arXiv:2602.17347v1 [math.CT] 19 Feb 2026

纤维化范畴语境中的平坦函子

El Mehdi Cherradi

IRIF - CNRS - 巴黎西岱大学 巴黎高科矿业学院 - 巴黎文理研究大学

摘要

我们研究有限完备拟范畴之间的左正合 ∞函子与纤维化范畴之间的正合函子之间的联系，并描述一种过程，用以后者类型的正合函子逼近前者类型的平坦 ∞ 函子。作为应用，我们重新证明了纤维化范畴的相对范畴与有限完备拟范畴的相对范畴之间的 DK-等价。

目录

引言 **2**

1 纤维化范畴与正合函子 3

2 Yoneda 嵌入 7

3 一些技术工具 **10**

3.1 从滤过拟范畴到滤过范畴 . . . . . 11 3.2 $\mathbf{RelCat}$ 中的纤维化范畴. 13 3.3 由 Reedy 余纤维性得到投射余纤维性 15

4 刚性化平坦 ∞-函子 22

4.1 非参数化情形.22 4.2 一般情形.24 4.3 刚性左 Kan 延拓.26 4.4 非参数化情形.27 4.5 一般情形.28

5 应用 29

6 向部落的扩展 356.1 Yoneda 嵌入.37 6.2 刚性化平坦的 ∞-函子.38

引言

尽管 (∞,1)-范畴的“通用”模型应当在具备同伦结构的语境中重现范畴论的概念，但它们不一定提供严格的复合和恒等态射概念。因此，拟范畴等对象通常不具有 1-范畴结构。不过，出于许多目的，以带有附加结构的 1-范畴（例如模型范畴或纤维化范畴）的形式来研究当前的 (∞,1)-范畴会更为方便。在研究特定的 (∞,1)-范畴范畴时，将拟范畴替换为其严格呈现未必会造成限制。具体而言，存在 DK-等价：

1. $$\mathbf{CMC} \to \mathbf{PrL}$$

   从组合模型范畴、左 Quillen 函子和左 Quillen 等价构成的相对范畴 $\mathbf{CMC}$，到可呈拟范畴、左伴随 ∞-函子和等价构成的相对范畴 $\mathbf{PrL}$（这在 [Pav25，定理 1.1] 中得到了证明）。

2. $$\mathbf{FibCat} \to \mathbf{QCat}_{lex}$$

   从由纤维化范畴、正合函子和 DK-等价构成的相对范畴，到由有限完备拟范畴、左正合 ∞-函子和等价构成的相对范畴（如 [Szu14，定理 4.9] 所证）。

本文旨在借助平坦函子理论及其 (∞,1)-范畴对应理论，为纤维化范畴与有限完备拟范畴之间的对应关系提供新的视角。

有限完备范畴之间的函子是平坦函子，当且仅当它保持有限极限。尽管平坦函子的定义在更一般的情形下也有意义（见 [Bor94] 第 6.3 节），但我们只考虑有限完备范畴之间的平坦函子，因此这一概念与保持有限极限的函子相一致。事实上，我们将考虑由纤维化范畴表示的 (∞,1)-范畴之间的平坦 ∞-函子。一个微妙之处在于，纤维化范畴作为 1-范畴未必具有所有有限极限，但它们所表示的 (∞,1)-范畴确实是有限完备的。同样，正合函子表示保持有限极限的 ∞-函子，也就是我们所考虑的平坦函子，但它们作为 1-函子未必保持极限。

此外，纤维化范畴的框架提供了一种工具，可通过（特殊的）1-范畴极限（例如沿纤维化的拉回）在相应的（∞，1）-范畴中计算有限极限。

因此，纤维化范畴之间的态射，即正合函子，不仅仅是平坦的 ∞-函子的呈现：它们还保留这些特殊的 1-范畴极限，而这些极限编码了 ∞-范畴极限。

不能指望正合函子在 1-范畴意义下是平坦的，因为根据定义，它们满足的保持性质只涉及特定的拉回（沿纤维化的拉回）。尽管如此，我们有理由认为，从某种意义上说，这类函子的理论比一般平坦 ∞-函子的理论更丰富。具体而言，我们关注平坦函子与左 Kan 延拓之间的联系。众所周知，取值于某个 Grothendieck 托普斯 E 中的函子 $F\colon C \to E$，当且仅当其沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓 $\mathbf{Lan}_{\mathcal{Y}} : \mathbf{集合}^{C^{op}} \to E$ 保持有限极限时，它才是（内部）平坦的（参见 [MM12], VII.9.1 中的推论 3）。本节将研究正合函子的左 Kan 延拓。具体而言，我们将在命题 4.4 中证明，可以将此类延拓，或者更准确地说，对它的一个近似，定义为正合函子的一个跨度；由此既能调和正确的同伦行为，又能保持依赖于纤维化和弱等价的 1-范畴呈示的刚性。

1 纤维化范畴与正合函子

回顾纤维化范畴的定义：

定义 1.1。纤维化范畴是一个范畴 $\mathcal{F}$，配备两类态射 $\mathbf{W}$（弱等价）和 $\mathbf{F}$（纤维化），它们在复合下封闭，并满足：

- $\mathcal{F}$ 有一个终对象 $*$，且对每个对象 x，唯一映射 $x \to *$ 都是纤维化。
- $\mathcal{F}$ 沿纤维化存在拉回，且纤维化的基变换仍是纤维化。
- 平凡纤维化（同时也是弱等价的纤维化）在拉回下封闭。
- 弱等价类 $\mathbf{W}$ 满足二取三性质。
- 对于每个对象 x，对角线都存在一个分解

$$x \to px \to x \times x$$

其中 $x \to px$ 是弱等价，$px \to x \times x$ 是纤维化。

纤维化范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}'$ 若保持相应的结构，则称为**正合**：它将纤维化（分别地，弱等价）映射到纤维化（分别地，弱等价），并且保持终对象以及沿纤维化的拉回。

定义 1.2。我们将$\mathbf{Sp}_w$定义为"同伦跨度"范畴，即如下范畴

$$\bullet \xleftarrow{\sim} \bullet \xrightarrow{\sim} \bullet$$

其中两个映射均为弱等价。$\mathbf{Sp}_w$ 具有一个 Reedy 范畴结构（该结构是逆的）：顶点的次数为 1，另外两个对象的次数为 0。

定义 1.3. 对于 $\mathcal{C}$ 一个纤维化范畴，我们用 $P\mathcal{C}$ 表示从$\mathbf{Sp}_w$ 到 $\mathcal{T}$的 Reedy 纤维化图表范畴。

注记 1.1。 根据定义， $P\mathcal{C}$ 的对象是 Reedy 纤维化跨度

$$x_0 \leftarrow X \rightarrow x_1$$

而态射则是此类图表之间的自然变换。因此， $P\mathcal{C}$ 的态射对应于如下图表：

$$\begin{array}{ccccc} x_0 & \twoheadleftarrow\!\sim & X & \sim\!\twoheadrightarrow & x_1 \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ y_0 & \twoheadleftarrow\!\sim & Y & \sim\!\twoheadrightarrow & y_1 \end{array}$$

同样的信息也可以由单个交换方块来呈现

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ x_0 \times x_1 & \longrightarrow & x_1 \times y_1 \end{array}$$

其中我们将这些对象，即 Reedy 纤维化跨度，等同于映入一个积的单个映射。

注意， $P\mathcal{T}$ 继承了纤维化范畴结构，使得两个投影函子 ∂_0， ∂_1：$P\mathcal{T} \to \mathcal{T}$ 都是正合函子。

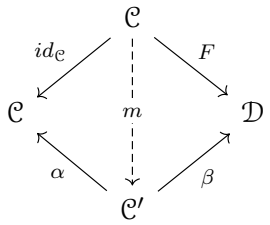
作为重要的第一步，我们希望从那些不保持纤维化的同伦函子构造纤维化范畴之间的正合函子。以下引理阐述了这一内容：

引理 1.1。 设 F： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$是纤维化范畴之间的一个函子。假设 F 将沿纤维化的拉回映射为同伦拉回的拉回方块，且 $F(*_{\mathcal{C}}) \to *_{\mathcal{D}}$ 是弱等价，并且弱等价在 F作用下被映射为弱等价。那么，在下述拉回方块中，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}' & \xrightarrow{u} & P\mathcal{D} \\ {\scriptstyle <\alpha,\beta>}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle <\partial_0,\partial_1>} \\ \mathcal{C} \times \mathcal{D} & \xrightarrow[F\times id_{\mathcal{D}}]{} & \mathcal{D} \times \mathcal{D} \end{array}$$

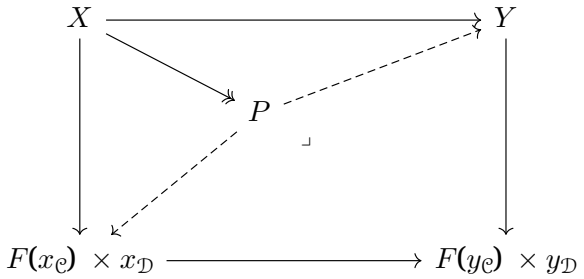
在**Cat**中计算所得的 $\mathcal{C}'$ 继承了纤维化范畴结构，且两个投影 α 和 β 是正合函子。

此外，若 $P\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$的一个路径对象，且有映射 $\iota\colon \mathcal{D} \to P\mathcal{D}$，则我们有如下纤维化范畴的图表

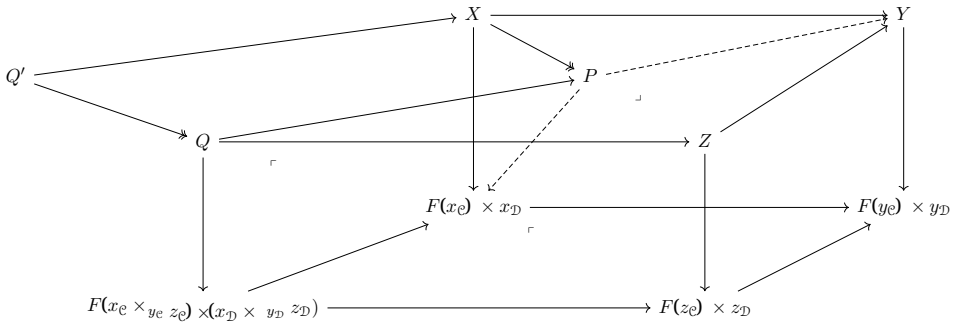


其中 $m:\ \mathcal{C} \to \mathcal{C}'$ 是一个弱等价。

证明。 将 $\mathcal{C}'$ 的纤维化类定义为满足以下条件的态射 $f : x \to y$: 分量 $\alpha(f):\ x_{\mathcal{C}} \to y_{\mathcal{C}}$在 $\mathcal{C}$上以及分量 $\beta(f) : x_{\mathcal{D}} \to y_{\mathcal{D}}$在 $\mathcal{D}$上都是纤维化；此外，$P\mathcal{D}$中的映射 $u(f)$ 在模去注记 1.1 中讨论的识别后，对应于一个交换方块



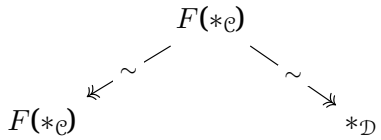
其中间隙映射 $X \to P$ 是一个纤维化（在 $\mathcal{D}$中）。注意，若 F 具有保持纤维化的性质，则后一条件在 $P\mathcal{D}$ 中将简化为 Reedy 纤维性。沿 $\mathcal{C}'$ 中的纤维化作拉回，可利用 $P\mathcal{D}$、 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{C}$ 中相应的拉回来构造，如下图所示，



其中 $Q = P \times_Y Z$ 根据假设，底部方块是一个拉回，因此 Q' 是沿着 Q 的拉回 $X \times_Y Z$

沿着纤维化 $X \to P$。注意， $Q' \to x_{\mathcal{D}} \times_{y_{\mathcal{D}}} z_{\mathcal{D}}$是一个弱等价，因为它是涉及纤维化的等价余跨之间的中介映射；并且$Q' \to F(x_{\mathcal{C}} \times_{y_{\mathcal{C}}} z_{\mathcal{C}})$也是一个弱等价，因为 $F(x_{\mathcal{C}} \times_{y_{\mathcal{C}}} z_{\mathcal{C}}) \simeq F(x_{\mathcal{C}}) \times_{F(y_{\mathcal{C}})} F(z_{\mathcal{C}})$ 根据对 F的假设是一个同伦拉回。因此，这给出了一种在拉回下稳定的纤维化概念。

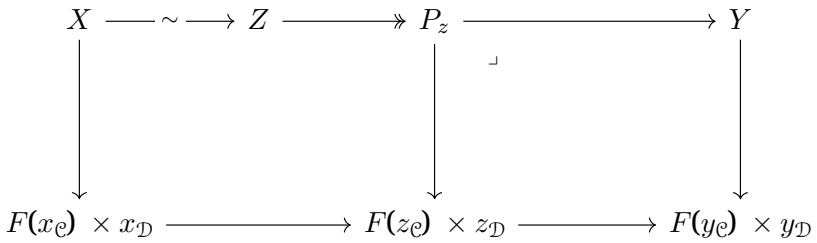
此外， $\mathcal{C}'$ 中的所有对象都是纤维的。事实上，跨度



定义了 $P\mathcal{D}$中的一个对象，因此也定义了 $\mathcal{C}'$中的一个对象； $\mathcal{C}'$是终对象。根据此前对纤维化的定义， $\mathcal{C}'$ 中的所有对象都是纤维的。

我们逐分量定义弱等价。显然，按照此定义，弱等价类满足二取三性质。此外，由于 F 保持弱等价，平凡纤维化 $f : x \to y$也使得间隙 $X \to P$ 成为 $\mathcal{D}$中的平凡纤维化。从上文详述的 $\mathcal{C}'$ 中拉回的构造可知，平凡纤维化在拉回下稳定。

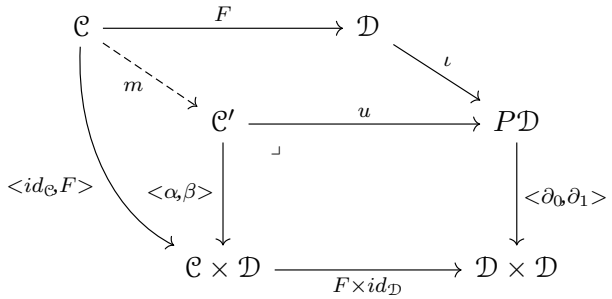
最后，我们必须验证每个态射 $f : x \to y$ 都能分解为一个弱等价后接一个纤维化。为此，我们先在 $\mathcal{D}$ 中将 $\alpha(f)$和 $\beta(f)$分解（分别经过某个对象 $z_{\mathcal{D}}$和 $\mathcal{C}$ （经过$z_{\mathcal{C}}$）），然后按如下方式扩展该分解：



其中，为了观察到 $Z \to F(z_{\mathcal{C}}) \times z_{\mathcal{D}}$ 确实给出了一个由平凡纤维化构成的跨度，我们关键地依赖于 F 保留弱等价这一事实。

根据构造，投影函子 α 和 β 都是正合的。此外，

在对 $P\mathcal{D}$ 作出额外假设的情况下，我们有如下图表



其中 m 是 DK-等价，因为 α 也是，并且符合所述图表。

□

备注 1.2。引理中要求 F 保持同伦拉回的条件，实际上可以从 F 将纤维化映射为弱纤维化（即沿其拉回时会产生同伦拉回的映射）推导出来。

下文所述的 Yoneda 嵌入（第 2 节）尤其属于这种情况。

注记 1.3. 存在一个态射 $\iota : \mathcal{S} \to P\mathcal{S}$，使得 $P\mathcal{S}$ 成为 S 在范畴 **FibCat** 中的路径对象，这可由 $\mathcal{S}$ 中存在函子性弱等价/纤维化分解推出。特别地，当 $\mathcal{S}$ 按照 [KS19，定义 3.1] 的意义为半单纯时，情况便是如此。

2 Yoneda 嵌入

本节旨在得到 Yoneda 嵌入的一个正合版本，它应当是平坦函子的典型例子。

考虑一个纤维化范畴 $\mathcal{C}$。按照 Cisinski 的构造（ [Cis10] 中的 3.3），存在一个双范畴 $\mathbf{B}\mathcal{C}$，它与 $\mathcal{C}$ 具有相同的对象，并且对于 $x, y \in \mathrm{Ob}\mathcal{C}$，其同对象是从 x 到 y 的“跨度”所构成的范畴，其中左边的一条腿是平凡纤维化。

定义 2.1。我们将 $L_C(\mathcal{C})$ 定义为对 $\mathbf{B}\mathcal{C}$ 应用 2-脉络函子后得到的单纯富集范畴

$$N : \mathbf{Bicat} \to \mathbf{Cat}_{\Delta}$$

在 [LP06]（第 3 节）中引入，将双范畴与正规伪函子组成的范畴映至单纯形富化范畴的范畴（这与 $\mathbf{Cat}^{\Delta^{op}}$ 的全子范畴相同，该全子范畴由单纯对象 X 张成，其中这些对象属于 $\mathbf{Cat}$，且 X_0 是离散的）。

特别地，[LP06] 的作者证明，双范畴 B 的 2-脉络 $N(B)$（将其视为 $\mathbf{Cat}$ 中的单纯对象）满足 Segal

条件，且是 Reedy 纤维化的（参见其中的第6节和第7节）。因此，$(\infty, 1)$-范畴 $N(B)$ 中的同态空间等价于 B 中同态范畴的神经，因而根据 [Cis10] 的命题 3.23，它们具有正确的同伦型。我们将其改述如下：

命题2.1. $L_C(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$ 的单纯形局部化，即典范态射

$$L_C(\mathcal{C}) \to L_H(\mathcal{C})$$

是单纯形富化范畴的弱等价，其中 $L_H(\mathcal{C})$ 是 $\mathcal{C}$的通常吊床局部化。

注记 2.1. 给定相对范畴 $\mathbf{C}$，在 $\mathbf{C}$ 的单纯形局部化上的单纯形预层范畴 $\mathbf{SSet}^{L(\mathbf{C})^{op}}$ 以及单纯形预层范畴$\mathbf{SSet}^{\mathbf{C}^{op}}$ 都容许模型结构，用以呈现 **同伦范畴$_\infty(\mathbf{C})$** 上的 ∞-预层拟范畴（这在 [DK87；DK80] 中有讨论）。就我们的目的而言，考虑函子将更为方便

$$\mathbf{C}^{op} \to \mathbf{SSet}$$

而非单纯形函子

$$L(\mathbf{C})^{op} \to \mathbf{SSet}$$

因为它们更容易构造和追踪。作为交换，要考虑的 $\mathbf{SSet}^{\mathbf{C}^{op}}$ 上的模型结构不是内射模型结构，而是它的左 Bousfield 局部化（下文提及），后者仍然具有良好性质。

我们现在考虑从 $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ 到 $\mathbf{Cat}$ 的映射 $H : (c', c) \mapsto Hom_{\mathbf{B}\mathcal{C}}(c', c)$。它对第二个变元是函子性的并保持极限，但对第一个变元仅是伪函子性的。因此，我们将借助严格化过程，将其替换为一个等价的严格函子。

定义 2.2. 我们定义 H'： $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C}$ 到 $\mathbf{Cat}$，其方式是将 (c', c) 映射到这样一个范畴，该范畴的对象是二元组 $(f : c' \to d', s \in Hom_{\mathbf{B}\mathcal{C}}(d', c))$，而从 (f, s) 到 (g, t) 的箭头是范畴$Hom_{\mathbf{B}\mathcal{C}}(c', c)$ 中的箭头 $f^*s \to g^*t$。

引理2.2. 映射 H' 定义了一个（严格）函子 $\mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathbf{Cat}$，它等价于 H，并保持第二个变元中的极限。

证明。 H' 的定义本质上就是将通常的伪函子严格化过程应用于取值在 $\mathbf{Cat}$中的函子所得的结果，源自 [Pow89]。根据定义，H' 在第二个自变量上保持极限显然成立，因为H 具有这一性质。

□

应用神经函子$\mathbf{N}:\ \mathbf{Cat}\ \to \mathbf{SSet}$ 并进行转置，得到一个函子

$$\mathbf{y}_0 : \mathcal{C} \to \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$$

它提供了一个 Yoneda 嵌入的候选，尽管它并未定义正合函子，主要是因为它不会将 $\mathcal{C}$中的纤维化映射到$\mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$中的单射纤维化。不过，它确实会像通常的 Yoneda 嵌入 $\mathcal{C} \to \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$一样，将它们映射为弱纤维化：这一点已在 [Cis10, Corollaire 3.12] 中得到证明（另见其中的命题 3.6）。

为了解决这个问题，我们现在的目标是应用引理 1.1，得到一个由正合函子构成的跨度形式的 Yoneda 嵌入。虽然我们可以将$\mathbf{y}_0$ 与逐点纤维化替换复合，但仍需处理单纯形预层中逐点（即投射）纤维化与单射纤维化之间的不匹配。为此，我们将用到 Shulman 提出的以下结果：

命题 *2.3*。*</style}*给定一个单纯范畴 $\mathcal{C}$，存在一个保极限的自函子

$$\mathbf{R}_{\mathcal{C}} : \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}} \to \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$$

将对象映射到纤维对象 $X \in \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$，并将逐点纤维化映射到单射纤维化。

证明。由 [Shu19] 的推论 8.16（以及该结果之后紧接的观察）可得：将其应用于图表范畴 $\mathcal{M} := \mathrm{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$ 和 $\mathcal{N} := \mathrm{SSet}^{\mathrm{Ob}\mathcal{C}^{op}}$ 上的内射模型结构即可。这些确实是单纯模型结构，而且右 Kan 延拓函子 G 和限制函子 U 都保极限。余单位 $UG \to Id$ 是 Quillen 纤维化这一条件（[Shu19，定义 8.6，注 8.9]）由 [Shu19 的例 8.4、8.13 及注 8.9] 得出。我们还考虑由通常的纤维替换 $\mathrm{Ex}_\infty : \mathrm{SSet} \to \mathrm{SSet}$ 逐点导出的函子 $R : \mathcal{M} \to \mathcal{M}$。由于后者保极限并将 Kan 纤维化映射到 Kan 纤维化，且余条构造 $C(G, UG, U-)$（采用 [Shu19] 中的记号）再经全体化后，定义了 $\mathcal{M}$ 的一个保极限自函子，因此复合函子 $\mathrm{R}_{\mathcal{C}}$：$X \mapsto C(G, UG, URX)$ 将任意对象映射到纤维对象，并将逐点纤维化映射到单射纤维化。

□

因此，复合映射

$$\mathbf{y} := \mathbf{R}_{\mathcal{C}} \circ \mathbf{y}_0 : \mathcal{C} \to \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$$

其取值于纤维单纯形预层的子范畴，并保拉回（尽管它不保终对象，也不保纤维化），因此现在可以在引理 1.1 的结果基础上引入定义 2.3。

我们首先将 $\mathcal{P}(\mathcal{C})$定义为：关于 $\mathcal{C}$ 的弱等价（或者更确切地说，这些弱等价经 Yoneda 嵌入 $h : \mathcal{C} \to \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}^{op}}$ 映射后的像）对 $\mathcal{C}$ 上单纯形预层的单射模型结构进行左 Bousfield 局部化后所得的纤维对象全子范畴；这一概念曾在 [Cis10] 的第 3 节中以 $P'_w(\mathcal{C})$ 之名加以讨论。

注记 2.2。 上述构造对任意相对范畴$\mathbf{C}$都有意义。我们也将其记作 $\mathcal{P}(\mathbf{C})$。然而，下面的构造只有在从一个纤维化范畴出发时才有意义。

定义 2.3。 我们将 $\mathcal{Q}(\mathcal{C})$ 定义为 $\mathbf{Cat}$ 中如下的拉回：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Q}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & P\mathcal{P}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle <\pi_0,\pi_1>} \\ \mathcal{C} \times \mathcal{P}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathbf{y}\times id_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}]{} & \mathcal{P}(\mathcal{C}) \times \mathcal{P}(\mathcal{C}) \end{array}$$

引理 2.4 （纤维化范畴的 Yoneda 嵌入）。 $\mathcal{Q}(\mathcal{C})$ 是一个纤维化范畴，而投影 $\mathcal{Q}(\mathcal{C}) \to \mathcal{C} \times \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是正合函子。

证明。 这是引理 1.1 的一个实例，因为$\mathbf{y} : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 满足所需的假设。 □

备注 2.3。 由于$\mathbf{y} : \mathcal{C} \to \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 经由本质可表单纯预层的子纤维化范畴$\mathbf{R}(\mathcal{C})$, 因此我们也有如下受限版本的 Yoneda 嵌入：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Q}(\mathcal{C}) & \longrightarrow & P\mathbf{R}(\mathcal{C}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle <\pi_0,\pi_1>} \\ \mathcal{C} \times_{\text{右}}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[\mathbf{y}\times id_{\mathbf{R}(\mathcal{C})}]{} & \mathbf{R}(\mathcal{C}) \times \mathbf{R}(\mathcal{C}) \end{array}$$

请注意，这个 Yoneda 嵌入确实表示了正确的 ∞-函子，因为范畴 $Hom_{\mathbf{B}_0\mathcal{C}}(c', c)$（的神经）具有 c' 与 c 之间态射空间的同伦型（命题 3.23, 见 [Cis10]），而且范畴等价会在神经之间诱导单纯集合的弱等价。

3 一些技术工具

本节中，我们建立一些技术性结果，以便在下一节中将刚性化过程应用于平坦的 ∞-函子。

3.1 从滤过拟范畴到滤过范畴

首先，我们需要将 [Lur18, Theorem 9.1.6.2]，中的构造推广为函子性版本，它是我们刚性化方法的基石。

定义 3.1. 我们将由滤过拟范畴张成的$\mathbf{Filt}_\infty$ 记作$\mathbf{SSet}$ 的全子范畴，并将由滤过偏序集张成的$\mathbf{FiltPos}$记作$\mathbf{Cat}$的全子范畴。

我们将 $\iota_{\mathbf{Filt}} : \mathbf{FiltPos} \to \mathbf{Filt}_\infty$ 记作典范包含。

命题 3.1. 存在一个函子

$$\rho_{\mathbf{Filt}} : \mathbf{Filt}_\infty \to \mathbf{FiltPos}$$

以及自然变换

$$\Phi : \iota_{\mathbf{Filt}} \circ \rho_{\mathbf{Filt}} \to id_{\mathbf{Filt}_\infty}$$

其分量均为终 ∞-函子。

此外， $\rho_{\mathbf{Filt}}$ 适合放入一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Filt}_\infty & \xrightarrow{\rho_{\mathbf{Filt}}} & \mathbf{FiltPos} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbf{SSet} & \xrightarrow[\rho]{} & \mathbf{Cat} \end{array}$$

其中 ρ 保余极限。

证明。 对象上的作用由 [Lur18]，中定理 9.1.6.2 的构造给出，只做了细微的变动，不影响论证，并使该构造具有函子性。具体而言，我们将一个滤过拟范畴 $\mathcal{A}$ 映射到 $\mathcal{A} \times \mathbf{N}(\omega)$ 的有限单纯子集构成的偏序集，其中这些子集具有 $K^\triangleright$ 的形式；此外，我们还要求顶点（自然数 $n \in \mathbf{N}(\omega)$）的标号严格大于其余顶点的标号。

我们将检查，依靠这一附加约束，如何将该构造提升为所述函子。

我们首先考虑函子 $\mathbf{Sub}\colon \mathbf{SSet}^{op} \to \mathbf{Pos}$ ，它将单纯集 S 映射到其单纯子集构成的偏序集 $\mathbf{Sub}(S)$。给定一个映射 $k : S \to T$（属于 $\mathbf{SSet}$），前复合函子

$$k^* := \mathbf{Sub}(k) : \mathbf{Sub}(T) \to \mathbf{Sub}(S)$$

存在一个左伴随:

$$\exists_k : \mathbf{Sub}(S) \to \mathbf{Sub}(T)$$

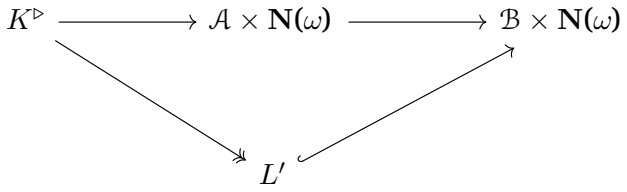
由于（偏序集之间）左伴随的唯一性，我们也得到一个协变函子：

$$\mathbf{Sub}_{\exists} : \mathbf{SSet} \to \mathbf{Pos}$$

现在，我们可以通过将（滤过）拟范畴 $\mathcal{A}$ 映射到由上述形式的单纯子集所张成的 **子集函子**$_{\exists}(\mathcal{A} \times \mathbf{N}(\omega))$ 的子偏序集，来定义函子 ρ（以及 $\rho_{\mathbf{Filt}}$）。按照 [Lur18, 中定理 9.1.6.2 的证明，当 $\mathcal{A}$ 是滤过的时，后者确实是一个滤过偏序集。我们还需要验证，给定一个 ∞-函子 $k\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，直接像作用

$$\exists_k : \mathbf{Sub}(\mathcal{A} \times \mathbf{N}(\omega)) \to \mathbf{Sub}(\mathcal{B} \times \mathbf{N}(\omega))$$

与先前的构造相容（也就是说，它将 $\rho_{\mathbf{Filt}}(\mathcal{A})$ 映射到$\rho_{\mathbf{Filt}}(\mathcal{B})$）。根据定义，$\rho_{\mathbf{Filt}}(\mathcal{A})$ 中的单纯子集 $K^{\triangleright} \subset \mathcal{A} \times \mathbf{N}(\omega)$ 经 $\exists_k$ 映射为如下像所得到的单纯子集：



然而，由于 $K \to L'$ 是满射且 $K^{\triangleright}$ 是有限的，L' 必定是有限的。此外，$K^{\triangleright}$ 中的锥点 x 被映射到一个锥点 y，这也顺带表明，对于某个有限的 L，$L' = L^{\triangleright}$。

确实，给定一个 L' 的 n-单形 σ，其顶点均不同于 y，则存在一个 $K^{\triangleright}$ 的 n- 单形 σ'（因此实际上是 K 的单形），它经由 $K^{\triangleright} \to L'$ 映射到 σ，因为这个态射是满射。存在唯一一个 $K^{\triangleright}$ 的 $n+1$-单形 θ'，其末顶点为 x，且前 n 个顶点的包含给出 $\sigma' \subset \theta'$。这个单形的像将 σ 延伸为一个 $(n+1)$-单形 θ。这是唯一满足以下性质的单形：其末顶点为 y，且前 n 个顶点的包含由 σ 给出；这是因为 y 并未被合并到另一个顶点上（因为它的自然数标记仍严格大于其他顶点的标记）。根据构造 $(-)^{\triangleright}$ 的定义，这恰好意味着 $L' = L^{\triangleright}$，其中 L 是由不同于 y 的顶点所张成的 L' 的满单纯子集。至此，函子 $\rho_{\mathbf{Filt}}$ 的描述完成。

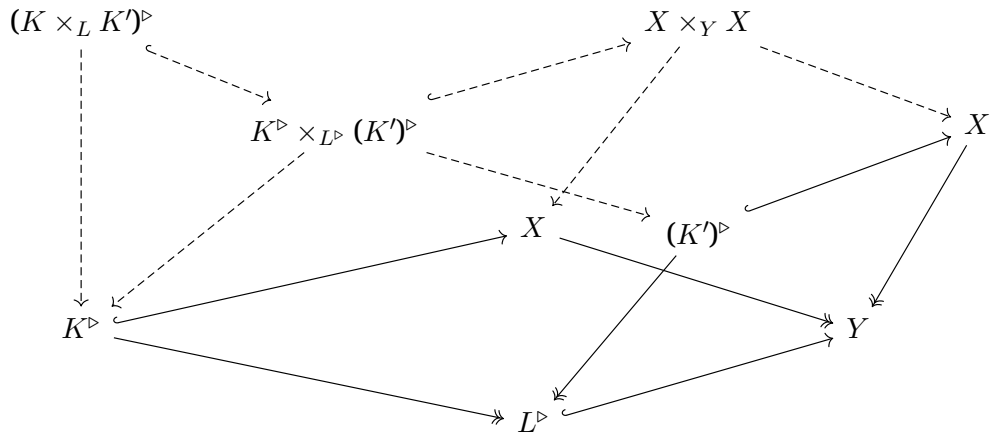
由锥点投影以规范方式得到的终 ∞-函子 $\rho_{\mathbf{Filt}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$，正如 [Lur18, 中定理 9.1.6.2 的证明所讨论的那样，确实可以验证它们能够合并为一个自然变换，因为如上所见，直接像函子保持形如 $K^{\triangleright}$ 的单纯子集的锥点。

与余积的交换性源于如下事实：形如 $K^{\triangleright}$、位于 $\mathcal{A} \amalg \mathcal{B}$ 中的图表必须完全落在余积的某一分量中（这是因为该图表是连通的）。

同样显然， ρ 保持滤余极限，因为定义中所考虑的子对象是有限的。这实际上蕴含 ρ 保持自反余等化子。事实上，应用 [Bar74，定理1.3], ，只需证明 ρ 将核对的余等化子映为余等化子。因此，我们考虑正则满态射 $f\colon X \to Y$ 于**SSet** 中，并将证明如下图表是一个余等化子：

$$\rho(X \times_Y X) \underset{\rho\pi_1}{\overset{\rho\pi_0}{\rightrightarrows}} \rho X \xrightarrow[\rho f]{} \rho Y$$

显然，由 $\rho\pi_0$ 和 $\rho\pi_1$ 生成的等价关系所识别的任意两个图表 $K^\triangleright \to X$ 和 $(K')^\triangleright \to X$ ，其单形分别由 π_0 和 π_1 识别。反过来，假设这两个图表映射到 ρY 中的同一个图表。根据定义，我们有如下跨度之间的映射，并且该映射逐点都是单态射。



这里，中间箭头 $(K \times_L K')^\triangleright \to K^\triangleright \times_{L^\triangleright} (K')^\triangleright$ 是单态射，因此图表 ($K \times_L K')^\triangleright \to X \times_Y X$ 也是如此。此外，根据构造，该图表经 $\rho\pi_0$ （分别经 $\rho\pi_1$）映射到子对象 $K^\triangleright \to X$（分别映射到 $(K')^\triangleright \to X$）。因此，后两个图表由 $\rho\pi_0$ 和 $\rho\pi_1$ 生成的等价关系所识别。这证明 ρY 是 X 关于此等价关系的商对象，因此 ρ 保持了我们最初考虑的核对的余等化子。

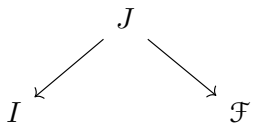
最后， ρ 保留所有（小）余极限，因为它保留余积和自反余等化子。

□

3.2 RelCat 中的纤维化范畴

我们将考虑相对范畴的范畴 **RelCat**上的 Barwick-Kan 模型结构（[BK12]）。纤维化范畴是纤维的（这一点已在 [Mei16] 中确立），因此，同伦范畴中的任意映射

若其余域是一个纤维化范畴，则可由同伦函子的一个跨度表示：**同伦范畴 (RelCat)**



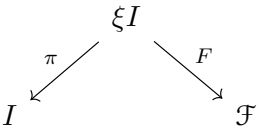
我们将证明，这一结果可以加强如下。

命题 3.2. 设 $\mathcal{F}$ 是一个纤维化范畴，且 I 是一个具有有限余切片 $I_{i/}$的逆同伦范畴。那么，同伦范畴 $\mathbf{Ho}(\mathbf{RelCat})$中的任意映射 $I \to \mathcal{F}$ 都可以由一个同伦函子$I \to \mathcal{F}$表示。

证明。 由引理 5.4 可知，在 [BK12], 中，投影 $\pi : \xi I \to I$ 是相对范畴之间的弱等价，其中 ξ 是“相对”双重细分函子。此外， $\xi I \simeq \mathbf{K}\xi\mathbf{N}I$ 是余纤维的，因为在单纯空间上的 Rekz模型结构中，每个对象都是余纤维的，并且

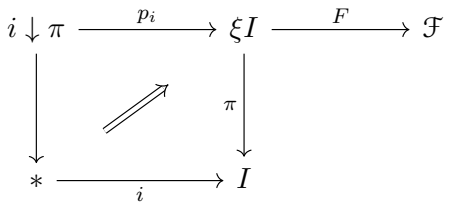
$$\mathbf{K}_\xi : \mathbf{sSpace}_{\mathbf{Rekz}} \to \mathbf{RelCat}$$

是一个左 Quillen函子。因此，我们可以考虑如下所示、表示映射 $I \to \mathcal{F}$ 的一个跨度。



其中 ξI 也是一个逆范畴。我们对 F的 F'取一个 Reedy纤维化替换，如 [Rad06, 定理 9.2.4] 中所构造，但上下文略有不同（具体而言，其中采用的纤维化范畴概念具有所有小同伦极限）。然而，由于 ξI 也是一个具有有限余切片的逆范畴，因此可以仅依赖 $\mathcal{F}$中存在的有限极限来构造纤维化替换。

现在，我们可以计算 F' 沿 π 的右 Kan 延拓。事实上，给定一个对象 $i \in I$， i 处的值可计算为如下图表 $F \circ p_i$ 的极限



其中 p_i 是一个离散余纤维化（在 $j \in \xi I$ 处的纤维为同态集$Hom(i, \ \pi j)$）。特别地，前复合函子 $p_i^* : \ \mathcal{F}^{\xi I} \ \to \ \mathcal{F}^{i\downarrow\pi}$

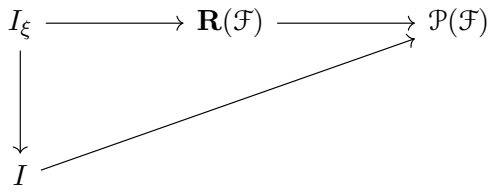
保留匹配范畴构造，将 F' 映射为一个（有限）Reedy 纤维图。并且，Kan扩张还是一个同伦Kan扩张，因此我们得到的函子 $F_e: I \to \mathcal{F}$ 在经由 **同伦范畴**$_\infty$ 映射后，是 **同伦范畴**$_\infty F'$ 沿 **同伦范畴**$_\infty \pi$ 的右 Kan 延拓，位于由（小）拟范畴构成的 $(\infty, 1)$-范畴 $\mathcal{QC}$ 中。由于后者是一个同构，可知 Kan扩张中涉及的 2-胞是可逆的，因此 F_e 确实表示同伦范畴 **同伦范畴(RelCat)**中的正确态射。 □

这一结果有一个纤维化类比，代价是需要取值于一个模型范畴:

命题 3.3. 设 $\mathcal{F}$ 是一个纤维化范畴，$I \to B$ 是同伦性范畴之间的一个余纤维化，对应于图表 $D: B \to \mathbf{Cat}$。考虑图表 $D_\xi: \xi \circ D$，以及由 $\pi: \xi \to id_{\mathbf{RelCat}}$ 诱导的自然变换$D_\xi \to D$，并通过 *Grothendieck* 构造得到一个位于 B 上方的映射 $I_\xi \to I$。

那么，对于任意映射 $I_\xi \to \mathcal{F}$，函子 $F: I_\xi \to \mathcal{F} \to \mathbf{R}(\mathcal{F})$ 都可以扩展为同伦函子 $F_e: I \to \mathbf{R}(\mathcal{F})$。

证明。 我们采用与命题 3.2 类似的方法，即先对 F 取一个内射纤维性替换 F'。然后，我们可以计算复合函子 $I_\xi \to \mathbf{R(\mathcal{F})} \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ 沿 $I_\xi \to I$ 的右 Kan 延拓。这是沿弱等价的同伦 Kan 扩张，因此我们得到的图表$I \to \mathcal{P}(\mathcal{F})$ 适合于一个（在 **RelCat** 中的）同伦交换三角形



从而它通过$\mathbf{R(\mathcal{F})}$分解，得到预期的同伦函子$F_e: I \to \mathbf{R(\mathcal{F})}$。

□

3.3 由Reedy余纤维性得到的投射余纤维性

给定一个Quillen伴随

$$F: \mathcal{M} \to \mathcal{N}: G$$

在组合模型范畴之间，并给定一个小范畴 I，所诱导的伴随

$$F^I: \mathcal{M}^I \to \mathcal{N}^I: G^I$$

对于内射与投射模型结构都是一个 Quillen 伴随（这正是 [Lur09, Remark A.2.8.6]的内容）。

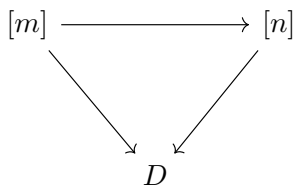
给定一个 Reedy范畴 R， $\mathcal{M}^R$ 的 Reedy余纤维性准则可用 $\mathcal{M}$中的余极限与余纤维化来表述。特别地，该判据的有效性被如上任意左Quillen函子 F 所保持；因此，$\mathcal{M}^R \to \mathcal{N}^R$ 也是左 Quillen 的（这并不要求 $\mathcal{M}$ 与 $\mathcal{N}$ 是组合的）。事实上，我们甚至不必假设 F 是左伴随：保持余极限以及（平凡）余纤维化，就足以保证 F^R具有同样的性质。

本节的目标是利用这一观察，推导出投射模型结构的一个类似判据（见下文命题3.8）。

我们依赖以下构造，它使我们能够将给定范畴 D 中的图表近似为 Reedy范畴上的图表，详见 [Dwy04]。

定义3.2。 对于 D 小范畴，其范畴 ΔD 表示 D的单形范畴。具体而言， $\Delta^{op} D$ 具有：

- 对象为 D 中的 n 可复合箭头序列（即函子$[n] \to D$）。
- 态射为 Δ 中的映射 $[m] \to [n]$，使下图交换

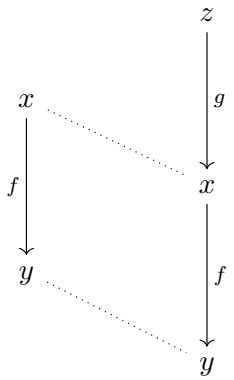


这里我们利用这样一个事实： Δ 可以与**Cat** 中由有限线性序 $[n]$张成的全子范畴等同。

我们也用 $\Delta^{op} D$ 表示范畴 ΔD 的对偶。

ΔD 中形如 $[1] \to D$ 的对象对应于 D中的一个箭头f： $x \to y$ 。类似地，形如 $[2] \to D$ 的对象对应于 D中的一对可复合箭头。考虑映射 d_0： $[1] \to [2]$ ，它将 0（分别是 1）映到 1（分别是 2）。 ΔD 中的一个箭头，其在 Δ 中的底层映射为 d_0

对应于一个图表



其中，第一个对象（即单个映射 f）经由沿d_0 的限制，与第二个对象（由可复合映射 g 和 f组成的对）的第二个分量重合。

注意，若将每个图表 $F\colon [n] \to D$ (即 ΔD 的对象)投影到其始对象，则 ΔD 中的箭头 $\alpha\colon F \to G$ 会导出唯一的中介映射 $G_0 \to F_0$；该映射对应于图表 $G : [n] \to D$ 中从第一个顶点 G_0 到 G 的第一个顶点 F_0 经由对应于 α 的单纯形算子映射后的像 F 的唯一映射。因此，此映射扩展为一个反变函子:

定义 3.3。我们将 $p_i : \Delta^{op} D \to D$ 记作投影函子，它把每条路径映射到其第一个顶点。对于 D 的一个对象 d，定义 $p_i^{-1}d$ 为逗号范畴 $d \downarrow p_i$ 的子范畴，其对象是第一个顶点为 d 的路径 $[n] \to D$，其箭头则是将 $[m]$ 的第一个元素映射到 $[n]$ 的第一个元素的单纯形算子 $[m] \to [n]$。

对偶地，我们将 $p_t\colon \Delta D \to D$ 记作末顶点函子，并以类似方式将$p_t^{-1}d$ 定义为 $p_i^{-1}d$。

以下结果在 [Dwy04] 的 22-23 中得到证明:

命题 3.4。沿用前面的记号:

- $p_i^{-1}d$ 具有一个终对象，并且是 $d \downarrow p_i$的始子范畴。
- 由递增 ***Reedy*** 映射（即满射单纯形算子）张成的 $p_i^{-1}d$ 子范畴，是若干个具有始对象的范畴的不交并。特别地，任意形如 $p_i^{-1}d$的常值图表都是 ***Reedy*** 上纤维的（锁定范畴都具有一个始对象）。
- 逗号范畴 $d \downarrow p_i$ 同构于 $\Delta^{op}(D_{d/})$，而投影函子 $\pi_d\colon d \downarrow p_i \to \Delta^{op} D$ 是由余切片 $D_{d/} \to D$ 的投影得到的，并诱导出一个右 ***Quillen*** 预复合函子

$$\pi_d^* : \mathcal{M}^{\Delta^{op} D} \to \mathcal{M}^{d \downarrow p_i}$$

对于任意模型范畴 $\mathcal{M}$。

对偶地：

- $p_t^{-1}d$ 有一个始对象，并且是 $p_t \downarrow d$ 的终子范畴。
- 由递增 ***Reedy*** 映射（即满射单纯形算子）所张成的 $p_t^{-1}d$ 子范畴，是若干带有终对象的范畴的不交并。特别地，任何以 $p_i^{-1}d$ 为形状的常值图表都是 ***Reedy*** 纤维的。

- 逗号范畴 $p_t \downarrow d$ 同构于 $\Delta^{op}(D_{/d})$，而投影函子 $\pi_d : \ p_t \downarrow d \to \Delta^{op}D$（由切片范畴 $D_{/d} \to D$ 的投影导出）诱导出一个左 ***Quillen*** 前复合函子

$$\pi_d^* : \mathcal{M}^{\Delta^{op}D} \to \mathcal{M}^{p_t \downarrow d}$$

对于任意模型范畴 $\mathcal{M}$。

使用以下术语将会很方便：给定一个小范畴之间的宽松交换方块

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & B \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \swarrow & \downarrow{\scriptstyle g'} \\ C & \xrightarrow[f']{} & D \end{array}$$

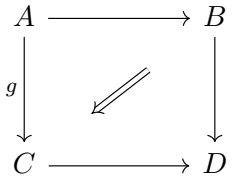
并且给定一个余完备范畴 $\mathcal{M}$，存在如下典范的 伴随变换 μ（由上述 2-胞以及伴随的单位/余单位诱导）：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{M}^A & \xleftarrow{f^*} & \mathcal{M}^B \\ {\scriptstyle g_!}\downarrow & \swarrow_{\mu} & \downarrow{\scriptstyle (g')_!} \\ \mathcal{M}C & \xleftarrow[f'^*]{} & \mathcal{M}D \end{array}$$

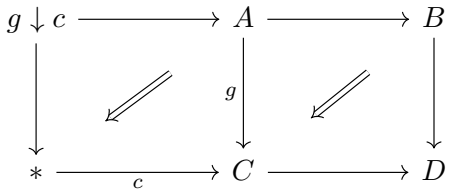
如果伴随变换可逆，我们就称前一个交换方块是（左）($\mathcal{M}$-)正合的。类似地，对于小范畴之间的反弱交换方形以及一个完备范畴 $\mathcal{M}$，也有（右）($\mathcal{M}$-)正合性的概念。

下面给出的用于检验交换方块正合性的判据在实践中很有用。

引理 3.5。 小范畴的一个弱交换方形



当且仅当对于每个对象 $c \in C$，两个弱交换方形的复合是正合的：



推论 3.6. 对于任意模型范畴 $\mathcal{M}$，前复合函子

$$p_i^* : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^{\Delta^{op} D}$$

是从投射模型结构到 *Reedy* 模型结构的左*Quillen*函子。对偶地，前复合函子

$$p_t^* : \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^{\Delta D}$$

是从内射模型结构到 *Reedy* 模型结构的右 *Quillen* 函子。此外，复合

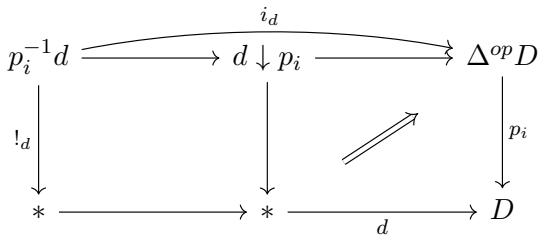
$$(p_i \circ p_t^{op})^* \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^{\Delta^{op}(\Delta D)}$$

也是一个左*Quillen*函子，而复合

$$(p_t \circ p_i)^* \mathcal{M}^D \to \mathcal{M}^{\Delta^{op}(\Delta D)}$$

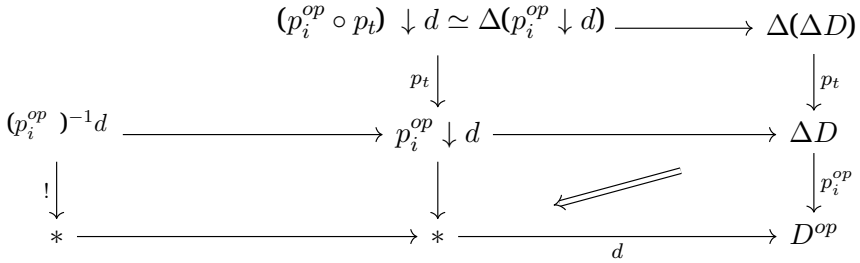
是一个右 *Quillen* 函子（模型结构与上文相同）。

证明。 我们来证明第一个断言。为此，只需验证右 Kan 延拓函子 $(p_i)_*$ 是右 Quillen。为此，注意对于 D中的任意对象 d ，以下矩形是正合的，



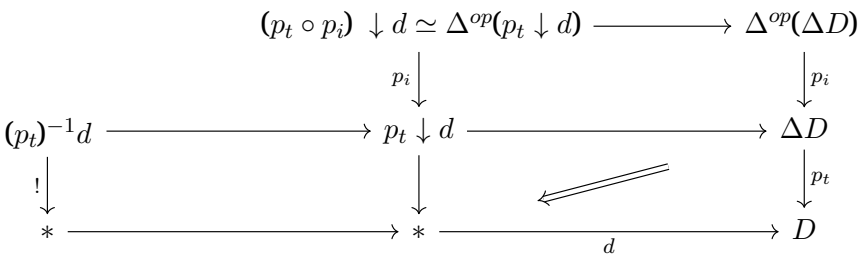
也就是说，相应的伴随变换可逆（$d^* \circ (p_i)_* \simeq !_* \circ i_d^*$），并且函子 i_d^* 根据命题 3.4 是右 Quillen。因此，只需注意到 $!_*$ 也为右 Quillen。这是因为正如命题 3.4 中所观察到的，$p_i^{-1}d$具有余纤维的常值函子；应用 [RV13]中的引理 9.4 和推论 9.6 即可。

对于第二个陈述的第一部分，我们可以通过考虑下面的图表来作类似论证，其中左下方形和右侧的矩形都是正合的:



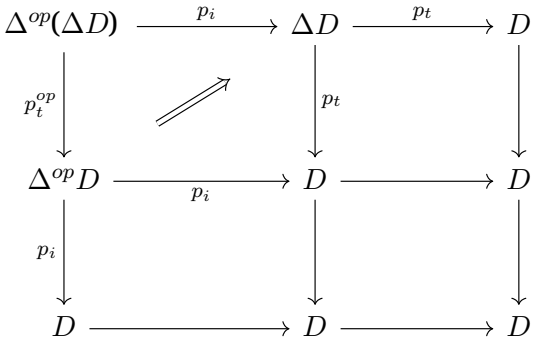
根据 [Dwy04, 22.10 (iii)], , 与上方箭头作前复合定义了一个左Quillen函子；并且根据证明的第一部分，沿 $p_t \colon \Delta(p_i^{op} \downarrow d) \to p_i^{op} \downarrow d$ 的左 Kan 延拓函子是左 Quillen 的。沿包含 $(p_i^{op})^{-1}d \to p_i^{op} \downarrow d$ 的限制也是一个左Quillen 函子，最后的余极限函子（即沿 $! : (p_i^{op})^{-1}d \to *$的左 Kan 延拓）也如此。这证明了沿复合 $p_i^{op} \circ p_t \colon \Delta(\Delta D) \to D^{op}$ 的左 Kan 延拓是一个左Quillen函子。用 $\mathcal{M}$ 替代 $\mathcal{M}^{op}$ 应用这一结论，我们得出沿 $p_i \circ p_t^{op}$ 的右 Kan 延拓函子是右 Quillen 的。因此，前复合函子 $(p_i \circ p_t^{op})^*$ 是左 Quillen 的。

通过考虑以下图表，第二部分的证明类似:



□

引理 3.7. 以下图表是一个正合交换方块（即其伴随映射可逆）：



证明。 我们首先证明上矩形是正合的。为方便起见，我们证明对偶矩形（即通过应用 **op: Cat** $\to$**Cat** 得到的矩形）是正合的。为此，考虑一个 d **of** ΔD 的对象。根据通常的伴随对应演算，只需证明函子

$$m : p_t \downarrow d \to D^{op}_{/p_i^{op} d} \simeq (D_{p_i^{op} d/})^{op}$$

是终的。但是，由命题 3.4 可知， $p_t \downarrow d$（它与$\Delta((\Delta D)^{d/})$同构）有一个带终对象的终子范畴 $p_t^{-1} d$ 。此外，诱导函子 $m' \colon p_t^{-1} d \to (D_{p_i^{op} d/})^{op}$ 将每个对象映射到恒等态射$p_i^{op} d \to p_i^{op} d$，也就是 $(D_{p_i^{op} d/}))^{op}$的终对象。因此，对于某个范畴 $\mathbf{C}$ 中由 $(D_{p_i^{op} d/})^{op}$ 索引的任意图表，通过 m' 进行前复合所得到的图表，是一个以$\mathbf{C}$ 中与 $(D_{p_i^{op} d/})^{op}$的终对象相关联的对象为值、形状可缩的常值图表。因此，它的余极限等于该对象；该对象同时也是原图表（由 $(D_{p_i^{op} d/})^{op}$ 索引）的余极限。这证明了 m' 是终的，因此上矩形是正合的。

我们还需要证明左下方形是正合的。为此，只需证明对每个 $d \in D$，比较函子$d \downarrow p_i \simeq \Delta^{op}(D_{d/}) \to D_{d/}$ 是始的。和之前一样，只需证明 $p_i^{-1} d \to D_{d/}$ 是始的，这可以像上面的函子 m'那样证明。

□

命题3.8。 设 D 是小范畴，且 $\mathcal{M}$ 和 $\mathcal{M}'$ 是模型范畴，并且在 D-图表范畴上的投射模型结构存在。考虑一个左*Quillen*函子 $F \colon \mathcal{M} \to \mathcal{M}'$，也就是说， F 将（平凡）余纤维化映为（平凡）余纤维化，并假设 F 保留余极限。那么 F^D 也是一个左*Quillen*函子。

证明。 考虑 $\mathcal{M}^D$ 中的一个余纤维化 $c \colon X \to Y$，并将其在 F 下的像记为 Fc 。由推论 3.6，映射 $(p_i \circ p_t^{op})^* c$ 是 $\mathcal{M}^{\Delta^{op}(\Delta D)}$ 中的 Reedy 余纤维化。由于 Reedy 余纤维性可以用相对 latching 映射为余纤维化来表述，并且 F 保持这一性质

根据假设，我们得到 $(p_i \circ p_t^{op})^* Fc$ 也是 $(\mathcal{M}')^{\Delta^{op}_{(\Delta D)}}$ 中的 Reedy 余纤维化。由引理 3.7，沿 $p_t \circ p_i$ 取左 Kan 延拓后，可在同构意义下得到映射 Fc；并且我们知道结果是一个余纤维化，因为根据推论 3.6，这个左 Kan 延拓函子是左 Quillen 函子。

□

注记 3.1. 在上一命题中，我们可以将假设“F 保余极限”替换为较弱的要求：F 与余极限“相差一个平凡余纤维化”，即对于任意图表 $P : I \to \mathcal{M}$，典范映射 $\varinjlim F \circ P \to F(\varinjlim P)$ 是平凡余纤维化（不过，本文其余部分不会用到这一观察）。

4 刚性化平坦 ∞-函子

众所周知，任意预层 $F : C^{op} \to$ **集合** 都典范地是其“元素”的余极限。具体而言，记 F 的元素范畴为 $\mathbf{el}(F)$，则 F 的元素范畴 F 可还原为由可表函子构成的图表 $\mathbf{el}F^{op} \to C \to$**集合**$C^{op}$ 的余极限。若 C^{op} 具有有限极限，且 F 是左正合预层，则其元素范畴是余滤的，因此前述余极限是一个滤余极限。本节的目标是将这一刻画应用于 ∞-范畴情形，进而将 ∞-平坦性刚性化为严格平坦性，以便计算任意左正合 ∞-预层 F：**同伦范畴** $_\infty C \to \mathcal{S}$ 所对应的保极限同伦函子 $F_r : \mathcal{C} \to \mathbf{SSet}$，其中 $\mathcal{C}$ 是一个固定的纤维化范畴。

我们使用平坦性的刻画，该刻画由 [Lur09]，在定义 5.3.1.7 中引入：平坦性可用余滤的（∞，1）元素范畴来描述。借助命题 3.1，我们将通过函子性地用一个余滤的 1-范畴对其进行近似。

4.1 非参数化情形

用 $\mathbf{SSet}^\circ$ 表示 Kan-Quillen 模型结构中纤维对象所成的纤维化范畴，该范畴由单纯集构成。

命题 4.1。设 $\mathcal{C}$ 是一个纤维化范畴，并考虑一个平坦的 ∞-函子 F：**同伦范畴** $_\infty(\mathcal{C}) \simeq \mathbf{N}_\Delta L_C(\mathcal{C}) \to \mathcal{S}$。则存在一个同伦函子 $F_r : \mathcal{C} \to \mathbf{SSet}^\circ$，使得 **同伦范畴**$_\infty(F_r)$ 作为 ∞-函子与 F 同伦。此外，F_r 保持有限极限和有限同伦极限。

证明。考虑单纯集的左纤维化

$$\pi_F : \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})_{/F} \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})$$

与 F 相关联。

现在，由于 F 是平坦的（等价地说，是左正合的，因为 $\mathcal{C}$ 是一个纤维化范畴，因此 **同伦范畴**$_\infty(\mathcal{C})$ 有限完备），根据 [Lur09] 中的注 5.3.2.11，我们知道拟范畴 **同伦范畴**$_\infty(\mathcal{C})_{/F}$ 是余滤的。

在这个特殊情形下，我们可以通过应用命题 3.1（或者直接应用 [Lur18] 中的定理 9.1.6.2），考虑一个配备末端函子 $\mathbf{N}(P_F) \to$ **同伦范畴**$_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F}$ 的滤过偏序集。现在我们有一个映射

$$\mathbf{N}(P_F) \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F} \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op}$$

此时，与 Yoneda 嵌入复合，我们得到一个映射:

$$\mathbf{N}(P_F) \simeq \mathbf{Ho}_\infty(P_F) \to \mathbf{N}_\Delta L_C(\mathcal{C})^{op} \simeq \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}^{op}) \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{P}(\mathcal{C}^{op}))$$

现在，由于函子 $\mathbf{Ho}_\infty$ 在模型范畴 $\mathbf{RelCat}$ 与单纯集合上的 Joyal 模型结构之间定义了一个 DK-等价（见 [BK11]），同伦范畴$\mathbf{Ho(RelCat)}$中存在一个映射 $D_{0,F}$： $P_F^{op} \to \mathcal{C}$ ，使得 $\mathbf{Ho}_\infty(D_{0,F})$ 与上文考虑的映射 $\mathbf{N}(P_F^{op}) \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})$ 一致。应用命题 3.2（注意到 P_F^{op} 满足相应的假设），这个映射可以由一个单独的态射实现，该态射也记作 $D_{0,F}$: $P_F^{op} \to \mathcal{C}$，它属于范畴 $\mathbf{RelCat}$。

因此，我们可以考虑如下图表:

$$D_F : P_F \to \mathcal{C}^{op} \to \mathcal{P}(\mathcal{C}^{op}) \subset \mathbf{SSet}^{\mathcal{C}}$$

由于 P_F 是一个滤过范畴，并且滤余极限保持单纯集合之间的弱等价，普通余极限 $\varinjlim D_F$ 是一个同伦余极限。由于滤余极限与有限极限可交换，并且在 $\mathbf{SSet}$ 中保持弱等价；又由于 P_F 是一个由保持有限极限和同伦极限的同伦函子（余表示函子）组成的图表，因此函子 F_r： $\mathcal{C} \to \mathbf{SSet}^\circ$ 是同伦函子，并继承了相同的保持性质。

相应的拟范畴图表

$$\mathbf{Ho}_\infty(D_F) : \mathbf{N}(P_F) \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{P}(C)) \simeq \mathcal{S}^{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})}$$

与图表具有相同的余极限

$$\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F} \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op} \to \mathcal{S}^{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})}$$

因为这两个图表由末端函子 $\mathbf{N}P_F \to$ **同伦范畴**$_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F}$ 联系起来。但后一个图表的余极限是协变预层

$$F : \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}) \to \mathcal{S}$$

正如 [Lur09], 的推论 5.3.5.4 中所证明的那样，我们可以得出结论。

□

4.2 一般情形

在本小节中，我们将上一小节得到的结果推广到这样的情形：用拟范畴 $\mathcal{S}^{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{D}^{op})} \simeq$**同伦范畴**$_\infty(\mathcal{P}(\mathcal{D}))$ 替换 $\mathcal{S}$。为此，我们采用纤维化方法，并将问题归结为非参数化情形。

命题 4.2. 设有一个平坦的 ∞-函子 $F:$**同伦范畴**$_\infty(\mathcal{C}) \to$**同伦范畴**$_\infty(\mathcal{P}(\mathcal{D}))$，其中 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$ 是纤维化范畴（这里我们确实是指 F 保有限极限）。那么，存在一个同伦函子 $F_r : \mathbf{R}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$，使得**同伦范畴**$_\infty(F_r)$ 与 F 作为 ∞-函子同伦。此外， F_r保有限极限和有限同伦极限。

证明。 我们考虑以下 ∞-函子

$$F_c : \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{D}^{op}) \to \mathcal{S}$$

它由 F经转置得到。我们可以考虑一个左纤维化

$$\pi_{F_c} : \mathcal{E} \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{D}^{op})$$

与此函子对应。

将 π_{F_c} 与投影复合后得到的余笛卡尔纤维化

$$\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}) \times \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{D}^{op}) \to \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{D}^{op})$$

可以沿着由伪函子 $\mathcal{D}^{op} \to L_C(\mathcal{D})^{op}$ 得到的映射 $\mathbf{N}(\mathcal{D}^{op}) \to \mathbf{N}_\Delta(L_C(\mathcal{D})^{op}) \simeq \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{D}^{op})$ 拉回。通过高阶格罗滕迪克构造（即直化函子），其结果对应于一个函子

$$Q_F : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{QCat}$$

其中，**QCat** 是由拟范畴张成的 **SSet** 的全子范畴。实际上，我们得到的是相对图表（并且只考虑以 $\mathcal{D}^{op}$ 为指标的相对图表），而不是以 $L_C(\mathcal{D})^{op}$ 为指标的单纯图表。请注意，依靠相对图表，我们可以从 ∞-范畴的角度处理同一个对象。

函子 Q_F 配备了一个自然变换 $Q_F \to \Delta_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})}$，其中

$$\Delta_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})} : \mathcal{D}^{op} \to \mathbf{QCat}$$

是取值为 $\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})$ 的常值函子。

与非参数化情形一样，由于 F 在第一个变量上保持有限极限，对于 d 为 $\mathcal{D}^{op}$ 的一个对象，拟范畴 $Q_F(d)$ 是余滤的。这是因为它们对应于与 ∞- 函子相关联的左纤维化的定义域：

$$F_c \circ (id_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})} \times d) : \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}) \to \mathbf{SSet}$$

这里，$d:*\to$ **同伦范畴**$_\infty(\mathcal{D}^{op})$ 将 $*$ 的唯一对象映射到对象 $d\in$**同伦范畴**$_\infty(\mathcal{D}^{op})$。

因此，我们可以将函子 $\mathbf{op}\circ Q_F$（其中 $\mathbf{op}:\mathbf{Qcat}\to\mathbf{QCat}$ 将一个拟范畴映射到其对偶）与命题 3.1 所提供的函子 $\rho_{\mathbf{Filt}}$ 后复合，从而得到一个函子

$$P_F:\mathcal{D}^{op}\to\mathbf{FiltPos}$$

其取值于滤过偏序集范畴。正如上文所述，这现在只是普通范畴之间的一个函子（即我们舍弃了单纯富化），但我们可以将其视为相对函子，以保留与我们起初所用的 ∞-函子相对应的信息。这个函子还配备了一个自然变换 $\iota_{\mathbf{Pos}}\circ P_F\to\mathbf{op}\circ Q_F$，其分量是终 ∞-函子（记 $\iota_{\mathbf{Pos}}:\mathbf{Pos}\to\mathbf{QCat}$ 为包含）。我们还有一个自然变换 $\mathbf{N}\circ P_F\to\Delta_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}^{op})}$，其中

$$\Delta_{\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}^{op})}:\mathcal{D}^{op}\to\mathbf{QCat}$$

是取值为**同伦范畴**$_\infty(\mathcal{C})^{op}$的常值函子。

由于 $\mathbf{RelCat}$ 上的 Barwick-Kan 模型结构是组合的，函子范畴 $\mathbf{RelCat}^{\mathcal{D}^{op}}$ 上的投射模型结构存在。由于通过直化得到的图表 Q_F 是余纤维的（因为直化函子是左 Quillen 函子，且余笛卡尔模型结构中的每个对象都是余纤维的），并且由命题 3.1 可知函子 $\xi\circ\rho_{\mathbf{Filt}}$ 满足命题3.8 的假设，因此我们可以得出结论：图表$\xi P_F:=\xi\circ P_F:\mathcal{D}^{op}\to\mathbf{RelCat}$ 也是余纤维的。应用命题 3.3，我们可以考虑一个映射 $P_F\to\Delta_{\mathbf{R}(\mathcal{C})}$，使得它在 **同伦范畴**$_\infty$ 下的像与以下复合相吻合：

$$\mathbf{Ho}_\infty(\xi P_F)\to\mathbf{Ho}_\infty(\mathbf{op}\circ Q_F)\to\mathbf{Ho}_\infty(\Delta_{\mathbf{R}(\mathcal{C})})$$

我们再与函子 $\mathbf{op}:\mathbf{Cat}\to\mathbf{Cat}$ 复合，并应用 Grothendieck 构造。由此得到一个余纤维化

$$\pi_F:\mathbf{E}\to\mathcal{D}^{op}$$

以及一个图表

$$\mathbf{y}^{op}\circ D_{0,F}:\mathbf{E}\to\mathbf{R}(\mathcal{C})^{op}\to\mathcal{P}(\mathbf{R}(\mathcal{C})^{op})$$

现在，我们可以沿着该余纤维化计算前一个图表的（逐点）左 Kan 延拓，从而得到一个函子 $\mathcal{D}^{op}\to\mathbf{SSet}^{\mathbf{R}(\mathcal{C})}$，它转置为：

$$F_{\mathbf{r},0}:\mathbf{R}(\mathcal{C})\to\mathbf{SSet}^{\mathcal{D}^{op}}$$

现在我们将证明，$F_{\mathbf{r},\,0}$ 保持有限极限，并将 $\mathcal{C}$ 中的纤维化（分别为弱等价）映射为$\mathbf{SSet}^{\mathcal{D}^{op}}$ 中的逐点纤维化（分别为弱等价）（相对于$\mathbf{SSet}$上的 Quillen 模型结构）。

我们首先证明，$F_{\mathbf{r},\ 0}$ 取值于同伦图表。也就是说，给定 $\mathcal{C}$ 中的一个对象 c 和 $\mathcal{D}$ 中的一个弱等价 $u : d \to d'$，我们检查$F_{\mathbf{r},\ 0}(c)$会诱导出一个单纯集合之间的弱等价：

$$F_{\mathbf{r},0}(c)(u) : F_{\mathbf{r},0}(c)(d') \to F_{\mathbf{r},0}(c)(d)$$

但 u 经函子 Q_F 的像是拟范畴之间的一个等价，而这又意味着它经 P_F 的像是一个终函子。这意味着，余极限 $F_{\mathbf{r},0}(c)(d')$ 与 $F_{\mathbf{r},0}(c)(d)$ 之间的典范映射 $F_{\mathbf{r},0}(c)(u)$ 是单纯集合的弱等价。

其次，由于 $\mathbf{SSet}^{\mathcal{D}^{op}}$ 中的（同伦）极限是逐点计算的，我们可以验证，对 $\mathcal{D}$ 中的每个对象 d，函子

$$\mathbf{ev}_d \circ F_{\mathbf{r},0} : P(\mathcal{C}) \to \mathbf{SSet}$$

保持有限极限，并将逐点纤维化（分别地，弱等价）映射为纤维化（分别地，弱等价），其中采用 **SSet** 上的 Quillen 模型结构。由于给出 $F_{\mathbf{r},0}$ 的左 Kan 扩张是逐点的，因此只需验证余极限

$$\varinjlim_{x \in \pi_{F,d}} \mathbf{ev}_{\pi_{\mathcal{C}} x}$$

满足这些保持条件，其中 $\pi_{F,d}$ 是纤维化 π_F 在 d 上方的纤维。但 $\pi_{F,d}$ 按构造与 $P_F(d)$ 相同，它是一个滤过偏序集，并且所有函子 $\mathbf{ev}^{\pi_{\mathcal{C}} x}$ 都保持（有限）极限、逐点纤维化和弱等价。因此，根据有限极限与滤余极限在 **SSet**中的交换性，以及 Kan 纤维化和单纯集合的弱等价在滤余极限下的稳定性，结论直接成立（参见 [Ros09]中的命题 3.3 和定理 4.1）。最后，令 $F_{\mathbf{r}} := \mathbf{R}_{\mathcal{D}} \circ F_{\mathbf{r},0}$，即可实现我们的初始目标。

□

4.3 刚性左 Kan 延拓

在本小节中，我们将借助正合函子（的跨度），构造取值于“预层拓扑斯”的正合函子的同伦左 Kan 延拓所需的近似。

我们考虑一个图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathcal{P}(\mathcal{D}) \\ {\scriptstyle K}\downarrow & & \\ \mathcal{C}' & & \end{array}$$

在纤维化范畴的范畴 **FibCat** 中，其中 $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ 是定义 2.3 中定义的“预层”纤维化范畴。我们的目标是构造一个态射 $\mathcal{C}' \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$，或者至少构造一个 **FibCat** 中的跨度 $\mathcal{C}' \leftarrow \mathcal{C}'' \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$，它

刻画与相应拟范畴图表相关联的左同伦 Kan 延拓。

首先，我们关注沿 Yoneda 嵌入的左 Kan 延拓，因为任意左 Kan 延拓都可以通过函子

$$n_K : c' \mapsto Hom_{\mathcal{C}}(K(-), c')$$

利用以下公式构造：

$$Lan_K F \simeq Lan_{\mathbf{y}} F \circ n_K$$

4.4 非参数化情形

在拟范畴语境中，使用命题 4.1 的证明中引入的记号，我们有以下等价，它们关于预层 $X \in \mathcal{P}(\mathcal{C})$ 是自然的：

$$\begin{aligned}
Hom(Lan_{\mathbf{y}}\mathbf{Ho}_\infty F, X) &\simeq Hom(\mathbf{Ho}_\infty F, X \circ \mathbf{y}) \\
&\simeq Hom(\varinjlim_{x \in \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F}} \mathbf{y}'(\pi_F x), X \circ \mathbf{y}) \\
&\simeq \varprojlim_{x \in \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})_{/F}} Hom(\mathbf{y}'(\pi_F x), X \circ \mathbf{y}) \\
finster \simeq &\varprojlim_{x \in \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})_{/F}} X(\mathbf{y}(\pi_F x)) \\
&\simeq \varprojlim_{x \in \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})_{/F}} Hom(\mathbf{Y}(\mathbf{y}\pi_F x), X) \\
&\simeq \varprojlim_{x \in \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})_{/F}} Hom(\mathbf{ev}_{\pi_F x}, X) \\
&\simeq Hom(\varinjlim_{x \in \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F}} \mathbf{ev}_{\pi_F x}, X)
\end{aligned} \tag{1}$$

这提示我们将扩张 $E_F\colon P(\mathcal{C}) \to \mathbf{SSet}$ 定义为以下左正合函子的滤余极限，

$$E_F := \varinjlim_{x \in P_F} \mathbf{ev}_{D_{0,F}x}$$

于是以下结论成立。

引理 4.3. 同伦范畴$_\infty E_F$ 是沿 *Yoneda* 嵌入对**同伦范畴$_\infty F$** 的左 *Kan* 延拓。

证明。 由此得到一个典范变换，

$$Lan_{\mathbf{y}}\mathbf{Ho}_\infty F \to \mathbf{Ho}_\infty \varinjlim_{x \in P_F} \mathbf{ev}_{D_F x}$$

它由（1）得到：将最后一行中的 $\mathsf{lim}\longrightarrow_{x\in\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C})^{op}_{/F}}\mathbf{ev}^{\pi_F x}$ 替换为弱等价函子 $\mathsf{lim}\longrightarrow_{x\in P_F}\mathbf{ev}^{D_{0,F}x}$。该变换可逆，因此，利用适当的同伦 2-范畴中的米田引理，我们得到所需结果。

□

4.5 一般情形

我们首先构造一个扩张 $E\colon P(\mathcal{C})\to P(\mathcal{D})$，这是对先前所用构造的参数化版本。为此，使用命题 4.2 的证明中引入的记号，我们计算图表的左 Kan 延拓

$$\mathbf{Y}'\circ\mathbf{y}^{op}\circ D_{0,F}:\mathbf{E}\to\mathbf{R}(\mathcal{C})^{op}\to\mathcal{P}(\mathbf{R}(\mathcal{C}))^{op}\to\mathbf{SSet}^{\mathcal{P}(\mathcal{C})}$$

其中$\mathbf{Y}'$ 将一个单纯预层 $X\in\mathcal{P}(\mathbf{R}(\mathcal{C}))$映射到余表示函子 $Hom_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}(\mathbf{y}^*X,-)$，沿着余纤维化 $\mathbf{E}\to\mathcal{D}^{op}$。

经转置，我们得到一个映射 $\mathcal{P}(\mathcal{C})\to\mathbf{SSet}^{\mathcal{D}^{op}}$，再将其与$\mathbf{R}_{\mathcal{D}}$ 复合，以得到扩张 $E\colon P(\mathcal{C})\to P(\mathcal{D})$。

我们通过与函子预合成来实现目标

$$n_K:\mathcal{C}\to\mathcal{P}(\mathcal{C})$$

由映射定义

$$c'\mapsto\mathbf{R}_{\mathcal{C}}\mathbf{N}(H'(K-,c'))$$

其中 H' 已在定义 2.2 中定义，并通过考虑定义 2.3 的以下变体：

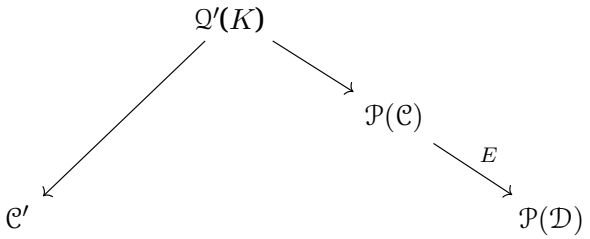
$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Q}'(K) & \longrightarrow & P\mathcal{P}(\mathcal{C})\\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle <\pi_0,\pi_1>}\\ \mathcal{C}'\times\mathcal{P}(\mathcal{C}) & \xrightarrow[n_K\times id_{\mathcal{P}(\mathcal{C})}]{} & \mathcal{P}(\mathcal{C})\times\mathcal{P}(\mathcal{C})\end{array}$$

综上，我们得到以下结果：

命题 4.4. 函子 E 是纤维化范畴之间的态射，并且**同伦范畴**$_\infty(E\circ n_K)$ 是**同伦范畴**$_\infty(F)$ 沿**同伦范畴**$_\infty(K)$的左 *Kan* 延拓：

$$\begin{array}{ccc}\mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}) & \xrightarrow{\mathbf{Ho}_\infty(F)} & \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{P}(\mathcal{D}))\\ {\scriptstyle\mathbf{Ho}_\infty(K)}\downarrow & \Downarrow & \nearrow{\scriptstyle\mathbf{Ho}_\infty(E\circ n_K)}\\ \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{C}') & & \end{array}$$

备注 4.1。 F 沿着 K 的同伦左 Kan 延拓因此由以下正合函子的跨度表示:



5 应用

本节中，我们构造一个性质良好的局部化函子的实现:

$$\mathbf{Ho}_\infty : \mathbf{FibCat} \to \mathbf{QCat}_{lex}$$

接下来，我们将给出一个新的证明，说明这个函子是 DK-等价；证明将依据 Cisinski 判据的一种轻微变体，该判据刻画了纤维化范畴之间的 DK-等价。

定义 5.1。 纤维化范畴之间的函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 若满足引理 1.1 的假设，则称为弱正合：它是同伦的，将沿纤维化的拉回映为拉回（且这些拉回是同伦拉回），并且在弱等价意义下保留终对象（即 $F(*_{\mathcal{C}}) \to *_{\mathcal{D}}$ 是弱等价）。

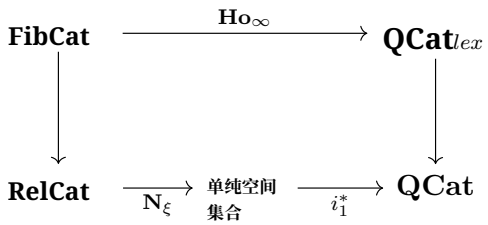
引理 5.1。 相对神经函子

$$\mathbf{N}_\xi : \mathbf{RelCat} \to \mathbf{sSSet}$$

来自相对范畴的模型范畴的 *[BK12，定理 6.1]*，到双单纯集合上的完全 *Segal* 空间的模型结构的映射，诱导出一个弱正合函子

$$\mathbf{Ho}_\infty : \mathbf{FibCat} \to \mathbf{QCat}_{lex}$$

适合于一个交换方块



其中 i_1^* 是完备 *Segal* 空间与拟范畴之间 *Quillen* 等价中的右伴随（参见 *[JT07，定理 4.11]*）。

证明。 由于纤维化范畴是$\mathbf{RelCat}$中的纤维对象（如 [Mei16], 所证明），且$\mathbf{N}_\xi$ 和 i_1^* 是右 Quillen 函子，因此复合函子的值是 Joyal 模型结构中的纤维对象，即拟范畴。显然，将该函子限制在纤维化范畴的范畴$\mathbf{FibCat}$上后，还会经由$\mathbf{QCat}$ 的子范畴$\mathbf{QCat}_{lex}$ 分解，因为纤维化范畴的底层是有限完备的（∞，1）-范畴。根据 Ken Brown 引理，该函子还是同伦函子。

从 $\mathbf{RelCat}$ 到 $\mathbf{QCat}$ 的底 ∞-函子是一个等价，并且是一个右伴随；特别地，它保持极限与同伦极限。由于$\mathbf{FibCat}$ 中沿纤维化的拉回是同伦极限，**同伦范畴**$_\infty$ 将它们映为$\mathbf{QCat}$ 中作为同伦拉回的拉回（因而在$\mathbf{QCat}_{lex}$中亦然）。类似地，终对象在更高意义下被保持（此处甚至在1-范畴意义下亦然），因此我们可以得出结论。 □

我们现在来推广如下刻画正合函子之间 DK-等价的关键结果：

定理 5.2 (Cisinski)**.** 给定纤维化范畴 $\mathcal{F}_0$ 与 $\mathcal{F}_1$，以及一个正合函子 H：$\mathcal{F}_0 \to \mathcal{F}_1$，下列各项等价：

- H 是一个 *DK*-等价。
- **同伦范畴**(H):**同伦范畴**$(\mathcal{F}_0) \to$ **同伦范畴**$(\mathcal{F}_1)$ 是一个范畴等价。
- H 满足如下两条逼近性质：

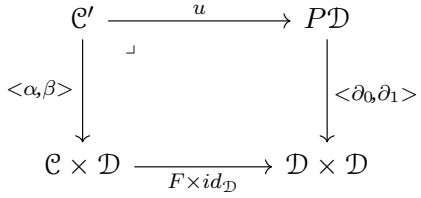
(AP1) H 反映弱等价。*(AP2)* 对任意对象 $x_0 \in \mathcal{F}_0$ 和 $y_1 \in \mathcal{F}_1$，以及任意态射$y_1 \to H(x_0)$（属于 $\mathcal{F}_1$），在 $\mathcal{F}_1$ 中存在一个交换方块，

$$\begin{array}{ccc} y_1 & \longrightarrow & H(x_0) \\ \uparrow & & \uparrow \\ \sim & & H(f) \\ | & & | \\ y_1' & \longrightarrow \sim & H(y_0) \end{array}$$

其中 f： $y_0 \to x_0$ 是 $\mathcal{F}_0$ 中的一个箭头，且所示箭头均为弱等价。

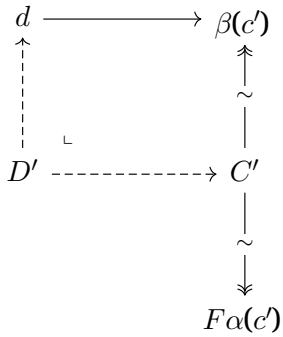
命题 5.3。 设 F： $\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是纤维化范畴之间的弱正合函子。假设 $P\mathcal{D}$ 是 $\mathcal{D}$ 的路径对象。那么，若 F 满足 *Cisinski* 定理 *5.2* 中的逼近性质，则它是一个 *DK*-等价。

证明。 应用引理 1.1，我们得到一个拉回图

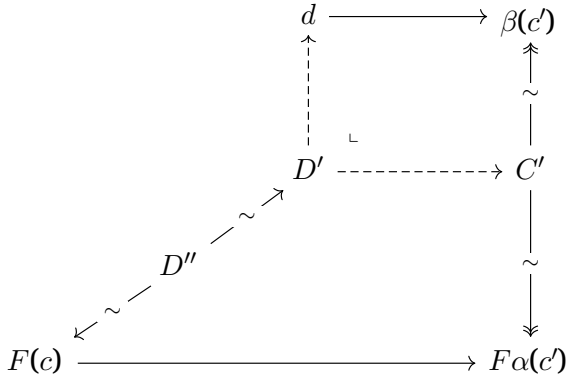


其中 α 和 β 是正合函子。

假设 F 满足逼近性质。根据 $\mathcal{C}'$ 中弱等价的定义，由于 F 满足 (AP1)，β 也满足。对于 (AP2)，考虑 $\mathcal{D}$ 中的态射 $d \to \beta(c')$。我们有如下图表

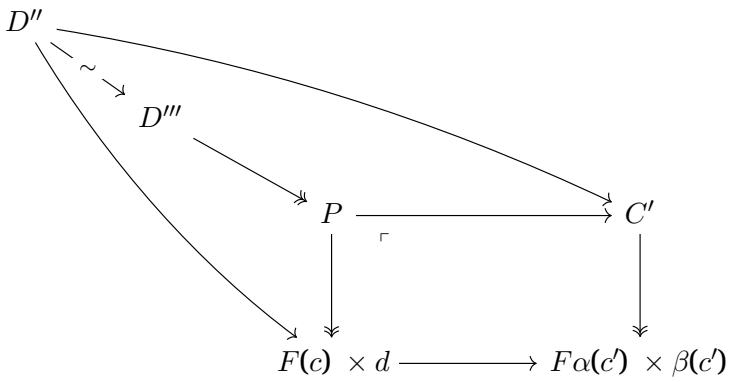


其中我们构造了拉回 D'。由于 F 具有逼近性质 (AP2)，我们可以将前面的图表补全如下：

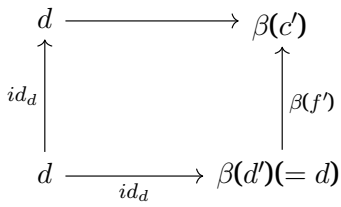


并最终如 fol- 中所示构造弱等价/纤维化分解

下图



其中， $D''' \to F(c) \times d$ 是由平凡纤维化构成的跨度，因为根据构造， $D'' \to F(c) \times d$ 是由弱等价构成的跨度。这定义了 $\mathcal{C}'$ 中的一个对象 d' 和一个映射 $f' : d' \to c'$，并且我们有如下交换图，



证明 β 具有逼近性质。

由于 β 是纤维化范畴之间的正合函子，根据定理 5.2，它因此是一个 DK-等价。利用引理 1.1 的第二个陈述以及 DK-等价的二取三性质，我们得出 F 也是一个 DK-等价。

□

注 5.1. 在命题 5.3 的证明中，我们只需要 β 满足逼近性质；即使 F 不满足该性质，这种情况也可能发生。因此，命题 5.3 的假设可以相应地弱化。

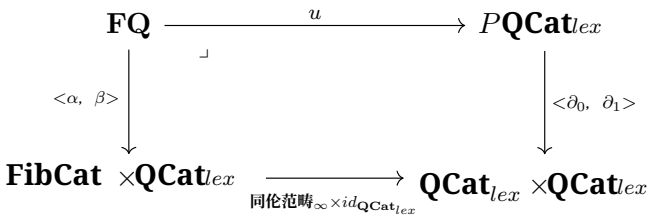
现在我们可以给出 [Szu14, 定理 4.9] 的另一种证明：

定理 5.4。函子

$$\mathbf{Ho}_\infty : \mathbf{FibCat} \to \mathbf{QCat}_{lex}$$

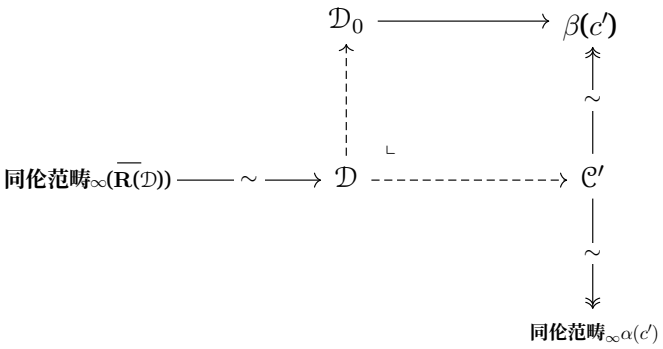
是一个 *DK*-等价。

证明。 由于 $\mathbf{FibCat}$ 和 $\mathbf{QCat}_{lex}$ 都具有纤维化范畴的结构，并且函子 **同伦范畴**$_\infty : \mathbf{FibCat} \to \mathbf{QCat}_{lex}$ 是弱正合的，我们可以利用命题 5.3。实际上，我们将依据注 5.1，检验由以下拉回定义的函子 β 是否具有逼近性质：



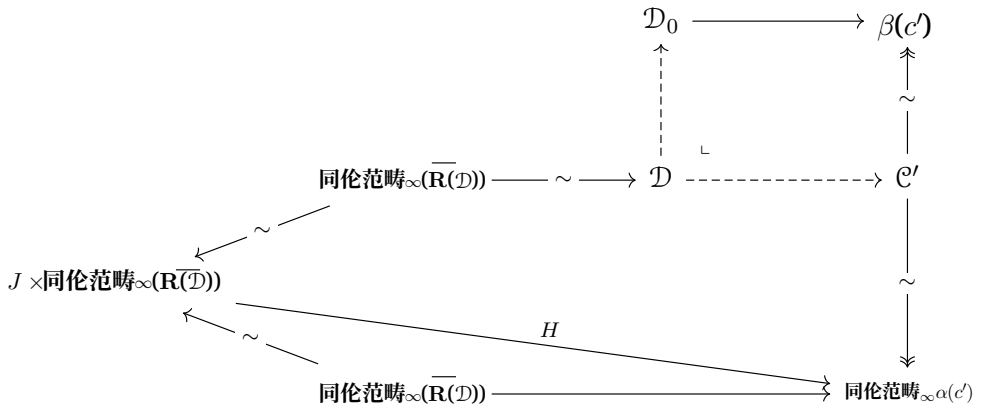
由**同伦范畴**$_\infty$ 反映弱等价可知，β 也反映弱等价：由于**FibCat** 中的弱等价是正合且为 DK-等价的函子，这便归结为 DK-等价的定义。

为检验 (AP2)，考虑 $\mathbf{QCat}_{lex}$ 中的一个 ∞-函子 $\mathcal{D}_0 \to \beta(c')$，其中$c'$是 **FQ** 的一个对象，由一个跨度 $\mathcal{C}' \to$ **同伦范畴**$_\infty\alpha(c') \times \beta(c')$ 构成。按照下图构造拉回 $\mathcal{D}$，并注意到有限完备拟范畴 $\mathcal{D}$ 可由 $\mathfrak{C}(\mathcal{D})$ 上本质可表纤维化单纯预层所成的部落 $\mathcal{D}$ 表示，正如第1章中所论证的（在一个更复杂的情形下）。

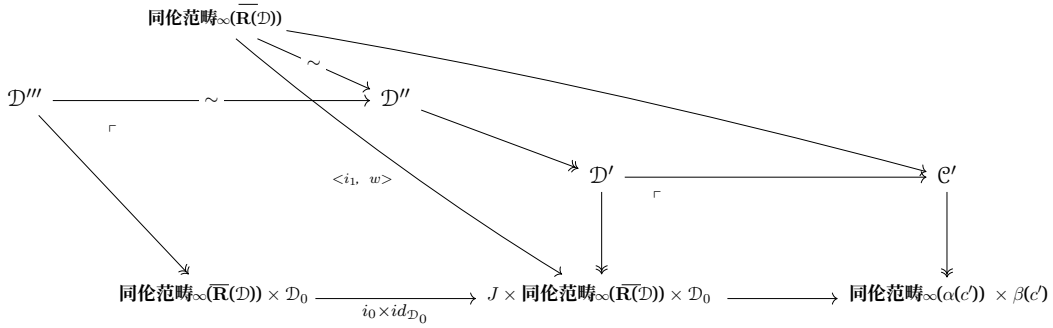


这里，**同伦范畴**$_\infty(\mathbf{R}(\mathcal{D})) \to \mathcal{D}$ 是拟范畴之间的一个固定等价。

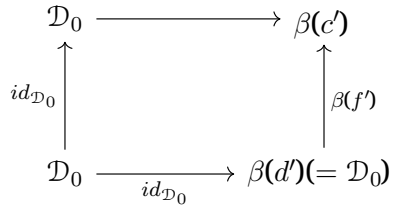
将命题 4.2 应用于相应的 ∞-函子 $F' : \mathrm{Ho}_\infty(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ho}_\infty\alpha(c')$，我们得到一个正合函子 $F_r : \mathrm{R}(\mathcal{C}) \to \alpha(c')$，使得 $\mathrm{Ho}_\infty(F_r)$ 与 F' 同伦（模去固定的等价 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{R}(\mathcal{D})) \simeq \mathcal{D}$）。考虑 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{R}(\mathcal{D}))$ 的柱对象 $J \times \mathrm{Ho}_\infty(\mathrm{R}(\mathcal{D}))$，其中 J 是自由同构范畴的神经；再考虑如下面图表所示，连接前述两个 ∞-函子 $\mathrm{Ho}_\infty(\mathcal{D}) \to \mathrm{Ho}_\infty\alpha(c')$ 的同伦 $\top H$。



现在我们可以构造如下图表:



其中， $\mathcal{D}'$ 通过拉回得到， w 是从**同伦范畴**$_\infty$**(R(**$\mathcal{D}$**))**到 $\mathcal{D}_0$的映射，并且 $\mathcal{D}''$ 通过将 **同伦范畴**$_\infty$**(R(**$\mathcal{D}$**))** $\to \mathcal{D}'$ 分解为先是弱等价、继而是纤维化而得到。根据构造， $\mathcal{D}'' \to J \times$**同伦范畴**$_\infty$**(R(**$\mathcal{D}$**))** $\times \mathcal{D}_0$ 是由平凡纤维化组成的跨度，而且还定义了**FQ**中的一个对象。由于 $\mathcal{D}''' \to \mathcal{D}''$ 是弱等价（作为沿纤维化的弱等价的拉回），跨度 $\mathcal{D}''' \to$ **同伦范畴**$_\infty$**(R(**$\mathcal{D}$**))** $\times \underline{\mathcal{D}_0}$ 也定义了**FQ**中的一个对象 d' 。此外，我们还得到了一个态射 f' : $d' \to c'$ 在**FQ**中，从而为我们提供了一个交换方块



由此证明 (AP2) 成立。

至此，我们完成了证明：**同伦范畴**$_\infty$ **: FibCat** $\to$ **QCat**$_{lex}$ 是一个 DK- 等价。

□

6 向部落的推广

在最后这一节中，我们回顾部落的定义（由[Joy17]引入）。因此，我们的目标是将本文前面以纤维化范畴为背景表述的结果推广到部落的情形。部落的概念确实与纤维化范畴密切相关:

定义 6.1. 部落是配备了一类态射 $\mathbf{F}$（即纤维化）的范畴 $\mathcal{T}$，这些纤维化在复合下稳定，包含任意同构，并且满足:

- $\mathcal{T}$ 具有终对象 $*$，并且对每个对象 x，唯一映射 $x \to *$ 是纤维化。
- $\mathcal{T}$ 沿纤维化具有拉回，并且纤维化的基变换是纤维化。
- 每个态射都可分解为一个无害映射（即对纤维化具有左提升性质的映射），后接一个纤维化。
- 零调映射在沿纤维化的拉回下稳定。

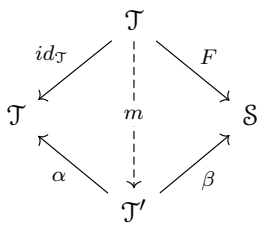
部落之间的函子 $P: \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 若保持相应结构，则称为部落态射：它将纤维化（分别地，无害映射）映为纤维化（分别地，无害映射），并保持终对象以及沿纤维化的拉回。

引理 6.1。 设 $F: \mathcal{T} \to \mathcal{S}$是部落之间的函子。假设 F 将沿纤维化的拉回映为同伦拉回的拉回方块， $F(*_{\mathcal{T}}) \to *_{\mathcal{S}}$ 是弱等价，并且 F保持无害态射。那么，在下述拉回中，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T}' & \xrightarrow{u} & P\mathcal{S} \\ {\scriptstyle <\alpha,\beta>}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle <\partial_0,\partial_1>} \\ \mathcal{T}\times\mathcal{S} & \xrightarrow[F\times id_{\mathcal{S}}]{} & \mathcal{S}\times\mathcal{S} \end{array}$$

在 **Cat** 中计算时， $\mathcal{T}'$ 继承了部落结构，而两个投影 α 和 β 都是部落态射。

此外，如果 $P\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{S}$ 的路径对象，并且有一个映射 $\iota: \mathcal{S} \to P\mathcal{S}$，那么我们有以下纤维化范畴图表



其中 $m\colon\ \mathcal{T} \to \mathcal{T}'$ 是弱等价。

证明。 纤维化的概念定义同引理 1.1，并具有相同的性质。

由于 F 保持零调映射以及沿纤维化的拉回，因此它将弱等价（即 $\mathcal{T}$ 中的同伦等价）映为弱等价。

此外，我们必须验证每个态射 $f\colon x \to y$ 都能分解为一个逐分量零调态射，其中“分量”一词指的是以下映射，

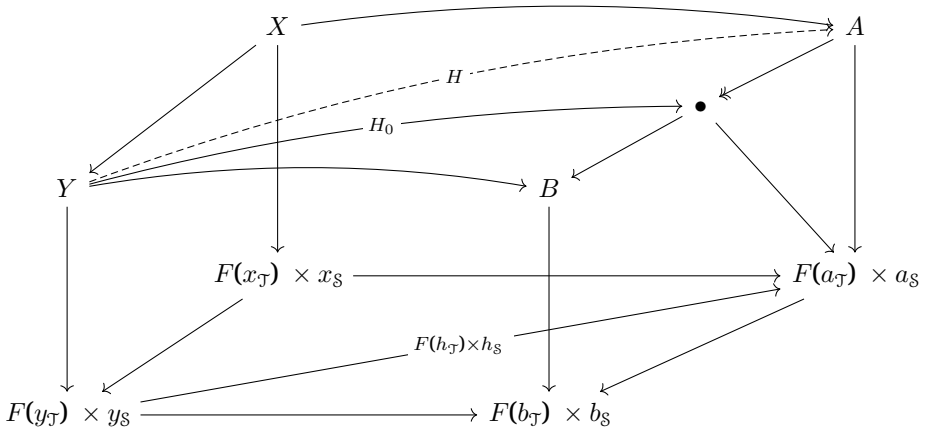
$$\begin{aligned} x_{\mathcal{T}} &\to z_{\mathcal{T}} \to y_{\mathcal{T}} \\ x_{\mathcal{S}} &\to z_{\mathcal{S}} \to y_{\mathcal{S}} \\ X &\to Z \to Y \end{aligned}$$

其后接一个纤维化。为此，我们先在 $\mathcal{S}$ 中将$\alpha(f)$ 和 $\beta(f)$ 分解（分别经过某个对象 $z_{\mathcal{S}}$ 和经过 $z_{\mathcal{T}}$），然后按如下方式扩展该分解：

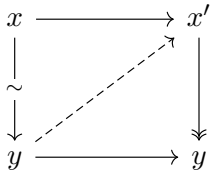
$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim} & Z & \twoheadrightarrow & P_z \\ \downarrow & & & & \downarrow \\ F(x_{\mathcal{T}}) \times x_{\mathcal{S}} & & \longrightarrow & & F(z_{\mathcal{T}}) \times z_{\mathcal{S}} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & & Y \\ & \lrcorner & \downarrow \\ \longrightarrow & & F(y_{\mathcal{T}}) \times y_{\mathcal{S}} \end{array}$$

其中，为了观察到 $Z \to F(z_{\mathcal{T}}) \times z_{\mathcal{S}}$ 确实给出了一个由平凡纤维化构成的跨度，我们关键地依赖于 F 保持弱等价这一事实。

我们声称，所谓的逐分量零调态射恰好就是平凡态射。事实上，若 $f\colon x \to y$ 是一个逐分量零调态射，且 $p\colon a \to b$ 是一个纤维化，我们可以通过以下方式求解 f 关于 p 的提升问题：首先对 $\mathcal{S}$ 和 $\mathcal{T}$ 中的分量进行求解（即取其在 α 和 β 下的像），然后按如下方式将这些提升延拓到 $P\mathcal{S}$ （利用 $X \to Y$ 根据假设是平凡态射）：



反之，一个平凡态射 $f\colon x \to y$ 可以分解为一个逐分量零调态射 $f'\colon x \to x'$，后跟一个纤维化 $x' \to y$，于是我们得到如下提升：



这个提升表明，f 是 f'的一个收缩，因此 f 的各分量都是 f'各分量的收缩，这意味着 f 也是一个逐分量零调态射。

利用引理 1.1 的证明中所讨论的 $\mathfrak{T}'$ 中拉回的构造，再结合 F 保持平凡态射这一事实，我们可知平凡态射沿纤维化作拉回后仍然是平凡态射。由此便完成了 $\mathfrak{T}'$ 是一个部落的证明。根据构造，投影 α 和 β 是 tribe 态射。

其余部分与引理 1.1 的证明相同。

□

6.1 Yoneda 嵌入

在本小节中，我们将部落 $\mathfrak{T}$ 代替纤维化范畴 $\mathcal{C}$，从而具体化第 2 节的结果。

在纤维化范畴的语境中引入的纤维化范畴 $\mathcal{P}(\mathfrak{T})$ 不仅仅是一个纤维化范畴，甚至是一个 (π-)部落：这是因为相应的模型结构是真的，正如[Cis10], 的定理 3.2 所证明的，并且因为余纤维化就是单态射。我们在$\mathbf{R}(\mathcal{C})$ 上也有部落结构。

用引理 6.1 代替引理 1.1，我们可以用同样的记号重述引理 2.4 中关于 Yoneda 嵌入的结果。

引理 6.2（部落的 Yoneda 嵌入）。 $\mathcal{Q}(\mathcal{T})$ 是一个部落，而投影 $\mathcal{Q}(\mathcal{T}) \to \mathcal{T}\times\mathcal{P}(\mathcal{T})$ 是部落之间的态射；对于 $\mathbf{Q}(\mathcal{T})$，结论也类似。

6.2 将平坦 ∞-函子刚性化

最后，我们用部落的语言重述第 4 节的结果。首先有以下命题 4.2 的对应版本。

命题 6.3。 设 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{S}$ 是部落，考虑一个平坦的 ∞-函子 F：**同伦范畴**$_\infty(\mathcal{T}) \to$ **同伦范畴**$_\infty(\mathcal{P}(\mathcal{S}))$。则存在一个同伦函子 $F_r : \mathbf{R}(\mathcal{C}) \to \mathcal{P}(\mathcal{D})$，使得 **同伦范畴**$_\infty(F_r)$ 与 F 作为 ∞-函子同伦。此外，F_r 保持有限极限和有限同伦极限，并将无害态射映为无害态射。

证明。 其构造与纤维化范畴的情形完全相同。为了推出 F_r 的附加性质，只需注意到 $\mathcal{P}(\mathcal{D})$ 中的无害态射恰好是（纤维对象之间的）平凡余纤维化，也就是说，同时为单态射和弱等价的态射。我们已经知道，F_r 保持弱等价；由于它保持有限极限，因此也保持单态射。

□

我们现在考虑如下图表

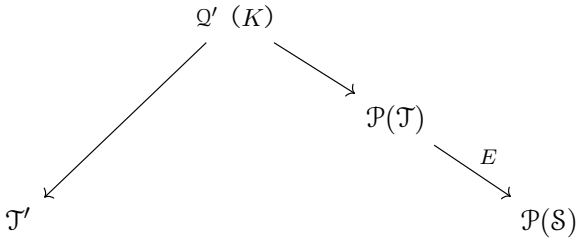
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \xrightarrow{\quad F \quad} & \mathcal{P}(\mathcal{S}) \\ {\scriptstyle K}\downarrow & & \\ \mathcal{T}' & & \end{array}$$

其中 $\mathcal{T}$、$\mathcal{T}'$ 和 $\mathcal{S}$ 都是部落。仿照第 4.3 节中的论证，但改用引理 6.2 和命题 6.3，而非纤维化范畴中对应的原始结果，我们便可用部落的术语重新表述命题 4.4，同时沿用其中引入的记号。

命题 6.4。 函子 E 是部落态射，且**同伦范畴**$_\infty(E\circ n_K)$ 是**同伦范畴**$_\infty(F)$ 沿**同伦范畴**$_\infty(K)$的左 *Kan* 延拓：

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{T}) & \xrightarrow{\mathbf{Ho}_\infty(F)} & \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{P}(\mathcal{S})) \\ {\scriptstyle \mathbf{Ho}_\infty(K)}\downarrow & \Downarrow & \nearrow {\scriptstyle \mathbf{Ho}_\infty(E\circ n_K)} \\ \mathbf{Ho}_\infty(\mathcal{T}') & & \end{array}$$

备注 6.1。 因此，F 沿 K 的同伦左 Kan 延拓可由以下部落态射跨度表示：


$\mathcal{Q}'\ (K)$
$\mathcal{P}(\mathcal{T})$
E
$\mathcal{T}'$
$\mathcal{P}(\mathcal{S})$

参考文献

[Bar74] Michael Barr. “右正合函子”。载于：《纯粹与应用代数期刊》4.1（1974），第 1–8 页。[BK11] Clark Barwick 和 Daniël M Kan。“拟范畴与相对范畴之间的 Thomason 型 Quillen 等价”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1101.0772 （ 2011 ）。[BK12] Clark Barwick 和 Daniel M Kan。“相对范畴：同伦论的另一种模型”。载于：Indagationes Mathematicae 23.1-2（2012），第 42–68 页。[Bor94] Francis Borceux。《范畴代数手册：基础范畴论》。第 1 卷。剑桥大学出版社，1994。[Cis10] Denis-Charles Cisinski。“导出等价下 K-理论的不变性”。载于：K-理论期刊 6.3（2010），第 505–546 页。[DK80] William G Dwyer 和 Daniel M Kan。“范畴的单纯形局部化”。载于：纯粹与应用代数期刊 17.3（1980），第 267–284 页。[DK87] William Dwyer 和 Dan Kan。“图表同伦论之间的等价”。载于：《代数拓扑与代数 K-理论》，《数学年刊研究》113（1987），第 180–205 页。[Dwy04] William G Dwyer。《模型范畴和同伦性范畴上的同伦极限函子》。113。美国数学学会，2004。[Joy17] André Joyal。“关于族与部落的札记”。载于：arXiv 预印本 arXiv:1710.10238（2017）。[JT07] André Joyal 和 Myles Tierney。“拟范畴与 Segal 空间之比较”。载于：《当代数学》431.277-326（2007），第 10 页。[KS19] Krzysztof Kapulkin 和 Karol Szumiło。“有限完备（∞, 1）-范畴的内语言”。载于：《数学精选》25.2（2019），第 1–46 页。[LP06] Stephen Lack 和 Simona Paoli。“双范畴的 2-脉络”。载于：arXiv 预印本 math/0607271（2006）。[Lur09] Jacob Lurie。《高阶拓扑斯理论（am-170）》。普林斯顿大学出版社，2009。[Lur18] Jacob Lurie。Kerodon。https://kerodon.net。2018。[Mei16] Lennart Meier。“纤维化范畴是纤维的相对范畴”。载于：《代数与几何拓扑》16.6（2016），第 3271

3300.

[MM12] 桑德斯·麦克莱恩和伊克·莫尔代克。几何与逻辑中的层：托扑斯理论初探。施普林格科学与商业媒体，2012。[Pav25] 德米特里·帕夫洛夫。“组合模型范畴等价于可呈拟范畴”。载于：纯粹与应用代数期刊 229.2（2025），第107860页。[Pow89] A·约翰·鲍尔。“一个一般性的相干性结果”。载于：纯粹与应用代数期刊 57.2（1989），第165–173页。[Rad06] 安德烈·拉杜列斯库-巴努。“同伦论中的余纤维化”。载于：*arXiv*预印本 *math/0610009*（2006）。[Ros09] 伊日·罗西茨基`。“关于组合模型范畴”。载于：应用范畴结构 17（2009），第303–316页。[RV13] 艾米莉·里尔和多米尼克·维里蒂。“Reedy 范畴的理论与实践”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:1304.6871*（2013）。[Shu19] 迈克尔·舒尔曼。“所有 $(\infty,1)$-托扑斯都具有严格的单值宇宙”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:1904.07004*（2019）。[Szu14] Karol Szumiło。“余完备同伦理论的两种同伦论模型”。载于：*arXiv*预印本 *arXiv:1411.0303*（2014）。