arXiv:2602.17416v1 [math.AP] 19 Feb 2026

最低磁 Steklov 特征值的等周不等式

Ayman Kachmar 和 Vladimir Lotoreichik

摘要。本文研究平面域上磁 Steklov 问题的最低特征值优化。在有界区域情形下，对于强度适中的磁场，我们证明，在所有面积相同的单连通光滑区域中，圆盘使最低磁 Steklov 特征值达到最大。对于外部区域，在固定周长约束以及额外的几何和对称性假设下，我们针对强度适中的磁场建立了类似的等周不等式。证明中，有界区域情形采用扭转型试探函数方法，外部区域情形则采用仅依赖于到边界距离的试探函数方法。

1. 引言

Steklov 特征值问题的谱参数出现在边界条件中，这一问题已在谱几何领域得到广泛研究（参见综述论文 [16] 以及 [32, 第 7]章）。近年来，其磁性对应问题——即以磁拉普拉斯算子取代拉普拉斯算子——引起了广泛关注（参见 [9, 13, 18, 19, 20]）。

对于有界区域，在几何约束下优化谱量是一个经典课题。著名的 Faber–Krahn 不等式指出，在体积固定的区域中，球使第一 Dirichlet 拉普拉斯特征值达到最小值。对于无磁场时的第一非平凡 Steklov 特征值，也已建立类似的等周不等式 [5, 6, 38]。然而，在磁场情形下，几何与磁势之间的相互作用带来了新的挑战。对于平面区域上均匀磁场中的磁 Dirichlet 拉普拉斯算子的最低特征值，已有研究证明了类似的 Faber–Krahn 不等式 [14]。近期研究，如 [10, 11] 和 [23, 24]，发展了处理磁谱问题中形状优化的技术，涵盖 Neumann 和 Robin 边界条件，其中包括扭转型试探函数技术。

外部区域中的谱等周不等式最早在 [28, 29, 30] 和 [7] 中针对 Robin 拉普拉斯算子进行了研究。近期的研究则涉及外部区域中的磁 Neumann 特征值问题 [25]，以及（非磁）Steklov 问题 [8]。在磁场情形下，近期研究 [18, 20]，主要在关于磁场强度的谱渐近背景下考察了外部区域上的 Steklov 问题。

与非磁情形不同，磁场的存在使最低 Steklov 特征值为非零，并依赖于区域的形状。Aharonov–Bohm 磁场情形下最低磁 Steklov 特征值的优化问题已在 [10] 中讨论。本文在两种几何设定下，针对均匀磁场建立了最低磁 Steklov 特征值的等周不等式，表明

2020 数学学科分类。 35P15, 49R05, 51M16。关键词和短语。等周不等式，扭转函数，外平行曲线，Dirichlet-to-Neumann 算子，谱形状优化，磁 Steklov 问题。

在中等强度磁场下，无论在有界设定还是外部设定中，圆盘都是使最低磁 Steklov 特征值最大化的最优形状。

首先，对于面积给定的平面有界光滑单连通区域，我们证明，只要磁场强度低于某个阈值（该阈值可确保圆盘具有径向基态），圆盘就能使特征值达到最大。该结果表述为定理 2.10。它以定量等周不等式的形式呈现，并由此推出：在所有周长固定的区域中，圆盘也能使特征值达到最大。该结果采用扭转型试探函数技术证明，也就是说，所用试探函数在扭转函数的等值线上为常数。证明中，我们借鉴了 [11] 以及 [24] 中为优化磁 Neumann 拉普拉斯算子的最低特征值而提出的一些思路。

其次，对于外部区域（即平面有界光滑单连通区域的补集），我们证明，在周长给定且满足某些对称性和几何条件（例如中心对称，以及外平行曲线的连通性条件）的区域中，圆盘的外部区域能使最低磁 Steklov 特征值达到最大。当磁场强度低于另一个临界常数时，这一结论成立；该常数可确保圆盘外部区域具有径向实值基态。有界凸区域的外部区域自动满足关于外平行曲线的假设。该结果表述为定理 3.6。证明中，我们使用仅取决于到边界距离的试探函数。这项技术最早由 [35]提出，后来被许多论文采用；例如，见 例如 [1, 15] ，其中讨论了具有负边界参数的 Robin 拉普拉斯算子；另见 [23]，其中讨论了磁 Robin 拉普拉斯算子。

本文结构安排如下。第2 节讨论有界区域：在介绍磁 Steklov 特征值并分析圆盘的情形后，我们将阐述扭转型试探函数的方法，并证明固定面积下的等周不等式。第3节专门讨论外部区域，在固定周长和对称性假设下建立相应的不等式。此外，为完整起见，我们还在附录中讨论基态的存在性以及最低磁 Dirichlet-to-Neumann 特征值的变分刻画。

2. 有界区域

本节旨在研究有界平面区域上最低磁 Steklov 特征值的优化问题。一个核心工具是扭转型试探函数的方法，它将问题归结为一个辅助的一维谱问题。本文详细分析了该辅助问题在几何权函数扰动下的变化，表明相关泛函关于权函数具有单调性。

2.1. 最低磁 Steklov 特征值。 在本小节中，我们将通过变分刻画介绍有界平面区域上的最低磁 Steklov 特征值。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个边界为 C^∞-光滑的有界单连通域 $\partial\Omega$。我们用 $|\Omega|$表示 Ω 的面积，用 $|\partial\Omega|$表示 $\partial\Omega$ 的周长。用 ν 表示区域 Ω 边界的外单位法向量。我们将分别用记号 $L^2(\Omega)$ 和 $L^2(\partial\Omega)$ 表示 Ω 上及其边界 $\partial\Omega$上的勒贝格空间。Ω 上基于 L^2的一阶索об列夫空间记为 $H^1(\Omega)$。 $C_0^\infty(\Omega)$ 在$H^1(\Omega)$ 中的闭包简记为 $H_0^1(\Omega)$。最后，我们有时用记号 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 表示 $\partial\Omega$ 上阶数为$_{1\ 2}$ 的分数阶索об列夫空间，并用记号 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 表示其对偶空间。

–

考虑矢势$\mathbf{A}$：$\Omega \to \mathbb{R}^2$ 满足

$$\operatorname{curl} \mathbf{A} = 1.$$

我们将具体选取$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\Omega$，这将有助于我们的分析。令 ψ 为系统的唯一解

$$\begin{cases} -\Delta\psi = 1, & \text{in } \Omega, \\ \psi = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

属于索об列夫空间 $H_0^1(\Omega)$，并令

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}_\Omega := (\partial_2\psi, -\partial_1\psi).$$

给定 $b > 0$，我们引入最低磁 Steklov 特征值，

$$\lambda(b,\Omega) := \inf_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ u|_{\partial\Omega}\neq 0}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}}{\|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}, \tag{2.2}$$

其中 $u|_{\partial\Omega}$ 表示 u在 $\partial\Omega$上的迹。

注 2.1. 数值 $\lambda(b,\Omega)$ 可视为 Ω 上磁狄利克雷到诺伊曼映射的 最低特征值。下面给出该算子的定义。回顾一下，根据 [2,引理 2.2 和 2.4、定义 2.3], ，泊松算子 S_b: $H^{1/2}(\partial\Omega) \to H^1(\Omega)$ 由以下性质定义

$$(\mathsf{S}_b\varphi)|_{\partial\Omega} = \varphi, \qquad (-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})^2\mathsf{S}_b\varphi = 0, \qquad \text{for all } \varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega),$$

是连续的，并将 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 双射到解空间

$$\mathcal{N}_b := \{u \in H^1(\Omega) \colon (-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})^2 u = 0\}. \tag{2.3}$$

根据 [13, 例 2.1 和 2.2], 二次型

$$\mathfrak{l}_b[\varphi] := \|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})\mathsf{S}_b\varphi\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}, \qquad \operatorname{dom}\mathfrak{l}_b := H^{1/2}(\partial\Omega), \tag{2.4}$$

在 $L^2(\partial\Omega)$ 中是闭的、非负的且稠定。因此，根据第一表示定理，二次型 $\mathfrak{l}_b$ 在希尔伯特空间 $L^2(\partial\Omega)$ 中定义了唯一的自伴算子，我们记为 Λ_b。算子 Λ_b 称为磁狄利克雷-诺伊曼映射。通过分部积分，我们得出该算子可由下式刻画：

$$\Lambda_b\varphi = \partial_\nu \mathsf{S}_b\varphi|_{\partial\Omega},$$
$$\operatorname{dom}\Lambda_b = \{\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega) \colon \partial_\nu \mathsf{S}_b\varphi|_{\partial\Omega} \in L^2(\partial\Omega)\},$$

其中我们隐含地使用了以下事实：根据 [3, 第 3] 对于任意 $u \in \mathcal{N}_b$ 诺伊曼迹 $\partial_\nu u|_{\partial\Omega} = \nu \cdot \nabla u|_{\partial\Omega} \in H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 是良定义的。由于 $H^{1/2}(\partial\Omega)$嵌入到 $L^2(\partial\Omega)$的嵌入具有紧性， Λ_b 的谱是纯离散的。根据命题 B.1，数值 $\lambda(b,\Omega)$ 是自伴算子的最低特征值 Λ_b。

设 $u_\star \in H^1(\Omega)$ 且 $u_\star|_{\partial\Omega} \neq 0$ 是使（2.2）中的下确界取到的函数。那么 $u_\star|_{\partial\Omega}$ 是定义在Ω上的磁狄利克雷-诺伊曼映射的基态。稍微滥用一下术语，我们也称函数 $u_\star$ 为基态。可以验证，该函数满足系统

$$\begin{cases} \left(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A}\right)^2 u_\star = 0, & \text{in } \Omega, \\ \partial_\nu u_\star = \lambda(b,\Omega)u_\star, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.5}$$

其中，诺伊曼迹 $\partial_\nu u_\star$ 是相对于 Ω 的外单位法向量定义的，并且作为分布存在于 $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ 中（见附录A.1）。

2.2. **圆盘的情形**。本小节将证明，对于适度的磁场，圆盘的基态是一个径向函数。为此，我们将采用变量分离法。设 $\mathcal{B}$ 为一个以原点为中心的圆盘。记 R 为 $\mathcal{B}$的半径，则有 $R = \sqrt{|\mathcal{B}|/\pi}$。

命题 2.2. 设 $\mathcal{B} \subset \mathbb{R}^2$ 为半径 $R > 0$的圆盘。若 $b|\mathcal{B}| < \pi$，则式 (2.2) 中关于 $\Omega = \mathcal{B}$ 的下确界由径向函数取得

$$u_\star(x) = f_\star(|x|),$$

其中 $f_\star \in C^\infty([0,R])$ 满足以下系统

$$\begin{cases} -f_\star''(r) - \frac{1}{r} f_\star'(r) + \frac{b^2 r^2}{4} f_\star(r) = 0 & for\ 0 < r < R, \\ f_\star'(R) = \lambda(b,\mathcal{B}) f_\star(R). \end{cases} \tag{2.6}$$

特别地，成立（对某个 $A \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$）

$$f_\star(r) = A I_0\left(\frac{br^2}{4}\right), \qquad \lambda(b,\mathcal{B}) = \frac{bR}{2} \frac{I_1\left(\frac{bR^2}{4}\right)}{I_0\left(\frac{bR^2}{4}\right)}.$$

证明。利用圆盘上扭转函数 $\psi(x) = \frac{R^2 - |x|^2}{4}$ 的显式表达式，可得均匀磁场的矢势具有如下形式 $\mathbf{A}(x) = \frac{b}{2}(-x_2,\ x_1)^\top$。

任意函数 $u \in H^1(\mathcal{B})$ 均可唯一分解为级数

$$u(r,\theta) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_n(r) e^{in\theta}, \tag{2.7}$$

其中，可测函数 $f_n\colon (0,\ R) \to \mathbb{C}$ 对于 $n \in \mathbb{Z}$ 满足以下条件

(a) $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^R |f_n(r)|^2 r\,\mathrm{d}r < \infty$; (b)

$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_0^R \left(|f_n'(r)|^2 + \frac{n^2}{r^2}|f_n(r)|^2\right) r\,\mathrm{d}r < \infty$.

此外，对于任意可测函数 $f_n\colon (0,R) \to \mathbb{C}, n \in \mathbb{Z}$，满足上述条件 (a) 和 (b)，级数 (2.7) 收敛到索об列夫空间 $H^1(\mathcal{B})$中的一个函数。将表示为级数 (2.7) 的函数 u代入 (2.2) 中的瑞利商，最终得到

$$\begin{aligned} \lambda(b,\mathcal{B}) &= \inf_{\substack{u\in H^1(\mathcal{B}) \\ u|_{\partial\mathcal{B}} \neq 0}} \frac{\|(-i\nabla - b\mathbf{A})u\|^2_{L^2(\mathcal{B};\mathbb{C}^2)}}{\|u|_{\partial\mathcal{B}}\|^2_{L^2(\partial\mathcal{B})}} \\ &= \inf_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{\substack{f\colon f,f',nr^{-1}f \in L^2((0,R);r\,\mathrm{d}r) \\ f(R)\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^R \left(|f'(r)|^2 + \left(\frac{n}{r} - \frac{br}{2}\right)^2 |f(r)|^2\right) r\,\mathrm{d}r}{R|f(R)|^2}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

其中，$L^2((0,R); r\,\mathrm{d}r)$ 表示 $(0,R)$ 上带线性权的加权 L^2-空间。考虑区间 $(0,R)$ 上的标量势，

$$v_n(r) = \left(\frac{n}{r} - \frac{br}{2}\right)^2, \qquad n \in \mathbb{Z}.$$

在假设 $b|\mathcal{B}| < \pi$（这等价于 $bR^2 < 1$）下，不等式 $v_0 < v_n$ 对所有 $n \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$均逐点成立。因此，我们得到上述刻画中的外层下确界在 $n = 0$处取得。令 $f_\star \in H^1((0,R);\, r\,\mathrm{d}r)$ 为内层下确界对应的极小化函数，其定义于 $n = 0$，并且该函数存在且满足系统（2.6）；参见

附录 A.2。于是，我们得到（2.2）中关于 $\Omega = \mathcal{B}$ 的下确界由径向函数 $u_\star(x) = f_\star(|x|)$取得。

系统中的微分方程2.6) 的通解形式为

$$f(r) = AI_0\left(\frac{br^2}{4}\right) + BK_0\left(\frac{br^2}{4}\right), \qquad A, B \in \mathbb{C}.$$

考虑到 $f_\star \in H^1((0,R); r\,\mathrm{d}r)$ 我们得到 $B = 0$ 根据修正贝塞尔函数的性质 K_0 （见 [34, 10.29.3 和 10.30.2]）。因此，我们得出$f_\star(r)$ 并由此直接得到

$$\lambda(b,\mathcal{B}) = \frac{f_\star'(R)}{f_\star(R)} = \frac{bR}{2}\frac{I_1\left(\frac{bR^2}{4}\right)}{I_0\left(\frac{bR^2}{4}\right)},$$

其中用到了 [34, 10.29.3]。 □

条件 $b|\mathcal{B}| < \pi$ 仅是圆盘的基态为径向对称的充分条件。

定义 2.3。 我们定义常数

$$b_\star = \sup\{b > 0 \colon \lambda(b', \mathcal{B}_1) \textit{ has a radial ground state for all } b' \in (0,b)\},$$

其中 $\mathcal{B}_1 \subset \mathbb{R}^2$ 表示单位半径的圆盘。

鉴于命题 2.2，这个定义是合理的，并且我们有 $b_\star \geq 1$。

注 2.4. 利用酉缩放变换 U: $L^2(\mathcal{B}_1) \to L^2(\mathcal{B}_R)$，其定义为 $(\mathrm{U}u)(x) := \frac{1}{R}u(\frac{x}{R})$，可知，对于半径为 $R > 0$ 的一般圆盘 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_R \subset \mathbb{R}^2$，最低磁 Steklov 特征值 $\lambda(b,\mathcal{B})$ 在 $b|\mathcal{B}| < \pi b_\star$ 时具有径向基态。在我们的分析中，我们并未排除当 b 取较大值时， $\lambda(b,\mathcal{B})$ 的基态再次变为径向的可能性，尽管 [19,图 1] 中的数值结果表明并非如此。

2.3. **扭转型试探函数方法。** 在本小节中，我们将扭转型试探函数方法应用于磁 Steklov 问题。这一技术由 [24] 和 [11]同时独立提出。我们遵循 [11],中的方法，并将其调整用于 Steklov 问题。

我们引入一个辅助一维 Steklov 型谱问题，其最低特征值为一般区域上的最低磁 Steklov 特征值提供上界。这个上界是证明中等磁场下磁 Steklov 问题的等周不等式的关键要素。

回顾一下， ψ 表示区域 Ω 的扭转函数，它是系统 (2.1) 的唯一解。为简洁起见，这里不标明 ψ 对区域 Ω 的依赖关系。由于区域 Ω 的边界是 C^∞-光滑的，标准椭圆正则性可得 $\psi \in C^\infty(\Omega)$。此外，由强极大值原理可知， $\psi > 0$ 在 Ω 内成立。文献 [11] 还指出， ψ 在 Ω 内是实解析的，因此由将命题 1] 应用于 $|\nabla\psi|^2$ 所得的 [33, 可知，其临界点集合 $\{x \in \Omega \colon \nabla\psi(x) = 0\}$ 的勒贝格测度为零。

令 $t_\star := \max_{\overline{\Omega}}\psi$，对于所有 $t \in [0, t_\star]$，我们引入水平集和超水平集

$$\Gamma_t := \{x \in \overline{\Omega} \colon \psi(x) = t\}, \qquad \Omega_t := \{x \in \Omega \colon \psi(x) > t\}.$$

根据萨德定理 [31, 定理6.10] 以及隐函数定理 [27, 定理3.3.1]，曲线 Γ_t 对几乎所有 $t \in [0, t_\star]$ 都是 C^∞-光滑的。我们引入分布函数

关于 ψ 的，
由

$$\mu(t) := |\Omega_t|,$$

它是右连续且严格递减的。根据 [11, 推论 2。2]函数

$$\gamma_\Omega \colon [0, t_\star] \to [0, \infty], \qquad \gamma_\Omega(t) := \int_{\Gamma_t} \frac{1}{|\nabla\psi(x)|}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x)$$

几乎处处有定义，且属于空间 $L^1(0,\ t_\star)$; 此处 $\mathcal{H}^1$ 表示一维豪斯多夫测度。我们引入参数

$$a^\star = \mu(0) = |\Omega|$$

对于给定的 $a \in [0, a^\star]$，我们定义数值

$$G_\Omega(a) = \int_{\Gamma_t} \frac{1}{|\nabla\psi(x)|}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) \quad \text{where } a = \mu(t),\ t \in [0, t_\star].$$

特别地，在端点 $a = a^\star$,

$$G_\Omega(a^\star) = \int_{\partial\Omega} \frac{1}{|\nabla\psi(x)|}\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x).$$

引理 2.5 ([11, 命题 2。7])。 对于几乎所有的 $a \in [0, a^\star]$，不等式 $G_\Omega(a) \geq 4\pi$成立。等式 $G_\Omega(a) = 4\pi$ 对于几乎所有的 a 成立，当且仅当 Ω 是一个圆盘。

为了陈述下一个命题，我们引入函数空间

$$\mathcal{F}_\Omega := \{f \in L^2(0, a^\star) \colon f' \in L^2((0, a^\star); aG_\Omega(a)\, \mathrm{d}a)\}. \tag{2.9}$$

我们有如下命题，它是针对磁 Steklov 问题对命题 [11, Proposition2.11] 的一个变体。

命题 2.6。对于任意 $b > 0$，有

$$\lambda(b, \Omega) \leq \frac{1}{|\partial\Omega|}\kappa_1(b, G_\Omega),$$

其中

$$\kappa_1(b, G_\Omega) = \inf_{\substack{f \in \mathcal{F}_\Omega \\ f(a^\star) \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^{a^\star} \Big(aG_\Omega(a)|f'(a)|^2 + \frac{b^2 a}{G_\Omega(a)}|f(a)|^2\Big)\, \mathrm{d}a}{|f(a^\star)|^2}. \tag{2.10}$$

证明。 对于任意满足 $f(a^\star) \neq 0$ 的 $f \in \mathcal{F}_\Omega$，我们定义函数

$$u(x) = f(\mu(\psi(x))),$$

其中，如前所述， ψ 是扭转函数，而 μ 是其分布函数。根据 [11, 推论 2。10]，有 $u \in H^1(\Omega)$ 此外 $u|_{\partial\Omega} \neq 0$。因此，我们可以将函数 u 用作（2.2）中的试探函数。根据 [11, 式 (27)]，可得

$$\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)} = \int_0^{a^\star} \Big(aG_\Omega(a)|f'(a)|^2 + \frac{b^2 a}{G_\Omega(a)}|f(a)|^2\Big)\, \mathrm{d}a.$$

此外，通过直接计算可得

$$\|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\{\psi(x)=0\}} |u(x)|^2\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) = \int_{\partial\Omega} |f(a^\star)|^2\, \mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) = |f(a^\star)|^2|\partial\Omega|,$$

由此即可得到所需的界。 □

注 2.7. 对于圆盘，命题 2.2、2.6、定义 2.3 和注 2.4 可得

$$\kappa_1(b, 4\pi) = |\partial\mathcal{B}|\lambda(b, \mathcal{B}), \qquad \text{for } 0 < b < \frac{\pi b_\star}{|\mathcal{B}|}.$$

2.4. 辅助问题。 考虑定义在 $[0,a^\star]$ 上的两个可测有界实值函数 G_0和 G_1，它们逐点满足

$$4\pi \le G_0(a) < G_1(a) \quad \text{a.e.}$$

Put

$$\delta G = G_1 - G_0, \quad G_z = (1-z)G_0 + zG_1, \quad \kappa(z) = \kappa_1(b, G_z) \quad (0 \le z \le 1),$$

here κ_1（b， G_z）按（2.10）定义，其中将 G_Ω 替换为 G_z。引入空间 [1]

$$\mathcal{F} := \{f \in L^2(0,a^\star) \colon f' \in L^2((0,a^\star); a\,\mathrm{d}a)\}. \tag{2.11}$$

本小节旨在研究以下量

$$\kappa(z) := \inf_{\substack{f\in\mathcal{F}\\ f(a^\star)\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^{a^\star} \left(aG_z(a)|f'(a)|^2 + \frac{b^2 a}{G_z(a)}|f(a)|^2 \right) \mathrm{d}a}{|f(a^\star)|^2} \tag{2.12}$$

及其对参数 z 的依赖关系。

命题 2.8。 对每个 $z \in [0,1]$，都有

$$\kappa'(z) = \int_0^{a^\star} \Big(|Y_z(a)|^2 - b^2 a^2 |X_z(a)|^2 \Big) \frac{\delta G(a)}{a|G_z(a)|^2}\,\mathrm{d}a,$$

其中

$$Y_z(a) = aG_z(a)f_z'(a), \qquad X_z(a) = f_z(a),$$

且 $f_z \in \mathcal{F}$满足 $(aG_z f_z')' \in L^2(0, a^\star)$ 的唯一解为以下系统

$$\begin{cases} -(aG_z f_z')' + \frac{b^2 a}{G_z} f_z = 0, & on\ [0,a^\star], \\ \lim_{a\to 0} aG_z(a)f_z'(a) = 0, \\ a^\star G_z(a^\star) f_z'(a^\star) = \kappa(z) f_z(a^\star), \\ f_z(a^\star) = 1. \end{cases} \tag{2.13}$$

此外， f_z在$(0, a^\star]$上局部绝对连续，并且对所有 $a \in (0, a^\star)$， $f_z(a) \neq 0$。

证明。 考虑以下一族闭、稠定、对称且半有界的二次型

$$\mathfrak{h}_{z,\kappa}[f] := \int_0^{a^\star} \left(aG_z(a)|f'(a)|^2 + \frac{b^2 a}{G_z(a)}|f(a)|^2 \right) \mathrm{d}a - \kappa |f(a^\star)|^2, \qquad \operatorname{dom}\mathfrak{h}_{z,\kappa} := \mathcal{F},$$

在希尔伯特空间 $L^2(0,a^\star)$中；其中 $\kappa \in \mathbb{R}$ 是罗宾参数。二次型的闭性$\mathfrak{h}_{z,\kappa}$ 源于以下事实：与二次型 $\mathfrak{h}_{z,\kappa}$ 相关联的范数很容易证明等价于空间的自然范数 $\mathcal{F}$， 该范数在 [11, 引理 C.1]中指定。根据第一表示定理 [26, §VI.2，第 2 定理1]，存在唯一的自伴算子 $\mathrm{H}_{z,\kappa}$ 作用于希尔伯特空间 $L^2(0,a^\star)$，并与二次型 $\mathfrak{h}_{z,\kappa}$ 相关联。该算子可视为与微分表达式相关联的自伴施图姆-刘维尔算子

$$-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a}\left(aG_z \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}a} \right) + \frac{b^2 a}{G_z}$$

作用于希尔伯特空间 $L^2(0,\ a^\star)$，并在端点$a = a_\star$ 满足罗宾边界条件、在端点 $a = 0$满足诺伊曼型边界条件。更准确地说，

[1]注意 t 使得 $4\pi \le G_0 \le G_z \le G_1$ 几乎处处成立，并且由于 G_z有界，空间 $\mathcal{F}$ 与其中的空间重合 (2.9)，其中 G_Ω 替换为 G_z。

将 [11, 附录 C] 中的分析方法应用于我们的情形，可推知 $\mathsf{H}_{z,\kappa}$ 的作用及其区域可表征为

$$
\begin{aligned}
\mathsf{H}_{z,\kappa} f &:= -(aG_z f')' + \frac{b^2 a}{G_z} f, \\
\operatorname{dom} \mathsf{H}_{z,\kappa} &:= \Big\{ f \in \mathcal{F} \colon f, aG_z f' \in \mathrm{AC}(0,a^\star), (aG_z f')' \in L^2(0,a^\star), \\
&\qquad\qquad a^\star G_z(a^\star) f'(a^\star) = \kappa f(a^\star), \lim_{a\to 0^+} aG_z(a) f'(a) = 0 \Big\}.
\end{aligned} \tag{2.14}
$$

由于根据 [11, 引理 C.1], ，空间 $\mathcal{F}$ 紧致嵌入于 $L^2(0,\ a^\star)$，因此算子 $\mathsf{H}_{z,\ \kappa}$ 具有纯离散谱，其最低特征值满足以下变分刻画

$$
\mu(z,\kappa) := \inf_{f\in\mathcal{F}\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_0^{a^\star} \left(aG_z(a)|f'(a)|^2 + \frac{b^2 a}{G_z(a)} |f(a)|^2 \right) \mathrm{d}a - \kappa |f(a^\star)|^2}{\displaystyle\int_0^{a^\star} |f(a)|^2 \,\mathrm{d}a}. \tag{2.15}
$$

显然，$\mathsf{H}_{z,\ \kappa}$ 的最低特征值是单的；我们也将 $f_{z,\ \kappa} \in \mathcal{F}$ 记为对应于其最低特征值的、经 L^2 归一化的非负特征函数。显然，函数 $f_{z,\ \kappa}$ 满足 $f_{z,\ \kappa}$，$(aG_z f'_{z,\ \kappa})' \in L^2(0,\ a^\star)$，并且是以下系统的解

$$
\begin{cases}
-(aG_z f'_{z,\kappa})' + \frac{b^2 a}{G_z} f_{z,\kappa} = \mu(z,\kappa) f_{z,\kappa}, & \text{in } (0,a^\star), \\
\lim_{a\to 0} aG_z(a) f'_{z,\kappa}(a) = 0, \\
a^\star G_z(a^\star) f'_{z,\kappa}(a^\star) = \kappa f_{z,\kappa}(a^\star).
\end{cases} \tag{2.16}
$$

特别地，我们推知 $f_{z,\ \kappa}(a^\star) \neq 0$，否则，由 $f_{z,\ \kappa}$所满足的常微分方程的唯一延拓性质可知，必有 $f_{z,\ \kappa} \equiv 0$。由于希尔伯特空间 $L^2(0,\ a^\star)$ 中的二次型族 $\mathfrak{h}_{z,\ \kappa}$ 关于参数 z 和 κ 均构成 Kato 意义下的 (a) 型全纯族 [26, §VII.4.1]，由 [26,§VII.4.6] 可推知，特征值 $\mu(z,\ \kappa)$ 关于两个变量 z 和 κ 均为解析函数。利用公式 [26, 式 (4.56)]，可得

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \mu}{\partial z}(z,\kappa) &= \int_0^{a^\star} \left(a\delta G(a) |f'_{z,\kappa}(a)|^2 - \frac{b^2 a \delta G(a)}{G_z(a)^2} |f_{z,\kappa}(a)|^2 \right) \mathrm{d}a, \\
\frac{\partial \mu}{\partial \kappa}(z,\kappa) &= -|f_{z,\kappa}(a^\star)|^2.
\end{aligned} \tag{2.17}
$$

对于固定的 $z \in [0,1]$，连续函数 $\mathbb{R} \ni \kappa \mapsto \mu(z,\kappa)$ 关于 κ（严格）递减。还要注意，$\mu(z,\ 0) > 0$，且 $\lim_{\kappa\to+\infty} \mu(z,\kappa) = -\infty$。因此，我们得出结论：存在唯一的值 $\hat{}\kappa(z) > 0$，使得 $\mu(z,\ \hat{}\kappa(z)) = 0$。自然地，对于所有 $z \in [0,1]$，(2.12) 中定义的 $\kappa(z)$ 等于 $\hat{}\kappa(z)$。事实上，在 (2.12) 中以 $f_{z,\hat{\kappa}(z)}$ 作为试探函数，可得 $\kappa(z) \leq \hat{}\kappa(z)$。如果严格不等式 $\kappa(z) < \hat{}\kappa(z)$ 成立，那么对于任意 $\varepsilon > 0$，我们都能找到一个函数 $g_\varepsilon \in \mathcal{F}$，使得在该函数上计算的 (2.12) 中的瑞利商 g_ε 小于 $\kappa(z) + \varepsilon$。将这个函数 g_ε（取充分小的 $\varepsilon > 0$）作为 $\mu(z,\ \hat{}\kappa(z))$ 的变分刻画中的试探函数，可得 $\mu(z,\ \hat{}\kappa(z)) < 0$，从而导致矛盾。

将隐函数定理应用于方程 $\mu(z,\ \kappa(z))\ =0$ 并利用表达式 (2.17，我们得出 $\kappa(z)$可微，且其导数为

$$\kappa'(z)=\frac{\displaystyle\int_0^{a^\star}\left(a\delta G(a)|f'_{z,\kappa(z)}(a)|^2-\frac{b^2a\delta G(a)}{G_z(a)^2}|f_{z,\kappa(z)}(a)|^2\right)\mathrm{d}a}{|f_{z,\kappa(z)}(a^\star)|^2}.$$

令 $f_z:=\ f_z,\ \overset{\kappa(z)}{\overline{f_z\qquad a^\star}},\ \kappa(z)\ (\ )$。根据（2.16），它满足（2.13），由此得到命题表述中的$\kappa'(z)$的表达式。最后， f_z 在 (0， $a^\star$) 上不为零，因为若$f_z(a_0)\ =0$且 $a_0\in\in$(0， $a^\star$)，则对 $-(aG_zf'_z)'+\frac{b^2a}{G_z}f_z$与 f_z在L^2(0， a_0)中的内积进行分部积分后，得到 —

$$\int_0^{a_0}\left(aG_z(a)|f'_z(a)|^2+\frac{b^2a}{G_z(a)}|f_z(a)|^2\right)\mathrm{d}a=0,$$

这意味着 $f_z\equiv 0$ 在 $(0,a_0)$ 上成立；再由 f_z所满足的常微分方程的唯一延拓性，得到 $f_z\equiv 0$ 在 $(0,a^\star)$ 上成立。更确切地说，仿照 [11, 附录 C]中的论证， $X_z(a)\ =\ f_z(a)$ 和 $Y_z(a)\ =\ aG_z(a)f'_z(a)$ 在 $(a_0/2,a^\star]$ 上绝对连续，并且$\Psi(a):=(X_z(a)\ \ Y_z(a))^\top$ 满足

$$\begin{cases}\Psi'=\mathbf{F}(a,\Psi) & \text{on } (0,a^\star)\\ \Psi(a_0)=0,\end{cases}$$

其中

$$\mathbf{F}(a,\Psi)=\begin{pmatrix}0 & \frac{1}{aG_z(a)}\\ \frac{b^2a}{G_z(a)} & 0\end{pmatrix}\Psi$$

在（$a_0/2$， $a^\star$]）上关于 Ψ 一致满足 Lipschitz 条件。由 Carathéodory 存在唯一性定理（见 [17, 定理 5.3，第 30] 页），可得 $\Psi\equiv 0$ 在 $[a_0,a^\star]$上成立。□

在下一个命题中，我们将证明公式 κ'（z）中的被积函数在命题 2.8中逐点为负。在该命题的证明中，我们采用受以下证明启发的方法： [11, 命题 3。8]。

命题 2.9。 设 κ（z）按 （2.12）定义，且 Y_z， X_z 按命题 *2.8*定义。则有

$$|Y_z(a)|^2-b^2a^2|X_z(a)|^2<0\qquad \textit{for all } a\in(0,a^\star).$$

证明。 在证明中，为简化记号，我们将经常省略对 z 的依赖。由于根据前一个命题， f_z 是 (0， $a^\star$] 上的连续非零函数，且满足 $f_z(a^\star)\ =\ 1$，因此可得 $X_z\ >\ 0$ 在 (0， $a^\star$) 上成立。我们引入函数$R(a)\ =\ Y_z(a)/X_z(a)$。我们将证明该函数在 (0， $a^\star$) 上为正；为了得到该命题的结论，只需证明对于所有$a\in$ (0， $a^\star$)， $R(a)\ <\ ba$ 。

步骤 1. 我们引入记号 $P(a)$: $=aG_z(a)$ 以及 $Q(a)$: $=a/G_z(a)$。与 [11, 命题 3.11], 类似，我们由（2.13）推出，函数 $X_z(a)$ 和 $Y_z(a)$ 满足以下系统

$$\begin{cases}X'=\frac{1}{P}Y,\\ Y'=b^2QX,\\ Y(a^\star)=\kappa X(a^\star),\\ \lim_{a\to 0^+}Y(a)=0,\end{cases}$$

其中省略了对 z 的依赖。由方程 $Y' = b^2 QX$，结合 X 在整个区间 $(0, a^\star)$ 上为正这一条件，我们推出 Y 在 $(0, a^\star)$ 上（严格）递增。根据这一单调性以及边界条件 $\lim_{a\to 0^+} Y(a) = 0$，可知 $Y > 0$ 在 $(0, a^\star)$ 上成立。因此，由方程 $X' = \frac{1}{P} Y$ 可得 X 在 $(0, a^\star)$ 上（严格）递增，故可通过连续性将其延拓至该区间的端点。特别地，我们有$X(0) \geq 0$，且 $X(a^\star) > 0$。

因此，函数 R 在 $(0,\ a^\star]$ 上为正且连续。此外，我们可以对该函数作如下估计：

$$R(a) = \frac{b^2 \int_0^a Q(t) X(t)\,\mathrm{d}t}{X(a)} \leq b^2 \int_0^a \frac{t}{4\pi}\,\mathrm{d}t = \frac{b^2 a^2}{8\pi}, \tag{2.18}$$

其中，第一步用到了恒等式 $Y' = b^2 QX$ 和边界条件 $\lim_{a\to 0^+} Y(a) = 0$，第二步用到了 X 的单调性及不等式 $G_z \geq 4\pi$。因此，由这个界可知，R 可通过连续性延拓至点 $a = 0$，且有 $R(0) = 0$。特别地，由 (2.18) 可推得，存在 $a_0 \in (0, a^\star)$，使得对所有 $a \in (0, a_0)$，均有 $R(a) < ba$。

经过直接计算可知，R 满足以下系统：

$$\begin{cases} R' = F(a, R), \\ R(a^\star) = \kappa > 0, \\ R(0) = 0, \end{cases} \tag{2.19}$$

其中

$$F(a, Z) := b^2 Q(a) - \frac{1}{P(a)} Z^2.$$

步骤 2. 我们将证明，对所有 $a \in (0, a^\star)$，均有 $R(a) \leq ba$。若结论不成立，则存在 $a \in (0, a^\star)$，使得 $R(a) > ba$。令 $a_1 = \inf\{a \in (0, a^\star):\ R(a) > ba\}$。由于我们已经验证，对所有充分小的 $a > 0$，均有 $R(a) < ba$，因此可得 $0 < a_1 < a^\star$；再由连续性可知，对所有 $a \in (0, a_1)$，均有 $R(a_1) = ba_1$ 且 $R(a) < ba$。我们将证明存在 $a \in (0, a_1)$，使得 $R(a) > ba$，从而得到矛盾。

我们记

$$R(a) - ba = \int_a^{a_1} \big(b - F(\alpha, R(\alpha))\big)\,\mathrm{d}\alpha.$$

注意，我们有 $F(a_1,\ R(a_1)) = 0$。我们选择 $\varepsilon > 0$ 足够小，使得对所有$\alpha \in [a_1 - \varepsilon, a_1)$，

$$b - F(\alpha, R(\alpha)) > 0.$$

因此，对于 $a \in [a_1 - \varepsilon, a_1]$，我们有

$$R(a) - ba > 0,$$

这与 a_1的定义相矛盾。 □

2.5. **等周不等式**。 现在我们可以提出并证明有界区域上磁性 Steklov 特征值的一个等周不等式。

定理 2.10. 设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界、单连通的 C^∞-光滑区域。设常数 $b_\star > 0$ 如定义 *2.3*所示。假设 Ω 不是圆盘，且 $0 < b|\Omega| < \pi b_\star^2$。设 $\mathcal{B}$ 是与 Ω面积相同的圆盘。设 $\lambda(b,\Omega)$ 和 $\lambda(b, \mathcal{B})$ 分别为最低磁 *Steklov*

特征值，其定义如 (2.2) 所示，并分别与Ω 和 $\mathcal{B}$相关。于是，以下等周不等式成立：

$$|\partial\Omega|\lambda(b,\Omega) < |\partial\mathcal{B}|\lambda(b,\mathcal{B}).$$

特别地，由几何等周不等式，$\lambda(b,\Omega) < \lambda(b,\mathcal{B})$ 成立。

作为定理 2.10的推论，圆盘在固定周长下也是极大化子。

推论 2.11. 在定理 *2.10*的假设下，成立

$$\lambda(b,\Omega) < \lambda(b,\mathcal{B}'),$$

其中 $\mathcal{B}' \subset \mathbb{R}^2$ 是与Ω具有相同周长的圆盘。

证明。设 $t = |\partial\Omega|/\sqrt{4\pi|\Omega|} = |\partial\mathcal{B}'|/|\partial\mathcal{B}|$。由几何等周不等式，$t > 1$，并由缩放，我们有 $\lambda(b,\mathcal{B}') = t^{-1}\lambda(bt^2,\mathcal{B})$。借助于 [19, 定理 1.3], 我们知道函数 $\mathbb{R}_+ \ni \beta \mapsto \lambda(\beta,\mathcal{B})$ 是递增的。因此，作为定理 2.10 的结果，成立

$$\lambda(b,\Omega) < \frac{|\partial\mathcal{B}|}{|\partial\Omega|}\lambda(b,\mathcal{B}) \le t^{-1}\lambda(bt^2,\mathcal{B}) = \lambda(b,\mathcal{B}'). \qquad \square$$

定理 2.10 的证明。我们将证明 $\kappa_1(b,G_\Omega) < \kappa_1(b,4\pi)$。证明这一点后，结合命题 2.6、关于 b 的假设以及注记 2.7，我们可以推出不等式 $|\partial\Omega|\lambda(b,\Omega) < |\partial\mathcal{B}|\lambda(b,\mathcal{B})$ 成立。考虑到标准几何等周不等式 $|\partial\Omega| > |\partial\mathcal{B}|$，即可得出不等式 $\lambda(b,\Omega) < \lambda(b,\mathcal{B})$。

步骤 *1.* 由于函数 G_Ω 不一定有界，我们希望通过逼近过程将问题化归为有界权函数的情形。引入函数序列$G_n\colon (0,a^\star) \to \mathbb{R}_+$, $G_n := \min\{G_\Omega, 4\pi n\}$，$n \in \mathbb{N}$。我们将证明

$$\lim_{n\to\infty} \kappa_1(b,G_n) = \kappa_1(b,G_\Omega),$$

其中 $\kappa_1(b,G_n)$ 按（2.10）中的方式定义，其中 G_Ω 替换为 G_n，而 $\mathcal{F}_\Omega$ 替换为在（$\mathcal{F}$中定义的空间（2.11）。我们有 $4\pi \le G_1 \le G_2 \le \cdots$，且 $G_n \to G_\Omega$逐点成立。由命题 2.8 结合命题 2.9 可知，非负序列 $(\kappa_1(b,G_n))_n$ 单调不增。因此，该序列收敛。

考虑 $\eta > 0$，并选择 $f \in \mathcal{F}_\Omega$，使得 $f(a^\star) = 1$

$$\int_0^{a^\star} \Big(aG_\Omega(a)|f'(a)|^2 + \frac{b^2 a}{G_\Omega(a)}|f(a)|^2\Big)\,\mathrm{d}a \le \kappa_1(b,G_\Omega) + \eta.$$

我们有

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a^\star} aG_n(a)|f'(a)|^2\,\mathrm{d}a = \int_0^{a^\star} aG_\Omega(a)|f'(a)|^2\,\mathrm{d}a,$$
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{a^\star} \frac{a}{G_n(a)}|f(a)|^2\,\mathrm{d}a = \int_0^{a^\star} \frac{a}{G_\Omega(a)}|f(a)|^2\,\mathrm{d}a,$$

分别由单调收敛定理和控制收敛定理可得。因此，

$$\kappa_1(b,G_\Omega) \ge \lim_{n\to\infty}\kappa_1(b,G_n) - \eta,$$

并取 $\eta \to 0^+$，得到

$$\kappa_1(b,G_\Omega) \ge \lim_{n\to\infty}\kappa_1(b,G_n). \tag{2.20}$$

对于给定的 $n \ge 1$，令 $g_n \in \mathcal{F} = \{h \in L^2(0,a^\star)\colon\ h' \in L^2((0,a^\star);\, a\,\mathrm{d}a)\}$ 为一个基态，在该态下，$\kappa_1(b,G_n)$刻画中的下确界能够取到，并将其归一化使得$g_n(a^\star) = 1$。利用不等式 $G_n \ge 4\pi$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$逐点成立，且 G_n 是

关于 n逐点非递减，并且 $(\kappa_1(b,G_n))_n$ 是一个非递增序列，我们得出 g_n' 在 $L^2((0,a^\star);\, a\mathrm{d}a)$中构成有界序列。此外，利用 g_n 的绝对连续性，我们得到

$$\begin{aligned}\int_0^{a^\star}|g_n(a)|^2\,\mathrm{d}a &= \int_0^{a^\star}\left|g_n(a^\star)-\int_a^{a^\star}g_n'(\hat a)\,\mathrm{d}\hat a\right|^2\mathrm{d}a\\ &\le 2a^\star+2\int_0^{a^\star}\left(\int_a^{a^\star}\frac{1}{\hat a}\,\mathrm{d}\hat a\right)\left(\int_a^{a^\star}\hat a|g_n'(\hat a)|^2\,\mathrm{d}\hat a\right)\mathrm{d}a\\ &\le 2a^\star+2\left(\int_0^{a^\star}\hat a|g_n'(\hat a)|^2\,\mathrm{d}\hat a\right)\left(\int_0^{a^\star}\ln\left(\frac{a^\star}{a}\right)\mathrm{d}a\right)\\ &\le 2a^\star\left(1+\int_0^{a^\star}\hat a|g_n'(\hat a)|^2\,\mathrm{d}\hat a\right).\end{aligned}$$

因此，$(g_n)_n$ 是 $L^2(0,a^\star)$ 中的有界序列，因此也是[2] 中的有界序列 $\mathcal{F}$。取一个子序列，并利用 $\mathcal{F}$ 嵌入到 $L^2(0,a^\star)$ 的紧性（见 [11,引理 C.1]），不妨设存在 $g_\star\in\mathcal{F}$ 以及一个递增序列$(n_k)_k$ 使得

$$g_{n_k}\to g_\star \quad \text{weakly in } \mathcal{F} \text{ and strongly in } L^2(0,a^\star), \qquad \text{as } k\to\infty. \tag{2.21}$$

此外，等式 $g_\star(a^\star)=1$ 成立，因为 $H^1(a^\star/2,a^\star)$ 紧嵌入于 $C([a^\star/2,a^\star])$（见 [4, 定理 8.8]），且 $(g_{n_k}|_{(a^\star/2,a^\star)})_k$ 在 $H^1(a^\star/2,a^\star)$ 中有界。

因此，对于 $n_k\ge m$，我们得到

$$\begin{aligned}&\int_0^{a^\star}aG_m(a)|g_{n_k}'(a)|^2\,\mathrm{d}a+\int_0^{a^\star}\frac{b^2a}{G_{n_k}(a)}|g_{n_k}(a)|^2\,\mathrm{d}a\\ &\quad\le\int_0^{a^\star}aG_{n_k}(a)|g_{n_k}'(a)|^2\,\mathrm{d}a+\int_0^{a^\star}\frac{b^2a}{G_{n_k}(a)}|g_{n_k}(a)|^2\,\mathrm{d}a=\kappa_1(b,G_{n_k}).\end{aligned}$$

由（2.21）可推出 $g_{n_k}'\to g_\star'$ 在 $L^2((0,a^\star);\, a\mathrm{d}a)$中弱收敛。因此，我们推得

$$\int_0^{a^\star}ag_{n_k}'(a)\overline{\varphi(a)}\,\mathrm{d}a\to\int_0^{a^\star}ag_\star'(a)\overline{\varphi(a)}\,\mathrm{d}a, \qquad \text{as} \quad k\to\infty,$$

对于任意 $\varphi\in L^2((0,\ a^\star);\, a\mathrm{d}a)$。对于 $\varphi=G_mg_\star'$，我们得到

$$\int_0^{a^\star}aG_m(a)g_{n_k}'(a)\overline{g_\star'(a)}\,\mathrm{d}a\to\int_0^{a^\star}aG_m(a)|g_\star'(a)|^2\,\mathrm{d}a, \qquad \text{as} \quad k\to\infty.$$

利用柯西-施瓦茨不等式，我们从上述极限推导出

$$\liminf_{k\to\infty}\int_0^{a^\star}aG_m(a)|g_{n_k}'(a)|^2\,\mathrm{d}a\ge\int_0^{a^\star}aG_m(a)|g_\star'(a)|^2\,\mathrm{d}a. \tag{2.22}$$

此外，我们发现

$$\begin{aligned}&\int_0^{a^\star}\frac{b^2a}{G_{n_k}(a)}|g_{n_k}(a)|^2\,\mathrm{d}a\\ &=\int_0^{a^\star}\frac{b^2a}{G_\Omega(a)}|g_\star(a)|^2\,\mathrm{d}a+\int_0^{a^\star}\left(\frac{b^2a}{G_{n_k}(a)}-\frac{b^2a}{G_\Omega(a)}\right)|g_\star(a)|^2\,\mathrm{d}a\\ &\quad+\int_0^{a^\star}\frac{b^2a}{G_{n_k}(a)}\left(|g_{n_k}(a)|^2-|g_\star(a)|^2\right)\mathrm{d}a\to\int_0^{a^\star}\frac{b^2a}{G_\Omega(a)}|g_\star(a)|^2\,\mathrm{d}a, \quad k\to\infty,\end{aligned} \tag{2.23}$$

[2] $\mathcal{F}$ 赋有范数 $\|h\|_{\mathcal{F}}=\|h\|_{L^2(0,\ a^\star)}+\|h'\|_{L^2((0,\ a^\star);a\mathrm{d}a)}$。

其中，右侧第二项根据勒贝格控制收敛定理趋于零，第三项则因 g_{n_k} 在 $L^2(0,\ a^\star)$ 中收敛到 $g_\star$ 而趋于零。

利用 (2.22) 和 (2.23)，并令 $k \to \infty$ 趋于极限，我们推得

$$\int_0^{a^\star} aG_m(a)|g_\star'(a)|^2\,\mathrm{d}a + \int_0^{a^\star} \frac{b^2 a}{G_\Omega(a)}|g_\star(a)|^2\,\mathrm{d}a \le \lim_{n\to\infty} \kappa_1(b, G_n).$$

由于上述不等式对任意 $m \in \mathbb{N}$ 都成立，我们得到 $g_\star \in \mathcal{F}_\Omega$，并且，$\kappa_1(b,\ G_\Omega) \le \lim_{n\to\infty} \kappa_1(b,\ G_n)$。

步骤 2。首先注意到，根据步骤 1，$\kappa_1(b, G_\Omega)$ 是一个非递增序列 $(\kappa_1(b, G_n))_n$ 的极限。其次，结合命题 2.8 和命题 2.9 可得，对于所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$，$\kappa_1(b, G_n) < \kappa_1(b, 4\pi)$，由此可得所需的不等式 $\kappa_1(b, G_\Omega) < \kappa_1(b, 4\pi)$。□

3. 外部区域

本节中，我们介绍外部区域上的最低磁 Steklov 特征值，并证明在固定周长约束以及区域满足额外几何假设的条件下，该特征值所满足的等周不等式。我们的分析借鉴了 [23]，并运用了外平行曲线的几何性质、矩的比较以及经典的等周论证。

3.1. 最低磁 Steklov 特征值。

考虑 $\Omega^{\mathrm{ext}} = \mathbb{R}^2 \setminus \Omega$，即一个有界、单连通的 C^∞-光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 的外部区域。我们引入对称规范下的矢势

$$\mathbf{A}_\circ(x) = \frac{1}{2}(-x_2, x_1)^\top \tag{3.1}$$

并且对每个 $b > 0$，我们引入空间

$$X_b(\Omega^{\mathrm{ext}}) = \{u \in L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})\colon (-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A}_\circ)u \in L^2(\Omega^{\mathrm{ext}}; \mathbb{C}^2)\}.$$

对称规范便于我们后续的分析。我们直接通过变分刻画，在完全类比有界区域情形的基础上，引入 Ω^{ext} 中的最低磁 Steklov 特征值

$$\lambda(b, \Omega^{\mathrm{ext}}) = \inf_{\substack{u \in X_b(\Omega^{\mathrm{ext}}) \\ u|_{\partial\Omega} \neq 0}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A}_\circ)u\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}};\mathbb{C}^2)}}{\|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}. \tag{3.2}$$

量 $\lambda(b, \Omega^{\mathrm{ext}})$ 定义良好、有限且非负。与有界区域的情形一样，这个特征值可等同于外部区域 Ω^{ext} 上磁 Dirichlet-to-Neumann 映射的最低特征值；详见 [18, 第 2] 节以及 [20]。我们还指出，根据 [18, 命题 2.2]，对任意 $b > 0$，最低磁 Steklov 特征值 $\lambda(b, \Omega^{\mathrm{ext}})$ 均不等于零。我们指出，外部区域并非单连通，因此量 $\lambda(b, \Omega^{\mathrm{ext}})$ 通常取决于磁场[3]所选的规范。我们的后续结果均针对对称规范 (3.1) 证明。

称函数 $u_\star \in X_b(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 在 $u_\star|_{\partial\Omega} \neq 0$ 处取得（3.2）中的下确界时，称其为磁 Steklov 问题的基态。我们的分析并不需要证明基态总是存在，尽管我们预期情况确实如此。稍微滥用一下术语，我们称 $u_\star$ 为 $\lambda(b,\Omega^{\mathrm{ext}})$的一个基态。以下结果可由 [18, 命题 12]得出。

[3]要固定规范，需要像 [21, 式 (1.4)]) 那样指定磁通量。

命题 3.1. 存在 $b_1 > 0$，使得对于 $0 < b < b_1$，单位圆盘外部区域上的最低磁 *Steklov* 特征值 $\lambda(b,\mathcal{B}_1^{\mathrm{ext}})$ 存在一个实值径向对称基态。

得益于上述命题，我们可以引入正常数

(3.3) $b_\circ := \sup\{b' > 0\colon \lambda(b,\ \mathcal{B}_1^{\mathrm{ext}})$ 对所有 $b \in (0,\ b')$ 都具有实值径向基态$\}$。

3.2. **等周不等式**。对于具有固定周长且满足某些额外几何假设的有界单连通区域的外部区域，我们证明：只要磁场强度不超过某个临界常数，最低磁 Steklov 特征值便由圆盘的外部区域取得最大值；该临界常数可确保圆盘外部区域上的相应磁 Steklov 问题具有径向实值基态。在陈述这一结果之前，我们需要回顾几个几何定义。

定义 3.2。如果存在 $x_0 \in \mathbb{R}^2$ 使得Ω 满足中心对称，即$\Omega = \{x_0 - x \in \mathbb{R}^2\colon\ x \in \Omega\ - x_0\}$，则称区域$\Omega$ 为中心对称。在这种情况下，我们称Ω 关于 x_0中心对称。

接下来，我们引入 Ω 的距离函数

$$\rho_\Omega\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_+, \qquad \rho_\Omega(x) := \inf_{y\in\Omega} |x - y|.$$

对于所有 $x \in\Omega$，该函数恒等于零；对于所有 $x \in \Omega^{\mathrm{ext}}$，该函数为正。

定义 3.3. 对于有界单连通的 C^∞-光滑区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$，我们引入到边界的距离为 $t > 0$ 的外平行曲线：

$$\Sigma_t = \Sigma_t(\Omega) := \{x \in \mathbb{R}^2\colon \rho_\Omega(x) = t\}.$$

根据 [37, 定理 4.4.1], 外平行曲线 Σ_t 至多是有限个分段C^∞光滑简单闭曲线的并，几乎对所有 $t \in \mathbb{R}$成立。曲线 Σ_t 通常可能有多个连通分支。然而，如果 Ω 是凸区域，那么容易看出$\{x \in \mathbb{R}^2\colon\ \rho_\Omega(x)\ < t\}$ 也是凸区域，因此作为其边界的外平行曲线 Σ_t 是连通的。根据 [36,命题 A.1] 可得

$$|\Sigma_t| \le |\partial\Omega| + 2\pi t, \qquad \text{for all } t > 0, \tag{3.4}$$

其中，当 Ω 为圆盘时，对所有 $t > 0$ 等号显然成立。

注 3.4。可以证明，当 3.4 式中的等号对所有 $t > 0$ 成立时，Ω 为凸区域。这一更强的性质并非我们的研究所必需。

注 3.5。在上述讨论中，我们使用了 [37, 定理 4.4。1] 和 [36, 命题 A。1],这些结果仅针对有界区域和内平行曲线得到了证明。不过，对于外部区域，仍可通过将这些结果应用于 Ω^{ext} 与半径充分大的圆盘的交集，推导出外平行曲线所需的性质。

现在我们可以表述并证明关于外部区域最低磁 Steklov 特征值优化的主要结果。

定理 3.6。设$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是一个有界的单连通 C^∞-光滑区域，且满足：

(a) Ω 是中心对称的，或者具有两条（不一定正交的）对称轴。

(b)外平行曲线 $\Sigma_t = \Sigma_t(\Omega)$ 对所有 $t > 0$ 都是简单闭曲线（当 Ω 为凸集时，此条件自动满足）。

设常数 $b_\circ > 0$ 如 *(3.3)* 中所示。假设 Ω 不是圆盘，且 $0 < |\partial\Omega|^2 b < 4\pi^2 b_\circ$。设 $\mathcal{B}'$ 为与 Ω 周长相同的圆盘。设 $\lambda(b, \Omega^{\mathrm{ext}})$ 和 $\lambda(b, (\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}})$ 分别为按 *(3.2)* 定义、对应于 Ω^{ext} 和 $(\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}}$ 的最低磁 *Steklov* 特征值。则下列等周不等式成立

$$\lambda(b, \Omega^{\mathrm{ext}}) < \lambda(b, (\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}}).$$

证明。 我们将证明分为两个步骤。

步骤 *1.* 外平行曲线的矩。 不失一般性，若 Ω 中心对称，则可假设其对称中心位于原点；若 Ω 有两条对称轴，则可假设这两条对称轴的交点位于原点。我们还假设圆盘 $\mathcal{B}'$ 以原点为圆心。

令 $L = |\partial\Omega|$ 表示 Ω的周长。类似于 [12, 引理 2。5], 可知，质心 $c(t) = \frac{1}{|\Sigma_t|}\int_{\Sigma_t} x\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x)$ Σ_t 对所有 $t > 0$ 均位于原点。

令 $\mathcal{C}_t = \Sigma_t(\mathcal{B}')$ 为以原点为圆心、半径为 $(2\pi)^{-1}L + t_\circ$ 由（3.4）及 Hurwitz 的经典结果 [22]（另见 [12, 定理 1 的证明。1]），可得

$$\int_{\Sigma_t} |x|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) \le \int_{\mathcal{C}_t} |x|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x), \tag{3.5}$$

wit当 Σ_t 不是圆时，不等式严格成立（若 Ω 不是圆盘，则 Σ_t 不是圆） .

步骤 *2*。试探态的构造。

我们的试探态的定义受到 [23, 定理 4 的证明。8]的启发。令 $u_\circ \in X_b((\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}})$ 为 $\lambda(b, (\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}})$ 的一个实值径向基态，其在 $\partial\mathcal{B}'$ 上的迹在 $L^2(\partial\mathcal{B}')$ 中归一化为 1。在 $\mathcal{B}'$的外部， $\mathcal{B}'$ 的距离函数为 $r - R'$，其中 $R' = L/2\pi$是 $\mathcal{B}'$ 的半径， $r = |x|$ 是径向变量。因此，我们可以将 $u_\circ$ 表示为

$$u_\circ(x) = \psi_\circ(\rho_{\mathcal{B}'}(x)), \qquad x \in (\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}},$$

对于某些 $\psi_\circ$: $\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$。 [18, 第 4] 节中以特殊函数表示的 $\psi_\circ$，特别可得 $\psi_\circ \in C^\infty($ $[0, \infty)$。现在我们在 Ω^{ext}上定义试探态如下

$$u_\star(x) = \psi_\circ(\rho_\Omega(x)), \qquad x \in \Omega^{\mathrm{ext}}.$$

利用此 处 $u_\circ$ 是实值函数，并应用余面积公式（见 [23, 公式 (4.4) 和 (4.5)]），我们有

$$\begin{aligned}\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A}_\circ)u_\star\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}};\mathbb{C}^2)} &= \|\nabla u_\star\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}};\mathbb{C}^2)} + \frac{b^2}{4}\int_{\Omega^{\mathrm{ext}}} |x|^2|u_\star|^2 \,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^\infty |\psi_\circ'(t)|^2|\Sigma_t| \,\mathrm{d}t + \frac{b^2}{4}\int_0^\infty |\psi_\circ(t)|^2 \int_{\Sigma_t} |x|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x)\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

利用（3.4）和（3.5），我们推得

$$\begin{aligned}\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A}_\circ)u_\star\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}};\mathbb{C}^2)} &< \int_0^\infty |\psi_\circ'(t)|^2|\mathcal{C}_t| \,\mathrm{d}t + \frac{b^2}{4}\int_0^\infty |\psi_\circ(t)|^2 \int_{\mathcal{C}_t} |x|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x)\,\mathrm{d}t \\ &= \|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A}_\circ)u_\circ\|^2_{L^2((\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}};\mathbb{C}^2)} = \lambda(b, (\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}}).\end{aligned} \tag{3.6}$$

此外,

$$\|u_\star|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)} = \int_{\partial\Omega} |\psi_\circ(0)|^2 \,\mathrm{d}\mathcal{H}^1(x) = \|u_\circ|_{\partial\mathcal{B}'}\|^2_{L^2(\partial\mathcal{B}')} = 1. \tag{3.7}$$

再次使用余面积公式和不等式（3.4）可得

$$\|u_\star\|^2_{L^2(\Omega^{\mathrm{ext}})} = \int_0^\infty |\psi_\circ(t)|^2 |\Sigma_t|\,\mathrm{d}t \le \int_0^\infty |\psi_\circ(t)|^2 |\mathcal{C}_t|\,\mathrm{d}t = \|u_\circ\|^2_{L^2((\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}})} < \infty.$$

因此，我们得到 $u_\star \in X_b(\Omega^{\mathrm{ext}})$ 并将 $u_\star$ 用作 (3.2) 中的试探态，由 (3.6) 与 (3.7) 可得

$$\lambda(b,\Omega^{\mathrm{ext}}) < \lambda(b,(\mathcal{B}')^{\mathrm{ext}}). \qquad \square$$

附录 A. 基态的存在性

A.1. **有界区域上磁 Steklov 问题基态的存在性**。关于磁 Steklov 问题的基础内容可见于 [10, 附录 A.3]。尽管 [10] 专门讨论 Aharonov-Bohm 势，但其分析可推广到我们关于恒定磁场的设定。

为完整起见，我们在此证明 (2.2) 中的下确界在 $u_\star \in H^1(\Omega)$ 处达到，且其满足 (2.5)。对于 $\beta \in \mathbb{R}$ 与 $b \ge 0$，我们引入磁 Robin 拉普拉斯算子的最低特征值（见 [23,第 2] 节)

$$\mu^{\mathrm{R}}(\beta,b) := \inf_{\substack{u\in H^1(\Omega)\\ u\neq 0}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)} + \beta\|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}{\|u\|^2_{L^2(\Omega)}}.$$

上述下确界在 $u_\beta \in H^1(\Omega)\backslash\{0\}$ 上达到，且其满足

$$\begin{cases} (-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})^2 u_\beta = \mu^{\mathrm{R}}(\beta,b)u_\beta, & \text{in } \Omega,\\ \partial_\nu u_\beta + \beta u_\beta = 0, & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

其中 ν 是 Ω 的外单位法向量，上述方程在以下弱意义下理解

$$\forall\, v \in H^1(\Omega), \qquad \langle(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})u_\beta, (-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})v\rangle_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)} + \beta\langle u_\beta, v\rangle_{L^2(\partial\Omega)} = \mu^{\mathrm{R}}(\beta,b)\langle u_\beta, v\rangle_{L^2(\Omega)}.$$

根据 [20, 命题 5。3], 存在唯一的 $\beta_\star < 0$ 使得 $\mu^{\mathrm{R}}(\beta_\star, b) = 0$，并且有$\lambda(b,\Omega) = -\beta_\star$，其中 $\lambda(b,\Omega)$ 在（2.2）中引入。

定义 $u_\star = u_{\beta_\star}$。则 $u_\star$ 满足（2.5），且它也是（2.2）的极小化子。

A.2. **最低纤维问题基态的存在性**。令 $b, R > 0$ 为固定值。这里我们证明下确界

$$\lambda^{\mathrm{1D}}(b,R) = \inf_{\substack{f\in H^1((0,R),r\,\mathrm{d}r)\\ f(R)\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^R \left(|f'(r)|^2 + \tfrac{b^2r^2}{4}|f(r)|^2\right) r\,\mathrm{d}r}{R|f(R)|^2}$$

在 $f_\star \in H^1((0,R)\ r\,\mathrm{d}r)$ 且满足 $f_\star(R) \neq 0$时可取到，并且 $f_\star$ 满足（2.6）。

我们引入最低特征值

$$\mu^{\mathrm{1D}}(\beta,b,R) := \inf_{\substack{f\in H^1((0,R),r\,\mathrm{d}r)\\ f\neq 0}} \frac{\displaystyle\int_0^R \left(|f'(r)|^2 + \tfrac{b^2r^2}{4}|f(r)|^2\right) r\,\mathrm{d}r + \beta R|f(R)|^2}{\displaystyle\int_0^R |f(r)|^2 r\,\mathrm{d}r},$$

Robin 边界条件下的 Sturm–Liouville 型特征值问题；这里 $\beta \in \mathbb{R}$ 是边界参数。下确界在唯一函数上取得（相差一个常数

因子） $0 \neq f_\beta \in C^\infty([0,R])$ （参见 [23, 命题 3。2]），且 f_β 满足

$$\begin{cases} -f_\beta''(r) - \frac{1}{r} f_\beta'(r) + \frac{b^2 r^2}{4} f_\beta(r) = \mu^{1\mathrm{D}}(\beta, b, R) f_\beta(r), & 0 < r < R, \\ f_\beta'(R) = -\beta f_\beta(R). \end{cases}$$

此外，以常数函数作为试探函数，可得 $\mu^{1\mathrm{D}}(\beta, b, R) < 0$对于 $\beta < -R^3 b^2/16$。另一方面，我们有 $\mu^{1\mathrm{D}}(0, b, R) > 0$（对于 $\beta = 0$）。由常微分方程的唯一延拓性质可知 $f_\beta(R) \neq 0$。因此，$\mu^{1\mathrm{D}}(\beta, b, R)$ 关于 β 严格递增。因此，存在唯一的 $\beta_\star < 0$ 使得 $\mu^{1\mathrm{D}}(\beta_\star, b, R) = 0$。通过直接比较论证，可得 $\lambda^{1\mathrm{D}}(b, R) = -\beta_\star$。

我们定义 $f_\star = f_{\beta_\star}$。于是 $f_\star$ 是 $\lambda^{1\mathrm{D}}(b, R)$ 的变分刻画的极小化函数，并且满足（2.6）。

附录 B. 磁狄利克雷-诺伊曼映射最低特征值的变分刻画

磁狄利克雷-诺伊曼映射的最低特征值 Λ_b （与形式 $\mathfrak{l}_b$ （2.4）相关）可通过极小极大原理刻画为

$$\lambda_1(\Lambda_b) = \inf_{\varphi \in H^{1/2}(\partial\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})\mathsf{S}_b\varphi\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}}{\|\varphi\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}. \tag{B.1}$$

命题 B.1. 设 $\lambda(b, \Omega)$ 如 （2.2）所述，且 $\lambda_1(\Lambda_b)$ 如 （B.1）所述。那么 $\lambda(b, \Omega) = \lambda_1(\Lambda_b)$。

证明。 由于 S_b 是从 $H^{1/2}(\partial\Omega)$ 到在（ $\mathcal{N}_b$ 中定义的解空间2.3）上的双射，因此我们得到

$$\lambda_1(\Lambda_b) = \inf_{u \in \mathcal{N}_b\setminus\{0\}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}}{\|u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}}.$$

鉴于包含关系 $\mathcal{N}_b \subset H^1(\Omega)$，我们有 $\lambda_1(\Lambda_b) \geq \lambda(b, \Omega)$。为证明反向不等式，任取 $u \in H^1(\Omega)$，并将其分解为 $u = v_u + w_u$，其中 $v_u := \mathsf{S}_b(u|_{\partial\Omega})$ 且 $w_u := u - v_u \in H^1_0(\Omega)$。因此，利用分部积分可得

$$\begin{aligned} \lambda(b,\Omega) &= \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} \neq 0}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})(v_u + w_u)\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}}{\|v_u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}} \\ &= \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} \neq 0}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})v_u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)} + \|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})w_u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}}{\|v_u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}} \\ &\geq \inf_{\substack{u \in H^1(\Omega) \\ u|_{\partial\Omega} \neq 0}} \frac{\|(-\mathrm{i}\nabla - b\mathbf{A})v_u\|^2_{L^2(\Omega;\mathbb{C}^2)}}{\|v_u|_{\partial\Omega}\|^2_{L^2(\partial\Omega)}} = \lambda_1(\Lambda_b). \end{aligned}$$

最后，我们得出结论： $\lambda_1(\Lambda_b) = \lambda(b, \Omega)$。 □

致谢。 第一位列名作者（A.K.）感谢美国贝鲁特大学提供的启动基金支持。

参考文献

[1] P. R. S. Antunes, P. Freitas, and D. Krejčiřík. 负边界参数下罗宾特征值的界与极值区域，*Adv. Calc. Var.* **10**(2017), 357–380. [2] J. Behrndt and J. Rohleder. 一类 Calderón 型部分数据反问题，*Commun. Partial Differ. Equations* **37**(2012), 1141–1159.

[3] J. Behrndt and J. Rohleder. 无界 Lipschitz 区域上椭圆算子的部分数据反问题，Inverse Probl. 36 (2020), 035009. [4] H. Brezis. 泛函分析、索伯列夫空间与偏微分方程。Universitext Springer，纽约，2011年。[5] F. Brock. Stekloff问题特征值的一个等周不等式，ZAMM Z. Angew. Math. Mech. 81 (2001), 69–71. [6] D. Bucur, V. Ferone, C. Nitsch, and C. Trombetti. 高维中的Weinstock不等式，J. Differ- ential Geom. 118 (2021), 1–21. [7] L. Bundrock. 外部区域中第一Robin特征值的优化：球的局部极大性质，Ann. Mat. Pura Appl. (4) 204 (2025), 1095–1117. [8] L. Bundrock, A. Girouard, D. Grebenkov, M. Levitin and I. Polterovich. 欧几里得区域上的外部Steklov问题， arXiv:2511.09490.[9] T. Chakradhar, K. Gittins, G. Habib, N. Peyerimhoff. 关于作用于函数的磁Steklov算子的注记。Mathematika 71 (2025), article no. e70037. [10] B. Colbois, L. Provenzano, and A. Savo. 阿哈罗诺夫-玻姆磁势下磁Neumann问题与Steklov问题的等周不等式。J. Geom. Anal. 32 (2022), article no. 285. [11] B. Colbois, C. Léna, L. Provenzano, and A. Savo. 磁拉普拉斯算子的反向Faber-Krahn不等式。J. Math. Pures Appl. (9) 192 (2024), Article ID 103632. [12] C. Dietze, A. Kachmar, and V. Lotoreichik. 内平行曲线的等周不等式。J. Spectr. Theory 14 (2024), 1537–1562. [13] A. F. M. ter Elst and E. M. Ouhabaz. Dirichlet-to-Neumann算子的抗磁不等式，Bull. Lond. Math. Soc. 54 (2022), 1978–1997. [14] L. Erdős. 均匀磁场下的Rayleigh型等周不等式，Calc. Var. Partial Diff. Equ. 4 (1996), 283–292. [15] P. Freitas and D. Krejčiřík. 负边界参数下的第一Robin特征值，Adv. Math. 280 (2015), 322–339. [16] A. Girouard and I. Polterovich. Steklov问题的谱几何，载于：A. Henrot (编)，形状优化与谱理论，De Gruyter，柏林，(2017)，120–148. [17] J.K. Hale. 常微分方程。Wiley-Interscience，纽约 (1969)。[18] B. Helffer and F. Nicoleau. 关于圆盘外部区域上的磁 Dirichlet-to-Neumann 算子——抗磁性、弱磁场极限与磁通效应。J. Math. Pures Appl. 205, article no. 103799.[19] B. Helffer and F. Nicoleau. 关于圆盘上的磁 Dirichlet-to-Neumann 算子——强抗磁性与强磁场极限。J. Geom. Anal. 35 (2025), article no. 178. [20] B. Helffer, A. Kachmar, and F. Nicoleau. 一般区域中磁 Dirichlet-to-Neumann 特征值的渐近行为。arXiv:2501.00947 (2025). [21] B. Helffer, A. Kachmar, and F. Nicoleau. 圆盘外部区域中的磁拉普拉斯算子与Steklov特征值的磁通效应。arXiv:2508.18119 (2025). [22] A. Hurwitz. 关于傅里叶级数的一些几何应用。Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (3) 19 (1902), 357–408. [23] A. Kachmar and V. Lotoreichik. 关于负边界参数下磁 Robin 拉普拉斯算子的等周不等式。J. Geom. Anal. 32 (2022), article no. 182. [24] A. Kachmar and V. Lotoreichik. 通过扭转函数得到的最低磁Neumann特征值几何界，SIAM J. Math. Anal. 56 (2024), 5723–5745. [25] A. Kachmar, V. Lotoreichik, M. Sundqvist. 外部区域中具有弱磁场的拉普拉斯算子。Anal. Math. Phys. 15 (2025), article no. 5. [26] T. Kato. 线性算子扰动理论，柏林，Springer-Verlag，1995年。[27] S. Krantz and H. Parks. 隐函数定理：历史、理论与应用，Birkhäuser，波士顿，2002年。[28] D. Krejčiřík a nd V. Lotoreichik. 紧集外部区域中最低Robin特征值的优化，J. Convex Anal. 25 (2018), 319–337. [29] D. Krejčiřík and V. Lotoreichik. 紧集外部区域中最低Robin特征值的优化，II：非凸区域与高维，Potential Anal. 52 (2020), 601–614. [30] D. Krejčiřík and V. Lotoreichik. 平面外部区域上第二Robin特征值的优化与单调性，Calc. Var. Partial Differ. Equ. 63 (2024), 223. [31] J. Lee. 光滑流形导论，Springer，纽约，2013年。[32] M. Levitin, D. Mangoubi, and I. Polterovich. 谱几何专题，美国数学学会，普罗维登斯，2024年。[33] B. S. Mityagin. 实解析函数的零点集，Math. Notes 107 (2020), 529–530.

[34] F. W. J. Olver、D. W. Lozier、R. F. Boisvert 和 C. W. Clark。*NIST*数学函数手册，剑桥大学出版社，剑桥，2010年。[35] L. E. Payne 和 H. F. Weinberger。关于膜频率和扭转刚度的一些等周不等式，*J. Math. Anal. Appl.* **2**（1961年），210–216。[36] A. Savo。拉普拉斯算子特征函数节点长度的下界，*Ann. Global Anal. Geom.* **19**（2001年），133–151。[37] K. Shiohama、T. Shioya 和 M. Tanaka。完备开曲面上总曲率的几何学。剑桥大学出版社，剑桥，2003年。[38] R. Weinstock。经典特征值问题的不等式，*J. Rational Mech. Anal.* **3**（1954年），745–753。A. Kachmar 数学系及偏微分方程研究组—高级数学科学中心 贝鲁特美国大学，邮政信箱 11-0236，Riad El-Solh，贝鲁特 1107 2020，黎巴嫩电子邮箱地址： ak292@aub.edu.lb

V. Lotoreichik 捷克科学院核物理研究所理论物理系，25068，Řež，捷克共和国电子邮件地址： lotoreichik@ujf.cas.cz