (α)。回过头来，同样

$$(p,(\check{r},\{((\dot{x}_j)^{\check{}},\dot{y}_j) : j < n\})) \Vdash_{\mathcal{S}_0 * \mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0} \pi(\dot{x}) \neq i(\dot{x}).$$

因此，泛型地存在某个 $\pi \in \mathcal{G}$，使得 $\pi(\dot{x})^{K_0} = i(\dot{x})^{K_0 * K} = \dot{x}^G = \dot{x}^{G_0}$。特别地，如果 $\dot{x} = \mathsf{HS}^{\bullet}_{\alpha,\mathcal{S}_0}$ 对于某个 $\alpha \in$ 序数，则

$$(\mathsf{HS}^{\bullet}_{\alpha,\mathcal{S}_0})^{K_0} = \pi(\mathsf{HS}^{\bullet}_{\alpha,\mathcal{S}_0})^{K_0} = (\mathsf{HS}^{\bullet}_{\alpha,\mathcal{S}_0})^{G_0}.$$

由此可得 $V[K_0]_{\mathcal{S}_0} = V[G_0]_{\mathcal{S}_0}$。

(2)(d) 现在直接由 (1)(c) 得出。 □

证明表明，系统之间存在映射 i，i^* 它们将 N-名称相互映射，并且对 Δ_0-公式保留强迫关系。但是这些映射互不为逆，因此 i，i^* 无法证明强等价。如前所述，一般而言，这也不可能实现，至少无法在我们对完全子系统的定义下实现。只需稍微加强定义 7.1，基本上规定 $\mathcal{S}_1$ 是形如 $\mathcal{S}_0 * \mathcal{T}$ 的系统即可，但这并非重点。

推论 7.20。设 $S = (\mathbb{P}, G, F)$ 是一个对称系统，且 G_0 是 S-泛型的，且位于 V 上。若 K 是 $\mathbb{P}/$上的 S-泛型，则 $G =$ 定义域 K 是 $\mathbb{P}$-泛型的，且位于 V 上，$V[G_0]_{\mathcal{S}} = V[G]_{\mathcal{S}}$ 并且 $V[G_0]_{\mathcal{S}}[K] = V[G] = V(K)$。

证明。$\mathcal{S} \lessdot \mathcal{S}_1 = (\mathbb{P},\ \mathcal{G},\ \mathcal{E})$，其中 $\mathcal{E}$ 由 $\{\mathsf{id}\}$ 生成。于是 K 是关于 $V[G_0]_{\mathcal{S}}$ 的 $\mathcal{S}_1/\mathcal{S}_0$-泛型，因此 $G = \mathrm{dom}\, K$ 是关于 V 的 $\mathcal{S}_1$-泛型，这等价于它是关于 V 和 $V[G_0]_{\mathcal{S}} = V[G]_{\mathcal{S}}$ 的 $\mathbb{P}$-泛型。显然 $V[G_0]_{\mathcal{S}}[K] = V[G] = V(K)$，因为 K 可以由 G 在 V 上定义，反之亦然。□

应用定理 7.19 于 $(\mathbb{P},\ \mathcal{G},\ \mathcal{F}) \lessdot (\mathbb{P},\ \{\mathrm{id}\},\ \{\{\mathrm{id}\}\})$ 这一特殊情形，可得如下结果。

定理 7.21。设 $S = (\mathbb{P}, G, F)$ 是一个对称系统。

(1) 对任意关于 V 的 S-泛型 G，存在关于 V 的 $\mathbb{P}$-泛型 H，使得 $V[G]_{\mathcal{S}} = V[H]_{\mathcal{S}}$。此外，这样的 H 由 $\mathbb{P}/S$ 在 $V[G]_{\mathcal{S}}$ 上泛型地添加。*(2)* 对任意关于 V 的 $\mathbb{P}$- 泛型 G，$V[G]$ 是 $V[G]_{\mathcal{S}}$ 的一个 $\mathbb{P}/S$- 泛型强迫扩张。

这表明，由对称泛型形成的对称扩张，与使用全泛型得到的扩张一致。

请注意，尊重基这一概念真正用到的唯一地方，是引理 7.15。而它在此处的作用，仅仅是证明典范滤子 $G \times \{(\dot{x}, \dot{x}^G) : \dot{x} \in \mathcal{R}(\mathcal{S})\}$ 是一个特定的泛型。其他所有论证，实质上都是将某个特定条件移入这个典范泛型中，利用它具有某种特定的理想性质，从而证明原条件也不可能强制相反的结论。

8. 对称扩张的种子

回顾一下，对于一个内模型 W 以及 W的一个类 X，遗传序数可定义集 $\mathcal{P}^W_X$ 由那些在 W 中使用来自X的附加参数而遗传序数可定义的集合组成。若 $V \subseteq W$ 是 W 的一个内模型且 $x \in W$ 是一个集合，则 $V(x)$是包含 $V \cup \{x\}$ 作为子类的最小内模型。

定理 8.1. 设 $S=(\mathbb{P},G,F)$ 为一个对称系统，且 G 在 V 上为 S-泛型。则 $V[G]_{\mathcal{S}}=V(\mathbb{P}/S)$。当 G 在 V 上为 $\mathbb{P}$-泛型时，则同样有 $V[G]_{\mathcal{S}}=$遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V}(\mathbb{P}/\mathcal{S})$。

第二个等式由第一个等式以及如下事实得出：$V[G]$ 是 $V(\mathbb{P}/\mathcal{S})$ 经由齐次强迫得到的泛型扩张。等式 $V[G]_{\mathcal{S}}=V(\mathbb{P}/\mathcal{S})$直接由推论7.20以及如下一般性观察得出：

引理 8.2. 设 V 是 M的内模型，$\mathbb{Q}\in M$ 与 G 在 M上为 $\mathbb{Q}$-泛型，使得 $M\subseteq V(G)$。则 $M=V(\mathbb{Q})$。

证明。显然 $\mathbb{Q}\in V(\mathbb{Q})\subseteq M$。特别地，$G$ 在 $V(\mathbb{Q})$上同样为 $\mathbb{Q}$-泛型，且$V(\mathbb{Q})[G]=V(G)\supseteq M$。设 $x\in M$ 任意，且 $\dot{x}$ 是 $V(\mathbb{Q})$中的一个 $\mathbb{Q}$-名称，使得 $\dot{x}^G=x$。在 M中工作，存在某个 $p\in G$ 使得 $p\Vdash\dot{x}=\check{}x$。回到 $V(\mathbb{Q})$，我们发现对任意的 y，必然要么

$$p\Vdash\check{y}\in\dot{x},$$

or

$$p\Vdash\check{y}\notin\dot{x},$$

根据 $y\in x$ 是否成立而定，否则我们就会与以下事实矛盾：在 M 中，$p\Vdash\dot{x}=\check{}x$。因此，我们已经证明 $x\cap V(\mathbb{Q})\in V(\mathbb{Q})$。通过简单的秩归纳，实际上可以证明 $x\in V(\mathbb{Q})$。□

我们要指出，定理 8.1 提供了另一种证明两个系统的乘积对应于两步迭代的方法，即证明 $V[G*H]_{\mathcal{S}*\check{}\mathcal{T}}=V(\mathbb{P}/\mathcal{S})(\mathbb{Q}/\mathcal{T})=V(\mathbb{P}\times\mathbb{Q}/\mathcal{S}\times\mathcal{T})=V[G\times H]_{\mathcal{S}\times\mathcal{T}}$。在大多数强迫论教材中，乘积与两步迭代等价性的证明方式也与此类似，利用了 $V[G]$ 是包含 V 和 G 的最小传递模型，换言之，$V[G]=V(G)$。

命题 8.3。 设 $S=(\mathbb{P},G,F)$ 是一个对称系统，且 $\dot{x}\in\mathsf{HS}$ 满足 对称群$(\dot{x})=G$ 且 $\Vdash V[\dot{G}]_{\mathcal{S}}=$遗传序数可定义集$^{V[\dot{G}]}_{V\ \dot{x}}()$。那么

$$\mathcal{R}=\{(\dot{y}_0,\dots,\dot{y}_n)^{\bullet}:\ n\in\omega,\dot{y}_0,\dots\dot{y}_n\ appear\ in\ \dot{x}\}$$

是 S 的尊重基。

Note that $\Vdash V[\dot{G}]_{\mathcal{S}}=V(\dot{x})$ also implies that $\Vdash V[\dot{G}]_{\mathcal{S}}=\mathrm{HOD}^{V[\dot{G}]}_{V(\dot{x})}$.

证明。显然，$\mathcal{R}$ 在$\mathcal{G}$作用下是闭的，因为 $\mathrm{sym}(\dot{x})=\mathcal{G}$。令 $\dot{z}\in\mathsf{HS}$ 和 $p\in\mathbb{P}$ 任意。注意，$\mathrm{HOD}^{V[\dot{G}]}_{V\ \dot{x}}()=\mathrm{HOD}^{V[\dot{G}]}_{V\cup}$传递闭包$(\{\dot{x}\})$。因此，存在 $q\leq p$、u_0，……，$u_k\in V$、$\dot{y}_0$，……，$\dot{y}_n$，它们出现在 $\dot{x}$、$\alpha\in\mathsf{Ord}$ 中，并且存在一个公式 φ，使得

$$q\Vdash_{\mathbb{P}}\dot{z}=\{v\in\mathsf{HS}^{\bullet}_{\alpha}:\varphi(v,\check{u}_0,\dots,\check{u}_k,\dot{y}_0,\dots,\dot{y}_n,\dot{x})\}.$$

令 $\dot{z}'$ 为右侧的名称，立即可验证

$$R_{\mathcal{S}}(\dot{y}_0,\dots,\dot{y}_n)\subseteq R_{\mathcal{S}}(\dot{z}').$$ □

命题 8.4。 设 $S=(\mathbb{P},G,F)$ 是一个对称系统，R 是 S 的尊重基，且 $\Gamma=\{\pi(G):\ \pi\in G\}^{\bullet}$，其中 G 是 $\mathbb{P}$-泛型的典范名称。令G 为在 V、$\Gamma=\dot{\Gamma}^G$ 上的 $\mathbb{P}$-泛型，并且 $R=(R^{\bullet})^G$。那么

$$V[G]_{\mathcal{S}}=\mathrm{HOD}^{V[G]}_{V\cup R\cup\{\Gamma\}}=\mathrm{HOD}^{V[G]_{\mathcal{S}}}_{V\cup R\cup\{\mathbb{P}/\mathcal{S}\}}.$$

此外，存在一个 F 在 $V[G]_{\mathcal{S}}$ 中由参数 $\mathbb{P}/S$定义的映射，它满射$R\times V$到 $V[G]_{\mathcal{S}}$上。[18]

[18]我们并不声称 $R\times V$是 F的定义域。这将意味着 V在$V[G]_{\mathcal{S}}$中可定义，而这在一般情况下是一个开放问题（但已知当 $V\models\mathrm{ZFC}$时成立）。

证明。 遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\cup R\cup\{\Gamma\}} \subseteq V[G]_{\mathcal{S}}$可通过 $\in$-归纳法得到证明。如果 $x \subseteq V[G]_{\mathcal{S}}$ 且

$$x = \{y : V[G] \models \varphi(y, v_0, \dots, v_n, r_0, \dots, r_m, \Gamma)\},$$

然后考虑

$$\dot{x} = \{(p, \dot{y}) : p \Vdash_{\mathbb{P}} \varphi(\dot{y}, \check{v}_0, \dots, \check{v}_n, \dot{r}_0, \dot{r}_m, \dot{\Gamma})\},$$

其中 $\dot{r}_0^G = r_0, \dots, \dot{r}_m^G = r_m$, $\dot{r}_0, \dots, \dot{r}_m \in \mathcal{R}$。那么 $\dot{x} \in \mathsf{HS}$ 和 $\dot{x}^G = x$。

另一方面，任取 $\dot{x} \in \mathsf{HS}$。由于 $\mathcal{R}$ 是一个尊重基，存在 $\dot{x}' \in \mathsf{HS}$ 和 $\dot{r} \in \mathcal{R}$，使得 $\dot{x}^G = \dot{x}'^G$ 且 $R_s(\dot{r}) \subseteq R_s(\dot{x}')$。令 $r = \dot{r}^G$。考虑$\varphi(y, \dot{x}', \dot{r}, \dot{r}^G, \Gamma)$，它表达了存在某个 $H \in \Gamma$，使得 $\dot{r}^H = r$, $y \in \dot{x}'^H$。每当 $H \in \Gamma$时，便有 $H = \pi$“G，存在某个 $\pi \in \mathcal{G}$。那么必定存在某个 $p \in G$，使得 $p \Vdash \dot{r} = \pi^{-1}(\dot{r})$。此外还有 $p \Vdash \dot{x}' = \pi^{-1}(\dot{x}')$ 和 $x = \dot{x}'^G = \dot{x}^{\pi\text{“}G} = \dot{x}^H$。这表明 φ可行。

对于最后一部分，我们定义 $F(r, v) = x$ in $V[G]_{\mathcal{S}}$，使得当 v 是一对 S-名称（$\dot{x}, \dot{r}$），且满足 $\dot{r} \in \mathsf{R}$ 时，$y \in x$ 当且仅当 $\mathbb{P}/\mathsf{S}$ 强迫 $\varphi(\check{y}, (\dot{x})^{\check{}}, (\dot{r})^{\check{}}, \check{r}, \Gamma')$；其中 $\dot{\Gamma}'$ 是一个 $\mathbb{P}/\mathsf{S}$-名称，使得当 K 是泛型时，$\dot{\Gamma}'^K = \{\pi\text{“ }\mathrm{dom}(K) : \pi \in \mathsf{G}\}$。我们注意到，在引理 7.14 中见证齐性的 $\mathbb{P}/\mathsf{S}$ 的自同构会逐点固定 $\dot{}$中关于 Γ' 的名称，因此 φ 确实由平凡条件决定。

这也立即表明 $V[G]_{\mathcal{S}} =$ 遗传序数可定义集$^{V[G]_{\mathcal{S}}}_{V\cup R\cup\{\mathbb{P}/\mathcal{S}\}}$。 □

9. 系统的完备化

设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念。若类 X 由形如 $(p, \dot{x})$ 的序对 X组成，其中 $p \in \mathbb{P}$ 且 $\dot{x}$ 是一个（通常的、集合大小的） $\mathbb{P}$-名称，则称 X 为一个类名 。

定义 9.1。 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念， X 是一个类名。定义系统 $\mathcal{O}(\mathbb{P}, X) = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$，其中 $\mathcal{G} = \{\pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) : \Vdash \pi(X) = X\}$，而 $\mathcal{F}$是由形如 $\mathrm{res}_{\mathcal{G}}(\dot{x})$ 的群生成的，其中 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$ 满足 $\Vdash \dot{x} \in X$。

要看出$\mathcal{F}$ 是一个正规滤子，只需注意，若 $\Vdash \pi(X) = X$ 且 $\Vdash \dot{x} \in X$，则 $\Vdash \pi(\dot{x}) \in \dot{X}$，并且 $\pi\,\mathrm{res}_{\mathcal{G}}(\dot{x})\pi^{-1} = \mathrm{res}_{\mathcal{G}}(\pi(\dot{x}))$。

定义 9.2. 设 $\mathbb{P}$ 是一个强迫概念， X 是一个类名。若 X 反射到一个 $\mathbb{P}$-名称 $\dot{x}$，则称

$$\{\pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) : \Vdash \pi(\dot{X}) = \dot{X}\} = \{\pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P}) : \Vdash \pi(\dot{x}) = \dot{x}\}.$$

若 X 自反射，则称其自反射；若 X 以 $\Vdash \dot{x} \in X$ 反射到 $\dot{x}$，

引理 9.3 （例如参见 [6,引理 25。5]） 。 设 $\mathbb{P}$ 是一个完备布尔代数。对于 V 上任意两个 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G、H，若满足 $V[H] = V[G]$，且对于 V 中满足 $\dot{X}^H = \dot{X}^G$ 的任意类名 X，存在 $\pi \in \mathrm{Aut}(\mathbb{P})^V$，使得 $H = \pi$“G 且 $\Vdash \dot{X} = \pi^{-1}(\dot{X})$ 。

命题 9.4。 设 $\mathbb{P}$ 是一个完备布尔代数， X 是一个类名，且 G 是在 V 上的$\mathbb{P}$-泛型。设 $\mathcal{S} = \mathcal{O}(\mathbb{P}, \dot{X})$，且 $X = \dot{X}^G$。则 $V[G]_{\mathcal{S}} =$ 遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\cup X\cup\{X\}}$。此外，当 $\dot{X}$ 自反射时，则 $V[G]_{\mathcal{S}} =$ 遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\cup X}$。

证明。 首先，我们来检查遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\cup X\cup\{X\}} \subseteq V[G]_{\mathcal{S}}$。令 $a \subseteq V[G]_{\mathcal{S}}$为任意对象，使得 $a = \{b\colon V[G] \models \varphi(b, \bar{x}, \bar{y}, \bar{\alpha}, X)\}$，其中 $\bar{x} \in X^{<\omega}$、 $\bar{y} \in V^{<\omega}$ 和 $\bar{\alpha} \in$ 为序数。此外，令 $\bar{x} = (\dot{x}_0^G, \dots, \dot{x}_n^G)$，其中 $\Vdash \dot{x}_i \in \dot{X}$ 对 $i \leq n$成立。接着考虑名称

$$\dot{a} = \{(p, \dot{b}) : \dot{b} \in \mathsf{HS}_\gamma \wedge p \Vdash \varphi(b, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n, \bar{y}, \bar{\alpha}, \dot{X})\},$$

对足够大的 γ，并注意到 $\dot{a} \in \mathsf{HS}$ 和 $\dot{a}^G = a$。因此 $a \in V[G]_{\mathcal{S}}$。通过$\in$-归纳法可得该包含关系成立。

反过来，注意到 Γ 中在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型集合在 $V[G]$ 中可定义，且只使用来自 V 的参数。令 $\dot{z} \in V$ 为任意一个$\mathcal{S}$-名称，并假设 res$\mathcal{G}$($\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$) $\leq$对称群($\dot{z}$)，其中 $\Vdash \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n \in X$。接下来考虑

$$z := \bigcup \{\dot{z}^H : H \in \Gamma \wedge \dot{X}^H = X \wedge \forall i \leq n(\dot{x}_i^H = \dot{x}_i^G)\},$$

这显然是序数可定义的$^{V[G]}_{V \cup X \cup \{X\}}$。在任一情形下，我们都断言 $z = \dot{z}^G$。显然， $\dot{z}^G \subseteq z$。另一方面，对于上述任意 H，存在某个 $\pi \in$ Aut($\mathbb{P}$)^V，使得 $H = \pi$"G以及 $\Vdash \dot{X} = \pi^{-1}$($\dot{X}$) $\wedge \forall i \leq n$($\dot{x}_i = \pi^{-1}$($\dot{x}_i$))}。特别地， $\pi^{-1} \in$ res$\mathcal{G}$($\dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n$)，因此 $\dot{z}^G = \pi^{-1}$($\dot{z}$) $^G = \dot{z}^{\pi"G} = \dot{z}^H$。由于 H是任意的，我们有 $z = \dot{z}^G$，并且已经证明 $\dot{z}^G \in$ 序数可定义 $^{V[G]}_{V \cup X \cup \{X\}}$。通过归纳法， $V[G]_{\mathcal{S}} \subseteq$ 遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V \cup X \cup \{X\}}$。

当 $\dot{X}$ 反射到一个名称 $\dot{x}$时，我们可以在 z 的定义中将 X 替换为 $\dot{x}^G$ ，并将 $\dot{X}$ 替换为 $\dot{x}$ ，从而得到一个序数可定义的$^{V[G]}_{V \cup X}$ 集合。□

定义 9.5. 设 $\mathcal{S}$ =($\mathbb{P}$,$\mathcal{G}$,$\mathcal{F}$) 是一个对称系统。那么，$\mathcal{S}$的完备化定义为 ˆ$\mathcal{S}$ =$\mathcal{O}$($\mathcal{B}$($\mathbb{P}$), N$^{\bullet}_{\mathcal{S}}$)，其中 $\mathbb{P}$- 名称通常也视为 $\mathcal{B}$($\mathbb{P}$)- 名称。

定理9.6. 设 S =($\mathbb{P}$,G, F) 是一个对称系统。那么 S $\cong_{\mathsf{N}}$ ˆS，并且每当 G 是 V上的 B($\mathbb{P}$)-泛型时，$V[G]_{\hat{\mathcal{S}}}$ = $V[G \cap \mathbb{P}]_{\mathcal{S}}$。此外，ˆ$S$ 是坚韧的，并且 N$_{\hat{\mathcal{S}}}$ =HR ˆ$\mathcal{S}$。

证明。显然，N$^{\bullet}_{\mathcal{S}}$ 自反射。此外，N$^{\bullet}_{\mathcal{S}}{}^{G} = V[G]_{\mathcal{S}}$。因此$V[G]$ ˆS =遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V[G]_{\mathcal{S}}}$ =遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V}$($\mathbb{P}$/S) = $V[G]_{\mathcal{S}}$。 $\mathbb{P}$名称与 B($\mathbb{P}$)-名称的自然等同表明 S $\cong_{\mathsf{N}}$ ˆS，见定理 5.14。根据 ˆS 的定义，显然有 N ˆS =HR ˆS。要证明 S 坚韧，只需注意，对于任意 $p \in \mathbb{P}$, $\dot{x}_p = \{(p, \emptyset)\} \in \mathsf{N}_{\mathcal{S}}$ ，要满足 $\dot{x}_p$， p 必须作为分离偏序集中的一个条件被固定。□

系统 $\mathcal{S}$ 的完备化在某种意义上可以看作是最大全面且最规范的系统：它与 $\mathcal{S}$ 产生相同的模型和相同的泛型。所有以某种方式与对称扩张的对称性相关的群，都属于 $\mathcal{S}$ 的ˆ滤子。

ˆˆˆ ˆ**命题 9.7.** 对于任意系统 S，S =S。也就是说，S 是它自身的完备化。

证明。 我们只需注意到 $\Vdash \mathsf{N}^{\bullet}_{\mathcal{S}} = \mathsf{N}^{\bullet}_{\hat{\mathcal{S}}}$。 □

下面的结论也显而易见。

ˆ ˆ**引理 9.8.** S $\cong_{\mathsf{N}}$ T 当且仅当 S 与 T 同构，也就是说，经过对强迫概念重新标记后，两个系统相等。

完备化还具有一些其他理想性质，例如以下性质。

ˆ ˆ**引理 9.9.** 如果选择公理 成立，那么 S 具有混合性质；也就是说，对于任意 $p \in \mathbb{P}$、任意 $\dot{x}_0$、.....、 $\dot{x}_n \in$HS，以及集合论语言中的任意公式 $\varphi(x, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n)$，如果

$$p \Vdash_{\hat{\mathcal{S}}} \exists x \varphi(x, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n),$$

那么存在 $\dot{x} \in$HS 使得

$$p \Vdash_{\hat{\mathcal{S}}} \varphi(\dot{x}, \dot{x}_0, \dots, \dot{x}_n).$$

证明。这可直接由强迫最大性原理得出：N ˆ$\mathcal{S}$ =HR$\hat{\mathcal{S}}$并且任意一个HR-名称都强迫等价于一个HS-名称（见引理5.7）。□

10. 刻画对称扩张

定理 10.1。设 $S = (\mathbb{P}, G, F)$ 是一个对称系统，且 G 在V上是 $\mathbb{P}$-泛型。设 $V \subseteq M \subseteq V[G]_S$。那么以下各项等价：

(1) M is of the form $\mathrm{HOD}^{V[G]}_{V(x)}$, for some $x \in V[G]_S$.

(2) $M = V[G]_T$ for some $T \lessdot \hat{S}$ where the forcing of T is $\mathcal{B}(\mathbb{P})$.

证明。从 (2) 到 (1) 的蕴含由定理 8.1 得出。反过来，设 $\dot{x} \in \mathrm{N}_S$ 满足 $x = \dot{x}^G$。考虑一个名称 $\dot{X}$，其对应于 trcl($\{\dot{x}\}$)，并且
注意到 X 反映到 $\dot{x}$ （见定义 9.2）。因此 X 是自反映的。令$T = \mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{P})\ \dot{X})$，显然可验证 $T \lessdot \hat{\ } S$。由命题 9.4，$V[G]_T$ =遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\cup \mathrm{trcl}(\{x\})}$ = 遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\ x}$ ()。□</output>

定理 10.1 是对 Grigorieff 以下结果的重大推广。

推论 10.2 ([3, 第 8.1 节，定理 3])。设 $V[G]$ 是 V 的一个 $\mathcal{B}(\mathbb{P})$-泛型强迫扩展。那么，形如 遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\ x}$ () 的模型恰好是 V 中形如 $V[G]_S$的对称扩张。*</output>*

证明。直接应用定理 10.1，并利用这一事实：$V[G]$ 通过（$\mathbb{P}$，{id}，{{id}}）是 V 的一个对称扩张。该系统的完备化是（B($\mathbb{P}$)，Aut(B($\mathbb{P}$))，F），其中 F 由平凡群生成；任何将 B($\mathbb{P}$)用作强迫概念的系统都是该系统的完全子系统。□

推论 10.3。设 $V[G]$ 是 V的一个泛型扩张。那么，V与 $V[G]$之间形如遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\ x}$ () 的中间模型至多有集合多个。

命题 10.4 ([3, §6.1，定理 1])。设 $V[G]$ 是 V的一个 $\mathbb{P}$-泛型强迫扩张，且 $x \in V[G]$。那么，$V[G]$ 是 $V(x)$的一个强迫扩张。

证明。考虑强迫 Coll(ω,trcl($\{x\}$)) $\in V(x)$，它由从 ω 到 trcl($\{x\}$)的有限偏函数组成，并令 H 为其上的 $V[G]$ -泛型。$\bigcup H$ 是一个从 ω 到 trcl($\{x\}$)的泛型满射 f。

集合 $E = \{(n,\ m) \in \omega \times \omega \colon f(n) \in f(m)\} \in V(x)[H]$ 代码 x 且泛型H 在 V 之上，因此我们有 $V(x)[H] = V[E]$。由于 $E \subseteq V$, $V[E]$ 是 V 与 $V[G][H]$ 之间的一个中间强迫扩张（例如参见推论 15.42]），并且特别地，存在一个商强迫概念，表明 $V[G][H]$ 是 $V[E]$的泛型扩张。总而言之，$V[G][H]$ 是 $V(x)$的强迫扩张。同样，由于$G \subseteq V(x)$，$V[G] \subseteq V[G][H]$ 是 $V(x)$的一个中间强迫扩张。□

定理 10.5. 设 $V \subseteq M$。则以下各项等价：

(1) M 是 V的对称扩张，*(2)* $M = V(x)$，其中 $x \in V[G]$，且 G 是 V上的泛型，*(3)* $M =$遗传序数可定义集$^{V[G]}_{V\ x}$ ()，其中 $x \in V[G]$，且 G 是 V上的泛型。

证明。（1）和（3）的等价性由推论 10.2 得出。根据定理 8.1 和定理 7.21 的（1），V 的每个对称扩张，在某个 V的泛型扩张中，都具有 $V(x)$的形式。另一方面，设 $x \in V[G]$，其中 $G\mathbb{P}$在 V上泛型，且 $\mathbb{P} \in V$。根据命题 10.4 $V[G]$ 是 $V(x)$的一个强迫扩张，例如由强迫概念 $\mathbb{Q} \in V(x)$得到。考虑由 ω个 $\mathbb{Q}$ 副本组成的有限支撑积$\mathbb{Q}^{<\omega}$，并令 H 在 $V[G]$上 $\mathbb{Q}^{<\omega}$泛型。那么 $V[G][H]$ 也是 $V(x)$的一个 $\mathbb{Q}^{<\omega}$泛型扩张。利用 $\mathbb{Q}^{<\omega}$ 的齐性，很容易验证 $\mathrm{HOD}^{V[G][H]}_{V\ x}$ ( ) $= V(x)$。根据推论 10.2，$V(x)$是 V的一个对称扩张。□

并非所有模型都 $V(x) \subseteq V[G]$ 能通过使用泛型 G作为对称扩张而得到。显然，这样的模型只有集合多个，但模型 $V(x)$ 可以有真类多个，且位于 V和 $V[G]$之间，例如 的科恩扩张就是如此（参见 [9] 和 [4]）。这一观察的一个有趣推论是， $V(x)$ 通常不在序数可定义性下封闭。也就是说，可能会出现（有些情况下甚至经常如此）： $V(x) \neq \mathrm{HOD}_{V\ x}^{V[G]}()$。

为了将 $V(x)$ 表示为对称扩张，我们必须转而使用更大的强迫概念 $\mathbb{P}^+ = \mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}^{<\omega}$。 $\mathbb{P}^+$ 本身也可以看作是这一做法的一个门槛，因为在任何进一步的齐次扩张中， $V(x)$ 仍可写作 $\mathrm{HOD}^{V(x)}$。这引出了以下定义。

定义 10.6. 设 $\mathcal{S} = (\mathbb{P},\mathcal{G},\mathcal{F})$ 是一个对称系统，且 $\mathbb{P} \lessdot \mathbb{Q}$。那么，我们将系统 $\mathcal{S}^{\langle\mathbb{Q}\rangle}$ 定义为 $\mathcal{O}(\mathcal{B}(\mathbb{Q}),\mathrm{N}^{\bullet}_{\mathcal{S}})$ 的完备化，其中 $\mathbb{P}$-名称按通常方式视为 $\mathcal{B}(\mathbb{Q})$-名称。此外，对于 $\mathbb{Q} = \mathbb{P} \times \mathrm{Coll}(\omega, V_\alpha)$ 的情形，我们将 $\mathcal{S}^{\langle\alpha\rangle}$ 记作 $\mathcal{S}^{\langle\mathbb{Q}\rangle}$。

$\mathcal{S}^{\langle\mathbb{P}\rangle} = \mathcal{S}^{\langle 0\rangle}$ 只是 $\mathcal{S}$ 的完备化。每当 $\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{P}$ 的齐次扩张（这意味着商强迫被强迫为弱齐次）时，$V[G \cap \mathbb{P}]_{\mathcal{S}} = V[G]_{\mathcal{S}^{\langle\mathbb{Q}\rangle}}$，对任意 $\mathbb{Q}$-泛型 G 都成立。回想一下， $\mathbb{P}$ 的任何完备扩张 $\mathbb{Q}$ 都完全嵌入到 $\mathcal{B}(\mathbb{P} \times \mathrm{Coll}(\omega, V_\alpha))$ 中，只要 α 足够大，并逐点固定 $\mathbb{P}$。我们可以将 $\mathcal{S}^{\langle\alpha\rangle}$ 视为 $\mathcal{S}$ 的高阶完备化；我们将看到，这些完备化足以刻画所有中间对称扩张。

定理 10.7. 设 $V \subseteq M \subseteq N$ 是 V 的对称扩张，其中 N 通过 $\mathcal{S}$ 得到。则存在 α、$T \lessdot \mathcal{S}^{\langle\alpha\rangle}$ 以及在 V上泛型的 G，使得 $M = V[G]_T$、$N = V[G]_{\mathcal{S}^{\langle\alpha\rangle}}$。

证明. 设 $M = V(x)$、$\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 以及 $N = V[G_0]_{\mathcal{S}}$，其中 G_0 在V上是 $\mathbb{P}$-泛型的。则对某个 $\mathbb{Q} \in M$， $V[G_0]$ 是 M的 $\mathbb{Q}$-泛型强迫扩张。存在一个足够大的 α，使得 $\mathbb{P} * \dot{\mathbb{Q}}^{<\omega}$ 完全嵌入 $\mathcal{B}(\mathbb{P} \times \mathrm{Coll}(\omega, V_\alpha))$，其中$\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}$的一个 $\mathcal{S}$-名称。令 G_1 为在 $V[G_0]$ 上 $\mathrm{Coll}(\omega, V_\alpha)$- 泛型的，则我们有

$$M = \mathrm{HOD}_{V(x)}^{V[G_0,G_1]} \text{ and } V[G_0]_{\mathcal{S}} = V[G_0, G_1]_{\mathcal{S}^{\langle\alpha\rangle}}.$$

其余部分由定理 10.1得出。 □

值得注意的是，以下结论与这样一个事实相呼应：强迫概念 $\mathbb{P}$， $\mathbb{Q}$ 当且仅当它们的彩票和强等价时，才弱等价$\bigoplus_{i\in\alpha} \mathbb{P} \cong \bigoplus_{i\in\beta} \mathbb{Q}$。

命题 10.8。 设 S、T 为对称系统。以下条件等价：

(1) S 和 T 弱等价。*(2)* 对某些 α、β，有 $S^{\langle\alpha\rangle} \cong_{\mathsf{N}} T^{\langle\beta\rangle}$。*(3)* 对某些 α，有 $S^{\langle\alpha\rangle} \cong_{\mathsf{N}} T^{\langle\alpha\rangle}$。

证明。(3) 蕴含 (2) 蕴含 (1) 是显然的。只需证明 (1) 蕴含 (3)。设 S $= (\mathbb{P}, \mathsf{G}, \mathsf{F})$ 与 T $= (\mathbb{Q}, \mathsf{H}, \mathsf{E})$ 弱等价。则对任意在 V 上的 $\mathbb{P}$-泛型 G，存在一个强迫概念 $\mathbb{A} \in V[G]_{\mathcal{S}}$，它在 $V[G]_{\mathcal{S}}$ 上添加一个在 V 上的 $\mathbb{Q}$-泛型 H，使得 $V[G]_{\mathcal{S}} = V[H]_T$ 与 $\mathbb{A} = (\dot{\mathbb{Q}}/\mathsf{T})^H$（见定理 7.21）。令 $\mathbb{A}$ 为所有具有此性质的力迫概念之彩票和的闭合 S-名称；由于任意 $\mathbb{Q}$/T 的秩有界，这样的力迫概念只能有集合那么多个。 于是存在一个对应于该 $\mathbb{Q}$-泛型的 $\mathbb{P} * \mathbb{A}$-名称 H，从而诱导出 B($\mathbb{P} * \mathbb{A}$) 的一个完全子力迫. $\mathbb{Q}' = \{[\![\check{q} \in H]\!] : q \in \mathbb{Q}\}$。我们进而看到 $\mathbb{Q}'$ 事实上与 . $\mathbb{Q}$ 同构，因为对每个（正的） $q \in \mathbb{Q}$ 都有 $[\![\check{q} \in H]\!] \neq \mathsf{O}$。更精确地说， H 可实现为 V 上的任意泛型 H，因为对某个 G 有 $V[H]_T = V[G]_{\mathcal{S}}$，从而 $(\dot{\mathbb{Q}}/\mathsf{T})^H \in V[G]_{\mathcal{S}}$ 作为如上的一个强迫 $\mathbb{A}$ 出现。因此，将 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}'$ 等同后，我们可以把 $\mathrm{N}^{\bullet}_T$ 视为

一个 $\mathcal{B}(\mathbb{P}*\mathbb{A})$-类名称，并且我们得到 $\Vdash_{\mathcal{B}(\mathbb{P}*\dot{\mathbb{A}})} \mathrm{N}^{\bullet}_{S} = \mathrm{N}^{\bullet}_{T}$。此外，存在一个 $\mathbb{Q}$-名称 $\mathbb{B}$，使得 $\mathcal{B}(\mathbb{Q}*\mathbb{B}) \cong \mathcal{B}(\mathbb{P}*\mathbb{A})$，并尊重 $\mathbb{Q}$ 与 $\mathbb{Q}'$ 的等同。只需找到足够大的 α，使得 $\mathcal{B}(\mathbb{P}*\mathbb{A})$ 与 $\mathcal{B}(\mathbb{Q}*\mathbb{B})$ 完全嵌入到 $\mathcal{B}(\mathbb{P}\times \mathrm{Coll}(\omega, V_\alpha))$ 与 $\mathcal{B}(\mathbb{Q}\times \mathrm{Coll}(\omega, V_\alpha))$ 中，并尊重 $\mathbb{P}$ 与 $\mathbb{Q}$ 的副本。其余部分容易得出。□

11. Kinna–Wagner 原理

我们可以将选择公理视为断言每个集合都可以单射到某个序数中，或者每个集合都是某个序数到它的满射映射的像。这自然引出了一系列称为 Kinna–Wagner 原理的层级。Kinna 和 Wagner [12]将第一个原理定义为一种弱选择原理（也就是说，我们选择一个真子集，而不是一个元素），并证明了他们的原理等价于“每个集合都能单射到某个序数的幂集中”这一陈述。他们的原理得到了广泛研究，较弱的选择原理也同样如此。Monro 提出了以下弱化版本（针对有限 α），见 [14]。

定义 11.1。对于一个序数 α，KWP_α 断言每个集合 x 都能单射到$\mathcal{P}^\alpha$(序数)中。*Kinna–Wagner* 原理KWP 断言存在某个 α，使得 KWP_α 成立。

事实证明，强迫与进一步的弱化版本——对偶 Kinna–Wagner 原理——密切相关。

定义 11.2（对偶 Kinna–Wagner）。对于序数 α，KWP^*_α 断言：对于每个集合 x，都存在从 $\mathcal{P}^\alpha$(序数) 到 x 的满射。

当然，我们的意思是存在一个可定义的从 $\mathcal{P}^\alpha$(序数) 到x的满射。但这与以下说法相同：存在足够大的序数 η，使得从集合 $\mathcal{P}^\alpha(\eta)$ 到 x 存在一个满射。

作者在 [11]，中对这些原理进行了广泛研究，并证明了以下事实。

命题 11.3（Balcar–Vopěnka–Monro，[11,定理 3。5]）。设 M 和 N 是 ZF 的模型，且 $M \models \mathsf{KWP}^*_\alpha$。若 $P^{\alpha+1}$（序数）$^M = P^{\alpha+1}$（序数）^{N}，则 $M = N$。□

命题 11.4（[11]）。对于任意序数 α，我们有

(1) $\mathsf{KWP}_\alpha \to \mathsf{KWP}^*_\alpha \to \mathsf{KWP}_{\alpha+1}$，*(2)* 若 α 不是后继，则KWP^*_α 与 KWP_α 等价，*(3)* KWP^*_α 在强迫下不变，*(4)* KWP 与 $\neg$KWP 在对称扩张下不变。

对任意序数 α、β，以及 V与 $x \in V[G]$上的任意 $\mathbb{P}$-泛型滤子 G，我们有

(5) 若 $V \models \mathsf{KWP}^*_\beta$ 且 $x \subseteq P^\alpha$(序数)，则 $V(x) \models \mathsf{KWP}^*_{\max(\alpha,\beta)}$，

(6) 若 $V[G] \models \mathsf{KWP}^*_\alpha$ 且 $\mathbb{P} \subseteq P^\beta$(序数)，则 $V \models \mathsf{KWP}^*_{\beta+\alpha}$。 □

引理 11.5. 对序数 α，存在P^α(序数)$^{<\omega}$ 与P^α(序数)之间的一致可定义双射，且该双射在传递模型之间是绝对的。□

定理 11.6 ([11, §4])**.** 设 $V \models \mathsf{ZF} + \mathsf{KWP}$，$G$ 是关于某个 V的 $\mathbb{P}$-泛型$\mathbb{P} \in V$，且 $M \models \mathsf{ZF}$ 满足 $V \subseteq M \subseteq V[G]$。则下列各项等价：

(1) $M \models$KWP。*(2)* $M = V(x)$ 对某个 $x \in M$成立。*(3)* M 是 V的对称扩张。

此外，若 $M \models \mathsf{KWP}^*_\alpha$，则 $M = V(P^{\alpha+1}(\mathbb{P}^{<\omega})^M)$。

借助尊重基的概念，我们可以证明以下定理。

定理 11.7. 设 S 是一个对称系统，其尊重基由 P^α(序数) 和 $V \models \mathsf{KWP}^*_\beta$ 中元素的名称组成。那么 $\Vdash_{\mathcal{S}} \mathsf{KWP}^*_{\max(\alpha,\beta)}$。

证明。由定理 8.1，按 S 作出的对称扩张具有 $V(\mathbb{P}/\mathrm{S})$ 的形式。$\mathbb{P}/\mathrm{S}$ 的元素具有 $(r, \dot{x}_i, x_i : i < n)$ 的形式，其中对于每个 $i < n$，$r \in \mathbb{P}$，$\dot{x}_i \in \mathrm{R}$，且 $x_i \in \mathrm{P}^\alpha$(序数)，$\mathrm{R} \in V$ 是 S 的一个尊重基。因此，$\mathbb{P}/\mathrm{S}$ 可视为 $\mathbb{P} \times \mathrm{R}^{<\omega} \times \mathrm{P}^\alpha(\text{序数})^{<\omega}$ 的子集。

由于 $X := \text{传递闭包}(\{\mathbb{P} \times \mathrm{R}^{<\omega}\}) \in V$，存在一个满射 $f: \mathrm{P}^\beta(\text{序数}) \to X$ 属于 V。于是集合 $E = \{(x, y) \in f^{-1}(X) : f(x) \in f(y)\}$ 将 $\mathbb{P} \times \mathrm{R}^{<\omega}$ 编码为其传递坍缩。于是存在 $f^{-1}(X) \times \mathrm{P}^\alpha(\text{序数})^{<\omega}$ 的一个子集 x，通过 E 对 $\mathbb{P}/\mathrm{S}$ 进行编码。更具体地说，我们有 $V(\mathbb{P}/\mathrm{S}) = V(E, x)$。总之，$(E, x)$ 本身可视为 $\mathrm{P}^{\max(\alpha,\beta)}$(序数) 的一个子集，而命题 11.4 的第 (5) 项完成了证明。□

推论 11.8. (ZFC) 设 $= (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F})$ 且 $|\mathbb{P} \cup \mathcal{G}| = \kappa$。那么 $\Vdash_{\mathcal{S}} \mathsf{KWP}^*_{\kappa^+}$。

问题 11.9. 上述推论是否是最优的？也就是说，如果 $|\mathbb{P} \cup \mathcal{G}| = \kappa$，是否存在一个序数 $\alpha < \kappa^+$ 使得 $\Vdash_{\mathcal{S}} \mathsf{KWP}^*_\alpha$?

问题 11.10. 考虑 Add(ω,1)，即 Cohen 力迫，并假设选择公理。原则上，这个偏序有 $2^{\aleph_0}$ 多个自同构，因此任何使用它的系统都会强迫至少满足 $\mathsf{KWP}^{*\,(2^{\aleph_0})^+}$。这是最优的吗？我们是否总能得到 $\mathsf{KWP}^*_{\omega_1}$，甚至对某个 $\alpha < \omega_1$ 得到 KWP^*_α？

定理 11.11. 假设 $\Vdash_{\mathcal{S}} \mathsf{KWP}^*_\alpha$。那么，由 $P^{\alpha+1}$(序数) 的元素构成的 S-名称的集合是 S 的一个尊重基。此外，存在一个与 S 弱等价的 T，使得由 P^α(序数) 的元素构成的 T-名称的集合是 T 的一个尊重基。如果选择公理成立，我们可以假设 $T \cong_{\mathsf{N}} S$。

证明。若 M 是 V 的 S-扩张，则 $V \subseteq V(\mathrm{P}^{\alpha+1}(\text{序数})^M) \subseteq M$，并且根据命题 11.3，事实上 $V(\mathrm{P}^{\alpha+1}(\text{序数})^M) = M$。基本沿用命题 8.3 的论证，我们发现，$\mathrm{P}^{\alpha+1}$(序数)中元素的名称构成 S 的一个尊重基。根据 [11, 定理 4.6]，对于某个 $x \subseteq \mathrm{P}(\text{序数})$，有 $M = V(x)$。假设选择公理成立，则存在一个 ˆS-名称 $\dot{x}$，表示 P^α(序数)的某个子集，使得 $\Vdash_{\hat{\mathcal{S}}} \mathrm{HS}^\bullet_{\hat{\mathcal{S}}} = V(\dot{x})$（参见引理 9.9）。然后只需考虑系统 T $\cong_{\mathsf{N}}$ ˆS，其中我们将 ˆS 的群限制为 sym ˆS($\dot{x}$)，并沿用命题 8.3。若选择公理不成立，仍有一个条件的稠密集 p，其中的名称为 $\dot{x}$，使得 p 强制上述结论。通过将 ˆS 限制为 p 和 sym ˆS($\dot{x}$)，我们可以得到一个系统。令 T 为所有这些系统的彩票和，我们发现 T 与 S 弱等价。[19] □

12. HOD 上的泛性

回顾沃彭卡的以下著名定理，该定理最初见于 [20]。

命题 12.1 （例如参见 [7, 定理 15。46]）。设 $x \in V$ 是一个序数集。那么 x 是遗传序数可定义集^{V}上的泛型。

我们的最后一个结果是这一结论对对称扩张和任意集合 x的自然推广。

定理 12.2. 令 $x \in V$任意，且 $M =$遗传序数可定义集^V。那么 $M(x)$ 是 M的一个对称扩张。换言之，x 是 M的某个泛型扩张中的一个元素。

[19] ~~可以在 $\mathbb{P} = \bigoplus_i \mathbb{P}_i$ 上利用 $\mathcal{G} = \prod_i \mathcal{G}_i$ 以及由 $\mathcal{F}_i$ 生成的 $\mathcal{F}$ 自然地定义 $\mathcal{S}_i = (\mathbb{P}_i, \mathcal{G}_i, \mathcal{F}_i)$的 $\mathcal{S}_i$ 的彩票和 $\bigoplus_i$。~~

若 V 满足 选择公理，那么这便是命题 12.1 和定理 10.5的一个直接推论，因为 V 中有一个序数集 x对其进行编码。否则，我们希望先扩展到一个泛型扩张 $V[G]$ ，使得其中 x 可以被编码进一个序数集。但此时遗传序数可定义集$^{V[G]}$ 可能严格小于遗传序数可定义集^V ，因此不清楚该如何继续。在 [3, 9.3 定理 1], Grigorieff 正是采用了这种方法，证明了定理 12.2 在 $V = M(a)$ 是某个集合 a 的特殊情形下成立。我们给出一个直接论证，它是对上文命题12.1 通常证明的修改。有趣的是，对称泛型性的概念在此变得相当重要。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $x = V_\alpha^{M(x)}$对某个序数α成立。于是存在一个足够大的序数 γ ，使得 $(V_\alpha)^{<\omega}$ 的每个序数可定义子集实际上都是在 $(V_\gamma, \in)$ 上序数可定义的。考虑由条件$p = (a, \varphi)$组成的强迫 $\mathbb{P}$ ，其中 $a \in [\omega]^{<\omega}$, φ 是一个恰有 $|a|$ 个自由变量 v_n,$n \in a$ 且仅以序数 $< \gamma$ 为参数的公式，并且存在 $\bar{x} \in (V_\alpha)^a$ ，使得$V_\gamma \models \varphi(\bar{x})$。$(b, \psi)$ 扩展 (a, φ) 当且仅当 $a \subseteq b$ 并且

$$V_\gamma \models \forall \bar{v} \in (V_\alpha)^b (\psi(\bar{v}) \implies \varphi(\bar{v} \restriction a)).$$

然后注意到 $\mathbb{P} \in$ 遗传序数可定义集。令 $\mathcal{G}$ 为 ω 上有限支撑置换组成的群。置换 $\pi \in \mathcal{G}$ 于是诱导出作用 $\pi(a, \varphi) = (b, \psi)$，其中 $b = \pi\text{“}a$ ，并且 ψ 是φ ，将每个变量 v_n 替换为 $v_{\pi(n)}$。最后，令 $\mathcal{F}$ 为由逐点固定子群 $\operatorname{fix}(e) = \{\pi \in \mathcal{G} : \forall n \in e (\pi(n) = n)\}$生成的滤子，其中 $e \in [\omega]^{<\omega}$。

于是$\mathcal{S} = (\mathbb{P}, \mathcal{G}, \mathcal{F}) \in$ 遗传序数可定义集是一个对称系统。令 $\bar{x} = \langle x_n : n \in \omega \rangle$ 为 V_α 的任意一个枚举，其中每个元素都无限次出现；例如，在 V 的一个强迫扩张中，且 V_α 是可数的。

我们断言，集合 $G = \{(a, \varphi) \in \mathbb{P} : V_\gamma \models \varphi(\bar{x} \restriction a)\}$ 是遗传序数可定义集上的一个$\mathcal{S}$-泛型滤子。也就是说，令 $D \in$ 遗传序数可定义集是$\mathbb{P}$的一个$\mathcal{S}$-对称稠密子集。具体而言，假设 $e \in [\omega]^{<\omega}$ 满足：对每个 $\pi \in \operatorname{fix}(e)$，$\pi\text{“}D = D$。集合

$$Y = \{\bar{y} \in (V_\alpha)^e : \exists a \in [\omega]^{<\omega}, \bar{z} \in (V_\alpha)^a, (e \cup a, \varphi) \in D (V_\gamma \models \varphi(\bar{y}, \bar{z}))\}$$

是序数可定义的，因此它的补 $Y' = (V_\alpha)^e \setminus Y$也是序数可定义的。若 Y'非空，则由 γ的选择，存在一个条件$(e, \chi) \in \mathbb{P}$，使得 $Y' = \{\bar{y} \in (V_\alpha)^e : V_\gamma \models \chi(\bar{y})\}$。但这样一来， D 就不是稠密的，因为(e, χ)无法由 D中的任何元素扩展。因此 $Y' = \emptyset$,$Y = (V_\alpha)^e$，特别地，$\bar{x} \restriction e \in Y$。于是令 a, $\bar{z}$, φ 满足$(e \cup a, \varphi) \in D$且 $V_\gamma \models \varphi(\bar{x} \restriction e, \bar{z})$。由于 $\bar{x}$ 将 V_α 中的每个元素都枚举了无限次，存在某个 $\pi \in \operatorname{fix}(e)$，使得 $\bar{x} \restriction e \cup \{(\pi(i), z_i) : i \in a\} = \bar{x} \restriction (e \cup \pi\text{“}a)$。由此可得$\pi(e \cup a, \varphi) \in G \cap D$。

最后，让我们证明 $V_\alpha \in M[G]_\mathcal{S}$。为此，对每个 $n \in \omega$ 定义$\dot{x}_{n,\,0} = \emptyset$ 并对 $\beta \leq \alpha$ 作递归，

$$\dot{x}_{n,\beta} = \{\langle (a, \varphi), \dot{x}_{m,\beta'} \rangle : \beta' < \beta, n, m \in a, V_\gamma \models \forall \bar{v} \in (V_\alpha)^a (\varphi(\bar{v}) \to v_m \cap V_{\beta'} \in v_n)\}.$$

由归纳法可知， $\pi(\dot{x}_{n,\,\beta}) = \dot{x}_{\pi(n),\,\beta}$ 因此 $\operatorname{fix}(\{n\}) \leq \operatorname{sym}(\dot{x}_{n,\,\beta})$ 且$\dot{x}_{n,\,\beta} \in \mathrm{HS}$。显然，通过归纳法也可验证 $\dot{x}^G_{n,\,\beta} = x_n \cap V_\beta$。为完成证明，考虑 $\dot{X} = \{\dot{x}_{n,\,\alpha} : n \in \omega\} \in \mathrm{HS}$，并得出 $\dot{X}^G = V_\alpha$。 □

根据我们关于商的结果，在前一个证明中会有某个特定的 $\bar{x}$，使得 G 在 M 上是 $\mathbb{P}$-泛型的，但目前还不完全清楚如何直接得到它。这构成了对对称泛型性的一个非常有趣的应用。

[20]这里所说的“公式”，当然指的是 V 对一阶逻辑的形式化，而不是某种元理论层面的句法对象。

参考文献

1. Paul Cohen，连续统假设的独立性，《美国国家科学院院刊》**50**（1963，1143–1148）。MR。Paul J. Cohen，连续统假设的独立性。*II*，《美国国家科学院院刊》**51**（1964，105–110）。MR。Serge Grigorieff，集合论中的中间子模型与泛型扩张，《数学年刊》（第2辑）**101**（1975，447–490）。MR。Yair Hayut 和 Assaf Shani，选择公理深度失效下的中间模型，arXiv **2407.02033**（2024），1–36。5. Peter Holy 和 Jonathan Schilhan，排序原理与依赖选择，《符号逻辑通报》（2025），1–21。6. Thomas Jech，集合论，第二版，数学逻辑展望丛书，Springer-Verlag，柏林，1997。MR 1492987 7.，集合论，施普林格数学专著，Springer-Verlag，柏林，2003，第三个千年版，修订增补版。MR 1940513 8. Thomas J. Jech，选择公理，逻辑与数学基础研究丛书，第75卷，North-Holland Publishing Co.，阿姆斯特丹—伦敦；American Elsevier Publishing Co., Inc.，纽约，1973。MR 396271 9. Asaf Karagila，布里斯托尔模型：一个名为 *Cohen* 实数的深渊，《数学逻辑杂志》**18**（2018），第02期，1850008。10 3922788 11**8**42019 1，123–159。，迭代对称扩张，《符号逻辑杂志》（），第—期。MR。Asaf Karagila 和 Jonathan Schilhan，中间模型与 *Kinna–Wagner* 原理，《美国数学会会刊》（2026），第1期，393–403。12. W. Kinna 和 K. Wagner，关于选择公理的一种弱化，《Fund. Math.》**42**（1955，75–82）。MR。Kenneth Kunen，集合论：独立性证明导论，《逻辑与数学基础研究丛书》，第102卷，爱思唯尔，阿姆斯特丹，1980（英文）。14. G. P. Monro，具有相同序数集之集的ZF模型，《Fund. Math.》**80**（~~1973），~~ 第2期，105–110。MR。，关于戴德金有限集的独立性结果，《澳大利亚数学会杂志》**19**（1975，35–46）。MR。Douglass Bert Morris，向集合论模型添加全体不可分辨对象，ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，1970，2620293 17 + 博士论文——威斯康星大学麦迪逊分校。MR。Gershon Sageev，存在一个不可达基数的ZF模型，其中戴德金基数组成一个自然的算术非标准模型，《数学逻辑年刊》**21**（1981），第3期，221–281（1982）。MR 656794 18. R. M. Solovay 和 S. Tennenbaum，迭代科恩扩张与苏斯林问题，《数学年刊》（第2辑）**94**（1971，201–245）。MR。Toshimichi Usuba，无选择洛文海姆–斯科伦性质与基底的统一可定义性，《数学逻辑进展》，《施普林格数学与统计学会议录》第369卷，施普林格，新加坡，[2021] 2021，161 179 4378926 © 第–页。MR。Petr Vopěnka 和 Petr Hájek，半集合理论，Academia [捷克斯洛伐克科学院出版社],布拉格，1972。MR 444473 20

电子邮箱：karagila@math.huji.ac.il网址：https://karagila.org

利兹大学数学学院。英国利兹 LS2 9JT电子邮箱：jonathan.schilhan@univie.ac.at网址：https://mat.univie.ac.at/~jschilhan/

维也纳大学数学研究所库尔特·哥德尔研究中心，Kolin- gasse 14-16，1090 维也纳，奥地利