arXiv:2602.17435v1 [math.GT] 19 Feb 2026

# Khovanov 同调的 $y$-化

Taketo Sano

2026年2月20日

**摘要**

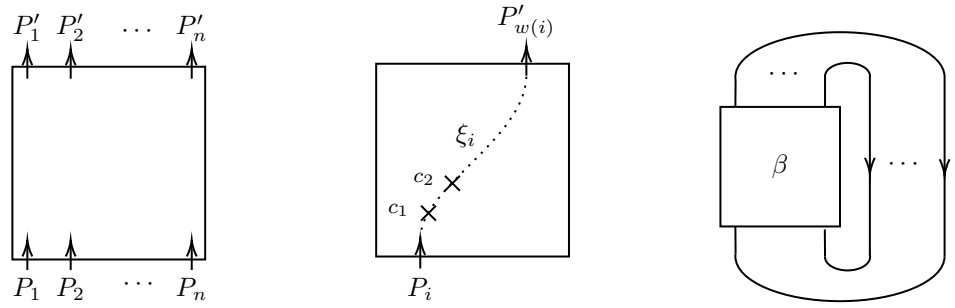
受 Gorsky 和 Hogancamp 对 HOMFLY–PT 同调所作的 $y$-化的启发 [GH22]以及 Gorsky、Hogancamp 和 Mellit 的 $\mathfrak{sl}_2$-作用 [GHM24], , 我们在 Bar-Natan 框架下为缠结构造了 $y$ Khovanov 同调的 -化及其等变版本，并定义了元素 $e$ 在 $\mathfrak{sl}_2$ 上的作用 $y$。我们进而证明，根据 Rasmussen 谱序列从 HOMFLY–PT 同调到 Khovanov 同调的映射，我们的构造与先前的构造相容。我们的构造简单且适用于图示操作和算法实现。因此，我们直接验证了这些附加结构能够区分具有相同 Khovanov 同调和 HOMFLY–PT 同调的纽结对，特别是 Conway 结与 Kinoshita–Terasaka 结。

## 1 引言

Khovanov 对 Jones 多项式的范畴化 [Kho00], , 称为*Khovanov* 同调，为一个定向链环 $L \subset S^3$ 赋予双分次同调$Kh^{*,*}(L;\ \mathbb{Q})$，其分次欧拉示性数还原出 Jones 多项式。该领域一个持续的主题是，在 Khovanov 同调上添加额外结构可以增强这一不变量，并且往往能检测到多项式或双分次向量空间层面无法体现的现象。一个奠基性的例子是 Kronheimer 和 Mrowka 的工作，他们证明了*Khovanov* 同调可以检测平凡结；而 Jones 多项式是否具有这一性质至今仍未知 [KM11]。这一结果通过谱序列将 Khovanov 同调与奇异瞬子 *Floer* 同调联系起来而得出。后续研究还表明，Khovanov 同调可以检测平凡链环，而 Jones 多项式并不具有这一性质 [HN13; BS15]。[1][2]

另一个重要的发展方向源自 Lee 对 Khovanov 同调的变形 [Lee05], , 它给出了 Rasmussen 同痕不变量 $s$，并被应用于切片亏格界 [Ras10]。随后，Bar-Natan 通过缠结和余边界重新表述了 Khovanov 同调 [Bar05], , 而 Khovanov 则通过 Frobenius 扩张统一了 Khovanov 同调的秩二变形，从而得到 Khovanov 同调的等变版本 [Kho06]。这些代数结构已在[Nao06; Tur06; MTV07; Shu14; Wig16; Tur20; KR22; KS25a; CY25]中得到研究。近期研究发现，等变 Khovanov 同调的挠部分具有拓扑应用，例如 [Ali19; AD19; Sar20; Guj20; Cap+21; Zhu22; Hay23; LMZ24; ILM25]。关于链环余边界的函子性（相差一个符号），已在 [Jac04; Bar05],[3] 中得到确立，并被用于识别异 exotic 切片圆盘 [HS24; Hay23]。Lipshitz 和 Sarkar 给出了 Khovanov 同调的空间层次精化，为其赋予了 Steenrod 平方，并对 $s$-不变量作了严格精化 [LS14a; LS14c; LS14b]。此外，还有一些变体适用于链环的其他几何或对称性，例如 [APS04; GLW18; Pol19; LW21; LS24; San25; Bor+25]。这些进展凸显了 Khovanov 同调所具有的代数结构及其所反映的几何性质的潜力。

[1]关于这一方向更多的检测结果，参见 [BSX19；BS22；Mar22；Bal+21；LS22；BHS24] 。更多谱序列的讨论，参见 [OS05；Blo11；Dae15；Sca15；Sza15；Lin19；ATZ23；Dow24；Li24；Nah25]。严格函子性见 [Cap07；CMW09；Bla10；Bel+23a；Vog20；San21]。




(a) 边界点 $\mathrm{B}_n$ (b) 同伦 $\xi_i$ (c) 闭包 $\bar{\beta}$

图 1

本文聚焦于 Gorsky 和 Hogancamp [GH22] 以及 Gorsky、Hogancamp 和 Mellit [GHM24], 的工作；这些工作拓展了 HOMFLY–PT 同调。HOMFLY–PT 同调是由 Khovanov 和 Rozansky 引入的三重分次链环同调理论，是对 HOMFLY–PT 多项式的范畴化 [KR08b]。在 [GH22], 中，Gorsky 和 Hogancamp 通过为链环的每个分支 $c$ 附加形式参数 $y_c$ ，构造了 HOMFLY–PT 同调的一种 $y$-化，得到一个在$\mathbb{Q}[x_c, y_c]_{c\in\pi_0(L)}$上定义的三重分次模 $L$。这一扩张旨在给出链环分裂谱序列，类似于 Batson 和 Seed 在 Khovanov 同调上构造的谱序列 [BS15], ，同时也与源自平面上点的希尔伯特概形的猜想性几何结构相契合。在此构造的基础上，Gorsky、Hogancamp 和 Mellit 在 [GHM24], 中进一步构造了一族作用于 $y$-化 HOMFLY–PT 同调上的可交换自同态$F_k$ ，类似于典范类在特征簇上同调中的作用。他们证明了第二个算子$F_2$满足一种硬 Lefschetz 型结论；这一结论进而推广为同调群上的一种 $\mathfrak{sl}_2$-作用，并进一步证明了 Dunfield–Gukov–Rasmussen 猜想的 $Q \leftrightarrow TQ^{-1}$对称性 [DGR06]。

本文旨在将 $y$-化的思想引入 Khovanov 同调，并从理论和计算两个方面研究由此产生的结构。我们构造了一个独立于先前工作的框架，然后通过从 HOMFLY–PT 同调到 Khovanov 同调的 Rasmussen 谱序列，将这两种表述联系起来 [Ras15]。

## $y$-化的 Khovanov 同调

我们首先说明具有$n$ 条弦的辫图 $\beta$ 的 $y$化 Khovanov 复形 $y[\beta]$ 的构造。为简单起见，此处我们在 $\mathbb{Q}$ 上的非等变情形中进行。令 $\mathrm{B}_n \subset \partial I^2$ 表示 $\beta$的边界点集合，其中 $n$ 个入点 $\{P_i\}$ 位于 $I\times\{0\}$， $n$ 个出点 $\{P'_i\}$ 位于$I \times \{1\}$ （见图 1a），而 $w \in \mathfrak{S}_n$ 为 $\beta$的底层置换。将 $\beta$ 视为边界为 $\mathrm{B}_n$ 的缠结图，并考虑 $\beta$的形式化 Khovanov 括号 $[\beta]$ ——即 [Bar05]中所定义的、带点协边加性范畴 $\mathrm{Cob}(\mathrm{B}_n)$中的一个复形。我们采用的分次约定是：一个点具有正量子次数 2；这与 [Kho00; Bar05] 相反，而与 [Kho06; KR08a], 相同，因为它更契合 HOMFLY–PT 同调的分次约定。

对于任意正则点 $p$ （在 $\beta$ 上，即不是交叉的点）， $[\beta]$ 的一个双次数 (0,2) 自同态$X_p$ 由一组恒等协边给出，每个恒等协边都在包含 $p$ 的分支上放置一个点。令 $\beta_0$ 为 $\beta$ 的保向分解，该分解由 $n$ 条竖直弧给出。我们定义 $[\beta]$ 的一个双次数 (0,2) 自同态 $x_p$ 为

$$x_p := \begin{cases} X_p & \text{if } p \text{ lies on the odd indexed strand of } \beta_0, \\ -X_p & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这一符号选取是为了使下述命题成立。

**命题 1.1.** 如果两点 $p, q$ 位于同一条辫股上，且被一个交叉 $c$隔开，那么存在一个双次数 $(-1,2)$ 同伦 $\chi_c$，它由 $c$处局部微分的反转定义，从而得到

$$[d, \chi_c] = \pm(x_p - x_q).$$

$\chi_c$称为交叉 $c$的点滑动同伦。对于每个 $i = 1, \ldots, n$，定义与 $\beta$的端点对应的自同态，

$$x_i := x_{P_i}, \quad x'_i := x_{P'_i}.$$

这给出了多项式环 $R_n^e := \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_n; x'_1, \ldots, x'_n]$ 在 $[\beta]$上的作用。对于 $\beta$的第 $i$条辫股，存在一个双次数 $(-1,2)$ 同伦 $\xi_i$，从而得到

$$[d, \xi_i] = x_i - x'_{w(i)},$$

由位于 $P_i$ 和 $P'_{w(i)}$ 之间的交叉对应的点滑动同伦的带符号和定义（见图 1b）。此外，存在一个双次数 $(-2,4)$ 同伦 $u$，从而得到

$$[d, u] = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x'_{w(i)})\xi_i$$

由点滑动同伦的二次型定义。我们断言，自同态 $x_i$、$x'_i$、$\xi_i$和 $u$ 超交换（见命题 3.5）。这些是赋予 $\mathcal{A}_n^w$-模结构 所需的附加数据，$[\beta]$进而产生 $y$-化 以及与之相关的 $[\beta]$ 和 e-算子。

**定义 1.2。** $y$-化的 *Khovanov* 复形 $(y[\beta], D)$ 由辫子 $\beta$ 给出如下：

$$y[\beta] := [\beta] \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_n]$$

其（弯曲）微分为

$$D = d + \sum_i \xi_i y_i.$$

这里，每个 $y_i$都赋予双次数 $(2, -2)$，使得 $D$关于双次数 $(1, 0)$ 是齐次的。此外，$y[\beta]$ 配备了一个双次数为 $(-2, 4)$ 的自同态

$$\mathsf{e} := u + \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) \frac{\partial}{\partial y_i}$$

称为 $\beta$的 e-算子。[4]

这里，微分 $D$ 的平方为 $D^2 = \sum_i (x_i - x'_{w(i)})y_i$，该值非零，但链映射和链同伦仍以通常方式定义（见定义 2.5）。由上述方程可直接验证，e 是 $y[\beta]$的链自同态。我们将证明，

**定理 1.** $y[\beta]$ 的e-等变链同伦类型是辫子的不变量。

此外，对于闭辫，也有 $y$-化。注意，闭包 $\beta$ of $\beta$ 可以通过将 $\beta$ 插入图 1c 所示的 1 输入平面弧图 中来实现 1c。根据平面弧图的函子性，复形 $[\beta]$ 变为范畴 Cob( $[\beta]$ 中的复形$\varnothing$。作用 $x_i$ 和

[4] We 将 $e, f, h$ 记为李代数 $\mathfrak{sl}_2$的标准生成元，以及由e, f,给出的相应作用 h.

$x_i'$ 在 $[\beta]$ 上相等，因此 $[\beta]$ 成为一个中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模。令 $l$ 为 $\beta$的分支数。链索引同伦 $\xi_i (i = 1, \ldots, n)$ 导出分支索引同伦 $\xi_k (k = 1, \ldots, l)$，而度 $-2$ 同伦 $u$ 导出一个同伦 $\bar{u}$，使得

$$[d, \bar{\xi}_k] = 0, \quad [d, \bar{u}] = 2 \sum_{k=1}^{l} \bar{x}_k \bar{\xi}_k$$

(见命题 2.15)。此处，每个 $\bar{x}_k$ 均由以下作用定义： $x_p$ 在选定点 $p$ 上 $k$第个分支 $\beta$。根据定义1.2中的类似公式，我们得到闭辫 $y$-化的 *Khovanov* 复形 $(y[\beta], D)$ $\beta$ 在多项式环 $\mathbb{Q}[y_1, \ldots, y_l]$上的定义。对于这个 $y$-化复形，我们有 $D^2 = 0$，并且类似于定理 1，我们证明

**定理 2**。 等变链同伦类型 $y[\beta]$ 是线性.....的不变量 $k$.

最后，假设 $\beta$ 闭合后得到一个纽结。在这种情况下， $l = 1$，由定义可知 $\xi_1 = 0$ (见命题 3.33)。因此，我们有 $(y[\beta], D) = ([\beta] \otimes \mathbb{Q}[y], d)$，且底复形 $[\bar{\beta}]$ 是 $y[\bar{\beta}]$的子复形。此外，由于 $\frac{\partial}{\partial y}$ 在 $[\bar{\beta}]$上作用为零，链自同态 e 限制为 $\bar{u}$ 在 $[\beta]$上。我们也将e 用于表示限制到 $[\beta]$上的映射。我们证明:

**定理3**。 如果 $\beta$ 闭合后得到一个纽结， $[\beta]$ 的e-等变链同伦类型就是该纽结的不变量。

由于 $[\beta]$ 是 Cob(∅) 中的一个复形，我们可以应用重言函子 $\mathcal{F}_0$，得到通常的 Khovanov 复形 CKh($\beta$)。通过将 $\mathcal{F}_0$ 扩展到各个 $y$-化上，我们定义 $y$CKh($\beta$) := $\mathcal{F}_0(y[\beta])$，即 $\beta$ 的 $y$-化 Khovanov 复形；其同调 $y$Kh($\beta$) 则是 $\beta$的 $y$-化 Khovanov 同调。此外， $\mathcal{F}_0$(e) 给出 $y$CKh($\beta$) 的一个链自同态，并且还在$y$Kh($\beta$) 上诱导一个自同态，这两者都称为 e-算子。定理2和定理3立即推出，

**推论 1.3.** 设 $L$ 是由辫子 $\beta$表示的链环。 $y$-化的 *Khovanov* 同调 $y$*Kh*($\beta$)和e-算子是 $L$的不变量。特别地，对于纽结 $K$，*Khovanov* 同调 *Kh*($K$) 上的e-算子是 $K$的不变量。

在第 3节中，我们将在 $U(2)$-等变 *Khovanov* 同调的框架下表述上述论证，由此可以导出所有其他秩二变形。随后，通过证明在三种辫子关系下的不变性，证明定理 1 ；通过证明在两种马尔可夫变换下的不变性，证明定理 2 。证明大量依赖于第 *2* 节中建立的关于微分分次代数 $\mathcal{A}$上的 dg-模的一般框架。 $y$-化的约化版本 定义方式类似。

我们指出，上述论证在形式上与 [GH22；GHM24]中给出的论证完全相同。差异如下。(i) 我们定义自同态 $x_p$ 时，取决于点 $p$ 属于$\beta_0$ 的哪一条辫股；在HOMFLY–PT一侧则不需要这种调整。(ii) 我们在缠结的Khovanov同调的Bar-Natan框架上构造，见 [Bar05], ，而从 $\beta$ 到 $\beta$ 的过渡仅由闭包函子实现；在HOMFLY–PT一侧，他们基于辫子的Rouquier复形进行构造，见 [Rou04] ，闭合运算则如 [Kho07]的表述那样，通过取Hochschild上同调函子来实现。(iii) 我们的构造在任意交换环 $R$上成立，既包括未约化情形也包括约化情形；而他们的构造针对的是 $\mathbb{Q}$ （以及 $\mathbb{C}$）上的约化理论。(iv) $y$Kh与e-算子的不变性由显式的链同伦等价给出；而他们的则涉及微分分次代数更为复杂的拟同构。(v) 事实上，我们不必局限于辫子，也可以考虑一般的缠结图。因此，除(i)之外，我们的构造更为初等，并且非常适合图示操作与算法实现。

## 与 $y$化 HOMFLY–PT 同调的联系

在观察到我们的构造在形式上与 [GH22；GHM24], 中给出的构造完全相同之后，自然可以期望它们以一种可处理的方式相互关联。在 [Ras15], 中，Rasmussen对任意链环 $L$ 以及每一个 $N \geq 1$构造了一个谱序列，该谱序列从约化HOMFLY–PT同调$\mathcal{H}(L)$（即$L$的该同调）出发，并收敛到约化 $\mathfrak{sl}_N$-同调 $H_N(L)$（即 $L$的该同调）。特别地，对于 $N = 2$，已知 $H_2(L)$同构于约化Khovanov同调Kh($L^*$), 即 $L$ 的镜像的该同调（见[KR08a]）。在 [CG24], 中，Chandler与Gorsky将Rasmussen谱序列推广到 $y$-化的情形，从而对每一个 $N$给出一个谱序列，它从约化 $y$-化HOMFLY–PT同调$y\mathcal{H}(L)$出发，并收敛到约化 $y$-化 $\mathfrak{sl}_N$-同调 $yH_N(L)$。此外，已证明 $e$ 在 $\mathfrak{sl}_2$ 中于 $y\mathcal{H}(L)$上的作用（由 $F_2$-算子给出）可延拓到该谱序列上，并在 $yH_N(L)$上诱导出一个作用。在这些工作的基础上，我们证明

定理 *4.* 我们的构造与 *[GH22；GHM24]* 在 *[CG24]*的$y$化谱序列下的构造相容。具体而言，我们的约化 $y$化 *Khovanov* 同调 $yKh(L^*)$与约化 $y$化 $\mathfrak{sl}_2$-同调$yH_2(L)$同构，且相应的 *e*-算子与 $e$ 在$yH_2(L)$上的诱导作用一致。特别地，对于纽结 $K$，我们在 $Kh(K^*)$ 上的 *e*-算子与 $e$ 在 $H_2(K)$上的诱导作用一致。 —

如前所述， $y$化 HOMFLY–PT 同调给出一个链环分裂谱序列，类似于 Batson 与 Seed 在 Khovanov 同调上给出的谱序列 [BS15]。精确地说，对于链环 $L$，令 split($L$) 表示 $L$各分支的分裂并。Batson 与 Seed 给出 Khovanov 复形的一个形变，由此产生一个从 Kh($L$) 出发并收敛到 Kh(split($L$)) 的谱序列（ [BS15，定理 1.2]）。链环分裂谱序列的存在蕴含：(i) 它给出 $L$ 的分裂数的一个下界（[BS15，定理 1.2]），以及 (ii) $\mathbb{F}_2$-Khovanov 同调可检测平凡链环（[BS15，定理 1.3]）。类似地，$y$化 HOMFLY–PT 复形的一个特化产生一个从 $\mathcal{H}(L)$出发并收敛到 $\mathcal{H}$(split($L$))的谱序列（[GH22，定理 1.12]）。借助定理 4，我们可以将这一相似性表述为一个命题。首先，

**命题 1.4.** 由链环图 *[BS15]*, 得到的形变 *Khovanov* 复形 $D$，并配以一组权重 $\nu = \{\nu_c\}$，分别赋给 $c$ 的每个分支 $D$，与（作为滤过复形） $y$经过如下特化的 *y*-化 *Khovanov* 复形同构：

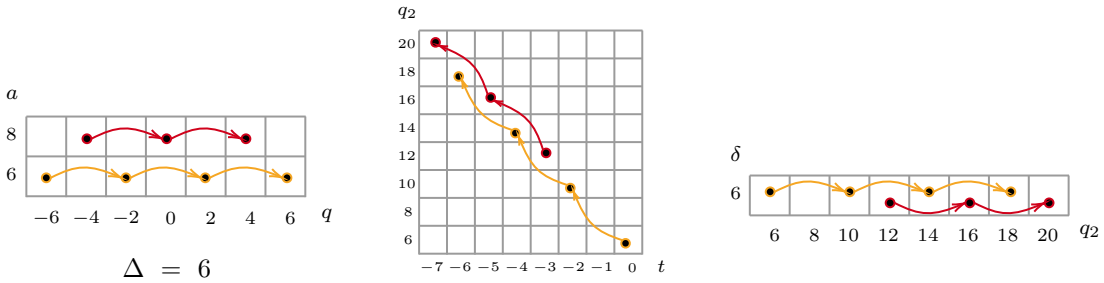
$$yCKh(D;\mathbb{Q}_\nu) := yCKh(D) \otimes_{\mathbb{Q}[y_1,\dots,y_l]} \mathbb{Q}_\nu$$

其中， $\mathbb{Q}_\nu$ 表示视为 $\mathbb{Q}[y_1,\dots,y_l]$-模的 $\mathbb{Q}$，且 $y_k$ 的作用方式为 $\nu_k$。特别地，若对于 $D$ 的每对分支 $(c,c')$， $\nu_c - \nu_{c'}$ 均可逆，则 $yCKh(D;\mathbb{Q}_\nu)$ 的同调 $yKh(D;\mathbb{Q}_\nu)$ 同构于 $Kh(\mathrm{split}(L))$。

现在，考虑以下四个谱序列：(i) Rasmussen 的谱序列 [Ras15]，用于 $N = 2$；(ii) 其 $y$-化扩展 [CG24]，经 $y_k = \nu_k$特化；(iii) Batson–Seed 的链环分裂谱序列 [BS15]，用于约化 Khovanov 同调；以及 (iv) 它的 HOMFLY–PT 类比 [GH22],

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(L) & \xRightarrow{\text{(iv)}} & \mathcal{H}(\mathrm{split}(L)) \\ \Big\Downarrow{\scriptstyle \text{(i)}} & & \Big\Downarrow{\scriptstyle \text{(ii)}} \\ \widetilde{Kh}(L^*) & \xRightarrow{\text{(iii)}} & \widetilde{Kh}(\mathrm{split}(L^*)). \end{array}$$

结合定理 4 和命题1.4，我们将看到，所有这些谱序列都源自 HOMFLY–PT 复形上的双重滤过。命题 4.12 给出了精确表述。




(a) $\mathcal{H}(7_1)$ (b) $\widetilde{Kh}(7_1^*)$ (c) $\widetilde{Kh}(7_1^*)$

图 2： $\mathcal{H}(7_1)$ 和 $\widetilde{Kh}(7_1^*)$ 的计算

## 计算

本节中，我们只考虑在 $\mathbb{Q}$ 上的约化版 HOMFLY–PT 同调和 Khovanov 同调，因此省略“约化”这一修饰语。

建立起 HOMFLY–PT 同调上的 e-算子与 $\mathcal{H}$ Khov$\widetilde{\text{anov}}$ 同调上的 $Kh$之间的桥梁后，我们针对具体示例计算 e 在$Kh$ 上的作用，并观察它们与$\mathfrak{sl}_2$-作用于 $\mathcal{H}$之间的关系。在 [NS25], 中，Nakagane 和作者给出了计算 HOMFLY–PT 同调的算法，并对所有最多有 11 个交叉的素纽结进行了计算。这些计算结果将与作者开发的程序 [YUI], 结合使用。该程序现已具备计算 Khovanov 同调上e-算子的功能。[5]

首先固定约定。我们采用 $\mathcal{H}$ [Ras15], Rasmussen三重分次，其中我们将分次函数记为 $(q,\ a,\ v)$。它对应于 $Kh$ 在谱序列下的通常双分次 $(t,\ q_2)$，即

$$t = \frac{v-a}{2}, \quad q_2 = q + 2a. \tag{1.1}$$

在 $\mathcal{H}$ 上的 $\Delta$-分次 定义为

$$\Delta = q + a + v$$

$\widetilde{\text{这}}$与$Kh$ 上的 $\delta$-分次 一致，其定义为

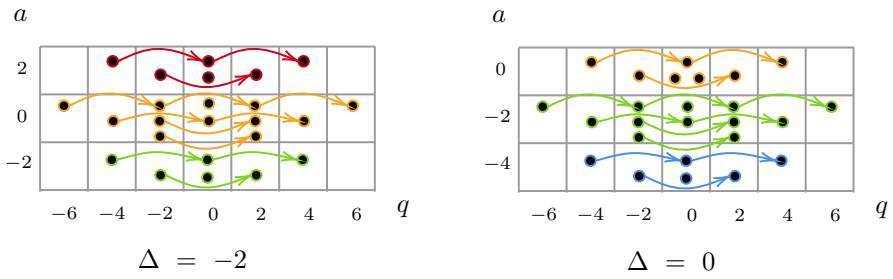
$$\delta = 2t + q_2.$$

若纽结 $K$ 的 $\mathcal{H}(K)$仅支撑在单一 $\Delta$-分次上，则称其为*KR*-薄纽结。对于这样的纽结，$\widetilde{\text{谱}}$序列在 $E_1$ 页坍缩，并给出 $\mathcal{H}(K) \cong Kh(K^*)$。特别地，KR-薄结$\widetilde{\text{是}}$$Kh$-薄的，即$Kh(K^*)$支撑在 $\delta = \Delta$上。

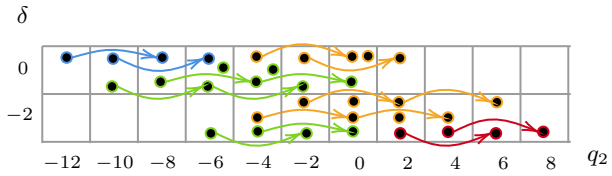
现在考虑 $K = 7_1$，即 (2,7)-环面纽结，已知它是 KR-薄的。图 2a 展示了$\mathcal{H}(7_1)$，采用 [CG24], 提出的格式，将单个切片 $\Delta = 6$ 表示为一个双分次 $\mathbb{Q}$-模，其双分次为 $(q,a)$。位于 $(q,a)$ 的单元格中的点 $\bullet = (i,j)$ 表示 $\mathcal{H}^{i,j,\Delta-(i+j)}(7_1)$的一个生成元。为便于观察，点按 $a$-分次着色。箭头表示 $e$的作用；可以看到两个不可约 $\mathfrak{sl}_2$-表示，其中 $h$ 的作用为 $\frac{1}{2}q$。 $\mathfrak{sl}_2$作用呈现出明显的对称性 $(q,a) \leftrightarrow (q^{-1},a)$，体现在表格上（[GHM24，定理 1.2]）。

在右侧，图2b 展示了$\widetilde{Kh}(7_1^*)$ 作为一个带双分次的 $\mathbb{Q}$-模，其双分次为 $(t,q_2)$。图2c展示了相同的同调，但采用另一种双分次 $(\delta,q_2)$，其中 $q_2$ 位于水平轴上。显然，两者包含的信息量相同，但我们更倾向于使用后者，因为它更紧凑，并且更清楚地展示了 $\mathcal{H}$ 之间的对应关系。对e算子在

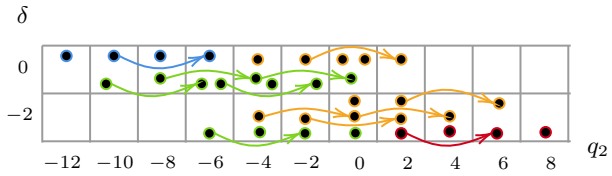
[5]截至2026年2月，该程序正在准备向公众发布。




(a) $\mathcal{H}(K_C) \cong \mathcal{H}(K_{KT})$




(b) $\widetilde{Kh}(K_C^*)$




(c) $\widetilde{Kh}(K_{KT}^*)$

图 3：通过 $e$ 的作用区分 $K_C$ 和 $K_{KT}$

$\widetilde{\text{Kh}}$ 表明，$e$ 的作用如箭头所示；并且根据 (1.1) 中的对应关系，我们可以确认，带双分次的 $\mathbb{Q}[e]$-模结构与 $\mathcal{H}$ 上的结构同构。（在命题 5.12 中，我们确定了所有 $(2, 2k+1)$-环面纽结的 $\mathbb{Q}[e]$-模结构，并发现这一模式通常也出现在$\widetilde{\text{Kh}}$中。）然而，$\mathcal{H}$ 的对称性在 Kh 中消失了，而在 $a = 6$上彼此分离的两条 $e$-串——$\widetilde{\text{Kh}}$和 $\mathcal{H}$ 中的 8——在 Kh 中塌缩到同一条线上。KR-薄结也是如此：从 $\mathcal{H}$ 转到 Kh 时，只是将 $a$-分次塌缩，并失去了可见的 $\mathfrak{sl}_2$-对称性。

对于 [NS25], 中所有交叉数不超过 11 的素纽结，我们找出了 96 个 KR-厚素纽结，并进一步按照 HOMFLY–PT 同调相同进行分组，得到 44 组，每组包含两个或更多不同的纽结。从结不变量精细化的角度来看，这些正是我们感兴趣的对象。我们的计算表明，

**定理 5.** *Conway* 结 $K_C = 11n_{34}$ 和 *Kinoshita–Terasaka* 结 $K_{KT} = 11n_{42}$ 具有相同的 *HOMFLY–PT* 同调和约化 *Khovanov* 同调，但它们在约化 *Khovanov* 同调上的e算子不同（即它们作为双分次 $\mathbb{Q}[e]$-模并不同构）。

回顾一下，$K_C$ 和 $K_{KT}$ 是康威突变对，很难用经典结不变量加以区分。它们的 Alexander 多项式和 Conway多项式均为平凡多项式；Jones、HOMFLY–PT 和 Kauffman多项式相同（因为这些多项式具有突变不变性）；而且它们是代数切结（因此符号为零）。现代切片环面不变量，例如 Rasmussen 的 $s$-不变量 [Ras10] 以及 Ozsv´ath–Szab´o 的 $\tau$-不变量 [OS03]，也无法区分它们。对至多有 11 个交叉的纽结进行的 Khovanov 同调计算见 [Bar02], ；而关于这两个纽结具有相同的 Khovanov 同调这一点，则在 [Weh03]中有明确陈述。这两个纽结具有相同的 HOMFLY–PT

同调相同这一点已在 [MV08] 中得到证明。能够区分这两个纽结的不变量包括：纽结群[Ril71], 、亏格 $g(K_C) = 3$、 $g(K_{KT}) = 2$ [Gab86], ，以及切片亏格 $g_4(K_C) \neq g_4(K_{KT}) = 0$ [Pic20]；这些结果都极具非平凡性。纽结 Floer 同调也能区分这两个纽结，因为它能够检测亏格 [OS03]；具体计算见 [OS04; BG12]。至于量子不变量，某些带色 HOMFLY–PT 多项式能够将它们区分开来 [MC96; NRS17]。详细综述见 [Hom22]。定理 5 将带有 e 的 Khovanov 同调列入有效方法之中，特别是表明 e 不是突变不变量。

我们来观察这两个同调群的双分次 $\mathbb{Q}[e]$-模结构有何不同。首先，图 3a 展示了由 $\Delta = -2, 0$ 支撑的 $\mathfrak{sl}_2$-模 $\mathcal{H}(K_C) \cong \mathcal{H}(K_{KT})$。由于它们的 KR-厚度为 2，每个谱序列都在第 $E_2$ 页坍缩。图 3b 和 3c 展示了计算得到的 $\mathrm{Kh}(K_C^*)$ 和 $\mathrm{Kh}(K_{KT}^*)$ 的 $\sim$ $\sim\mathbb{Q}[e]$-模结构（不含颜色）。注意，作为双分次 $\mathbb{Q}$-模，它们同构；但作为双分次 $\mathbb{Q}[e]$-模，它们并不同构。例如，比较 $\widetilde{}$ 两张表的左端或右端，可以看到 $\mathrm{Kh}(K_{KT}^*)$ 中有孤立的直和项，而 $\mathrm{Kh}(K_C^*)$ 中没有。进一步分析关于 $\mathbb{Q}[e]$的谱序列，我们可以确定 $E_2$ 页的三重分次 $\mathbb{Q}[e]$-模结构，从而得到图 3b 和 3c 中所示的颜色。详细论证见第 6.3 节。

在命题6.1中，我们再给出三对纽结：它们的 HOMFLY–PT 和 Khovanov 同调都相同，但其 Khovanov 同调上的 e-算子不同，具体如下：

$$(11n_{39}, 11n_{45}), \quad (11n_{73}, 11n_{74}), \quad (11n_{151}, 11n_{152}).$$

不过，在交叉数不超过 11 个的素纽结中，有 40 组纽结无法通过 HOMFLY–PT、Khovanov 同调和 e 共同区分；例如，纽结对 $(8_8, m(10_{129}))$。如果只考虑 Khovanov 同调，那么在 Khovanov 同调相同的 90 组纽结中，有 57 组因具有不同的 e-算子而被排除（命题 6.2）。

## 未来方向

1. 作为这项工作的延续，我们将研究 $y$-化的 Khovanov 同调和 e-算子在链环协边下的表现。我们有可能通过借鉴 Lipshitz 和 Sarkar 在 [LS14b], 中的方法，得到 $s$-不变量的一种精化；他们借助 *Khovanov* 同调上的 *Steenrod* 平方，对$s$进行了精化。

2. 在 [Imo+26; Imo+25]，Imori、Sato、Taniguchi 和作者研究了 Kronheimer 与 Mrowka 从 Khovanov 同调到奇异瞬子同调的谱序列 [KM11], ，并证明：（i）该谱序列与协边映射相容；（ii）这种相容性还可推广到浸入协边。我们可以问，能否在奇异瞬子这一侧定义一个类似的 e-算子，使其与我们的 e 相容，并且关于协边具有自然性。

$\widetilde{}$3. 如上所见，当我们从 $\mathcal{H}$ 过渡到 $Kh$时， $\mathcal{H}$ 上的 $\mathfrak{sl}_2$-对称性会消失。不过，我们仍可以问，Khovanov 同调是否具有一种自然的 $\mathfrak{sl}_2$-作用，能以某种意义与 Rasmussen 谱序列下 $\mathcal{H}$ 上的作用相容。如果存在这样的作用，那么探究其几何或物理解释将会很有意思。

4. 近年来，人们开始关注如何为 HOMFLY–PT 同调和（等变） $\mathfrak{gl}_N$ 同调赋予 $\mathfrak{sl}_2$-作用 [KR16; Qi+23; Qi+24]。与 Gorsky–Hogancamp–Mellit 的 $\mathfrak{sl}_2$-作用不同，这些作用的同调次数均为 0。一个有趣的问题是，这类作用是否也能特化到 Khovanov 同调，以及它们如何与源自 $\mathfrak{sl}_2$-化的 $y$-作用相互作用。

### 组织

本文组织如下。第 2 节中，我们建立 $\mathcal{A}$-模及其 $y$-化的一般框架，并将 [GHM24] 的方法调整到我们的情形。第 3 节中，我们为辫子和链环构造$y$-化的 Khovanov 复形，并证明定理 1 至定理 3，同时将结果推广到等变情形（定理 3.12、3.18 和 3.35）。第 4 节中，我们通过 Rasmussen 谱序列，将我们的构造与 [GH22; GHM24] 的 $y$-化 HOMFLY–PT 同调联系起来，并证明定理 4 及其在变形情形下的推广（定理 4.6）。我们还证明了它与 Batson–Seed 的链环分裂谱序列 [BS15]之间的关系。第 5 节中，我们本着 [Bar07], 的思路，发展了针对 $y$-化 Khovanov 同调的图示化约化技巧，并完整描述了 $(2, 2k+1)$-环面纽结和扭结的 Khovanov 同调上的 $\mathbb{Q}[e]$-模结构。最后，第 6 节中，我们介绍实现方法并展示计算结果，包括证明定理 5 的结果，并在第 6.3 节中进行详细分析。


### 致谢

作者感谢 Mikhail Khovanov 建议研究 Khovanov 同调上的 $\mathfrak{sl}_2$-作用。作者还感谢 Motoo Tange 和 Tetsuya Abe 给予他在会议*Differential Topology '26*上报告这项工作的机会。作者得到 JSPS KAKENHI 资助编号 23K12982 以及 academist 众筹项目编号 121 的支持。


## 2 $\mathcal{A}$-模与 $y$-化

### 2.1 微分分次代数 $\mathcal{A}$

在此，我们介绍微分分次代数（微分分次代数）的一个简化版本 $\mathcal{A}$ 定义于 [GHM24，定义 3.4、3.15]。在本节中，我们令 $R$ 为任意交换环，且 $n$ 为正整数。设

$$R_n := R[x_1, \dots, x_n]$$

and

$$R_n^e := R[x_1, \dots, x_n; x_1', \dots, x_n'].$$

此外，考虑由以下方式给出的 $R_n^e$ 的商

$$B_n := \frac{R_n^e}{\left(\sum_{i=1}^n x_i^k = \sum_{i=1}^n (x_i')^k \ ; \ k = 1, \dots, n\right)}.$$

$R_n^e$ 和 $B_n$ 都自然地是 $R_n$-$R_n$ 双模。特别是，当 $R$ 是特征为 0 的域时，也可以改写为

$$B_n = R^n \otimes_{R_n^S} R^n$$

其中， $R_n^S$ 是关于 $n$ 个变量的对称多项式代数。通过赋予量子次数，环 $R_n$， $R_n^e$， $B_n$ 具有分次环结构

$$\deg_q(x_i) = \deg_q(x_i') = 2.$$

**定义 2.1**。 设 $w \in \mathfrak{S}_n$ 为一个置换。微分分次代数 $\mathcal{A}_n^w$ 定义在 $B_n$ 上，定义如下。令 $\mathcal{A}_n^w$ 为由元素 $\xi_i (i = 1, \dots, n)$（度为 $-1$）和 $u$（度为 $-2$）自由生成的分次交换 $B_n$-代数，再对 $\xi_i$的平方所生成的理想取商。度为 1 的微分 $d$ 定义为

$$d(\xi_i) = x_i - x'_{w(i)}, \quad d(u) = \sum_{i=1}^n (x_i + x'_{w(i)})\xi_i.$$

$\mathcal{A}_n^w$ 还配备了与 $B_n$相容的量子分次，其定义还额外规定 $\deg_q(\xi_i) = 2$ 和 $\deg_q(u) = 4$。

可以通过以下方式看出， $d$ 确实是一个微分

$$\begin{aligned} d^2(u) &= \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) d(\xi_i) \\ &= \sum_i (x_i^2 - x'^2_{w(i)}) \\ &= \sum_i x_i^2 - \sum_i x_i'^2 \\ &= 0. \end{aligned}$$

注 2.2. 与 $\mathcal{A}_n^w$ 中给出的 [GHM24定义 3.4、3.15], 相比，我们删去了生成元 $u_k\,(k = 1, \ldots, n)$，但保留了 $u = u_2$。

$\mathcal{A}_n^w$ 的主分次称为同调分次，其次数函数记为 $\deg_t$。为简洁起见，我们将 $a \in \mathcal{A}_n^w$写作 $|a| = \deg_t(a)$。本文中，我们使用超交换子

$$[a, b] = ab - (-1)^{|a||b|} ba.$$

**定义 2.3**。设 $C$ 是定义在 $B_n$ 上的一个双分次链复形，其微分为 $d$ ，次数为 (1,0)。若 $C$具有 $\mathcal{A}_n^w$-模 结构，则称其为一个 $\mathcal{A}_n^w$-模；这意味着存在 $\mathcal{A}_n^w$的一个作用，使得对每个元素 $a \in \mathcal{A}_n^w$， $d(a)$ 的作用与超交换子的作用一致

$$[d, a] = d \circ a - (-1)^{|a|} a \circ d.$$

令 $\mathrm{Kom}^{\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C})$ 表示有界 $\mathcal{A}_n^w$-模及 $\mathcal{A}_n^w$-线性链映射所构成的范畴，也就是说，链映射与 $\mathcal{A}_n^w$的作用相交换。

## 2.2 $y$-化来自 $\mathcal{A}$-模

沿用 [GH22，第 2 节。5], 我们在任意分次 $y$-线性范畴中定义复形的 $C$ 。 $R_n^e$ $\mathcal{C}$。对于非负多重指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^n$，令 $y^\alpha$ 表示单项式 $\Pi_i y_i^{\alpha_i} \in R[y_1, \ldots, y_n]$。

**定义 2.4**。设 $\mathcal{C}$ 是一个分次 $R$-线性范畴， $C = \{C_p\}_{p \in \mathbb{Z}}$ 是 $\mathcal{C}$中对象的一个有界序列。 $C$ 与多项式环 $R[\mathbf{y}] = R[y_1, \ldots, y_n]$的形式张量积，记作$C[\mathbf{y}] = C \otimes R[y_1, \ldots, y_n]$，是 $\mathcal{C}$中的一个无限序列的对象，其第 $p$ 个对象由以下有限直和给出

$$(C[\mathbf{y}])^p := \bigoplus_{k \geq 0} \bigoplus_{|\alpha| = k} C^{p-2k} y^\alpha.$$

这里, $k$ 遍历非负整数，而 $\alpha$ 遍历总次数为的多重指数

$$|\alpha| = \sum_i \alpha_i = k.$$

每个 $y_i$ 都被赋予双次数 $(2, -2)$，而 $C^{p-2k} y^\alpha$ 是 $C^{p-2k}$ 的一个副本，其双次数平移了 $(2k, -2k)$。对于一列度为 $a$ 的映射 $f = \{f_p\}_{p \in \mathbb{Z}} \colon C \to C'$ ，以及任意多重指数 $\gamma$，定义一个映射

$$f \otimes y^\gamma \colon C[\mathbf{y}] \to C'[\mathbf{y}]$$

其度为 $a+2|\gamma|$，由以下一列态射定义

$$C^p y^\alpha \xrightarrow{f^p} C'^{p+a} y^{\alpha+\gamma}.$$

下文中，若不会引起混淆， $f\otimes y^\gamma$ 将记作 $fy^\gamma$。

**定义 2.5.** 设 $\mathcal{C}$ 为一个分次的 $R_n^e$-线性范畴， $C$ 为 $\mathcal{C}$ 中的一个有界链复形，其微分为 $d$。 $y$-化 $C$ 是一个三元组（$C[\mathbf{y}]$， $w$， $D$），满足以下条件：(i) $w\in\mathfrak{S}_n$是一个置换；(ii) $D$ 是 $C[\mathbf{y}]$ 的一个自同态，且 $D\equiv d$ 模（$\mathbf{y}$）；(iii)（$C[\mathbf{y}]$， $D$）是一个弯曲复形，其曲率为

$$D^2=\sum_{i=1}^n (x_i-x'_{w(i)})y_i.$$

令 $y\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$表示由 $y$-化复形和（弯曲）链映射构成的范畴。

注意，曲率 $D^2$ 属于 $D$ 的中心 $\mathcal{C}$，即它与 $\mathcal{C}$中的所有态射都可交换。关于弯曲复形的一般处理，参见[GH22，附录 A] 。我们称 $y\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$中的对象为$y$-复形，称 $y\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$中的态射为 $y$-链映射。

**命题 2.6。** 存在一个同伦不变忠实函子

$$y\colon \mathrm{Kom}_{\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C})\to y\,\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$$

使得对于 每个 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C$，它赋予一个 $y$-化 $y(C)\colon=(C[\mathbf{y}],w,D)$，其微分为 $C$ $al$

$$D:=d+\sum_i \xi_i y_i,$$

对于每个 $\mathcal{A}_n^w$-同态 $f\colon$ $C\to C'$，它赋予一个 $y$-链映射

$$y(f):=f\otimes 1\colon C[\mathbf{y}]\to C'[\mathbf{y}].$$

证明。 我们验证 $y(C)$ 是一个 $y$-复形。定义2.5的条件 (i)、(ii) 显然。对于条件 (iii)，我们有

$$D^2=d^2+\sum_i (d\xi_i+\xi_i d)y_i+\sum_{i,j}\xi_i\xi_j y_i y_j.$$

第一项为 0，第二项恰好是曲率，第三项是

$$\sum_i \xi_i^2 y_i^2+\sum_{i<j}[\xi_i,\xi_j]y_i y_j=0$$

由定义 2.1 中给出的条件。 □

我们称 $y(C)$ 为命题 2.6 中的 $y$-化（相关联于 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C$）。Next，按照 [GHM24，定理 1.9]，中给出的公式，我们定义算子 $\mathsf{e}$ 于 $y(C)$ 上，利用 $u$ 的作用。[6]

**定义 2.7.** 我们沿用定义 2.5 的假设。第 $i$ 个形式偏导数

$$\frac{\partial}{\partial y_i}\colon C[\mathbf{y}]\to C[\mathbf{y}]$$

由一个映射阵列定义

$$C^p y^\alpha \xrightarrow{\alpha_i} C^p y^{\alpha-e_i}.$$

这里， $e_i$ 表示第 $i$ 个分支为 1、其余分支均为 0 的多重指数 .

[6]在 [GHM24], 中，相应的算子记作 $F_2$。在 [CG24], 中，则将其替换为 $E$，以强调它对应于一个 $\mathfrak{sl}_2$-作用的升算子（参见其中的注记 3.24）。

**引理 2.8**。 对于满足 $[f,g]=0$ 的映射 $f,g\colon C\to C'$，我们有

$$[f\frac{\partial}{\partial y_i},gy_j]=fg\delta_{i,j}.$$

**命题2.9**。对于一个 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C$，

$$\mathsf{e}:=u+\sum_i(x_i+x'_{w(i)})\frac{\partial}{\partial y_i} \tag{2.1}$$

给出一个 $y(C)$ 上的链自同态，其双次数为$(-2,4)$。

证明。计算

$$[D,\mathsf{e}]=[d,u]+\sum_i[\xi_i,u]y_i+\sum_i[d,x_i+x'_{w(i)}]\frac{\partial}{\partial y_i}+\sum_{i,j}\xi_i(x_j+x'_{w(j)})[y_i,\frac{\partial}{\partial y_j}].$$

第二项和第三项为零，而第一项和第四项相互抵消。 □

我们将命题2.9中的自同态e称为与 -模 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C$相关联的 e-算子。为了从范畴论角度表述命题 2.9 ，我们引入 e-等变 -复形 $y$的范畴，其中等变性是在同伦意义下考虑的。

**定义 2.10**。 e-等变 $y$-复形的范畴，记作 $y\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C})$，定义如下。 $y\,\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C})$的一个对象是一个有序对 $(C,\mathsf{e})$，其中 $y$-复形 $C$ 属于 $y\,\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$，且 e 是一个双次数为 $\tilde{}(-2,4)$ 的自同态。对象 $(C,\mathsf{e}),(C',\mathsf{e}')$ 之间的一个态射 $(F,F)$ 是由一个 $y$-链映射 $F\colon C\to C'$ 和一个 $\tilde{}$度为 $-3$的同伦 $F$ 组成的有序对，满足

$$[D,\tilde{F}]+[\mathsf{e},F]=0.$$

对象 $C$ 的恒等态射由 $(I_C,0)$ 给出，而复合映射定义为

$$(G,\tilde{G})\circ(F,\tilde{F}):=(GF,\ \tilde{G}F+G\tilde{F}).$$

$\tilde{}$ $\tilde{}$在 $y\,\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C})$ 中的态射 $(F,F)$ 称为 e-等变 $y$-链映射。特别地，若 $F=0$，则称其为 严格 e-等变 $y$-链映射。

容易看出， $y\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C})$ 确实是一个范畴。注意，存在一个显然的遗忘函子 $y\,\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C})\to y\mathrm{Kom}(\mathcal{C})$。

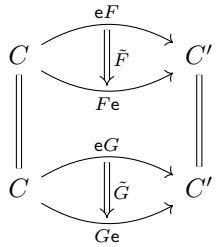
$\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$ $\tilde{}$**定义 2.11**。 设 $(F,F)$，$(G,G')\colon C\to C'$ 是两个 e-等变 $y$-链映射。若存在一对同伦 $(H,H)$，其中 $H$ 是度为 $-1$ 的同伦，满足以下条件，则称 $(F,F)$，$(G,G')$ $\tilde{}$（等变）同伦

$$F-G=[D,H]$$

$\tilde{}$且 $H$ 是一个度为 $-4$ 的同伦，满足

$$\tilde{F}-\tilde{G}=[D,\tilde{H}]+[\mathsf{e},H].$$

$\tilde{}$度 $-4$同伦 $H$ 在定义2.11 可以理解为一个填充下列圆柱的 3-胞腔。该圆柱由四个度为 $-3$ 的同伦组成：




可以验证，同伦给出一个等价关系。

**命题 2.12.** 函子 $y$ （命题 2.6 ）提升为一个同伦不变忠实函子

$$y\colon \mathrm{Kom}_{\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C}) \to y\,\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C}).$$

## 2.3 中心的 $\mathcal{A}$-模的约化

接下来，我们考察辫子闭合算子的一个代数类比 $\beta \mapsto \beta$。我们沿用 [GHM24第 5 节中给出的论证1]。

**定义 2.　　13.** 若一个 $R_n$-$R_n$ 双模 $X$ 的 $x_i \in R_n$ 左作用和右作用相等，则称其为中心的　　.

**定义 2.14**。 设 $w \in \mathfrak{S}_n$ 为一个置换。定义一个 $R_n$ 上的微分分次代数（dga） $\mathcal{CA}_n^w$ 如下。设 $\mathcal{CA}_n^w$为由元素 $\xi_i$( $i = 1$、.....、 $n$)自由生成的分次交换 $R_n$-代数，这些元素的度为 $-1$，而$u$ 的度为 $-2$，再模去由 $\xi_i$的平方生成的理想。微分 $d$ 定义如下:

$$d(\xi_i) = 0, \quad d(u) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + x_{w(i)})\xi_i.$$

$\mathcal{CA}_n^w$ 还赋有量子分次，与定义2.1中的定义相同。

微分分次代数 $\mathcal{CA}_n^w$ 也可以定义为商 $\mathcal{A}_n^w/I\mathcal{A}_n^w$，其中 $I \subset R_n^e$ 是由 $x_i - x_i'$ 生成的理想。中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模不过就是一个 $\mathcal{CA}_n^w$-模，而 $\mathcal{CA}_n^w$-模范畴 $\mathrm{Kom}^{\mathcal{CA}_n^w}(\mathcal{C})$ 可以视为 $\mathrm{Kom}^{\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C})$ 的全子范畴。当 $w = \mathrm{id}_n$ 时，我们记作 $\mathcal{CA}_n = \mathcal{CA}_n^{\mathrm{id}}$。我们将证明，任意中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模都可以约化为一个更小的 $\mathcal{CA}_l$-模。

对于一个置换 $w \in \mathfrak{S}_n$，考虑其循环分解

$$w = (i_{1,1} \cdots i_{1,n_1}) \cdots (i_{l,1} \cdots i_{l,n_l}). \tag{2.2}$$

这里， $l$ 是循环的个数， $n_k$ 是第 $k$ 个循环的长度，因此 $\sum_k n_k = n$， $w(i_{k,\,j}) = i_{k,\,j+1} (j \in \mathbb{Z}/n_k)$ 且 $\{i_{k,j}\}_{k,\,j} = \{1, \ldots, n\}$。固定 $w$ 的这样一个循环分解后，对于一个 $\mathcal{A}_n^w$- 模 $C$，我们记自同态 $x_{k,\,j} := x_{i_{k,\,j}}$ 和 $\xi_{k,\,j} := \xi_{i_{k,\,j}}$。

**Pr命题 2.15.** 考虑循环分解 (2.2) *of* $w$. 对于环嵌入

$$i\colon R_l \hookrightarrow R_n, \quad x_k \mapsto x_{k,1} \ (k = 1, \ldots, l),$$

存在一个定义在 $R_l$ 上的微分分次代数态射

$$\bar{i} : \mathcal{CA}_l \to i^*\mathcal{CA}_n^w$$

其映射方式为

$$\xi_k \mapsto \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j} \ (1 \le k \le l)$$

*and*

$$u \mapsto u + \sum_{k=1}^{l} \tilde{u}_k, \quad \tilde{u}_k := \sum_{1 \le j < j' \le n_k} \xi_{k,j}\xi_{k,j'}.$$

证明。 记 $\bar{x}_k = i(x_k)$、 $\bar{\xi}_k = i(\xi_k)$ 和 $\bar{u} = i(u)$。容易看出

$$\bar{\xi}_k^{\,2} = 0, \quad [\bar{\xi}_k, \bar{\xi}_{k'}] = 0, \quad [\bar{\xi}_k, \bar{u}] = 0$$

因此 $i$ 是定义良好的分次代数映射。接下来只需证明 $\bar{x}_k, \bar{u}$ 满足定义2.14中的条件。首先,

$$d(\bar{\xi}_k) = \sum_{j=1}^{n_k} d(\xi_{k,j}) = \sum_{j=1}^{n_k} (x_{k,j} - x_{k,j+1}) = 0.$$

接下来，对于每个 $k$,

$$\begin{aligned} d(\tilde{u}_k) &= \sum_{j<j'} d(\xi_{k,j})\xi_{k,j'} - \sum_{j<j'} \xi_{k,j} d(\xi_{k,j'}) \\ &= \sum_{j<j'} (x_{k,j} - x_{k,j+1})\xi_{k,j'} - \sum_{j<j'} \xi_{k,j}(x_{k,j'} - x_{k,j'+1}) \\ &= \sum_{j=1}^{n_k} (2x_{k,1} - (x_{k,j} + x_{k,j+1}))\xi_{k,j}. \end{aligned}$$

因此,

$$d(\bar{u}) = d(u) + \sum_k d(\tilde{u}_k) = \sum_{k,j} (2x_{k,1})\xi_{k,j} = 2\sum_k \bar{x}_k \bar{\xi}_k. \qquad \square$$

**命题 2.16.** 命题 *2.15* 中的微分分次代数态射导出了一个函子

$$\bar{i}^* \colon \mathrm{Kom}_{\mathcal{CA}_n^w}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Kom}_{\mathcal{CA}_l}(i^*\mathcal{C}).$$

这里， $i^*\mathcal{C}$ 表示通过环同态 $i$对 $\mathcal{C}$ 作拉回所得到的 $R_l$-线性范畴。

¯ ¯对于一个中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C$， $\mathcal{CA}_l$-模 $C := i^*C$ 称为 相对于 $C$ 的循环分解（2.2）的约化 $w$。

¯**命题 2.17.** 设 $C$ 是一个中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模， $C$ 是 $w$的一个循环分解¯所给出的 $C$ 的约化。相应的 $y$-化 $y(C) = (C[y_1, \dots, y_l], \mathsf{id}, D)$ 的微分为

$$D = d + \sum_{k=1}^{l} \bar{\xi}_k y_k$$

以及相应的e-算子

$$\mathsf{e} = \bar{u} + 2\sum_{k=1}^{l} \bar{x}_k \frac{\partial}{\partial y_k}.$$

现在，假设我们将 $w$ 的另一个循环分解选为

$$w = (i'_{1,1} \cdots i'_{1,n_1}) \cdots (i'_{l,1} \cdots i'_{l,n_l}),$$

使得这些循环的编号与方程（2.2）相同，且每个循环中的指标相差一个循环置换。由命题 2.15，这给出了另一个环嵌入

$$i' \colon R_l \hookrightarrow R_n$$

以及一个微分分次代数态射

$$\bar{i}' \colon \mathcal{CA}_l \to i'^*\mathcal{CA}_n^w.$$

记 $\bar{x}'_k = i'(x_k)$、 $\bar{\xi}'_k = \bar{i}'(\xi_k)$和 $\bar{u}' = \bar{i}'(u)$。对于每个 $k$， 令 $t_k$ 为满足条件的唯一指标，使得 at

$$i'_{k,1} = i_{k,t_k}.$$

**引理 2.18**。

$$\bar{x}_k - \bar{x}'_k = d(\xi_{k,1} + \cdots + \xi_{k,t_k-1}), \quad \bar{\xi}_k = \bar{\xi}'_k, \quad \bar{u} - \bar{u}' = \sum_k (\tilde{u}_k - \tilde{u}'_k)$$

其中

$$\tilde{u}_k - \tilde{u}'_k = 2(\xi_{k,1} + \cdots + \xi_{k,t_k-1})(\xi_{k,t_k} + \cdots + \xi_{k,n_k}).$$

证明。 前两个方程很容易。对于第三个，

$$\begin{aligned}\tilde{u}_k - \tilde{u}'_k &= \sum_{1\le j<j'\le n_k} \xi_{k,j}\xi_{k,j'} - \sum_{1\le j<j'\le n_k} \xi_{k,t_k+j}\xi_{k,t_k+j'} \\ &= \sum_{\substack{1\le j<t_k \\ t_k\le j'\le n_k}} \xi_{k,j}\xi_{k,j'} - \sum_{\substack{t_k\le j\le n_k \\ 1\le j'<t_k}} \xi_{k,j}\xi_{k,j'} \\ &= 2\sum_{\substack{1\le j<t_k \\ t_k\le j'\le n_k}} \xi_{k,j}\xi_{k,j'}.\end{aligned}$$

□

**命题 2.19.** 设 $C$ 是一个中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模，且 $C, C'$ 是由对 $w$的两个循环分解得到的 $C$ 的约化。那么，相应的两个 $y$-化 $y(C)$和 $y(C')$ 具有相同的复形、同伦的 $R_l$-作用，以及同伦的e-算子（视为定义在 $R$上）。

证明. 由引理 2.18可知， $y(C)$ 和 $y(C')$ 具有相同的复形，且其$R_l$-作用同伦。两个 e-算子的差为

$$\mathsf{e} - \mathsf{e}' = \sum_{k=1}^{l} \left( (\tilde{u}_k - \tilde{u}'_k) + 2(\bar{x}_k - \bar{x}'_k)\frac{\partial}{\partial y_k} \right).$$

考虑一个度为 $-3$的同伦

$$h_k := 2(\xi_{k,1} + \cdots + \xi_{k,t_k-1})\frac{\partial}{\partial y_k}.$$

我们有

$$[d, h_k] = 2(\bar{x}_k - \bar{x}'_k)\frac{\partial}{\partial y_k}$$

and

$$\begin{aligned}[\bar{\xi}_k y_k, h_k] &= 2(\xi_{k,1} + \cdots + \xi_{k,t_k-1})\bar{\xi}_k \\ &= 2(\xi_{k,1} + \cdots + \xi_{k,t_k-1})(\xi_{k,t_k} + \cdots + \xi_{k,n_k}) \\ &= \tilde{u}_k - \tilde{u}'_k.\end{aligned}$$

因此， $h = \sum_k h_k$ 给出 $\mathsf{e} \simeq \mathsf{e}'$。

□

命题 2.19 可改述为：两个 $y$-复形 $(y(C), \mathsf{e})$ 和 $(y(C'), \mathsf{e}')$ 通过 $(F, F) = (\mathrm{id}\ h)$ e-等变同构。总结如下：

**命题 2.20.** 命题的函子的复合*2.12* 与 *2.16*

$$\mathrm{Kom}_{\mathcal{CA}_n^w}(\mathcal{C}) \xrightarrow{red.} \mathrm{Kom}_{\mathcal{CA}_l}(i^*\mathcal{C}) \xrightarrow{y} y\,\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\bar{\mathcal{C}}),$$

在自然同构的意义下，与所选的 $w$的循环分解无关。这里， $\mathcal{C}$表示由 $\mathcal{C}$ 忘掉多项式作用后得到的 $R$-线性范畴。

## 2.4 同伦相容 $\mathcal{A}$-态射

假设给定了 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C, C'$ 以及一个 $R_n^e$-线性链映射 $f\colon C \to C'$，它不一定是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。我们考虑将 $f$ 扩展为一个 $y$-链映射，使其在两个相应的$y$-复形之间。这里，我们遵循 [GH22第 2 节10]中给出的思路。

假设 $f$ 以多项式形式延拓为一个 $y$-链映射

$$F = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha \colon y(C) \to y(C')$$

其中 $y^\alpha$ 的每个系数 $f_\alpha$ 是双次数为$(-2|\alpha|, 2|\alpha|)$的态射阵列

$$f_\alpha^i \colon C^i \to C'^{i-2|\alpha|}$$

在 $\mathcal{C}$中。为使 $F$ 成为 $f$的延拓，我们必须有 $f_0 = f$。为使 $F$成为 $y$-链映射，我们必须有

$$\begin{aligned}
[D, F] &= \sum_\alpha \left( [d, f_\alpha] y^\alpha + \sum_{i=1}^n [\xi_i, f_\alpha] y^{\alpha + e_i} \right) \\
&= \sum_\alpha \left( [d, f_\alpha] + \sum_i [\xi_i, f_{\alpha - e_i}] \right) y^\alpha \\
&= 0.
\end{aligned}$$

这里，按约定，若 $\alpha$ 的任一分支为负，则置 $f_\alpha = 0$ 。上述方程要求，对每个 $\alpha$,

$$[d, f_\alpha] + \sum_i [\xi_i, f_{\alpha - e_i}] = 0. \tag{2.3}$$

特别地，对于 $\alpha = 0$，方程（2.3）可化为 $[d, f] = 0$。对于 $\alpha = e_i$，我们有

$$[d, f_i] + [\xi_i, f] = 0 \tag{2.4}$$

其中 $f_i := f_{e_i}$。因此， $f$ 必须与 $\xi_i$ 在同伦 $f_i$意义下交换。

如果我们进一步要求 $F$ 通过一个同伦成为 $\mathsf{e}$-等变的

$$\tilde{F} = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha y^\alpha$$

给出

$$[D, \tilde{F}] + [\mathsf{e}, F] = 0,$$

那么由

$$\begin{aligned}
[\mathsf{e}, F] &= [u + \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) \frac{\partial}{\partial y_i}, \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha] \\
&= \sum_\alpha \left( [u, f_\alpha] y^\alpha + \sum_i \alpha_i (x_i + x'_{w(i)}) f_\alpha y^{\alpha - e_i} \right) \\
&= \sum_\alpha \left( [u, f_\alpha] + \sum_i (\alpha_i + 1)(x_i + x'_{w(i)}) f_{\alpha + e_i} \right) y^\alpha
\end{aligned}$$

对于每个 $\alpha$，我们必须有，

$$[d, \tilde{f}_\alpha] + \sum_i [\xi_i, \tilde{f}_{\alpha - e_i}] + [u, f_\alpha] + \sum_i (\alpha_i + 1)(x_i + x'_{w(i)}) f_{\alpha + e_i} = 0. \tag{2.5}$$

特别地，对于 $\alpha = 0$，2.5）特化为

$$[d, f_u] + [u, f] + \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) f_i = 0 \tag{2.6}$$

~其中 $f_u := f_0$。同伦 $f_u$ 展示了 $u$ 与 $f$ 的同伦交换性，以及来自 $f_i$的项。这一观察引出了以下定义。

**定义 2.21.** 设 $C, C'$ 为 $\mathcal{A}_n^w$-模。一个同伦相容 $\mathcal{A}_n^w$-态射（或 $h\mathcal{A}_n^w$-态射）~$F = (\{f_\alpha\}, \{f_\alpha\})$ 是由按非负多重指数索引的两组映射组成的一对

$$f_\alpha, \tilde{f}_\alpha \colon C \to C'$$

其双次数为

$$\deg(f_\alpha) = (-2|\alpha|, 2|\alpha|), \quad \deg(\tilde{f}_\alpha) = (-2|\alpha| - 3, 2|\alpha| + 4),$$

~并满足方程 (2.3)、(2.5。下文中，为简化记号，我们记作 $F = (f_\alpha, f_\alpha)$。

两个 $h\mathcal{A}_n^w$-态射的复合定义为与相应的 e-等变 $y$-链映射的复合相容。具体而言，对于两个 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C, C'$，令 ~$\mathrm{Hom}^{h\mathcal{A}_n^w}(C, C')$ 表示从 $C$到 $C'$的 $h\mathcal{A}_n^w$-态射的集合。对于 $F = (f_\alpha, f_\alpha) \in \mathrm{Hom}^{h\mathcal{A}_n^w}(C, C')$，~一个 e-等变 $y$-链映射 $y(F) = (y(f_\alpha)\ y(f_\alpha))$ 定义为

$$y(f_\alpha) = \sum_\alpha f_\alpha y^\alpha \colon y(C) \to y(C')$$

and

$$y(\tilde{f}_\alpha) = \sum_\alpha \tilde{f}_\alpha y^\alpha \colon y(C) \to y(C').$$

这给出了一个单射

$$\mathrm{Hom}_{h\mathcal{A}_n^w}(C, C') \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{y\,\mathrm{Kom}_{\mathrm{e}}(\mathcal{C})}(y(C), y(C')).$$

~现在，对于 $h\mathcal{A}_n^w$-态射 $F = (f_\alpha, f_\alpha)\colon C \to C'$ 和 $G = (g_\alpha, \tilde{g}_\alpha)\colon C' \to C''$，复合 ~$GF = (k_\alpha, k_\alpha)$ 定义为

$$k_\alpha := \sum_{\beta+\gamma=\alpha} g_\beta f_\gamma, \quad \tilde{k}_\alpha = \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \tilde{g}_\beta f_\gamma + g_\beta \tilde{f}_\gamma.$$

与定义 2.10相比，我们看到 $y(GF) = y(G)y(F)$。因此，上述嵌入表明，复合满足单位律和结合律，由此得到范畴 $\mathrm{Kom}^{h\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C})$，其对象为 $\mathcal{A}_n^w$-模，态射为 $h\mathcal{A}_n^w$-态射。

类似地，两个同伦 ~$h$ 定义为使得 $y(h)$ 给出 $y(F)$ 与 $y(G)$ 之间的一个同伦，其含义见定义 2.11。特别地，它必须满足

$$f - g = [d, h], \quad f_i - g_i = [d, h_i] + [\xi_i, h] \tag{2.7}$$

and

$$f_u - g_u = [d, h_u] + [u, h] + \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) h_i \tag{2.8}$$

~其中 $h := h_0$, $h_i := h_{e_i}$ 且 $h_u = h_{0u}$。

**命题 2.22.** 函子 $y$ 命题2.12扩展为一个同伦不变忠实函子

$$y\colon \mathrm{Kom}_{h\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C}) \to y\,\mathrm{Kom}_{\mathsf{e}}(\mathcal{C}).$$

**定义 2.23。** A $h\mathcal{A}_n^w$-态射 $f=(f_\alpha,\ f_\alpha)$ 若满足 $k$-截断 条件，当且仅当 $f_\alpha=0$ 对 $|\alpha|>k$ 成立且 $f_\alpha=0$ 对 $|\alpha|\geq k$成立。若此外 $f_\alpha$ 对 $|\alpha|=k$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的，且 $f_\alpha$ 对 $|\alpha|=k-1$是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的，则称其为强 $k$-截断 。特别地，若 $F$ 是（强）0-截断的，则称 $F$ 为严格 。

一个 $k$-截断态射与一个 $l$-截断态射的复合是一个（$k+l$）-截断态射。注意，强性在复合下并不保持，除非其中一个映射是严格的。当 $h\mathcal{A}_n^w$-态射 $F$ 是严格的时，我们将其视为链映射 $F=f_0$。当 $F$ 是 1-截断的时，我们将其写成三元组 $F=(f,\ f_i,\ f_u)$，满足（2.4）、（2.6）。

类似地，严格 $h\mathcal{A}_n^w$-态射之间的严格同伦，无非是相应 $\mathcal{A}_n^w$-态射之间的同伦；而强 1-截断 $\mathcal{A}_n^w$-态射 $f=(f,f_i,f_u)$、$g=(g,g_i,g_u)$ 之间的强 1-截断同伦 $H=(h,h_i,h_u)$，则满足 (2.7)、(2.8)，且 $h_i$、$h_u$是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。

## 2.5 转移 $\mathcal{A}$-作用

假设给定一个 $\mathcal{A}_n^w$-模 $C$ 和一个关于 $R_n^e$的同伦等价 $C\to C'$ 。我们考虑将 $\mathcal{A}_n^w$-模结构转移到 $C'$上的问题，使得该等价能够扩展到 $\mathcal{A}_n^w$或 $h\mathcal{A}_n^w$上。这里，我们关注这样一种特例： $C'$ 是 $C$的强变形收缩。

**定义 2.24.** 设 $C,C'$ 是任意加性范畴中的链复形。若存在一个由链映射 $g\colon C\to C'$（即强变形收缩）、链映射 $f\colon C'\to C$ （即包含映射）以及 $C$ 上的同伦 $h$ 组成的三元组 $(g,f,h)$，并满足以下条件：(i) $fg-1=[d,h]$，(ii) $gf=1$，(iii) $gh=0$，(iv) $hf=0$，(v) $h^2=0$，则称 $C'$ 是 $C$的强变形收缩。

我们将把定义2.24 中的映射表示为

$$\begin{array}{ccc} C & \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} & C'. \\ \circlearrowleft & & \\ h & & \end{array}$$

符号 $f$、$g$、$h$ 的选取使其与 [Bar05、定义 4.3]相对应。以下论证将在第 3.4 节和 3.5 节中反复使用，以证明 $y$-化 Khovanov 同调的不变性。

**命题 2.25.** 设 $C$ 是一个 $\mathcal{A}_n^w$-模，且 $C'$ 是 $C$ 在 $R_n^e$ 上的强变形收缩。定义 $C'$ 的自同态如下

$$\xi_i' := g\xi_i f,\quad u' := guf.$$

那么，

$$\begin{aligned}(\xi_i')^2 &= -[d,g(\xi_i h\xi_i)f],\\ [\xi_i',\xi_j'] &= -[d,g(\xi_i h\xi_j+\xi_j h\xi_i)f],\\ [\xi_i',u'] &= -[d,g(\xi_i hu+uh\xi_i)f]\\ &\quad -\sum_j (x_j+x'_{w(j)})g(\xi_i h\xi_j+\xi_j h\xi_i)f\end{aligned}$$

*and*

$$[d,\xi_i']=0,\quad [d,u']=\sum_i (x_i+x'_{w(i)})\xi_i'.$$

证明。我们有

$$\begin{aligned}(\xi_i')^2 &= (g\xi_i f)(g\xi_i f)\\ &= g\xi_i(1+[d,h])\xi_i f\\ &= g\xi_i[d,h]\xi_i f\\ &= g[d,-\xi_i h\xi_i]f\\ &= -[d,g\xi_i h\xi_i f].\end{aligned}$$

在第四个等式中，我们使用了

$$[d,\xi_i h\xi_i] = [d,\xi_i]h\xi_i - \xi_i[d,h]\xi_i + \xi_i h[d,\xi_i]$$

连同 $[d,\xi_i]\in R_n^e$ 和 $gh = hf = 0$。其他方程可类似证明。 □

命题 2.25 表明自同态 $\xi_i'$、$u'$ 未必严格交换。若它们确实给出严格的 $\mathcal{A}_n^w$-作用于 $C'$，我们称之为 $\mathcal{A}_n^w$-作用，其经由 强变形收缩（$g$， $f$， $h$）转移而来。

**推论 2.26.** 除命题 *2.25* 的假设外，若 $[\xi_i,h]=0$，则

$$(\xi_i')^2 = [\xi_i',\xi_j'] = [\xi_i',u'] = 0$$

并且 $C$ 上的 $\mathcal{A}_n^w$-作用可以转移到 $C'$。

**命题 2.27.** 在命题 *2.25* 的假设下，定义映射

$$\begin{aligned}f_i &:= h\xi_i f, \quad g_i := g\xi_i h, \quad h_i := h\xi_i h,\\ f_u &:= huf, \quad g_u := -guh, \quad h_u := huh.\end{aligned}$$

那么，利用命题 *2.25*中定义的自同态 $\xi_i'$， $u'$ ，我们有

$$\begin{aligned}[d,f_i]+[\xi_i,f] &= 0,\\ [d,g_i]+[\xi_i,g] &= 0,\\ [d,h_i]+[\xi_i,h] &= f_i g + f g_i\end{aligned}$$

*and*

$$\begin{aligned}[d,f_u]+[u,f]+\sum_i (x_i + x'_{w(i)})f_i &= 0,\\ [d,g_u]+[u,g]+\sum_i (x_i + x'_{w(i)})g_i &= 0,\\ [d,h_u]+[u,h]+\sum_i (x_i + x'_{w(i)})h_i &= f_u g + f g_u.\end{aligned}$$

证明。 与命题 2.25的证明类似。 □

**推论 2.28**。 除了命题 *2.27*的假设外，若 $[\xi_i,h]=0$，则

$$f_i = g_i = h_i = 0.$$

此外，若 $[u,h]=0$，则

$$f_u = g_u = h_u = 0.$$

若两者都满足 $[\xi_i,h] = [u,h] = 0$，则 $C$ 上的 $\mathcal{A}_n^w$-作用可转移到 $C'$ 上，且映射 $f$、$g$、$h$ 变为 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。因此，在范畴 $\mathrm{Kom}^{\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C})$ 中， $C'$ 是 $C$ 的强变形收缩。

推论 2.28 表明，延拓问题主要由 $[\xi_i, h]$ 和 $[u, h]$ 控制。即使这些交换子非零，在某些情况下，$\mathcal{A}_n^w$-作用仍可转移，且映射可延拓为 $h\mathcal{A}_n^w$-态射。首先注意，命题 2.27 中 $f_i$、$f_u$（以及 $g_i$、$g_u$）的方程分别对应于方程 (2.4)、(2.6)，而 $h_i$、$h_u$ 的方程对应于 (2.7)、(2.8)。除命题 2.27 的假设外，再假设 $C$ 上的 $\mathcal{A}_n^w$-作用可转移到 $C'$ 上，且 $g_i$、$g_u$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。那么，$G = (g, g_i, g_u)$ 给出一个强 1-截断的 $h\mathcal{A}_n^w$-态射$C \to C'$。此外，若 $f$、$h_i$ 和 $h_u$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的，则命题 2.27 中的方程表明，$H = (h, h_i, h_u)$ 给出一个强 1-截断同伦 $fG \simeq_H I$。对于反方向，我们有 $Gf = I$，因此 $C'$ 是 $\mathrm{Kom}^{h\mathcal{A}_n^w}(\mathcal{C})$ 中 $C$ 的强变形收缩。经过 $y$-化后，$y(C')$ 是 $y(C)$ 的 e-等变强变形收缩。我们将在命题 3.15 的证明中遇到这种情况。

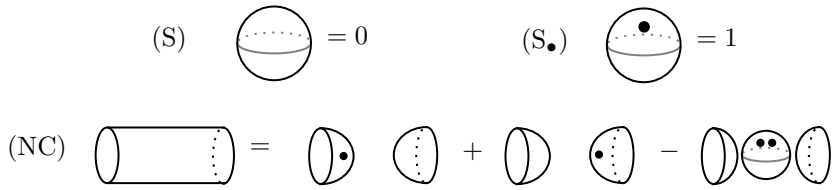
# 3 $y$化 Khovanov 同调

## 3.1 预备知识

我们假设读者熟悉 Khovanov 同调的构造，以及链环与缠结的等变版本 [Kho00；Lee05；Bar05；Kho06；KR22]。本文将简要回顾基本概念，并确定全文使用的记号。

### 3.1.1 点标志协边范畴

设 $B$ 是 $\partial D^2$ 上的一个有限带符号点集，其中正点与负点的数量相等。令 $\mathrm{Cob}(B)$ 表示 $D^2 \times I$ 中边界点为 $B$的点标志协边范畴。具体而言，$\mathrm{Cob}(B)$ 的对象是 $D^2$ 中的（无向）平面缠结图 $T$，其带有 $\partial T = B$ （忽略 $B$上的符号）；对象 $T$之间的$T'$态射是 $D^2 \times I$中带有 $\partial S = T \times \{0\} \cup B \times I \cup T' \times \{1\}$的（无向）带点协边 $S$的 $\mathbb{Z}$-线性组合；这些协边视为在固定边界的同伦下等价，并对以下三个局部关系取商：




$\mathrm{Cob}(B)$ 带有量子分次[7]，其中一个协边 $C \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Cob}(B)}(X, Y)$ 若满足 $k$，则规定其具有

$$\deg_q(C) := \frac{|B|}{2} - \chi(C) + 2k.$$

这里，$\chi(C)$ 表示 $C$的欧拉数。注意，恒等协边 $C = X \times I$ 的次数为$q(C) = 0$，并且 $\deg_q$ 在纵向与横向复合下具有可加性（参见 [Bar05，练习 6。3]）。对于一个对象 $X$，令 $q^m X$ 表示 $X$ 的一个副本，其量子分次平移了 $m$。

重言函子

$$\mathcal{F} = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}(\varnothing)}(\varnothing, -) \colon \mathrm{Cob}(\varnothing) \longrightarrow R_{U(2)}\text{-Mod}$$

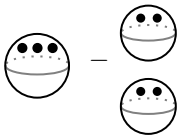
恢复出用于 $U(2)$等变 *Khovanov* 同调的 Frobenius 扩张（$R_{U(2)}$，$A_{U(2)}$）。这里，$R_{U(2)}$ 是分次环 $\mathbb{Z}[h, t]$，其次数为 $\deg\ h = 2$、$\deg\ t = 4$，而 $A_{U(2)}$ 是 Frobenius 代数

[7]由于约定不同，量子分次与 [Bar05，定义 6.2],中的定义互为相反数。

$R_{U(2)}[X]/(X^2 - hX - t)$由余单位 $\varepsilon(\mathbf{1}) = 0,\quad \varepsilon(X) = 1$ 确定，且分次为 $\deg X = 2$。事实上，存在一个分次环同构

$$\mathcal{F}(\varnothing) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}(\varnothing)}(\varnothing, \varnothing) \cong R_{U(2)}$$

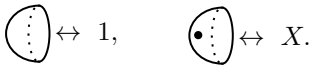
在此对应关系下，$h,\ t \in R_{U(2)}$ 对应于闭配边

$h\ =$  ,　　$t\ =$ 

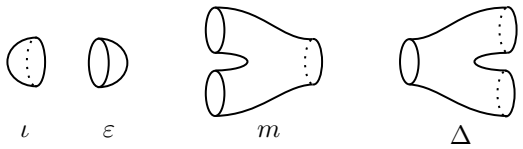
以及一个分次 $R_{U(2)}$-模同构

$$\mathcal{F}(\bigcirc) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cob}(\varnothing)}(\varnothing, \bigcirc) \cong q^{-1}A_{U(2)}$$

在此对应关系下，$A_{U(2)}$ 作为 $R_{U(2)}$-模的两个生成元 $\mathbf{1}$，$X$ 对应于余边界



此外，$A_{U(2)}$ 的弗罗贝尼乌斯代数运算——乘法 $m$、单位 $\iota$、余乘法 $\Delta$ 和余单位 $\varepsilon$——分别对应于以下协边：




从这个意义上说，我们将 $\mathcal{F}$ 称为一个 拓扑量子场论，对应于 $U(2)$-等变理论。正如 [Kho06，命题 5]，所证明的，$U(2)$- 等变理论在所有 Khovanov 型链环同调理论中具有普遍性。例如，以下等变理论可通过将变量（$h,\ t$）特化为

$$\begin{aligned} t = 0 \rightsquigarrow \quad & (R_{U(1)}, A_{U(1)}) = (\mathbb{Z}[h],\ \mathbb{Z}[h, X]/(X^2 - hX)), \\ h = 0 \rightsquigarrow \quad & (R_{SU(2)}, A_{SU(2)}) = (\mathbb{Z}[t],\ \mathbb{Z}[t, X]/(X^2 - t)), \\ h = t = 0 \rightsquigarrow \quad & (R_{\{e\}}, A_{\{e\}}) = (\mathbb{Z},\ \mathbb{Z}[X]/(X^2)). \end{aligned}$$

或者，通过在 Cob($B$) 中额外施加关系，再应用重言函子 $\mathcal{F}$，可得到变形版本。非等变弗罗贝尼乌斯扩张（$R_{\{e\}},\ A_{\{e\}}$）对应于 Khovanov 在 [Kho00]，中给出的原始理论，相应的局部关系见[Bar05，第 11 节2]。对于任意交换环 $R$ 及其元素 $h,\ t \in R$，记 $A_{h,\ t} := R[X]/(X^2 - hX - t)$，相应的拓扑量子场论记为 $\mathcal{F}_{h,\ t}$。特别地，记 $\mathcal{F}_0 := \mathcal{F}_{0,\ 0}$。

### 3.1.2 缠结的 Khovanov 同调

令 Diag($B$) 表示边界为 $B$ 的定向缠结图范畴。也就是说，Diag($B$) 的对象是定向缠结图 $T$，其带有 $\partial T = B$（遵循 $B$的符号），而图示 $T, T'$之间的态射是固定边界 $B$ 的 $T, T'$之间的定向电影。特别地，当$B = \varnothing$时，Diag($\varnothing$) 的对象是定向链环图，态射则是链环图之间的电影。

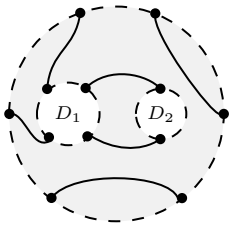



图4：平面图

给定一个定向缠结图 $T \in$ Diag($B$)，形式化 Khovanov 括号 $[T]$ 通过 Khovanov 复形的标准构造得到，但构造所在的范畴是 Mat(Cob($B$))，即预加性范畴 Cob($B$) 的加性闭包。按照 [Bar05], , Mat(Cob($B$)) 中的复形范畴记为 Kob($B$) :=Kom(Mat(Cob($B$)))。 [Bar02 的定理 1] 指出， $[T]$ 的链同伦类型是缠结不变量。特别地，当 $B = \varnothing$时，将 $\mathcal{F}$作用于形式化 Khovanov 括号 $[T]$，可得到 $U$(2)-等变 Khovanov 复形 CKh$^{U(2)}$($T$)，其同调给出 $U$(2)-等变 Khovanov 同调 Kh$^{U(2)}$($T$)。因此，Khovanov 同调函子 Kh$^{U(2)}$ 分解为一列函子，

$$\mathrm{Diag}(B) \xrightarrow{[\cdot]} \mathrm{Kob}(B) \xrightarrow[\text{when } B=\varnothing]{\mathcal{F}} \mathrm{Kom}(R_{U(2)}\text{-Mod}) \xrightarrow{H} R_{U(2)}\text{-Mod}.$$

其他变体可通过在取同调之前特化（$h, t$）得到。因此，在 Kob($B$) 中工作是研究 Khovanov 同调最一般的方法。

### 3.1.3 符号约定

Bar-Natan 框架的一个优点是，这些范畴在通过 平面弧图进行的水平复合下具有函子性。这使得我们能够通过缠结片段对纽结和链环进行局部处理（图4）。这里，我们固定范畴 Kob($B$) 中水平复合的符号约定。设 $\Omega_i$ 是 Kob($B_i$) 中的对象（$i = 1, 2$），并且可由平面弧图 $D$复合。给定齐次映射（不一定是链映射） $f\colon \Omega_1 \to \Omega_1$和 $g\colon \Omega_2 \to \Omega_2$，其次数分别为 $|f|$和 $|g|$，我们定义 Ω 上的映射 $= D$(Ω$_1$,Ω$_2$如下：

$$D(f, \mathsf{id}) := \bigoplus_{i,j} \left( D(f^i, \mathsf{id})\colon D(\Omega_1^i, \Omega_2^j) \to D(\Omega_1^{i+a}, \Omega_2^j) \right)$$

and

$$D(\mathsf{id}, g) := \bigoplus_{i,j} (-1)^{i|g|} \left( D(\mathsf{id}, g^j)\colon D(\Omega_1^i, \Omega_2^j) \to D(\Omega_1^a, \Omega_2^{j+b}) \right).$$

注意第二个方程中的符号 $(-1)^{i|g|}$。采用这一符号约定，我们总有

$$[D(f, \mathsf{id}), D(\mathsf{id}, g)] = 0$$

其中 $[\cdot, \cdot]$ 是超交换子。Ω上的微分 $d$ 可以写成

$$d = D(d_1, \mathsf{id}) + D(\mathsf{id}, d_2)$$

如.....中所定义 [Bar05，第 5]节。此外，如果我们有

$$f - f' = [d_1, h], \quad g - g' = [d_2, k]$$

then

$$D(f,\mathsf{id})-D(f',\mathsf{id})=[d,D(h,\mathsf{id})],\quad D(\mathsf{id},g)-D(\mathsf{id},g')=[d,D(\mathsf{id},k)].$$

因此，按照这一符号约定，超交换子与水平复合相容。此后，在不会造成混淆时，我们将 $f,g$ 简写为 $D(f,\mathsf{id})$ $D(\mathsf{id},g)$。

### 3.1.4 辫图

这里我们固定关于辫子及其闭包的记号。令 $\mathsf{B}_n$ 表示 $\partial I^2$ 上的边界点集合，其中 $I\times\{0\}$ 上有 $n$ 个负点，$I\times\{1\}$上有 $n$ 个正点。我们用 $P_i\in I\times\{0\}$ 标记 $\mathsf{B}_n$ 的底部点，用 $P_i'\in I\times\{1\}$ 标记顶部点（见第1节中的图1a）。令 $\mathbf{BDiag}(n)$表示 $\mathbf{Diag}(\mathsf{B}_n)$的子范畴，其对象是用辫词表示的、具有 $n$ 条辫股的辫图，而辫图之间的态射是辫电影，正如 [CS96; CS98; KT07][8]中所引入的。按照我们的约定，辫图 $\beta\in\mathbf{BDiag}(n)$的方向是从底部指向顶部。对于辫图 $\beta$上的两个点 $p$、$q$，若它们属于同一条辫股，我们记作 $p\sim q$。辫图 $\beta\in\mathbf{BDiag}(n)$具有底层置换 $w\in\mathfrak{S}_n$，使得对所有 $i$，都有 $P_i\sim P'_{w(i)}$。两个辫图 $\beta_1$、$\beta_2\in\mathbf{BDiag}(n)$的乘积 $\beta_2\beta_1$ 定义为将 $\beta_2$ 叠放在 $\beta_1$之上所得到的辫图。令 $\mathsf{id}_n$ 表示由空辫词表示的对象，$\sigma_i\in\mathbf{BDiag}(n)$表示第 $i$ 条与第 $(i+1)$ 条辫股之间有一个正交叉的对象，$\sigma_i^{-1}$ 表示它的镜像。注意，$\sigma_i\sigma_i^{-1}$ 和 $\sigma_i^{-1}\sigma_i$ 都与 $\mathsf{id}_n$同构，但不视为相等。

¯辫图 $\beta\in\mathbf{BDiag}(n)$ 可以闭合形成链环图 $\beta\in\mathbf{Diag}(\varnothing)$。此操作可视为一个函子

$$\mathrm{cl}_n\colon\ \mathrm{BDiag}(n)\longrightarrow\mathrm{Diag}(\varnothing)$$

由图 1c所示的单输入平面弧图给出。根据平面弧图的函子性，我们得到如下函子交换图：

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{BDiag}(n) & \xrightarrow{[\cdot]} & \mathrm{Kob}(\mathsf{B}_n)\\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}_n} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cl}_n}\\ \mathrm{Diag}(\varnothing) & \xrightarrow{[\cdot]} & \mathrm{Kob}(\varnothing).\end{array}$$

## 3.2 点滑动同伦

设 $C$ 是 $\mathbf{Cob}(B)$ 的一个对象。对于 $C$ 上的任意一点 $p$，由恒等协边 $C\times I$（在包含 $p$ 的分支上放置一个点）定义 $C$ 的一个自同态 $X_p$。对于缠结图 $T$ 以及 $T$ 上的一个正则点 $p$（即 $T$ 上不是双重点的点），以显然的方式将自同态 $X_p$ 延拓为 $[T]$ 的链自同态。

**命题 3.1**。设 $T$ 是一个含有两条辫股和一个交叉 $c$ 的缠结图。若 $p$、$q$ 是同一条辫股上被该交叉隔开的两个点，则 $X_p$ 和 $h-X_q$ 在 $[T]$ 中通过由微分 $d$ 反向定义的映射 $\chi$ 同伦。

证明。令 $T_0$，$T_1$ 表示由 $T$ 的 0-解析和 1-解析得到的无交叉图。映射定义为

$$\begin{array}{ccc}T_0 & \underset{\chi}{\overset{d}{\rightleftarrows}} & T_1.\\ {\scriptstyle X_p,X_q}\circlearrowleft & & \circlearrowright{\scriptstyle X_p,X_q}\end{array}$$

[8]辫图和缠结图的电影不在本文中处理。

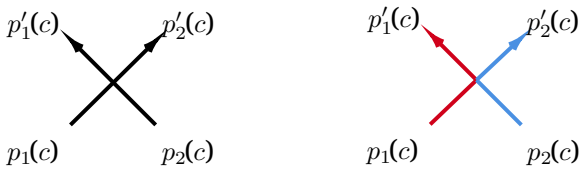



图 5：交叉 $c$和容许着色的端点。

只需证明

$$X_p + X_q - h = \chi d$$

在 $T_0$上，并且

$$X_p + X_q - h = d\chi$$

在 $T_1$ 上。 $\chi d$ 和 $d\chi$ 都是 $T_0$ 和 $T_1$ 上显然的属 1 自同边界。因此，这些方程可直接由颈切关系推出。 □

命题 $\chi_c$ 的同伦3.1 称为点滑动同伦，用于 $c$。它曾出现在[HN13，引理 2。3]，[BS15，命题 6。4]，[Ali19，引理 2。1]，[AD19，引理 3。3] 的 Khovanov 同调研究中。

现在，设 $T$ 是一个缠结图。对于每个交叉 $c$，如图 5a 所示，令 $p_1(c)$ $p_2(c)$ $p_1'(c)$ $p_2'(c)$ 表示其周围的四个点。 $ab$ 上的 $\theta$ 着色，是指将底层四价图 $G(T)$ 的每条边赋予 $a$ 或 $b$ 之一。对于 $T$ 上的正则点 $p$，我们用 $\theta(p)$ 表示包含 $p$ 的边的颜色。我们称 $\theta$ 为可容许的，如果对于 $T$ 的每个交叉 $c$，

$$\theta(p_1(c)) = \theta(p_1'(c)) \neq \theta(p_2(c)) = \theta(p_2'(c))$$

（见图 5b）。注意，如果 $G$（$T$）是一个连通图，那么 $T$ 恰好有两种可容许的$ab$-着色。这是因为可容许着色与 $T_0$ 在 $T$ 中的 $D^2$定向保向分解的补集的棋盘式着色一一对应。事实上， $T_0$ 的每个分支都继承了 $T$的一个定向；若它左侧看到黑色区域，我们就将其着为 $a$，否则着为 $b$。更一般地，若 $G$（$T$）有 $c$ 个连通分支，那么 $T$ 恰好有 $2^c$种可容许着色。

对于两个缠结图 $T$，$T'$，若它们可通过平面弧图 $D$复合，则称 $T$，$T'$ 的两个可容许着色关于 $D$ 相容，如果它们可扩展为 $D(T,\ T')$ 的一个可容许着色。对于辫图 $\beta$，$\beta$ 的标准 $ab$-着色 是通过对保向分解 $\beta_0$进行交替着色而得到的可容许 $ab$-着色；该分解由 $n$ 条竖直弧组成，最左侧的弧着色为 $a$。显然，标准 $ab$-着色与辫子的乘法及闭合运算相容。

下文固定缠结图 $T$ 的一个可容许 $ab$-着色 $\theta$。于是，对于 $T$ 上的每个正则点 $p$，我们定义 $[T]$ 上的一个自同态 $x_p$，如下所示：

$$x_p = \begin{cases} X_p & \text{if } \theta(p) = a, \\ h - X_p & \text{if } \theta(p) = b. \end{cases}$$

注意，我们有

$$(x_p)^2 = hx_p + t$$

无论 $\theta(p)$。如果两个正则点 $p$，$q$ 被一个交叉 $c$隔开，那么根据 $\theta(p) \neq \theta(q$ 的可容许性，我们有 $\theta$。由命题 3.1，相应的自同态 $x_p$ 和 $x_q$ 是

通过同伦 $\chi_c$ 同伦等价；该同伦由 $c$ 的局部微分反向给出，从而得到

$$x_p - x_q = \begin{cases} [d, \chi_c] & \text{if } \theta(p) = a, \\ -[d, \chi_c] & \text{if } \theta(p) = b. \end{cases}$$

为统一这两种情况，我们定义符号函数 $\varepsilon$ 为

$$\varepsilon_p := \begin{cases} +1 & \text{if } \theta(p) = a, \\ -1 & \text{if } \theta(p) = b \end{cases}$$

而 $\chi_c$ 的带符号版本为

$$\hat{\chi}_c := \varepsilon_{p_1(c)} \chi_c.$$

于是我们有

$$x_{p_1(c)} - x_{p_2'(c)} = -(x_{p_2(c)} - x_{p_1'(c)}) = [d, \hat{\chi}_c].$$

以下命题可由定义直接得出。

**命题 3.2**。我们有

$$[x_p, \chi_c] = 0, \quad \chi_c^2 = 0, \quad [\chi_c, \chi_{c'}] = 0.$$

其中 $p$ 是 $T$ 的正则点，而 $c$、$c'$ 是 $T$ 的交叉。

设 $p, q$ 是 $T$ 上的两个正则点。从 $p$ 到 $q$、位于 $T$ 中的一条路径 $\gamma$，记作

$$\gamma \colon p = p_1 \xrightarrow{c_1} p_2 \xrightarrow{c_2} \cdots \xrightarrow{c_r} p_{r+1} = q \tag{3.1}$$

是 $\beta$ 上的一列正则点，使得每一对相邻点 $p_j, p_{j+1}$ 之间恰有一个交叉 $c_j$。对于这样的路径 $\gamma$，记 $\varepsilon_{p_j} = \varepsilon_j$, $\chi_j = \chi_{c_j}$，并定义一个度为 $-1$ 的同伦 $\xi_\gamma$：

$$\xi_\gamma := \sum_{j=1}^{r} \varepsilon_j \chi_j. \tag{3.2}$$

**命题 3.3.** $\xi_\gamma$ 满足

$$[d, \xi_\gamma] = x_p - x_q.$$

此外，

$$[x_p, \xi_\gamma] = 0, \quad \xi_\gamma^2 = 0, \quad [\xi_\gamma, \xi_{\gamma'}] = 0.$$

其中 $p$ 是 $T$ 上的一个正则点，而 $\gamma, \gamma'$ 是 $T$ 上的任意两条路径。

证明。第一个等式由定义立即得出。第二个等式由命题 3.2立即得出。对于第三个等式，

$$\begin{aligned} \xi_\gamma^2 &= (\sum_j \varepsilon_j \chi_j)^2 \\ &= \sum_j \chi_j^2 + \sum_{j \neq j'} \varepsilon_j \varepsilon_{j'} \chi_j \chi_{j'} \\ &= \sum_j \chi_j^2 + \sum_{j < j'} \varepsilon_j \varepsilon_{j'} [\chi_j, \chi_{j'}] \\ &= 0. \end{aligned}$$

最后一个等式的证明方法类似。 □

对于形式如方程（ $\gamma$ 3.1）的路径，我们也定义一个度为 $-2$ 的同伦 $u_\gamma$ 如下：

$$u_\gamma := \sum_{1\le j<j'\le r} (\varepsilon_j\chi_j)(\varepsilon_{j'}\chi_{j'}). \tag{3.3}$$

**引理 3.4**。$u_\gamma$ 满足

$$[d, u_\gamma] = (x_p + x_q)\xi_\gamma - \sum_j \varepsilon_j(x_{p_j} + x_{p_{j+1}})\chi_j$$

并且与 $x_p$ 和$\xi_{\gamma'}$交换。

证明。计算

$$\begin{aligned}
[d, u_\gamma] &= \sum_{j<j'} ([d, \varepsilon_j\chi_j]\varepsilon_{j'}\chi_{j'} - \varepsilon_j\chi_j[d, \varepsilon_{j'}\chi_{j'}]) \\
&= \sum_{j<j'} ((x_{p_j} - x_{p_{j+1}})\varepsilon_{j'}\chi_{j'} - \varepsilon_j\chi_j(x_{p_{j'}} - x_{p_{j'+1}})) \\
&= \sum_j ((x_{p_1} - x_{p_j})\varepsilon_j\chi_j - \varepsilon_j\chi_j(x_{p_{j+1}} - x_{p_{r+1}})) \\
&= (x_p + x_q)\xi_\gamma - \sum_j \varepsilon_j(x_{p_j} + x_{p_{j+1}})\chi_j.
\end{aligned}$$

□

## Khovanov 复形上的 3.3 $\mathcal{A}$-作用

这里，我们关注辫图，并证明复形 $[\beta]$ 容许一个 $\mathcal{A}$-作用，其定义于第 2.1 节。任取辫图 $\beta \in \mathrm{BDiag}(n)$，并令 $w$ 表示$\beta$的底层置换。取标准着色 $\theta$（即 $\beta$的着色）。定义链自同态 $x_i$ 与 $x'_i\,(i = 1, \ldots\ldots, n)$，它们是 $[\beta]$ 上的链自同态，定义为

$$x_i := x_{P_i}, \quad x'_i := x_{P'_i}.$$

这些自同态显然彼此交换，因而给出一个 $R_n^e$-模结构于$[\beta]$上。令 $\gamma_i$ 表示从 $P_i$ 到 $P'_{w(i)}$的路径，由下式给出

$$\gamma_i \colon P_i = p_{i,1} \xrightarrow{c_{i,1}} p_{i,2} \xrightarrow{c_{i,2}} \cdots \xrightarrow{c_{i,r}} p_{i,r+1} = P'_{w(i)}.$$

定义自同态

$$\xi_i := \xi_{\gamma_i}, \quad u := \sum_i u_{\gamma_i}.$$

**命题 3.5.** 我们有

$$[d, \xi_i] = x_i - x'_{w(i)}, \quad [d, u] = \sum_i \left(x_i + x'_{w(i)}\right)\xi_i.$$

此外， $\xi_i$、 $u$ 均与 $x_i$、 $x'_i$交换，并且

$$\xi_i^2 = 0, \quad [\xi_i, \xi_j] = 0, \quad [\xi_i, u] = 0.$$

证明。 关于 $\xi_i$ 的等式直接由命题 3.3得出。对于 $u$，由引理 3.4，所需等式两边之差由以下求和给出

$$-\sum_i \sum_j \varepsilon_{p_{i,j}}(x_{p_{i,j}} + x_{p_{i,j+1}})\chi_{c_{i,j}}.$$

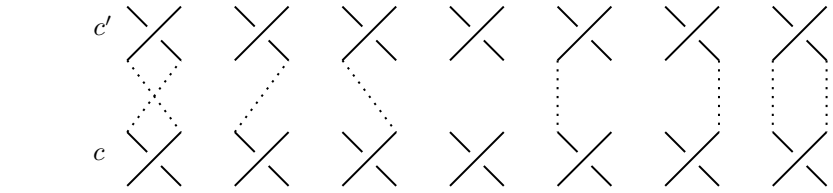



图6：系数$a_{c,\ c'}$。

对于每个交叉 $c$，含有 $\chi_c$ 的项恰好出现两次，一次来自一条从左侧穿过 $c$ 的路径，另一次来自一条从右侧穿过的路径。由 $\theta(p_1(c)) = \theta(p_1'(c))$ 和 $\theta(p_2(c)) = \theta(p_2'(c))$，这两项相加得

$$\pm(x_{p_1(c)} + x_{p_2'(c)} - x_{p_2(c)} - x_{p_1'(c)})\chi_c.$$

由于 $\chi_c$ 作为一个鞍形配边，因此

$$(x_{p_1(c)} - x_{p_1'(c)})\chi_c = (x_{p_2(c)} - x_{p_2'(c)})\chi_c = 0$$

因此，该和为零。 □

注 3.6. 关于 Rouquier 复形的类似描述见 $u = u_2$ GHM24 [定理 1。6]此外，沿用 [CG24引理 321], ，若 $\beta = \beta_2\beta_1$ 且每个 $\beta_a$ 都赋予 $\mathcal{A}_n^{w_a}$由自同态给出的 $\xi_i^a$-作用， $u^a$那么我们可以写成

$$u = u^1 + u^2 + \sum_i \xi_i^1 \xi_{w_1(i)}^2. \tag{3.4}$$

此外，沿用 [CG24注 322], ，我们也可以写成

$$u = \sum_{c \prec c'} a_{cc'} \hat{\chi}_c \hat{\chi}_{c'}, \tag{3.5}$$

其中 $c \prec c'$ 表示 $c$ 在垂直方向上先于 $c'$ 的关系，而系数$a_{cc'} \in \{0, \pm 1, \pm 2\}$ 由下式给出

$$a_{cc'} = \begin{cases} 2 & p_1'(c) \sim p_2(c') \text{ and } p_2'(c) \sim p_1(c'), \\ 1 & \text{either } p_1'(c) \sim p_2(c') \text{ or } p_2'(c) \sim p_1(c'), \\ 0 & \text{none of the other}, \\ -1 & \text{either } p_1'(c) \sim p_1(c') \text{ or } p_2'(c) \sim p_2(c'), \\ -2 & p_1'(c) \sim p_1(c') \text{ and } p_2'(c) \sim p_2(c'). \end{cases}$$

参见图6，其中以图示方式描述了系数 $a_{c,\ c'}$。

备注 3.7。 此时，读者可以参阅示例 5.7和 5.8，其中对辫子 $\xi_i$ 和 $u$的算子进行了明确描述 $\sigma_1$ 和 $\sigma_1^2$。

**命题3.8**。关于 $[\beta]$，我们有

$$\sum_{i=0}^{n} (x_i)^k = \sum_{i=0}^{n} (x_i')^k$$

对任意 $k \geq 0$。

证明。 由命题3.5,

$$\begin{aligned} 0 &= [d,[d,u]] \\ &= \sum_i (x_i + x'_{w(i)})(x_i - x'_{w(i)}) \\ &= \sum_i (x_i)^2 - \sum_i (x'_i)^2 \end{aligned}$$

由于 $x_p^2 = hx_p + t$ 和 $h$, $t$ 都是非零因子，上述等式意味着

$$\sum_i x_i = \sum_i x'_i.$$

此外，由于每个单项式 $x_i^k$ 都可以化简为次数至多为 1 的多项式，结论得证。

□

结合命题 3.3、3.5 和3.8，我们得出

**命题 3.9**。 对于任意底层置换为 $w$ 的辫图 $\beta \in \mathrm{BDiag}(n)$ ，复形$[\beta]$ 具有 $\mathcal{A}_n^w$-模结构。

**命题 3.10**。 如果我们选择与 $\theta$ 相反的 $ab$-着色，那么 $\mathcal{A}_n^w$-作用会被扭曲为

$$\begin{aligned} x_i &\mapsto h - x_i, & x'_i &\mapsto h - x'_i, \\ \xi_i &\mapsto -\xi_i, & u &\mapsto u. \end{aligned}$$

我们将 $\mathrm{Kob}^{\mathcal{A}_n^w}(\mathrm{B}_n) := \mathrm{Kom}^{\mathcal{A}_n^w}(\mathrm{Mat}(\mathrm{Cob}(\mathrm{B}_n)))$ 记为这样一个范畴：其对象是 $\mathrm{Kob}(\mathrm{B}_n)$ 中配备了 $\mathcal{A}_n^w$-作用的有界复形，态射是 $\mathcal{A}_n^w$-线性链映射。范畴 $\mathrm{Kob}^{h,\mathcal{A}_n^w}(\mathrm{B}_n)$ 的定义类似。

## 3.4 $y$-化的辫子 Khovanov 复形

结合命题2.12 和命题3.9，我们得到以下定义。

**定义 3.11**。 设 $\beta \in \mathrm{BDiag}(n)$ 是一个底层置换为 $w$ 的辫图。 $\beta$ 的 $y$-化 *Khovanov* 复形 记作 $y[\beta]$，它是与 $[\beta]$ 这个 $\mathcal{A}_n^w$-模相关联的 $y$-复形。

回顾命题 2.6，复形 $D$ 的微分 $y[\beta]$ 由下式给出

$$D = d + \sum_i \xi_i y_i,$$

其曲率为

$$D^2 = \sum_i [d, \xi_i] y_i = \sum_i (x_i - x'_{w(i)}) y_i.$$

微分 $D$ 也可以写成

$$D = d + \sum_c \hat{\chi}(c)(y_{i_1(c)} - y_{i_2(c)}), \tag{3.6}$$

其中求和遍历所有交叉 $c$ 的 $\beta$，且指标 $i_1(c)$ $i_2(c)$ 满足$P_{i_1(c)} \sim p_1(c)$ 以及$P_{i_2(c)} \sim p_2(c)$。此外，由命题2.9可知，相应的e-算子在 $y[\beta]$ 上由下式给出：

$$\mathsf{e} = u + \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) \frac{\partial}{\partial y_i}.$$

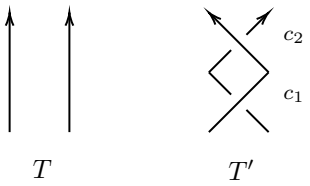



图 7：辫子关系 I

**定理 3.12**。 $y$-化复形 $y[\beta]$ 的e-等变链同伦类型在三种辫子关系下保持不变。

接下来的三个小节旨在证明定理 3.12。对于每个辫子关系，我们都显式构造相应复形之间的一个（严格或同伦相容的） $\mathcal{A}_n^w$-线性同伦等价。随后，我们应用命题 2.12 和2.22 来推导定理3.12。

### 3.4.1 辫子关系 I 下的不变性

**命题 3.13**。 设 $\beta, \beta'$ 是由下式表示的辫图

$$\beta = \beta_2\beta_1, \quad \beta' = \beta_2(\sigma_k^{-1}\sigma_k)\beta_1$$

其中 $1 \le k \le n-1$。那么， $[\beta]$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-模上的 $[\beta']$ 的强变形收缩 .

证明。 令 $T$， $T'$ 表示 $\beta$， $\beta'$内的局部缠结图，使得 $\beta \setminus T$和 $\beta' \setminus T'$ 相同，而 $T$ 和 $T'$ 通过一个 R2-变换相关（见图 7）。如 [Bar05所述，图 6], 中存在从 $[T']$ 到 $[T]$的强变形收缩，它可扩展为一个强变形收缩

$$[\beta] \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [\beta'], \qquad h \circlearrowright$$

我们声称这些映射也是严格的 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。

令 $c_1$， $c_2$ 表示 $\beta'$ 中对应于生成元 $\sigma_k$， $\sigma_k^{-1}$ 的另外两个交叉，分别记为 $\hat{}\chi_i := \hat{}\chi_{c_i}$。取 $\varepsilon := \varepsilon_{p_1(c_1)}$ 后，我们可以利用无符号同伦 $\hat{}\chi_1 = \varepsilon\chi_1$ 和 $\hat{}\chi_2 = \varepsilon\chi_2$重写 $\hat{}\chi_i$。令 $\xi_i$， $u$ 表示 $[\beta]$上 $\mathcal{A}_n^w$-作用的自同态，令 $\xi_i'$， $u'$ 表示 $[\beta']$上的自同态。从图中可以看出

$$\xi_i' = \begin{cases} \xi_i + \varepsilon(\chi_1 - \chi_2) & \text{if } i = w_1^{-1}(k), \\ \xi_i - \varepsilon(\chi_1 - \chi_2) & \text{if } i = w_1^{-1}(k+1), \\ \xi_i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

此外，由（3.5），可得

$$\begin{aligned} u' = u &+ \sum_{c \prec c_1} a_{c,1}\hat{\chi}_c\hat{\chi}_1 + \sum_{c_1 \prec c} a_{1,c}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_c \\ &+ \sum_{c \prec c_2} a_{c,2}\hat{\chi}_c\hat{\chi}_2 + \sum_{c_2 \prec c} a_{2,c}\hat{\chi}_2\hat{\chi}_c \\ &+ a_{1,2}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2. \end{aligned}$$

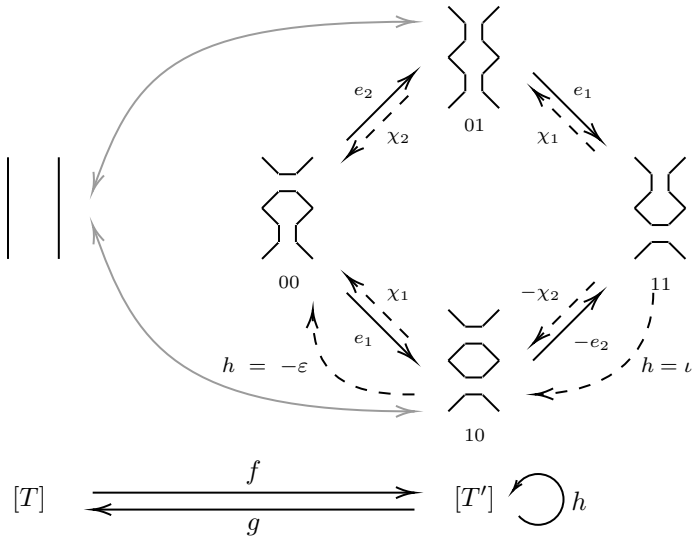



图 8：对应于 R2 移动的映射 $f$、$g$、$h$

这里，我们将系数缩写为 $a_{c,\ i} := a_{c,\ c_i}$ 和 $a_{1,\ 2} := a_{c_1,\ c_2}$。从图中可以看出

$$a_{c,1} = -a_{c,2}, \quad a_{1,c} = -a_{2,c}, \quad a_{1,2} = -2$$

因此我们有

$$\begin{aligned} u' = u &+ \varepsilon \sum_{c \prec c_1} a_{c,1} \hat{\chi}_c (\chi_1 - \chi_2) \\ &- \varepsilon \sum_{c_2 \prec c} a_{2,c} (\chi_1 - \chi_2) \hat{\chi}_c \\ &- 2\chi_1 \chi_2. \end{aligned}$$

图 8 展示了映射 $f$、$g$、$h$ 以及同伦 $\chi_i$。注意，复形 $[T]$、$[T']$的同调宽度分别为 0 和 2，并且映射 $h$、$\chi_2$、$\chi_3$ 的同调次数为 $-1$。因此，如果这些映射中有两个以上出现在一个复合映射中，我们可以立即断定该复合映射为零。类似地，形如 $g\eta f$、$\eta\eta' f$ 和 $g\eta\eta'$ 且满足 $\deg_t(\eta)$、$\deg_t(\eta') < 0$ 的映射也为零。下文将这种推理称为次数推理。

现在，根据次数原因，我们立即得到 $g\chi_i f = 0$ 和 $g\chi_1\chi_2 f = 0$；根据 $\xi_i'$ 和 $u'$ 的显式描述，我们有

$$g\xi_i' f = \xi_i, \quad gu' f = u.$$

这表明 $\mathcal{A}_n^w$-作用于 $[T]$ 与通过强变形收缩从 $[T']$ 转移而来的作用一致。此外，从图 8 可以看出，$T_{11}$ 与 $T_{00}$ 相同，并且

$$\begin{aligned} \chi_1 h|_{11} &= I, & \chi_2 h|_{11} &= 0, \\ h\chi_1|_{11} &= 0, & h\chi_2|_{11} &= I. \end{aligned}$$

这给出

$$[\chi_1 - \chi_2, h] = 0.$$

我们还有

$$\chi_1\chi_2 h = h\chi_1\chi_2 = 0$$

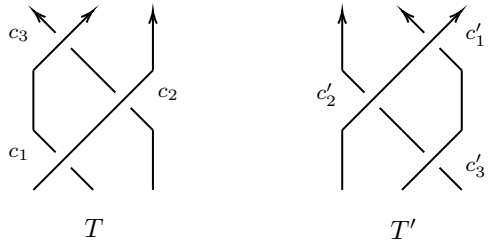



图 9：辫关系 III

基于次数原因。因此，

$$[\xi_i, h] = [u, h] = 0$$

并且结论由推论2.28得出。 □

### 3.4.2 辫子关系 II 下的不变性

**命题 3.14.** 设 $\beta$、$\beta'$ 是表示为如下形式的辫图

$$\beta = \beta_2(\sigma_i\sigma_j)\beta_1, \quad \beta' = \beta_2(\sigma_j\sigma_i)\beta_1$$

其中 $|i-j|>2$。那么 $[\beta]$ 和 $[\beta']$ 作为 $\mathcal{A}_n^w$-模是同构的。

证明。 由于这两个辫图平面各向同性，对应的复形和映射相同。

□

### 3.4.3 辫子关系 III 下的不变性

**命题 3.15.** 设 $\beta, \beta'$ 是表示为

$$\beta = \beta_2(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i)\beta_1, \quad \beta' = \beta_2(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})\beta_1$$

其中 $1 \le i \le n-2$。那么 $[\beta]$ 和 $[\beta']$ 在范畴 $\mathrm{Kob}^h\mathcal{A}_n^w(\mathsf{B}_n)$ 中同伦等价 .

更强地说，同伦等价

$$[\beta] \underset{\Psi'}{\overset{\Psi}{\rightleftarrows}} [\beta']$$

可以选取为满足以下条件：*(i)* $\Psi, \Psi'$ 是强 1-截断的；*(ii)* 复合 $\Psi'\Psi, \Psi\Psi'$ 是强1-截断的；*(iii)* $\Psi'\Psi \simeq I, \Psi\Psi' \simeq I$ 由强 1-截断同伦给出。

附加 性质在命题3.15 的证明中将会用到命题3.22 .

证明。 令 $T$，$T'$表示 $\beta$，$\beta'$内部的局部缠结图，使得 $\beta \setminus T$与 $\beta' \setminus T'$相同，而 $T$ 与 $T'$ 通过 R3 移动相关（见图 9）。回想一下，在 [Bar05的 R3 移动定理1] 的证明中，他们利用 R2 移动的映射构造了强变形收缩 $E$，$E'$，作用于 $[T]$，$[T']$，随后证明 $E \cong E'$。于是，$[T]$ 与 $[T']$ 之间的链同伦等价由以下复合给出

$$[T] \xrightarrow{\simeq} E \xleftrightarrow{\cong} E' \xleftarrow{\simeq} [T'].$$

在这里，我们将这些映射扩展，以得到所需的等价关系。证明相当技术性，分七步进行。在整个证明过程中，我们依赖第 2.5 节中建立的一般框架，并反复使用次数推理，正如我们在命题 3.13 的证明中所做的那样。

**步骤 1.** 描述 $\mathcal{A}_n^w$ 在 $[T]$ 和 $[T']$ 上的作用。

注意到 $T$ 和 $T'$ 相差一个 180 度旋转和方向反转。相应地，令 $c_1 \prec c_2 \prec c_3$ 表示 $T$的交叉，$c_1' \succ c_2' \succ c_3'$ 表示 $T'$的交叉。这里， $c_i$和 $c_i'$ 的下标表示交叉的次序，而 $\prec$ 表示垂直次序。令 $\hat{\chi}_i = \hat{\chi}(c_i)$ 和 $\hat{\chi}_i' = \hat{\chi}(c_i')$。结合

$$\varepsilon := \varepsilon_{p_1(c_1)},$$

我们从图中可以看出

$$\hat{\chi}_1 = \varepsilon\chi_1, \quad \hat{\chi}_2 = -\varepsilon\chi_2, \quad \hat{\chi}_3 = \varepsilon\chi_3$$

and

$$\hat{\chi}_1' = -\varepsilon\chi_1', \quad \hat{\chi}_2 = \varepsilon\chi_2', \quad \hat{\chi}_3' = -\varepsilon\chi_3'.$$

令 $\xi_i$， $u$表示 $\mathcal{A}_n^w$在 $[\beta]$上的作用， $\xi_i'$， $u'$表示其在 $[\beta']$上的作用。我们可以重新排列辫股的下标，使得 $\xi_1$， $\xi_2$， $\xi_3$对应于 $T$中从左至右出现的三条辫股。对 $\beta'$进行相同的重新排列。于是我们看到

$$\begin{aligned}
\xi_1 &= \hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_2 + (\cdots) \quad &&= \varepsilon(\chi_1 - \chi_2) + (\cdots), \\
\xi_2 &= -\hat{\chi}_1 + \hat{\chi}_3 + (\cdots) &&= -\varepsilon(\chi_1 - \chi_3) + (\cdots), \\
\xi_3 &= -\hat{\chi}_2 - \hat{\chi}_3 + (\cdots) &&= \varepsilon(\chi_2 - \chi_3) + (\cdots)
\end{aligned} \tag{3.7}$$

and

$$\begin{aligned}
\xi_1' &= \hat{\chi}_2' + \hat{\chi}_1' + (\cdots) \quad &&= -\varepsilon(\chi_1' - \chi_2') + (\cdots), \\
\xi_2' &= \hat{\chi}_3' - \hat{\chi}_1' + (\cdots) \quad &&= \varepsilon(\chi_1' - \chi_3') + (\cdots), \\
\xi_3' &= -\hat{\chi}_3' - \hat{\chi}_2' + (\cdots) &&= -\varepsilon(\chi_2' - \chi_3') + (\cdots).
\end{aligned} \tag{3.8}$$

这里，每个 $(\cdots)$ 部分表示同伦 $\hat{\chi}_c$的带符号和，这些同伦对应于 $T$和$T'$之外的交叉，因此对于每个 $i = 1$， 2， 3，这些部分在 $\xi_i$和 $\xi_i'$中相同。对于其他辫股，我们有$\xi_i = \xi_i'$ $(i > 3)$。

Next，由（3.5）可得

$$\begin{aligned}
u = &\sum_{\substack{c \prec c' \prec c_1 \\ c_3 \prec c \prec c'}} a_{c,c'} \hat{\chi}_c \hat{\chi}_{c'} \\
&+ \sum_{c \prec c_1} \hat{\chi}_c \left\{ a_{c,1}\hat{\chi}_1 + a_{c,2}\hat{\chi}_2 + a_{c,3}\hat{\chi}_3 \right\} \\
&+ \sum_{c_3 \prec c} \left\{ a_{1,c}\hat{\chi}_1 + a_{2,c}\hat{\chi}_2 + a_{3,c}\hat{\chi}_3 \right\} \hat{\chi}_c \\
&+ a_{1,2}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_2 + a_{1,3}\hat{\chi}_1\hat{\chi}_3 + a_{2,3}\hat{\chi}_2\hat{\chi}_3
\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}
u' = &\sum_{\substack{c \prec c' \prec c_3' \\ c_1' \prec c \prec c'}} a_{c,c'} \hat{\chi}_c \hat{\chi}_{c'} \\
&+ \sum_{c \prec c_3'} \hat{\chi}_c \left\{ a_{c,3}'\hat{\chi}_3' + a_{c,2}'\hat{\chi}_2' + a_{c,1}'\hat{\chi}_1' \right\} \\
&+ \sum_{c_1' \prec c} \left\{ a_{3,c}'\hat{\chi}_3' + a_{2,c}'\hat{\chi}_2' + a_{1,c}'\hat{\chi}_1' \right\} \hat{\chi}_c \\
&+ a_{3,2}'\hat{\chi}_3'\hat{\chi}_2' + a_{3,1}'\hat{\chi}_3'\hat{\chi}_1' + a_{2,1}'\hat{\chi}_2'\hat{\chi}_1'.
\end{aligned}$$

这里，我们使用了与命题 3.13 的证明中相同的缩写。由此可见

$$a_{c,i} = a'_{c,i}, \quad a_{i,c} = a'_{i,c}$$

and

$$a'_{1,2} = a'_{2,1} = 1, \quad a'_{1,3} = a'_{3,1} = -1, \quad a'_{2,3} = a'_{3,2} = 1$$

此外，通过计算连接可知，对于每个交叉 $c \prec c_1$,

$$a_{c,1} - a_{c,2} + a_{c,3} = 0$$

类似地，对于每个交叉 $c \succ c_3$,

$$a_{1,c} - a_{2,c} + a_{3,c} = 0.$$

最后，令

$$A_c = a_{c,2},\ B_c = a_{c,3},\ C_c = a_{2,c},\ D_c = a_{3,c}.$$

合并起来，可写为

$$\begin{aligned} u = {} & (\cdots) \\ & + \varepsilon \sum_{c \prec c_1} \hat{\chi}_c \left\{ A_c(\chi_1 - \chi_2) - B_c(\chi_1 - \chi_3) \right\} \\ & + \varepsilon \sum_{c_3 \prec c} \left\{ C_c(\chi_1 - \chi_2) - D_c(\chi_1 - \chi_3) \right\} \hat{\chi}_c \\ & - \chi_1\chi_2 - \chi_1\chi_3 - \chi_2\chi_3 \end{aligned} \tag{3.9}$$

and

$$\begin{aligned} u' = {} & (\cdots) \\ & - \varepsilon \sum_{c \prec c'_3} \hat{\chi}_c \left\{ A_c(\chi'_1 - \chi'_2) - B_c(\chi'_1 - \chi'_3) \right\} \\ & - \varepsilon \sum_{c'_1 \prec c} \left\{ C_c(\chi'_1 - \chi'_2) - D_c(\chi'_1 - \chi'_3) \right\} \hat{\chi}_c \\ & + \chi'_1\chi'_2 + \chi'_1\chi'_3 + \chi'_2\chi'_3. \end{aligned} \tag{3.10}$$

**步骤 2.** 构造 $E$, $E'$ 并描述相关映射。

令 $T_0$, $T_1$ 表示将 $T$ 中的交叉 $c_1$ 按相应方式分解后得到的缠结。于是，复形 $[T]$ 可描述为链映射 $e\colon [T_0] \to [T_1]$ 的映射锥，该链映射对应于 $c_1$处的分解变化。具体而言，我们有

$$[T] = [T_0] \oplus t^1[T_1]$$

其微分由下式给出

$$\begin{pmatrix} d_0 & \\ e & -d_1 \end{pmatrix}.$$

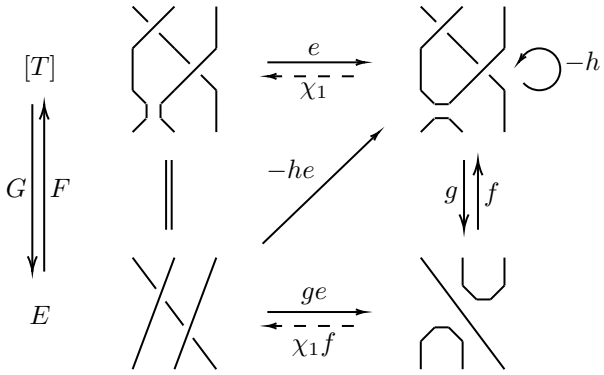



图10： $[T]$的强变形收缩。

注意到 $T_1$ 通过一次 R2 移动变为平面缠结图 $T_1'$ 。因此，存在一个强变形收缩

$$\begin{array}{c} [T_1] \underset{f}{\overset{g}{\rightleftarrows}} E_1 \\ \circlearrowleft_h \end{array}$$

如图 8所述。根据 [Bar05，引理 4。5], 可得到一个强变形收缩 $E$ ，其对象为 $[T]$，其中

$$E = [T_0] \oplus t^1 E_1$$

其微分为

$$\begin{pmatrix} d_0 & \\ ge & -d_1 \end{pmatrix}.$$

显式映射

$$\begin{array}{c} [T] \underset{F}{\overset{G}{\rightleftarrows}} E \\ \circlearrowleft_H \end{array}$$

定义如下

$$F = \begin{pmatrix} I & \\ -he & f \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} I & \\ & g \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \\ & -h \end{pmatrix}. \tag{3.11}$$

参见图 10。类似地，存在一个强变形收缩 $E'$，其对象为 $[T']$，映射为 $F'$， $G'$， $H'$ 具体描述相同。

**步骤3.** 将 $\mathcal{A}_n^w$-作用转移到 $E$， $E'$。

回顾命题2.27，并考虑映射

$$F_i := H\xi_i F, \quad F_u := HuF.$$

我们断言这些映射都为零。由命题2.25，可知 $E$ 容许所转移的$\mathcal{A}_n^w$-作用

$$\bar{\xi}_i := G\xi_i F, \quad \bar{u} := GuF,$$

and，即 $F$ 是严格的 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。首先，让我们用矩阵的形式描述这些映射 .

关于 $[T]$ 的同伦 $\chi_i$ 描述如下

$$\chi_1 = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \chi_i = \begin{pmatrix} \chi_i & \\ & -\chi_i \end{pmatrix} \ (i = 2, 3). \tag{3.12}$$

由 (3.11)、(3.12)，可得

$$H\chi_1 F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H\chi_i F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ h\chi_i he & h\chi_i f \end{pmatrix}$$

这里可以看 出，第二个方程右端从次数原因来看也为零 。此外， 我们有

$$H\chi_1\chi_i F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad H\chi_2\chi_3 F = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -h\chi_2\chi_3 he & -h\chi_2\chi_3 f \end{pmatrix}$$

再次，由次数原因可知这些映射为零。根据 $\xi_i$ 和$u$ 在 (3.7)、(3.9) 中给出的显式描述，上述方程给出 $F_i = F_u = 0$。注意，我们忽略了$\xi_i$中 $(\cdots)$ 的部分$\xi_i$和 $u$，因为它们由 $\chi_c$之外的点滑动同伦 ˆ $T$构成，因此与 $H$、 $F$、以及我们有 $HF = 0$相交换。相同的论证也适用于 $E'$。

**步骤 4**。 将 $G, G'$扩张为强 1-截断 $h\mathcal{A}_n^w$-态射。

再次，根据命题 2.27，考虑映射

$$G_i := G\xi_i H, \quad G_u := -GuH.$$

˜我们断言这些映射是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的，这意味着 $G = (G, G_i, G_u)$ 给出了一个从 $h\mathcal{A}_n^w$到 $E$的强 1-截断 $[T]$-态射。由 (3.11)、(3.12)，可得

$$G\chi_1 H = \begin{pmatrix} 0 & -\chi_1 h \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad G\chi_i H = \begin{pmatrix} 0 & \\ & g\chi_i h \end{pmatrix}$$

and

$$G\chi_1\chi_i H = \begin{pmatrix} 0 & \chi_1\chi_i h \\ & 0 \end{pmatrix} \quad G\chi_2\chi_3 H = \begin{pmatrix} 0 & \\ & -g\chi_2\chi_3 h \end{pmatrix}$$

其中 $i = 2,3$。再次，由于次数原因， $G\chi_i H = G\chi_2\chi_3 H = 0$ 。因此，只需证明 $G\chi_1 H$ 和 $G\chi_1\chi_i H$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。

回顾一下，转移到 $E$ 上的 $\mathcal{A}_n^w$-作用由下式给出

$$\bar{\xi}_i := G\xi_i F, \quad \bar{u} := GuF.$$

为避免记号混乱，设

$$\bar{\chi}_i := G\chi_i F, \quad \overline{\chi_i\chi_j} = G\chi_i\chi_j F.$$

具体而言，

$$\bar{\chi}_1 = \begin{pmatrix} -\chi_1 he & \chi_1 f \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\chi}_i = \begin{pmatrix} \chi_i & \\ & 0 \end{pmatrix}$$

and

$$\overline{\chi_1\chi_i} = \begin{pmatrix} \chi_1\chi_i he & -\chi_1\chi_i f \\ & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{\chi_2\chi_3} = \begin{pmatrix} \chi_2\chi_3 & \\ & 0 \end{pmatrix}.$$

注意，$\chi_i\chi_j = \bar{\chi}_i\bar{\chi}_j$ 并不成立。对于 $\eta = G\chi_1 H$ 或 $G\chi_1\chi_i H$，我们约定写作

$$[\chi_j, \eta] := \bar{\chi}_j\eta - (-1)^{|\eta|}\eta\chi_j$$

and

$$[\chi_j\chi_k, \eta] := \overline{\chi_j\chi_k}\eta - \eta\chi_j\chi_k.$$

采用这一记号，我们有

$$[\chi_j, G\chi_1 H] = \begin{cases} \begin{pmatrix} 0 & \chi_1 he\chi_1 h \\ & 0 \end{pmatrix} & (j=1) \\ \begin{pmatrix} 0 & -\chi_1[\chi_j, h] \\ & 0 \end{pmatrix} & (j=2,3). \end{cases}$$

由 $e$、$h$ 与 $\chi_i$ 在图8 与9中的显式描述，可以容易地证明

$$(he)(\chi_1 h)|_{11} = (-I)(-I) = I.$$

此外，如同命题3.13的证明中那样，我们有

$$\begin{aligned} \chi_2 h|_{11} &= -I, & \chi_3 h|_{11} &= 0, \\ h\chi_2|_{11} &= 0, & h\chi_3|_{11} &= -I \end{aligned}$$

（符号的差异源于这两个交叉的次序。）因此，我们有

$$he\chi_1 h = -[\chi_2, h] = -[\chi_3, h]$$

由此得到

$$[\chi_1 - \chi_2, G\chi_1 H] = [\chi_1 - \chi_3, G\chi_1 H] = [\chi_2 - \chi_3, G\chi_1 H] = 0$$

并由（3.7），我们有

$$[\xi_i, G\chi_1 H] = 0 \quad (i = 1, 2, 3).$$

此外，由于次数原因，我们有

$$[\chi_j\chi_k, G\chi_1 H] = [\chi_j, G\chi_1\chi_i H] = [\chi_j\chi_k, G\chi_1\chi_i H] = 0$$

对于 $i = 2,\ 3$ 与 $1 \le j < k \le 3$。因此，由（3.7）、（3.9），我们得到

$$[u, G\chi_1 H] = [\xi_j, G\chi_1\chi_i H] = [u, G\chi_1\chi_i H] = 0$$

从而证明 $G\chi_1 H$ 与 $G\chi_1\chi_i H$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。完全相同的论证适用于 $G'$。

**步骤5.** 验证 $G,\ G'$ 是强形变收缩。

再次由命题 2.27，考虑以下映射

$$H_i := H\xi_i H, \quad H_u := HuH.$$

不难看出

$$H\chi_i H = 0 \quad (i = 1, 2, 3)$$

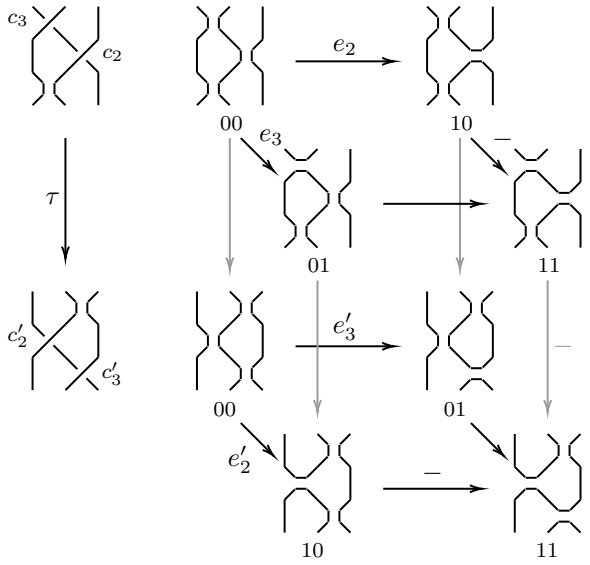



图 11: $[T_0]$, $[T_0']$ 和 $\tau$ 的描述。

and

$$H\chi_i\chi_j F = 0 \quad (1 \le i < j \le 3)$$

因此 $H_i = H_u = 0$ 由（3.7）、（3.9）。由命题 2.27，可得

$$FG - I = [d, H], \quad FG_i = [\xi_i, H], \quad FG_u = [u, H]$$

并且由（2.7）、（2.8）可知， $H =$ （$H$，0，0）给出了强 1-截断态射之间的强 1-截断同伦 $h\mathcal{A}_n^w$-态射

$$F\tilde{G} = (FG, FG_i, FG_u) \simeq I = (I, 0, 0).$$

˜对于另一个方向，我们有 $GF =$ ($GF$， $G_iF$， $G_uF$) = ($I$， 0， 0)，因此我们在 $h\mathcal{A}_n^w$-模范畴中得到一个强变形收缩，

$$[T] \underset{F}{\overset{\tilde{G}}{\rightleftarrows}} E.$$
$$H$$

完全相同的论证也适用于 $H'$。

**步骤 6**。 证明 $E \cong E'$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-模。

根据上述构造，我们有 $E = [T_0] \oplus E_1$ 和 $E' = [T_0'] \oplus E_1'$。注意，两个图示 $T_0$ 和 $T_0'$ 是同位的，但两个交叉的次序相反。令

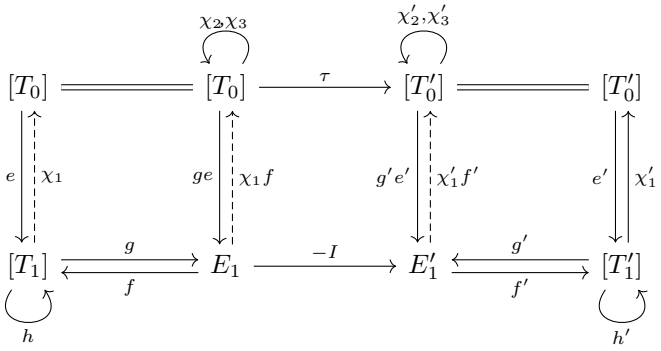
$$\tau \colon [T_0] \to [T_0']$$

是与重新排序对应的链同构，其在每个顶点上的作用为 $I$，但在顶点 (11) 处的作用为 $-I$。见图 11。对象 $E_1$ 和 $E_1'$ 是同位的，因此我们将二者视为相同。于是，同构 $\Phi$: $E \to E'$ 由下式给出

$$\Phi = \begin{pmatrix} \tau & \\ & -I \end{pmatrix}.$$

我们声称 $\Phi$ 是一个 $\mathcal{A}_n^w$-线性同构。

首先，考虑下面的图




通过展开图 10 和 11的显式描述，可以验证以下方程:

$$\begin{aligned}\tau\chi_i &= \chi_j'\tau\colon [T_0] \longrightarrow [T_0'],\\ \tau\chi_1 f &= \chi_1' f'\colon E_1 \longrightarrow [T_0'],\\ ge &= -g'e'\tau\colon [T_0] \longrightarrow E_1'\end{aligned}$$

其中，第一条方程中的 $(i,j) \in \{(2,3),(3,2)\}$ 属于。进一步地，在 $[T_0]$ 上，我们有

$$\begin{aligned}\chi_1 he|_{00} &= 0, & \chi_1 he|_{10} &= 0,\\ \chi_1 he|_{01} &= -\chi_3|_{01}, & \chi_1 he|_{11} &= -\chi_2|_{11}\end{aligned}$$

而在 $[T_0']$ 上，

$$\begin{aligned}\chi_1' h'e'|_{00} &= 0, & \chi_1' h'e'|_{01} &= -\chi_3'|_{01},\\ \chi_1' h'e'|_{10} &= 0, & \chi_1' h'e'|_{11} &= -\chi_2'|_{11}.\end{aligned}$$

在步骤 4 中，我们在 $E$ 上定义了同伦 $\bar{\chi}_i = G\chi_i F$ 和 $\chi_i\chi_j = G\chi_i\chi_j F$。类似地，在 $E'$ 上定义 $\bar{\chi}_i' := G'\chi_i' F'$ 和 $\chi_i\chi_j{}' := G'\chi_i'\chi_j' F'$。利用上述方程，可以验证

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_i) &= \begin{pmatrix} -\tau(\chi_1 he + \chi_i) & \tau\chi_1 f \\ & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} (\chi_1' h'e' + \chi_i')\tau & \chi_1' f' \\ & 0 \end{pmatrix}\\ &= -(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_i)\Phi\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi(\bar{\chi}_2 - \bar{\chi}_3) &= \begin{pmatrix} \tau(\chi_2 - \chi_3) & \\ & 0 \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} (\chi_3' - \chi_2')\tau & \\ & 0 \end{pmatrix}\\ &= -(\bar{\chi}_2 - \bar{\chi}_3)\Phi.\end{aligned}$$

类似地，可以证明

$$\begin{aligned}\Phi(\overline{\chi_1\chi_2}+\overline{\chi_1\chi_3}) &= \begin{pmatrix}\tau\chi_1(\chi_2+\chi_3)he & -\tau\chi_1(\chi_2+\chi_3)f\\ & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}-\chi_1'(\chi_2'+\chi_3')h'e'\tau & -\chi_1'(\chi_2'+\chi_3')f'\tau\\ & 0\end{pmatrix}\\ &= -(\overline{\chi_1\chi_2}'+\overline{\chi_1\chi_3}')\Phi\end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned}\Phi\overline{\chi_2\chi_3} &= \begin{pmatrix}\tau\chi_2\chi_3 & \\ & 0\end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix}\chi_3'\chi_2'\tau & \\ & 0\end{pmatrix}\\ &= -\overline{\chi_2\chi_3}'\Phi.\end{aligned}$$

结合方程 (3.7)、(3.8)、(3.9)、(3.10)，可知 $\Phi$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的。

**步骤 7**。定义 $\Psi$，$\Psi'$ 并验证这些条件。

最后，通过水平箭头的复合定义映射 $\Psi$ 和 $\Psi'$

$$\underbrace{[T]}_{H} \underset{F}{\overset{\tilde{G}}{\leftrightarrows}} E \underset{\Phi^{-1}}{\overset{\Phi}{\leftrightarrows}} E' \underset{\tilde{G}'}{\overset{F'}{\leftrightarrows}} \underbrace{[T']}_{H'}.$$

由于 $\tilde{F}$，$\tilde{F}'$，$\Phi$ 是严格的，而 $\tilde{G}$，$\tilde{G}'$ 是强 1-截断的，因此复合映射 $\Psi$，$\Psi'$ 是强 1-截断的。此外，

$$\Psi'\Psi = (F\Phi^{-1}\tilde{G}')(F'\Phi\tilde{G}) = F\tilde{G}$$

是强 1-截断的，并且与 $I$ 通过强 1-截断同伦 $(H, 0, 0)$ 同伦。完全相同的论证也适用于 $\Psi\Psi'$。 □

注 3.16。取 $y$-化后，强变形收缩

$$\underbrace{y([T])}_{H} \underset{F}{\overset{y(\tilde{G})}{\leftrightarrows}} y(E)$$

描述如下。首先，$y([T])$ 的微分为

$$\begin{aligned}D &= d+\sum_i \xi_i y_i\\ &= d+\varepsilon(\chi_1-\chi_2)y_1-\varepsilon(\chi_1-\chi_3)y_2+\varepsilon(\chi_2-\chi_3)y_3\\ &= \begin{pmatrix}d_0 & \\ e & -d_1\end{pmatrix}+\varepsilon\begin{pmatrix}\chi_2(y_3-y_1)+\chi_3(y_2-y_3) & \chi_1(y_1-y_2)\\ & -\chi_2(y_3-y_1)-\chi_3(y_2-y_3)\end{pmatrix}\end{aligned}$$

而 $y(E)$ 的微分为

$$\begin{aligned} D &= d + \sum_i \bar{\xi}_i y_i \\ &= d + \varepsilon(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_2)y_1 - \varepsilon(\bar{\chi}_1 - \bar{\chi}_3)y_2 + \varepsilon(\bar{\chi}_2 - \bar{\chi}_3)y_3 \\ &= \begin{pmatrix} d_0 & \\ ge & -d_1 \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} -\chi_1 he(y_1 - y_2) + \chi_2(y_3 - y_1) + \chi_3(y_2 - y_3) & \chi_1 f(y_1 - y_2) \\ & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

映射 $F$, $H$ 保持不变

$$F = \begin{pmatrix} I & \\ -he & f \end{pmatrix}, \quad H = \begin{pmatrix} 0 & \\ & -h \end{pmatrix},$$

且映射 $y(G)$ 由下式给出

$$\begin{aligned} y(\tilde{G}) &= G + \sum_i G_i y_i \\ &= \begin{pmatrix} I & \\ & g \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} 0 & -\chi_1 h(y_1 - y_2) \\ & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

令 $y_1 = y_2 = y_3$ 即可恢复 [Bar05 定理 1] 中给出的原复形。

## 3.5 $y$-化的链环 Khovanov 同调

接下来，我们考虑辫图 $\beta \in \mathrm{BDiag}(n)$ 的闭包 $\beta = \mathrm{cl}(\beta) \in \mathrm{Diag}(\varnothing)$。设 $\beta$的分支数为 $l$ 。对每个 $i$，作用 $x_i$, $x_i'$在 $[\beta]$上相等，因此$[\beta]$ 上的 $\mathcal{A}_n^w$-作用变为中心的。通过选择 $w$的循环分解，

$$w = (i_{1,1} \cdots i_{1,n_1}) \cdots (i_{l,1} \cdots i_{l,n_l}),$$

我们可以应用命题2.15，从而 $[\beta]$具有一个 $\mathcal{CA}_l$-模结构。作用的具体描述如下：

$$\bar{x}_k := x_{k,1}, \quad \bar{\xi}_k := \sum_{j=1}^{n_k} \xi_{k,j}, \quad \bar{u} := u + \sum_k \tilde{u}_k, \quad \tilde{u}_k := \sum_{j<j'} \xi_{k,j}\xi_{k,j'}. \tag{3.13}$$

**定义 3.17.** *$y$-ified Khovanov* 复形 $\beta$（记作 $y[\beta]$）是与 $\mathcal{CA}_l$-模 $[\beta]$相关联的 $y$-复形。

$y[\beta]$ 的微分 $D$ 定义为

$$D = d + \sum_k \bar{\xi}_k y_k$$

其中 $D^2 = 0$。$y[\bar{\beta}]$ 上的相应 e-算子定义为

$$\mathsf{e} = \bar{u} + \sum_k 2\bar{x}_k \frac{\partial}{\partial y_k}$$

回顾命题 2.17 ， $R_l$-作用和e-算子在同伦意义下独立于 $w$的循环分解选择。

**定理 3.18**。 $y[\beta]$的e-等变链同伦型在辫子关系和 *Markov* 变换下是不变量。

证明将在以下小节中给出。定理 3.18为以下定义提供了依据。

定义 3.19. 设 $L$ 是由辫图 $\beta$表示的链环。 $\beta$的 $y$ 化 $U(2)$-等变 Khovanov 复形记作 $y\mathrm{CKh}^{U(2)}(\beta)$，它是通过对复形 $y[\beta]$应用拓扑量子场论 $\mathcal{F}$得到的、多项式环 $R_{U(2)}[y_1,\dots,y_l]$ 上的双分次复形。其同调记作$y\mathrm{Kh}^{U(2)}(L)$，称为 $L$的 $y$ 化 $U(2)$-等变 Khovanov 同调。在取同调之前对 $h,t\in R_{U(2)}$ 进行特化，可以得到其他变体的 $y$ 化同调。特别地，对于 $h=t=0$，相应的复形 $y\mathrm{CKh}(\beta)$称为 $\beta$的 $y$ 化 Khovanov 复形，其同调 $y\mathrm{Kh}(L)$称为 $L$的 $y$ 化 Khovanov 同调。

### 3.5.1 辫子关系下的不变性。

我们陈述命题 3.13 至 3.15的闭合版本。在以下每种情形中，均假设底层置换的一个循环分解（2.2） $w$ 已固定。

**命题 3.20**。 设 $\beta$、$\beta'$ 是表示为如下形式的辫图

$$\beta=\beta_2\beta_1,\quad \beta'=\beta_2(\sigma_k^{-1}\sigma_k)\beta_1$$

，其中 $1\le k\le n-1$。则 $[\beta]$ 是 $[\beta']$ 的强变形收缩，视为 $\mathcal{CA}_l$-模。

**命题 3.21**。 设 $\beta$、$\beta'$ 是表示为如下形式的辫图

$$\beta=\beta_2(\sigma_i\sigma_j)\beta_1,\quad \beta'=\beta_2(\sigma_j\sigma_i)\beta_1$$

，其中 $|i-j|>2$。则 $[\beta]$ 和 $[\beta']$ 作为 $\mathcal{CA}_l$-模同构。

**命题 3.22**。 设 $\beta,\beta'$ 是表示为

$$\beta=\beta_2(\sigma_i\sigma_{i+1}\sigma_i)\beta_1,\quad \beta'=\beta_2(\sigma_{i+1}\sigma_i\sigma_{i+1})\beta_1$$

其中 $1\le i\le n-2$ 的辫子。那么，在范畴 $\mathrm{Kob}^{h\mathcal{CA}_l}(\varnothing)$ 中，$[\beta]$ 和 $[\beta']$ 同伦等价。

对于辫子关系 I 和 II（命题 3.20 和3.21），该结果可直接由命题 3.13 和 3.14 结合命题 2.16 得出。事实上，对于每种情况，我们都有 $\mathcal{A}_n^w$-线性同伦等价

$$[\beta]\underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}}[\beta'].$$

闭包函子 cl 保持同伦等价，并给出中心的 $\mathcal{A}_n^w$-模之间的 $\mathcal{A}_n^w$-态射

$$[\bar\beta]\underset{\bar g}{\overset{\bar f}{\rightleftarrows}}[\bar\beta'].$$

然后，根据命题 2.16，应用约化函子后，这些映射可视为 $\mathcal{CA}_l$- 等价的 $\mathcal{CA}_l$-模。

对于辫子关系 III，我们只有同伦相干等价，而非严格等价，因此无法直接应用命题 2.16 中的约化函子。尽管如此，根据命题3.15后半部分陈述的附加性质，仍可得到以下“部分函子性”；进而可以通过类似的论证推出命题 3.22 。

引理 *3.23.* 设 $C,C'$ 是 $\mathcal{CA}_n^w$-模，且 $C,C'$ 是 $C,C'$ 作为 $\mathcal{CA}_l$-模的约化，它们由 $w$ 的循环分解 *(2.2)* 得到。令 $W^1(C,C')$ 表示从 $C$ 到 $C'$ 的所有强 *1*-截断 $h\mathcal{CA}_n^w$-态射的集合；类似地，$W^1(\bar C,\bar C')$ 表示 $(\bar C,\bar C')$ 对应的集合。我们称 $F,F'$ 是

在 $W^1(C,C')$ 中同伦的，如果 $F,F'$ 通过强 1-截断同伦 $H$ 同伦。现在，对于每一对 $\mathcal{CA}_n^w$-模 $(C,C')$，存在一个映射

$$W^1(C,C') \to W^1(\bar{C},\bar{C}'), \quad F \mapsto \bar{F}$$

满足以下性质：

1. 若 $F \in W^1(C,C')$ $G \in W^1(C',C'')$ 且 $GF \in W^1(C,C'')$，则 $\bar{G}\bar{F} \simeq \overline{GF}$ 属于 $W^1(\bar{C},\bar{C}'')$。
2. 若 $F \simeq F'$ 属于 $W^1(C,C')$，则 $\bar{F} \simeq \bar{F}'$ 属于 $W^1(\bar{C},\bar{C}')$。

特别地，若 $F \in W^1(C,C')$、$G \in W^1(C',C)$、$GF \in W^1(C,C)$ 且 $GF \simeq 1_C$ 属于 $W^1(C,C)$，则 $\bar{G}\bar{F} \simeq 1_{\bar{C}}$ 属于 $W^1(\bar{C},\bar{C})$。

证明。设 $F=(f,f_i,f_u)$ 是一个从 $C$ 到 $C'$ 的强 1-截断 $h\mathcal{A}_n^w$-态射。相应的 $\bar{F}=(f,f_k,f_u)$ 定义为

$$\bar{f} := f, \quad \bar{f}_k := \sum_j f_{k,j}, \quad \bar{f}_u := f_u + \sum_k \tilde{f}_k$$

其中我们令

$$\tilde{f}_k := -\sum_{j<j'} (\xi_{k,j} f_{k,j'} - f_{k,j}\xi_{k,j'}).$$

首先，我们验证 $F$ 确实是一个强 1-截断 $h\mathcal{A}_n^w$-态射。所需条件 (2.4) 对于 $f_i$ 由

$$[d,\bar{f}_k] + [\bar{\xi}_k, f] = \sum_j [d, f_{k,j}] + \sum_j [\xi_{k,j}, f] = 0.$$

所需条件 (2.6) 对于 $f_u$ 为

$$[d,\bar{f}_u] + [\bar{u},\bar{f}] + 2\sum_k \bar{x}_k \bar{f}_k = 0.$$

由假设可得

$$[d,f_u] + [u,f] + \sum_i (x_i + x_{w(i)}) f_i = 0$$

因此，只需证明对每个 $k$,

$$[d,\tilde{f}_k] + [\tilde{u}_k, f] + \sum_j (2\bar{x}_k - (x_{k,j} + x_{k,j+1})) f_{k,j} = 0$$

事实上，我们有

$$\begin{aligned}
[\tilde{u}_k, f] &= \sum_{j<j'} [\xi_{k,j}\xi_{k,j'}, f] \\
&= \sum_{j<j'} (\xi_{k,j}[\xi_{k,j'}, f] + [\xi_{k,j}, f]\xi_{k,j'}) \\
&= -\sum_{j<j'} (\xi_{k,j}[d, f_{k,j'}] + [d, f_{k,j}]\xi_{k,j'})
\end{aligned}$$

and

$$\bar{x}_k - x_{k,j} = \sum_{j'<j} [d, \xi_{k,j'}], \quad \bar{x}_k - x_{k,j+1} = -\sum_{j<j'} [d, \xi_{k,j'}].$$

因此,

$$\begin{aligned}
&[\tilde{u}_k, f] + \sum_j (2\bar{x}_k - (x_{k,j} + x_{k,j+1})) f_{k,j} \\
&= -\sum_{j<j'} (\xi_{k,j}[d, f_{k,j'}] + [d, f_{k,j}]\xi_{k,j'}) + \sum_{j<j'} ([d, \xi_{k,j}] f_{k,j'} - f_{k,j}[d, \xi_{k,j'}]) \\
&= \sum_{j<j'} ([d, \xi_{k,j} f_{k,j'}] - [d, f_{k,j}\xi_{k,j'}]) \\
&= -[d, \tilde{f}_k].
\end{aligned}$$

此外，假定 $f_i$ 与 $f_u$ 是 $\mathcal{A}_n^w$-线性的，因此 $f_k$ 与 $f_u$ 都与$\xi_{k,j}$ 和 $u$交换，并且因而都是 $\mathcal{CA}_{\bar{l}}$-线性的。因此， $F$ 是一个强 1-截断 $h\mathcal{CA}_{\bar{l}}$-态射。

Next，我们验证这两个性质。对于 $F = (f, f_i, f_u)$与 $G = (g, g_i, g_u)$，我们有 $GF = (gf, g_i f + gf_i, g_u f + gf_u)$。相应的映射为 $F = (f, f_k, f_w)$、 $G = (\bar{g}, \bar{g}_k, \bar{g}_u)$，以及

$$\begin{aligned}
\overline{GF}_0 &= gf = \bar{g}\bar{f} \\
\overline{GF}_k &= \sum_j (g_{k,j} f + g f_{k,j}) = \bar{g}_k \bar{f} + \bar{g}\bar{f}_k, \\
\overline{GF}_u &= (g_u f + g f_u) - \sum_k \sum_{j<j'} (\xi_{k,j}(g_{k,j'} f + g f_{k,j'}) - (g_{k,j} f + g f_{k,j})\xi_{k,j'}) \\
&= (\bar{g}_u \bar{f} + \bar{g}\bar{f}_u) + \sum_k \sum_{j<j'} ([d, g_{k,j}] f_{k,j'} + g_{k,j}[d, f_{k,j'}]) \\
&= (\bar{g}_u \bar{f} + \bar{g}\bar{f}_u) + \sum_k \sum_{j<j'} [d, g_{k,j} f_{k,j'}].
\end{aligned}$$

因此,

$$H = (0, 0, \sum_k \sum_{j<j'} g_{k,j} f_{k,j'})$$

给出 $GF \simeq \cancel{GF}$。

对于第二个性质，假设我们有一个关于 $F \simeq 0$的强 1-截断零同伦 $H = (h, h_i, h_u)$。考虑对应 $H \mapsto H = (h, h_i, h_u)$由下式给出

$$\bar{h} := h, \quad \bar{h}_k := \sum_j f_{k,j}, \quad \bar{h}_u := h_u + \sum_k \tilde{h}_k$$

其中

$$\tilde{h}_k := \sum_{j<j'} (\xi_{k,j} h_{k,j'} + h_{k,j}\xi_{k,j'}) .$$

我们声称 $H$ 是 $F \simeq 0$ 的强 1-截断零同伦。首先，验证（2.7）很容易。对于（2.8），我们必须有

$$\bar{f}_u = [d, \bar{h}_u] + [\bar{u}, \bar{h}] + \sum_k 2\bar{x}_k \bar{h}_k$$

由此可得,

$$\tilde{f}_k = [d, \tilde{h}_k] + [\tilde{u}_k, h] + \sum_j (2\bar{x}_k - (x_{k,j} + x_{k,j+1})) h_{k,j}.$$

验证与我们对 $[d, f_k]$ 给出的验证类似。还很容易看出， $h_k$, $h_u$ 是 $\mathcal{CA}_l$-线性的，因此 $H$ 是强 1-截断的。 □

### 3.5.2 在马尔可夫变换I下的不变性。

**命题 3.24.** 设 $\beta$、$\beta'$ 为如下表示的辫子

$$\beta = \beta_2\beta_1, \quad \beta' = \beta_1\beta_2.$$

则 $y[\beta]$ 与 $y[\beta']$ 作为e-等变 $y$-复形是同构的。

证明。 首先，注意到 $\beta$ 与 $\beta'$ 是平面各向同性的，因此我们可以自然地将复形 $[\beta]$与 $[\beta']$等同。对于 $a = 1, 2$，设 $w_a$ 为 $\beta_a$ 的底层置换。则 $w = w_2w_1$ 是 $\beta$的底层置换，且 $w' = w_1w_2$ 是 $\beta'$的底层置换。取$w$的一个循环分解

$$w = (i_{1,1} \cdots i_{1,n_1}) \cdots (i_{l,1} \cdots i_{l,n_l})$$

以及 $w'$的一个

$$w' = (i'_{1,1} \cdots i'_{1,n_1}) \cdots (i'_{l,1} \cdots i'_{l,n_l})$$

使得对每一个 $(k,\ j)$，都有$i'_{k,\ j} = w_1\ (i_{k,\ j})$。

令 $\xi_i^a$ 表示 $\xi_i$ 在 $[\beta_a]$上的作用，而 $\xi_i$，$\xi'_i$ 分别表示 $[\beta]$，$[\beta']$ 上的作用。于是有

$$\begin{aligned}
\xi_{i_{k,j}} &= \xi^1_{i_{k,j}} + \xi^2_{w_1(i_{k,j})} = \xi^1_{k,j} + \xi^2_{k,j}, \\
\xi'_{i'_{k,j}} &= \xi^2_{i'_{k,j}} + \xi^1_{w_2(i'_{k,j})} = \xi^2_{k,j} + \xi^1_{k,j+1}.
\end{aligned}$$

因此，

$$\bar{\xi}_k = \sum_j \xi_{k,j} = \sum_j \xi'_{k,j} = \bar{\xi}'_k$$

在 $[\beta] = [\beta']$上。因此， $y$-复形 $y[\beta]$ 和 $[\beta']$ 也可以等同。接下来， $y[\beta]$ 和 $y[\beta']$的 e-算子由下式给出

$$\begin{aligned}
\mathsf{e} &= 2\sum_k \bar{x}_k \frac{\partial}{\partial y_k} + u + \sum_k \tilde{u}_k, \quad \tilde{u}_k = \sum_{j<j'} \xi_{k,j}\xi_{k,j'}, \\
\mathsf{e}' &= 2\sum_k \bar{x}'_k \frac{\partial}{\partial y_k} + u' + \sum_k \tilde{u}'_k, \quad \tilde{u}'_k = \sum_{j<j'} \xi'_{k,j}\xi'_{k,j'}.
\end{aligned}$$

我们断言

$$H := \sum_k H_k, \quad H_k := 2\xi^1_{k,1}\frac{\partial}{\partial y_k}$$

给出

$$\mathsf{e} - \mathsf{e}' = [D, H].$$

利用给定的方程和（3.4）可以直接验证。 □

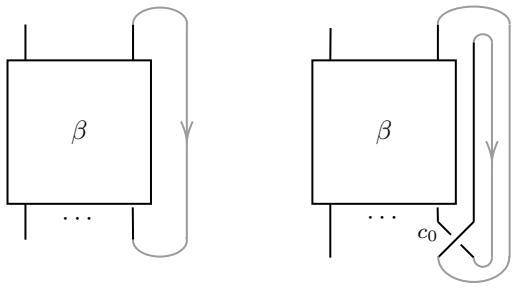



图 12：Markov II 型变换

### 3.5.3 在 Markov II 型变换下的不变性。

**Prop 命题 3.25**。设 $\beta$ 是一个具有 $n$ 条弦的辫子，且 $\beta'$ 是一个具有 $n+1$ 条弦的辫子，满足 $g$

$$\beta' = \beta\sigma_n.$$

则 $[\beta]$ 是 $[\beta']$ 作为 $\mathcal{CA}_l$-模的强变形收缩。

证明。图 12 描绘了两条辫子 $\beta$ 与 $\beta'$。令 $c_0$ 表示 $\beta'$ 的额外交叉，¯ ¯对应于 $\sigma_n$。由于它们的闭包 $\beta$ 与 $\beta'$ 由一次 R1 型变换相关联，根据 [Bar05，定理 1],这些复形之间存在强变形收缩

$$[\bar{\beta}] \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [\bar{\beta}'], \quad h \circlearrowleft$$

首先，考虑由自同态 $\xi_i$，$u$（$i = 1$，……，$n$）给出的 $[\beta]$ 上的 $\mathcal{A}_n^w$-作用，以及由 $\xi_i'$，$u'$（$i = 1$，……，$n+1$）给出的 $[\beta']$ 上的 $\mathcal{A}_{n+1}^w$-作用。显然，$\xi_i = \xi_i'$ 对 $i < n$（局部地看，远离 $c_0$）成立，并且

$$\xi_n' + \xi_{n+1}' = \hat{\chi}_{c_0} - \hat{\chi}_{c_0} + \xi_n = \xi_n.$$

¯ ¯因此，在取闭包并进行 $\mathcal{CA}_l$-约化后，对于所有 $k$，我们有 $\xi_k = \xi_k'$；由于所有 $\xi_i$ 都与 $f$ 和 $g$交换，因此有

$$g\bar{\xi}_k' f = gf\bar{\xi}_k = \bar{\xi}_k.$$

同样，由公式（3.5）可轻易看出 $g\bar{u}'f = \bar{u}$。因此，$\mathcal{CA}_l$在 $\beta$ 上的作用是¯ ¯从 $\beta'$传递过来的。此外，显然 $[\xi_k', h] = [\xi_k, h] = 0$ 且 $[\bar{u}', h] = [\bar{u}, h] = 0$。因此，由命题2.27即可得出结果。 □

## 3.6 约化版本

将 $y$-化的 Khovanov 同调的构造原样推广到约化情形即可。首先，我们回顾约化 *Khovanov* 同调的定义；该定义最初由 [Kho03]引入。

¯考虑一个以辫子 $\beta$ 表示、带有正则点 $p \in \beta$ 的带基点链环 $(L, p)$。我们来考察由环 $R_{U(1)} = \mathbb{Z}[h]$ 和 Frobenius 代数 $A_{U(1)} = R_{U(1)}/(X^2 - hX)$ 给出的 $U(1)$-等变理论。带基点链环图 ¯$(\beta, p)$ 的约化 $U(1)$-*Khovanov* 复形 $\widetilde{CKh}^{U(1)}(\bar{\beta}, p)$定义为自同态 $x_p$ 的像，

$$\widetilde{CKh}_{U(1)}(\bar{\beta}, p) := \mathrm{Im}(x_p \colon CKh_{U(1)}(\bar{\beta}) \to CKh_{U(1)}(\bar{\beta})),$$

将其视为$CKh^{U(1)}(\beta)$的子复形。或者，也可以通过商来定义$CKh(\beta,\ p)$

$$CKh_{U(1)}(\bar{\beta})/\operatorname{Im}(x_p),$$

或者使用共轭映射 $h-x_p$ 代替 $x_p$；它们得到的复形均同构（参见 [SS24，命题 3.12、3.14]）。约化的 $U(1)$-Khovanov 同调 $\mathrm{Kh}^{U(1)}(\beta,p)$ 定义为 $\mathrm{CKh}^{U(1)}(\beta,p)$ 的同调，它是带基点链环 $(L,p)$ 的一个不变量，只取决于 $L$ 以及 $p$所属的分支（参见 [SS24，命题 3.16、3.18]）。特别地，对于纽结 $K$，约化同调与 $p$的选取无关，因此记作 $\mathrm{Kh}^{U(1)}(K)$，并称为 $K$的约化 $U(1)$-Khovanov 同调。在取同调之前设置 $h=0$，即可恢复原来的约化理论。

**命题** **命题 3.26。** *$\mathcal{CA}_l$ 在 $CKh^{U(1)}(\beta)$ 上的作用限制到子复形 $CKh^{U(1)}(\beta,p)$。*

证明。 $R_n^e$ 在 $CKh^{U(1)}(\beta)$ 上的作用限制到 $CKh^{U(1)}(\beta,p)$。由于点滑动同伦也限制到 $CKh^{U(1)}(\beta,p)$，自同态 $\xi_i$ 和 $u$也如此。 □

因此，$y$-化简的 $U(1)$-*Khovanov* 复形 $yCKh^{U(1)}(\beta,p)$ 定义为与 $\mathcal{CA}_l$-模 $CKh^{U(1)}(\beta,p)$ 相关联的 $y$-复形，并被视为未化简的 $y$-化 $yCKh^{U(1)}(\beta)$ 的子复形。

**命题 3.27.** *$yCKh^{U(1)}(\beta,p)$ 的*e*-等变链同伦类型是带基点链环的不变量。*

证明。 在将基点移离局部变换之后，用于证明定理 3.18 的所有映射都限制到约化复形 $CKh^{U(1)}(\beta,p)$。 □

我们将 $yCKh^{U(1)}(\beta,p)$ 的同调称为带基点链环 $(L,p)$ 的 $y$-化约化 $U(1)$-*Khovanov* 同调，并将其记为 $yKh^{U(1)}(L,p)$。在取同调之前令 $h=0$，便得到 $y$-化约化 *Khovanov* 同调 $yKh(L,p)$。

注记 3.28. 类似地，我们可以考虑 $U(1)\times U(1)$-等变理论的约化版本，它由 Frobenius 扩张给出

$$R_{U(1)\times U(1)}=\mathbb{Z}[\alpha_1,\alpha_2],\quad A_{U(1)\times U(1)}=R_{U(1)\times U(1)}[X]/(X-\alpha_1)(X-\alpha_2).$$

将自同态 $x_p$ 的定义替换为

$$x_p=\begin{cases}X_p-\alpha_1 & \text{if } \theta(p)=a,\\ -(X_p-\alpha_2) & \text{if } \theta(p)=b,\end{cases}$$

我们类似地得到一个配备了 e-算子的 $y$-化约约化同调 y.

## 3.7 推广到缠结

$[\beta]$ 和 $[\beta]$ 上的微分分次模结构可以自然地推广为缠结上的微分分次模结构。设 $B\subset\partial D^2$ 是一个有限的带符号点集，其中负点 $P_1,\dots,P_n$与正点 $P_1',\dots,P_n'$的数量相等。设 $T\in$Diag$(B)$是一个含有 $n$ 条弧和 $l$ 个环的定向缠结图。令 $w\in\mathfrak{S}_n$ 表示置换，使得对每个指标 $i$都有 $P_i\sim P'_{w(i)}$。对于每个环路 $C_k$

$\_T$，在 $C_k$上选取一个正则点 $P_k$。固定 $T$上的一个可容许 $ab$-染色 $\theta$。那么 $[T]$具有一个由下式给出的$R_n^e \otimes R_l$-模结构：

$$x_i := x_{P_i}, \quad x_i' := x_{P_i'}, \quad \bar{x}_k := x_{\bar{P}_k} \quad (i = 1, \dots, n;\ k = 1, \dots, r). \tag{3.14}$$

我们还有针对 $T$的每个交叉 $c$的点滑动同伦 $\chi_c$ $\gamma_i$是从 $P_i$到 $P_i'$的路径，而$_\bar{\gamma}_k$ 是从 $P_k$出发、沿着定向所指示的方向经过 $C_k$ 并返回到 $P_k$的环路。定义度为 $-1$ 的同伦

$$\xi_i := \xi_{\gamma_i}, \quad \bar{\xi}_k := \xi_{\bar{\gamma}_k}$$

它们给出

$$[d, \xi_i] = x_i - x'_{w(i)}, \quad [d, \bar{\xi}_k] = 0.$$

此外，与命题 3.5 的证明中一样，定义度为 $-2$ 的同伦

$$u_i := u_{\gamma_i}, \quad \bar{u}_k := u_{\bar{\gamma}_k}$$

and

$$u := \sum_i u_i + \sum_k \bar{u}_k.$$

于是，通过类似于命题 3.5 证明的论证，

$$[d, u] = \sum_i (x_i + x'_{w(i)})\xi_i + 2\sum_k \bar{x}_k \bar{\xi}_k.$$

定义

$$\mathcal{A}^w_{n,l} := \mathcal{A}^w_n \otimes_R \mathcal{C}\mathcal{A}_l$$

它是 $R_n^e \otimes_R R_l$上的微分分次代数。上述构造表明，$[T]$具有一个$\mathcal{A}^w_{n,\ l}$-模结构。由于$\mathcal{A}^w_{n,\ l}$ 自然嵌入到 $\mathcal{A}^w_{n+l}$ 中，我们便得到相应的 $y$- 复形：

$$y[T] = [T] \otimes_R R[y_1, \dots, y_n; \bar{y}_1, \dots, \bar{y}_l]$$

带有微分

$$D := d + \sum_i \xi_i y_i + \sum_k \bar{\xi}_k \bar{y}_k$$

以及 e-算子

$$\mathsf{e} = u + \sum_i (x_i + x'_{w(i)}) \frac{\partial}{\partial y_i} + 2\sum_k \bar{x}_k \frac{\partial}{\partial \bar{y}_k}.$$

**命题 3.29**。 $y[T]$ 的e-等变链同伦类型与环上基点的选择无关，并且在 *Reidemeister* 变换下保持不变。

证明。给定一个带有 $l$ 个环的缠结图 $T \in \mathsf{Diag}(\mathsf{B}_n)$，我们通过在每个点 $\bar{P}_k$ 处切开 $T$，得到一个 $2(n+l)$ 端缠结图$T^\times$ 。虽然端点可能位于 $D^2$ 的内部，我们仍可按显然的方式定义复形 $[T^\times]$，并赋予它一个 $\mathcal{A}^w_{n+l}$ 作用。现在，假设两个缠结图 $T$ 和 $T'$ 由一个 Reidemeister 变换相联系。于是，重复命题 3.20、3.22 和 3.25 的证明，可以证明 $[T^\times]$ 和 $[T'^\times]$ 作为 $\mathcal{A}^w_{n+l}$-模或 $h\mathcal{A}^w_{n+l}$-模是同伦等价的。将 $[T^\times]$、$[T'^\times]$ 还原为 $[T]$、$[T']$，可通过类似于约化函子命题 2.16 的对应来实现；重复第 3.5.1 节的论证，可证明$[T]$ 和 $[T']$ 同伦等价。进一步应用 $y$-化函子，即可得到相应 $y$-复形的不变性。最后，基点选择的无关性可通过重复命题 3.24 的证明来证明。

□

接下来，我们将由平面弧图定义的水平复合扩展到 dg-模范畴。设 $D$ 是一个二输入平面弧图，其内边界点为 $B_1$、$B_2$，外边界点为$B$。令 $n=|B|/2$ 和 $n_a=|B_a|/2$（$a=1,\ 2$）。对于 $a=1,\ 2$，设 $X_a$ 是 Kob($B_a$) 中的一个对象，配备一个 $A_{n_a}^{w_a}$、$\iota_a$ 作用，该作用由自同态 $x_i^a$、$x_i'^a$、$\bar{x}_k^a$、$\xi_i^a$、$\xi_k^a$、$u^a$ 给出。令 $X=D(X_1,\ X_2)$ 为复合复形，视为 Kob($B$) 中的一个对象。若对于任意一对由 $D$ 中一条弧连接的边界点 $p_1\in B_1$ 和 $p_2\in B_2$，来自 $X_1$ 的作用$x_{p_1}^1$ 与来自 $X_2$ 的作用 $x_{p_2}^2$ 相同，则称 $X_1$、$X_2$ 关于 $D$ 具有相容作用。在这种情况下，赋予 $X$ 一个 $\mathcal{A}_n^w$、$\iota$-模结构如下。

我们将每个同伦 $\xi_i^a$视为一条虚弧，它在输入圆盘 $D_a$内连接 $P_i^a$和 $P'^a_{w_a(i)}$。$X$中的一条虚路径 $\gamma$是一个序列，

$$\gamma\colon p_1\xrightarrow{\zeta_1}p_2\xrightarrow{\zeta_2}\cdots\xrightarrow{\zeta_r}p_{r+1}$$

其中，每个 $p_i$ 都是 $D$的一条弧上的点，而 $\zeta_i$ 是虚弧 $\{\xi_i^a\}$之一。若 $\gamma$ 从 $B$ 的一个负端点出发，并以 $B$的一个正端点为终点，则称其为一条**虚弦**。若 $p_1=p_{r+1}$ 且不重复包含同一条虚弧，则称 $\gamma$ 为一个**虚圈**。令 $l'$ 为虚圈的数量，并为 $X$的每个虚圈选取 $D$的一条弧上的一个点。令 $l=l_1+l_2+l'$。置换 $w\in\mathfrak{S}_n$ 由虚弦之间的对应关系定义，而 $X$ 以显然的方式，由 $X_1$ 和 $X_2$ 的多项式作用赋予一个$R_n^e\otimes_R R_l$作用。此外，对于上述虚路径 $\gamma$，我们定义

$$\xi_\gamma:=\sum_j\zeta_j. \tag{3.15}$$

我们通过 $\xi_i\,(i=1,\dots,n)$ 定义虚弦 $\gamma_i$的同伦，并通过 $\xi_k\,(k=1,\dots,l')$ 定义虚圈 $\bar{\gamma}_k$ 的同伦，具体如式（3.15）所示。将来自 $\xi_k^a$ 的自同态 $X_a$组合起来，可得自同态 $\xi_k(k=1,\dots,l)$。此外，定义

$$u:=u^1+u^2+\sum_\gamma\sum_{j<j'}\zeta_j\zeta_{j'}$$

其中 $\gamma$ 遍历所有虚弦和虚圈，起点为选定的基点 .

**命题 3.30**。上述定义的映射 $x_i,\ x_i',\ \bar{x}_k,\ \xi_i,\ \xi_k,\ u$ 给出 $X$一个$\mathcal{A}_{n,l}^w$-模结构。

证明。形式上重复命题 3.5的证明。 □

**命题 3.31**。对于缠结 $T_a\in\mathrm{Diag}(B_a)\ (a=1,2)$，有 $[D(T_1,T_2)]=D([T_1],[T_2])$ 作为$\mathcal{A}_{n,l}^w$-模。这里，$[T_1],[T_2]$ 以及 $[D(T_1,T_2)]$ 上的微分分次模结构，是通过为 $D(T_1,T_2)$ 选取一个可容许的 $ab$-着色 $\theta$并将其限制到 $T_1,T_2$上来定义的。

证明。这由构造显然可得。 □

上述二输入平面弧图的作用可以推广到具有任意输入数的平面弧图 $D$。特别地，对于对应于辫子闭包运算的单输入平面弧图 $D$，有

$$D([\beta])=[D(\beta)]=[\bar{\beta}],$$

从而将 其特化为第 2 节所述的将 $\mathcal{A}_n^w$-模约化为 $\mathcal{CA}_l$-模。 3.

**命题 3.32**。对于 $a=1,\ 2$，设 $f_a\colon X_a\to Y_a$ 是一个 $\mathcal{A}_{n_a,\ l_a}^{w_a}$-模同态。水平复合

$$D(f_1,f_2)\colon D(X_1,X_2)\to D(Y_1,Y_2)$$

是一个 $\mathcal{A}_{n,l}^w$-模同态。

## 3.8 限制到纽结

**Prop** **命题 3.33.** 如果 $\beta$ 闭合后形成一个纽结，那么在复形 $[\beta] \in \mathrm{Kob}^{\mathcal{C}\mathcal{A}_1}(\varnothing)$上，我们有

$$\bar{\xi} = 0, \quad [d, \bar{u}] = 0.$$

证明。 在 $\xi$ 的求和中，由于 $\chi_c$ 恰好以相反的符号出现两次，该和

$$\bar{\xi} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i$$

消失。第二个等式由 $\bar{u}$ 的定义性质得出。 □

**推论 3。** **34.** 如果 $\beta$ 闭合成一个纽结，则 $y$ 化复形 $y[\beta] = [\beta] \otimes R[y]$ 具有微分

$$D = d.$$

因此，$([\beta], d)$ 是 $(y[\beta], D)$ 的一个子复形，并且 e 在 $[\beta]$ 上限制为 $\bar{u}$。

**定理 3.35。** 如果 $\beta$ 闭合后是一个纽结，那么 $[\beta]$ 的 $\bar{u}$-等变链同伦类型是该纽结的不变量。

定理3.35 可由命题 3.36和3.37推出。

**命题 3.36。** 设 $\beta$，$\beta'$ 是由某个辫子关系联系起来的两个辫子。对应的 e-等变同伦等价（定义于相应的 $y$-复形 $y[\beta]$，$y[\beta']$ 如命题*3.15*、*3.20*和 *3.21*中所给出） $\bar{u}$可限制为非$y$-化复形之间的等变同伦等价。

证明。 对于第一和第二个辫子关系，回顾命题 3.20 和 3.21 ，同伦等价

$$[\bar{\beta}] \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} [\bar{\beta}']$$

是 $\mathcal{C}_1^w$-线性的，因此特别是严格 $\bar{u}$-等变的。

对于第三个辫子关系，回顾命题 3.22 的证明可知，映射 $F$、$H$ 是$\mathcal{A}_n^w$-线性的，但 $G$ 不是。当时，我们有

$$G_1 = -G_2, \quad G_3 = 0$$

因此，相应的 $y$-链映射由 $G$给出。因此， $\Psi$、$\Psi'$ 直接给出了这些 $y$-复形之间的同伦等价（并且它与 [Bar05的定理 1]中给出的 R3 移动映射一致）。此外，我们知道存在一个同伦 $\Psi$，它表示为关于 $y$的多项式，并给出

$$[\mathsf{e}, \Psi] = [D, \tilde{\Psi}].$$

然而，

$$[\mathsf{e}, \Psi] = [\bar{u} + 2x\frac{\partial}{\partial y}, \Psi] = [\bar{u}, \Psi]$$

and

$$[D, \tilde{\Psi}] = [d, \tilde{\Psi}]$$

因此， $\Psi$ 的常数项在非$y$-化范畴中给出一个同伦。 □

**命题 3.37.** 设 $\beta$，$\beta'$ 为两个由马尔可夫变换相关联的辫子。所述e-等变同伦等价介于相应的 $y$-复形之间，在命题3.24与3.25中给出，并限制为 $\bar{u}$-等变同伦等价，介于非$y$-化复形之间。

证明。 由命题 3.24 和3.25的证明显然可得。 □

下面这一点也值得注意，它可由命题 3.10立即得到。

**命题 3.38**。 对于 $[\beta]$，$\bar{u}$与可容许着色 $\theta$的选择无关 .

上述结果说明了下面的定义是合理的。

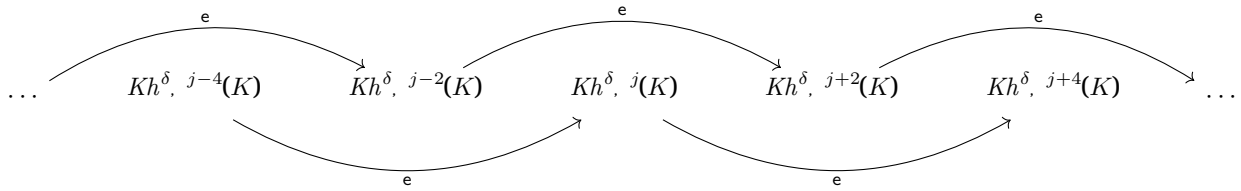
**定义 3.39**。 对于由辫子 $\beta$表示的纽结 $K$，我们将 $\bar{u}$ 上的自同态 e 改记为 $[\beta]$上的 e-算子 ，并称其为 $[\beta]$上的 e-算子。应用拓扑量子场论 $\mathcal{F}$，我们得到$CKh^{U(2)}(\beta)$上的 e-算子 以及$Kh^{U(2)}(K)$上的 e-算子 。在取同调之前对 $h$进行特化，$t \in R_{U(2)}$ 我们便得到其他变体的 e-算子。

现在，让我们聚焦于域 $k$上的纽结 $K$ 的普通 Khovanov 同调$Kh(K;k)$。由于 e 的度为 $(-2,\ 4)$，它保持 $\delta$-分次

$$\mathrm{gr}_\delta = 2\,\mathrm{gr}_h + \mathrm{gr}_q\,.$$

回顾一下，若一个纽结 $K$ 是 Kh-薄的，则其未约化 Khovanov 同调$Kh(K)$支撑在两条对角线上$\sim$ $\delta = -s(K) \pm 1$，而约化 Khovanov 同调$Kh(K)$支撑在一条对角线 $\delta = -s(K)$上，其中 $s(K)$是 $K$的 *Rasmussen* 不变量。[9] 这里，对于$Kh(K)$的双分次，我们用 $(\mathrm{gr}_\delta,\ \mathrm{gr}_q)$ 代替 $(\mathrm{gr}_h,\ \mathrm{gr}_q)$。

令$Kh^{\delta,\ *}(K)$表示$Kh(K)$的一个 $\delta$-切片。存在如下形式的有界序列




我们将 $Kh^{\delta,*}(K)$ 视为有限生成的分次 $k[e]$-模，其中 $e$ 作为幂零端态射 e 作用。于是，根据有限生成分次 $k[e]$-模的结构定理，可将其分解为

$$Kh^{\delta,*}(K;k) \cong \bigoplus_i q^{j_i}(k[e]/(e^{l_i})) \tag{3.16}$$

我们称之为-串分解 ，对象为 $Kh(K)$。每个直和项 $q^{j_i}k[e]/(e^{l_i})$ 对应一个维数为 $l_i$ 、起始于 $q$-分次 $j_i$ 的串:

$$q^{j_i}k \xrightarrow{\ \mathrm{e}\ } q^{j_i+4}k \xrightarrow{\ \mathrm{e}\ } \cdots \xrightarrow{\ \mathrm{e}\ } q^{j_i+4(l_i-1)}k.$$

现在假设 $k$ 是特征为 0 的域。通过一个标准论证，每个 $e$-串都可以赋予唯一的 $\mathfrak{sl}_2$-作用，使其扩展 $e$的作用。然而，由于分解本身一般并不唯一，e 无法唯一地扩展为$Kh(K)$ 上的 $\mathfrak{sl}_2$-作用。尽管如此，在简单情形下，这种唯一扩展是可能的。

**命题 3.40.** 设 $K$ 是一个纽结， $k$ 是特征为0的域。如果对每个双次数 $(i,j)$，$Kh^{i,j}(K;k)$ 至多是1维的，那么e算子可唯一扩展为 $Kh(K;k)$上的 $\mathfrak{sl}_2$-作用。

我们将在第5.3 节看到， $\mathbb{Q}$-Khovanov 同调的 $(2, 2k+1)$-环面纽结给出了一个满足命题3.40条件的例子。第6节中，我们将给出一个显式算法，用于计算 $k[e]$模结构$Kh(K)$。

[9]负号源于量子分次的约定。

## 3.9 镜像对偶

这里，我们陈述纽结 $K$ 及其镜像 $K^*$的 e-算子之间的对偶性。首先，让我们回顾典范同构的链级描述

$$CKh_{U(2)}(D^*) \cong CKh_{U(2)}(D)^*.$$

为简洁起见，我们记 $R = R_{U(2)}$ 与 $A = A_{U(2)}$。$A$ 的弗罗贝尼乌斯代数运算记作（$m$，$\iota$，$\Delta$，$\varepsilon$），如同第 3.1.2 节。考虑非退化配对 $B$在 $A$上的定义如下

$$B := \varepsilon \circ m \colon A \otimes A \to R.$$

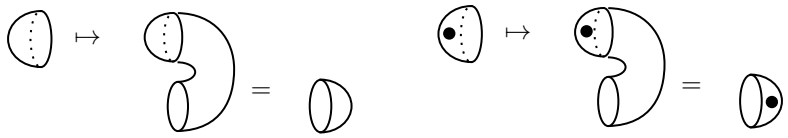
设 $\mathsf{D}$ 表示相应的同构

$$\mathsf{D} \colon A \to A^*, \quad x \mapsto B(x, -)$$

其中 $A^* := \mathrm{Hom}_R(A, R)$ 是 $A$ 的对偶 $R$-模。令

$$\check{1} := \mathsf{D}(1), \quad \check{X} := \mathsf{D}(X)$$

an并称 $\{\check{1}, \check{X}\}$ 为标准基，属于 $A^*$。这些元素可描述为余边界 :

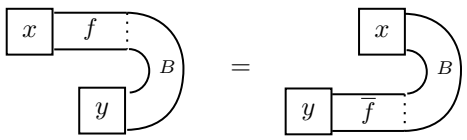


借助 $Y = X - h$，可以看出（从图形或代数上）$\{1, X\}$ 与 $\{Y, 1\}$ 关于非退化配对 $B$互为对偶。因此，标准基 $\{\check{1}, \check{X}\}$ 之于 $A^*$ 恰好是 $\{Y, 1\}$ 关于 $B$的代数对偶。

对偶模 $A^*$ 具有如下对偶弗罗贝尼乌斯代数结构：乘法 $\Delta^*$、单位 $\varepsilon^*$、余乘法 $m^*$和余单位 $\iota^*$。显然，$\mathsf{D}$ 是一个弗罗贝尼乌斯代数同构，因为用基 $\{\check{1}, \check{X}\}$ 描述的 $A^*$ 运算，恰好就是将基$\{1, X\}$翻转后描述的 $A$ 运算。

**命题 3.41.** 设 $f\colon A \to A$ 是由一个协边给出的自同态，$f$ 是 $f$的反向$\bar{}$。则 $f$和$f$关于配对$\bar{}$ $B$互为伴随。等价地，$\mathsf{D} \circ f = f^* \circ \bar{\mathsf{D}}$。

$\bar{}$证明。 这显然可由下图得出，该图展示了 $B(fx, y) = B(x, fy)$。



□

设 $D$ 为一个链环图， $D^*$ 为其镜像。这里，我们将 $D^*$ 的定向取为与 $D$相反，并将 $D^*$ 的交叉顺序也取为与 $D$相反。此外，取 $D$ 和 $D^*$ 的基点，使它们彼此对应。对偶性同构 $\mathsf{D}$ 延拓为一个链同构

$$\mathsf{D} \colon CKh_{U(2)}(D^*) \cong CKh_{U(2)}(D)^*, \quad x_1 \otimes \cdots \otimes x_r \mapsto \mathsf{D}(x_1) \otimes \cdots \otimes \mathsf{D}(x_r).$$

其中 $CKh^{U(2)}(D)^*$ 是 $CKh^{U(2)}(D)$ 的对偶链复形，其在 $\mathbb{Z}$ 上的双分次为

$$(CKh_{U(2)}(D)^*)^{i,j} = (CKh_{h,t}^{-i,-j}(D))^*.$$

这给出了一个对偶配对

$$\langle \cdot, \cdot \rangle \colon CKh_{U(2)}(D) \otimes CKh_{U(2)}(D^*) \to R$$

by

$$\langle x, y \rangle := \langle x, \mathsf{D}(y) \rangle_{\mathrm{alg}}$$

其中 $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathrm{alg}}$ 表示 $CKh^{U(2)}(D)$ 与其对偶模之间的标准配对。

**命题 3.42**。 设 $f$ 是 $CKh^{U(2)}(D)$ 的一个自同态，由一个协边矩阵给出；设 $f$是 $CKh^{U(2)}(\overline{D^*})$ 的自同态，由 $f$的逐项反转给出。那么，相对于配对 $\langle \cdot, \cdot \rangle$， $f$ 与 $f$ 互为伴随。

证明。 由命题3.41立即可得。 □

由命题3.42可容易看出

$$\langle dx, y \rangle = \langle x, dy \rangle$$

成立。e-算子也有类似的伴随公式。

**命题 3.43**。

$$\langle \mathsf{e}x, y \rangle = \langle x, \mathsf{e}y \rangle.$$

证明。写出

$$\mathsf{e}(D) = \sum_{j<j'} \chi_j \chi_{j'}$$

for $D$。于是

$$\mathsf{e}(D^*) = \sum_{j<j'} \overline{\chi}_{j'} \overline{\chi}_j$$

对于 $D^*$，其中$\chi_j$ 是 $\chi_j$的逆序。由命题 3.42可立即得到结果。 □

**推论 3.44**。 设 $K$ 为一个纽结， $k$ 为一个域。假设我们有一个 $e$-串分解

$$Kh(K;k) \cong \bigoplus_{(i,j,l)\in I} \delta^i q^j (k[e]/(e^l))$$

对于某个多重集 $I$。那么，$Kh(K^*;\ k)$ 的 $e$-串分解为

$$Kh(K^*;k) \cong \bigoplus_{(i,j,l)\in I} \delta^{-i} q^{-j-4(l-1)} (k[e]/(e^l)).$$

此外，假设我们选取与上述 $e$-串分解相对应的$Kh(K;k)$ 的一个齐次生成集 $\{v_{i,j,l}\}$ 。则存在$Kh(K^*;k)$ 的唯一齐次生成集 $\{w_{i,j,l}\}$ ，使得

$$\langle e^a v_{i,j,l},\ e^b w_{i,j,l} \rangle = \delta_{a+b,l-1},$$
$$\langle e^a v_{i,j,l},\ e^b w_{i',j',l'} \rangle = 0 \ ((i,j,l) \neq (i',j',l')).$$

# 4 与 $y$-化 HOMFLY–PT 同调的关系

## 4.1 概述

在本节中，我们在 $R=\mathbb{Q}$上工作，并从记号中省略 $R$。

链环 的约化 *HOMFLY–PT* 同调 $\mathcal{H}^{*,\,*,\,*}(L)$，由 Khovanov 和 Rozansky 在 $L$中引入 [KR08b], , 是一个三重分次同调群，其分次欧拉示性数为*HOMFLY–PT* 多项式

$$P(L)(q,a)=\sum_{i,j,k}(-1)^{(k-j)/2}q^i a^j\dim_{\mathbb{Q}}\mathcal{H}^{i,\,j,\,k}(L).$$

这里，H OMFLY–PT 多项式是关于 $(q,\ a)$ 的二元多项式，由 skein 关系定义 n

$$aP(\nearrow\!\!\!\searrow)-a^{-1}P(\nearrow\!\!\!\searrow)=(q-q^{-1})P(\curlyvee)$$

以及规范化 $P(\bigcirc)\ =\ 1$。对于 $\mathcal{H}^{*,*,*}(L)$ 的三重分次，我们采用 [Ras15] 给出的分次。 $\mathcal{H}^{*,*,*}$ 的三个分次分别称为 $q$-分次、 $a$-分次和 $v$-分次，其分次函数记为 $\mathrm{gr}_q$,$\mathrm{gr}_a$,$\mathrm{gr}_v$。[10] $\mathcal{H}$ 的三个分次的奇偶性均与 $L$ 的分支数相反，因此 $k-j$ 总是偶数（参见 [Ras15, Definition 2.14] 之后的注记）。

接下来，对于每个 $N>0$，约化 $\mathfrak{sl}_N$同调 $H_N(L)$ 链环 $L$的同调由 Khovanov 和 Rozansky 在 [KR08a], 中引入，是一个双分次同调群，其分次欧拉示性数给出 $\mathfrak{sl}_N$ 多项式

$$P_N(L)(q)=P(L)(q,q^N)=\sum_{i,j}(-1)^i q^j\dim_{\mathbb{Q}}\overline{H}_N^{i,j}(L).$$

特别地，当 $N=2$ 时，约化 $\mathfrak{sl}_2$-同调 $H_2(L)$ 与镜像链环 $L^*$ of $L$ 的约化 Khovanov 同调同构，[11]

$$\overline{H}_2^{i,j}(L)\cong\widetilde{Kh}^{i,j}(L^*).$$

在 [Ras15], Rasmussen 证明，对于每个 $N\geq 1$，都存在一个从约化 HOMFLY–PT 同调出发的谱序列，其收敛到约化 $\mathfrak{sl}_N$-多项式，从而将多项式层面的等式提升到了同调层面。在陈述结果之前，我们在 $\mathcal{H}$上定义两个额外的分次，即 $t$-分次按[12]

$$\mathrm{gr}_t:=\frac{\mathrm{gr}_v-\mathrm{gr}_a}{2},$$

并且对于每个 $N>0$， $\mathfrak{sl}_N$-修正的 $q$-分次 按

$$\mathrm{gr}_{q_N}:=\mathrm{gr}_q+N\,\mathrm{gr}_a\,.$$

命题 *4.1*（[*Ras15*，定理 *5.1*]）。对于每个 $N\geq 1$，都存在一个谱序列 $E=\{E_k\}_{k\geq 1}$，其由三重分次的 $\mathbb{Q}$-模构成，从 $E_1\cong\mathcal{H}(L)$ 出发，并收敛到 $E_\infty\cong H_N(L)$，后者作为双分次 $\mathbb{Q}$-模，其双分次为 $(gr_t, gr_{q_N})$。第 $k$ 个微分 $d_N^k$ 是度为 $(2Nk,-2k,2-2k)$ 的齐次元。

我们也利用 $\Delta$-分次在 $\mathcal{H}$上，该分次引入于 [Ras15；CG24], 定义为

$$\mathrm{gr}_\Delta:=\mathrm{gr}_q+\mathrm{gr}_a+\mathrm{gr}_v\,.$$

[10] $\mathcal{H}^{*,\,*,\,*}$的第三分次似乎没有标准名称，因此我们将其称为 $v$-*grading*，因为它对应于 *vertical* 方向，而 $a$ 对应于 *horizontal* 方向（见 [Ras15，定义 2.7]）。[11]由于我们采用的 $q$分次约定与 [Kho00], 相反，因此 $j$ 上没有负号；而 [KR08a 第 11] 页给出的表达式中则有负号。[12] 我们的 $t$ 分次是 [CG24] 中定义的 $t$ 分次的相反数。

对于纽结 $K$， $\Delta$-厚度就纽结 $K$ 而言定义为

$$|\Delta|(K) = \frac{1}{2}(\Delta_{\max} - \Delta_{\min}) + 1$$

其中 $\Delta_{\max}$、$\Delta_{\min}$ 分别表示 $\mathcal{H}(K)$ 的最大和最小 $\Delta$-次数。若 $|\Delta|(K) = 1$，则称 $K$ 为*KR*-薄，即 $\mathcal{H}(K)$ 集中在单个 $\Delta$- 切片上。对于 $N = 2$，我们有

$$\mathrm{gr}_\Delta = 2\,\mathrm{gr}_t + \mathrm{gr}_{q_2}$$

并且它与 $\widetilde{Kh}(K^*)$ 上的 $\delta$-分次一致。微分 $d_N^k$ 的 $\Delta$-度为

$$\deg_\Delta(d_N^k) = 2(N-2)k + 2.$$

这立即推出以下结果。

**命题 4.2** （[CG24，推论 2。14]）。对于任意 $N > |\Delta|(K)$， *N-th* 谱序列在第 $E_1$ 页退化，并给出 $\mathcal{H}(K) \cong H_N(K)$。特别地，若 $K$ 是 *KR*-薄的，则 $\mathcal{H}(K) \cong H_N(K)$ 对所有 $N \geq 2$均成立。

接下来，我们简要回顾 HOMFLY–PT 同调的 $y$-化以及 $\mathfrak{sl}_2$-作用，这些内容见 [GH22; GHM24; CG24]。在 [GH22], Gorsky 和 Hogancamp 给出了约化 HOMFLY 同调 $\mathcal{H}(L)$ 的 $y$-化 $y\mathcal{H}(L)$。[13] 此外，在 [CG24], Chandler 和 Gorsky 为每个 $N \geq 1$ 定义了（约化） $y$-化的 $\mathfrak{sl}_N$-同调 $yH_N$，并将 Rasmussen 谱序列推广到 $y$-化版本。也就是说，

**命题 4.3** ([CG24，定理3。19])。对于每个 $N \geq 1$，都存在一个谱序列 $E = \{E_k\}_{k\geq 1}$，其项为三重分次的 $\mathbb{Q}[y]$-模，从 $E_1 \cong y\mathcal{H}(L)$ 出发并收敛到 $E_\infty \cong yH_N(L)$。

在 [GHM24], Gorsky、Hogancamp 和 Mellit 定义了一列作用于 $F_k$ 上的算子 $y\mathcal{H}(L)$。特别地，已证明第二个算子 $\mathsf{e} = F_2$ 的度为 (4，0，$-4$) 并满足“强 Lefschetz”性质：

**命题 4.4** ([GHM24，定理 1.11，推论 1。12])。对于每个 $i \geq 0$， $i$次幂 $\mathsf{e}^i$ e给出一个同构

$$\mathsf{e}^i \colon y\mathcal{H}^{-2i,j,k}(L) \xrightarrow{\cong} y\mathcal{H}^{2i,j,k-4i}(L).$$

特别地，对于一个纽结 $K$，诱导算子e 在 $\mathcal{H}(K)$上给出一个同构

$$\mathsf{e}^i \colon \mathcal{H}^{-2i,j,k}(K) \xrightarrow{\cong} \mathcal{H}^{2i,j,k-4i}(K).$$

这意味着算子 e with h $= \frac{1}{2}\,\mathrm{gr}_q$ 可扩展为 $y\mathcal{H}(L)$ 上的 $\mathfrak{sl}_2$-作用；当 $K$ 是一个纽结时，它会在 $\mathcal{H}(K)$上诱导出一个 $\mathfrak{sl}_2$-作用。注意，e 保持 $\Delta$-分次，因此通过反射 $(q,a) \leftrightarrow (-q,a)$ 在每个 $\Delta$-切片上体现出一种对称性（参见第1节中的图 2a 和 3a）。此外，在 [CG24], 中已证明，e 可以扩展到 $y$-化谱序列上。也就是说，

命题 *4.5*（[*CG24*，定理*3.27*]）。对于每个 $N \geq 1$， $y\mathcal{H}(K)$ 上的算子 *e* 可延拓到命题 *4.3* 的$y$-化谱序列上，使其与该谱序列的所有微分交换，并在 $yH_N(L)$ 上诱导出一个算子 *e*。特别地，当 $K$ 是一个纽结时，$\mathcal{H}(K)$ 上的算子 *e* 可延拓到 *Rasmussen* 谱序列上，并在 $H_N(K)$ 上诱导出一个算子 *e*。

最后我们指出，对于由任意$N+1$次的势 $W \in \mathbb{Q}[X]$ 给出的变形 $\mathfrak{sl}_N$-同调 $H_{\partial W}$，Rasmussen 谱序列和 Chandler–Gorsky 的 $y$-化扩展同样成立；特殊情形 $\partial W = X^N$ 可恢复原始的 $\mathfrak{sl}_N$-同调。一般而言，该谱序列不保持 $q$-分次，而 $H_{\partial W}$ 具有一个 $q$-滤子。

[13] 在 [GH22], 中，HOMFLY–PT 同调记作 $H_{KR}$，其 $y$-化记作 $HY$。为使全文记号保持一致，我们在此更改了记号。

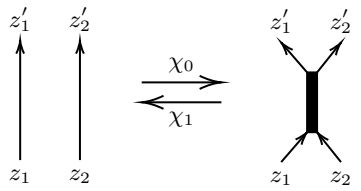



图13：交叉的分解 $\Gamma_0$，$\Gamma_1$ 以及映射 $\chi_0$，$\chi_1$。

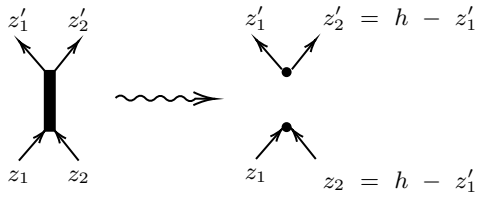



图 14：移除一条粗边

## 4.2 定理 4 的证明

我们重述第 4 节中给出的定理 1，并将其推广到变形情形。这里，对于一个 $W$ 度为 3 的势，我们令 $CKh_{\partial W}$ 表示由 Frobenius 代数$A_{\partial W}:=\mathbb{Q}[X]/(\partial W)$ 得到的复形。

定理 *4.6*。我们的构造与 *[GH22; GHM24]* 在 *[CG24]* 的 $y$-化谱序列下的构造相容。具体而言，对于任意三次势 $W\in\mathbb{Q}[X]$，我们的约化 $y$-化 $\widetilde{Khovanov}$ 同调 $yKh_{\partial W}(L^*)$ 与约化的 $y$-化 $\mathfrak{sl}_2$-同调 $yH_{\partial W}(L)$ 同构，并且相应的 $e$-算子与 $e$ 在 $yH_{\partial W}(L)$ 上诱导的作用一致。特别地，对于纽结 $K$，我们在 $\widetilde{Kh}_{\partial W}(K^*)$ 上的 $e$-算子与 $e$ 在 $H_{\partial W}(K)$ 上诱导的作用一致。—

定理 4.6 的整体证明很直接，只需梳理相关理论各种表述之间的关系即可。首先，我们证明 Khovanov 复形与 $\mathfrak{sl}_2$-复形作为 $\mathcal{CA}_l$-模同构。我们采用 Hughes 在 [Hug14], 中提出的方法；他们给出了相应链复形之间的显式同构，[14]

$$C_2(D)\cong CKh(D^*).$$

我们还将说明，为什么只需在 Khovanov 一侧要求可容许的 $ab$-着色 .

首先，取一个 3 度势 $W\in\mathbb{Q}[X]$ 并令

$$\partial W=X^2-hX-t.$$

对于 $\mathfrak{sl}_2$-复形，分解立方体中出现的三价图 状态空间 $\Gamma$ 由若干矩阵分解的张量积给出，每个交叉的一种分解对应一个矩阵分解，其中 $D$ 是 $\Gamma_0$ 或 $\Gamma_1$，如图 13所示。根据 [KR08a第 6] 节（以及 [Ras15第 3 节4]，适用于一般势），矩阵分解 $M_{\partial W}(\Gamma_0)$ 和 $M_{\partial W}(\Gamma_1)$ 都定义在多项式环 $\mathbb{Q}[z_1,z_2,z_1',z_2']$上。它们定义为

$$M_{\partial W}(\Gamma_0)=\begin{pmatrix}\pi(z_1,z_1') & z_1'-z_1\\ \pi(z_2,z_2') & z_2'-z_2\end{pmatrix},$$

[14]在 [Hug14], 中，$C_2(D)$ 的构造被镜像，从而使镜像变换隐含在该表达式中。

其中 $\pi$（$z$， $z'$）表示该多项式

$$\pi(z,z') := \frac{W(z)-W(z')}{z-z'},$$

and

$$M_{\partial W}(\Gamma_1) = \begin{pmatrix} u_1 & z_1'+z_2'-z_1-z_2 \\ u_2 & z_1'z_2'-z_1z_2 \end{pmatrix}$$

其中 $u_1$， $u_2$ 是满足以下条件的多项式

$$W = u_1\cdot(z_1'+z_2'-z_1-z_2)+u_2\cdot(z_1'z_2'-z_1z_2).$$

特别地，对于我们的势 $W$，多项式 $u_2$ 计算如下

$$u_2 = h-(z_1+z_2).$$

另请注意

$$\pi(z,z) = \partial W(z).$$

根据 [KR08a，命题 9]，，我们可以利用线性项减少变量的数量。$M_{\partial W}(\Gamma_0)$ 通过以下识别约化为 $\mathbb{Q}[z_1,z_2]$

$$z_1' = z_1, \quad z_2' = z_2$$

而 $M_{\partial W}(\Gamma_1)$ 通过识别约化为多项式环 $\mathbb{Q}[z_1,z_1']$

$$z_2 = h-z_1, \quad z_2' = h-z_1'.$$

对于 $M_{\partial W}(\Gamma_1)$ 的约化可以视为 移除粗边 (见图 14)。因此，对于整个三价图 $\Gamma$，移除所有粗边后，每个分支都会变成一个圆，相应的变量可以约化为单个变量 $z$，但需遵循以下规则：当 $z$ 经过被移除粗边的端点时，必须对其施加对合，将其翻转

$$\sigma\colon z\mapsto h-z.$$

现在，考虑（变形的）Khovanov 复形 $CKh_{\partial W}(D)$ of $D$ 以及对应于势 $\mathfrak{sl}_2$-复形$C_{\partial W}(D^*)$ of $D^*$ 的（变形的） $W$ （注意，我们对 $C_2$ 一侧取了镜像，与 [Hug14]中的做法相同）。对于每个顶点 $v\in\{0,1\}^n$，CKh 的顶点模 $CKh_{\partial W}(D)$ 在 $v$处定义为

$$V_v = \bigotimes_r A_{\partial W}$$

其中， $r$ 表示解图 $D_v$中的圆的数量。另一方面， $C_{\partial W}(D^*)$在 $v$ 处的顶点模定义为

$$V_v' \cong \mathbb{Q}[z_1,\cdots,z_r]/(\partial W(z_1),\ldots,\partial W(z_r))$$

（参见 [Hug14，引理 3]）。这里，每个变量 $z_i$ 都与一个点 $p_i$ 相关联，该点选取在$C_i$ 的每个分支 $D_v$上。上述描述表明，$V_v\cong V_v'$ 作为 $\mathbb{Q}$-模彼此同构。接下来需要描述使两个复形的边映射相互交换的显式逐顶点同构。

在 [Hug14 的第 5 节中，2]，给出了一个辅助符号函数 $\tau$： 任意选取一组基点 $\{b_j\}$ ，使得 $D$ 底层四价图的每个连通分支 $G_j$ $G(D)$ $D$ 都恰好包含一个基点 $b_j$。注意，基点 $\{b_j\}$ 唯一确定一个可容许的

$ab$-着色 $\theta$，要求包含基点的边始终着色为 $a$。然后，对每个正则点 $p$，我们定义

$$\tau_p(z) := \begin{cases} z & \text{if } \theta(p) = a, \\ \sigma(z) & \text{if } \theta(p) = b. \end{cases}$$

容易验证，令 $h = 0$即可恢复原来的符号函数 $\tau$。当 $z$ 是与点 $p$相关联的变量时，我们将 $\tau_p(z)$ 简写为 $\tau(z)$。

利用此函数 $\tau$，我们可以为每个顶点 $v$选取一个生成元 $g_v \in V_v'$，使得若 $D_v \to D_{v'}$是合并，则边映射将

$$g_v \mapsto g_{v'},$$

若 $D_v \to D_{v'}$ 是分裂，则

$$g_v \mapsto (\tau(z_i) + \tau(z_j) - h)g_{v'}$$

其中 $z_i$，$z_j$ 是对应于新生成的圆的变量（参见 [Hug14，第 5 节。3]）。注意，这些关系对应于 $A_{\partial W}$的运算，其中

$$1 \otimes 1 \overset{m}{\longmapsto} 1$$

and

$$1 \overset{\Delta}{\longmapsto} X \otimes 1 + 1 \otimes X - h(1 \otimes 1).$$

如 [ 中所述 Hug14，第 5 节。4], 所需的链同构由以下逐顶点对应 e

$$V_v \to V_v', \quad X^{\eta_1} \otimes \cdots \otimes X^{\eta_r} \mapsto (\tau(z_1)^{\eta_1} \cdots \tau(z_r)^{\eta_r})g_v.$$

这里，$\eta_i \in \{0, 1\}$ 与 $X^0 = 1$。将$\tau_{p_i}(X)$乘到 $V(D_v)$的第 $i$个张量因子上，恰好就是 $x_{p_i}$的作用，因此上述对应可以改写为

$$(x_{p_1}^{\eta_1} \cdots x_{p_r}^{\eta_r})(1 \otimes \cdots \otimes 1) \mapsto (z_1^{\eta_1} \cdots z_r^{\eta_r})g_v.$$

因此，识别 $C_2(D) \cong CKh(D^*)$得以建立。此外，由该构造可见，

**命题 4.7.** 同构$CKh_{\partial W}（D）\cong C_{\partial W}（D^*）$使作用 $x_p$与 $z$相互缠结 $p$.

点滑动同伦类似地定义在 $C_{\partial W}（D^*）$ 上。回顾 [KR08a，第 6] 节可知，局部边映射 $\chi_0$、$\chi_1$ 定义在两个矩阵分解 $M_2（\Gamma_0）$、$M_2（\Gamma_1）$ 之间，它们对应于基本三价图 $\Gamma_0$、$\Gamma_1$，

$$M_2(\Gamma_0) \underset{\chi_1}{\overset{\chi_0}{\rightleftarrows}} M_2(\Gamma_1).$$

如 [KR08a 中所述，公式（20）],它们满足

$$\chi_1\chi_0 = \chi_0\chi_1 = z_1 - z_2' = -(z_2 - z_1').$$

对于 $c$，点滑动同伦 $\chi_c$ 由 $c$ 的边映射取反给出，即若 $\chi_i$ 是边映射，则 $\chi_c = \chi_{1-i}$。上述公式表明

$$[d, \chi_c] = z_{p_1(c)} - z_{p_2'(c)} = -(z_{p_2(c)} - z_{p_1'(c)}).$$

**命题 4.8。** 同构 $CKh_{\partial W}(D) \cong C_{\partial W}(D^*)$ 与点滑动同伦相互交织。

现在，$C_{\partial W}（D^*）$通过多项式作用和点滑动同伦，获得一个 $\mathcal{CA}_t$作用，具体做法是形式化地重复第 3.3节中的论证。因此，我们有

**命题 4.9**。 同构 $CKh_{\partial W}(D) \cong C_{\partial W}(D^*)$ 扩展为一个 $\mathcal{CA}_t$-模同构。

定理 4.6 的证明（略）。 [GH22; GHM24] 中给出的 $y$-化 HOMFLY-PT同调及其相应 e-算子的构造基于 Rouquier复形 [Rou04; Kho07]。在[CG24 的引理 3.9], 中，Chandler 和 Gorsky 证明，他们对 $\mathcal{H}$ 的描述与 Rasmussen 的表述一致；并且在 [CG24 的引理 3.13], 中，他们证明，Rouquier复形的点滑动同伦与产生从 $\mathcal{H}$ 到$H_{\partial W}$的谱序列的水平微分相交换。因此，该谱序列可原样扩展至 $y$-化情形；由于 e 是利用点滑动同伦定义的，它也扩展到 $y$-化谱序列上（[CG24，定理 3.19、3.27]）。由于我们的构造在形式上与 [GH22; GHM24], 中的构造完全相同，该结论由命题 4.9 的约化版本立即推出。

□

## 4.3 与 Batson–Seed 的链环分裂谱序列的关系 e

在 [BS15], 中，Batson 与 Seed 给出了一个 链环分裂谱序列，它来自 Khovanov 同调的一个形变。我们将证明，他们的构造可由 $y$化的 Khovanov 复形的一个特化得到。此处，我们可以在任意交换环 $R$ 上工作。

命题 *4.10.* 设 $L$ 为一个具有图 $D$ 的 $l$ 分支链环，并假定 $D$ 不含无交叉圆分支。设 $\nu = \{\nu_k\}$ 为赋予 $L$ 的每个分支的一组权重，且 $s$ 为 *[BS15, (1)]* 意义下的符号赋值。设 $d'$ 为 *Khovanov* 复形 *(CKh(D) d)* 的自同态，它在 *[BS15],* 中由 $\nu$ 与 $s$ 定义。则存在 $D$ 上的一个可容许 $ab$ 着色 $\theta$，使得 $d'$ 可写成

$$d' = \sum_k \bar{\xi}_k \nu_k.$$

证明（概要）。根据 $d'$ 中给出的 [BS15], 显式描述，可以用我们的记号将其写为 n as

$$d' = \sum_c s(c)\,\mathrm{sgn}(c)(\nu_1^c - \nu_2^c)\chi_c$$

其中， $c$ 遍历 $D$的所有交叉， $s(c)$是选定的符号赋值，sgn($c$)是交叉符号，$\nu_1^c$，$\nu_2^c$是与包含 $p_1(c)$ $p_2$ ($c$)的分支相对应的权重，而 $\chi_c$是针对 $c$的（无符号）点滑动同伦。我们声称，存在唯一的可容许着色 $\theta$，使得对于 $D$的每个交叉 $c$，

$$s(c) = \mathrm{sgn}(c)\varepsilon_{p_1(c)}. \tag{4.1}$$

根据 $D$ 在（3.6）中给出的描述，该结论立即成立。为了证明这个等式，我们先回顾一下 $s$ 需要满足的条件。

考虑由 $S^2$ 的底层四价图 $G(D) \subset S^2$ 给出的 $D$的CW 分解 $X$。 $X$ 的0-胞腔对应于 $D$的交叉，1-胞腔对应于 $D$的边。1-余链 $g \in C^1(X;\mathbb{Z}/2)$定义如下：对于 $D$的每条边 $e$，

$$g(e) := \begin{cases} -1 & \text{if the two ends of } e \text{ are both over strands or both under strands,} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

文献 [BS15的命题 2 证明了1]， $g$ 实际上是一个余循环。符号赋值 $s$是满足 $\delta s = g$的 0-余链。这样的 $s$ 总是存在，因为 $H^1(X;\ \mathbb{Z}/2) = 0$。此外，对于 $C$ 的每个分支$G(D)$，恰有两种 $s$ 的取值会给出 $\delta s = g$。

选定这样一个 $s$ 后，我们可以如下定义一个可容许着色 $\theta$。对于 $G(D)$ 的每个分支$C$，选取一个交叉 $c$，并通过要求在 $C$ 上方定义 $\theta$，使得

$$\theta(p_1(c)) = \begin{cases} a & \text{if } s(c) = \mathrm{sgn}(c), \\ b & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，对于所选的交叉 $c$，(4.1) 成立，只需证明右侧的余边界给出 $g$。这可由一个简单的组合论论证得到。□

在此识别下， $D$ 没有无交叉分支这一假设是不必要的，因为任何无交叉分支都不对 $d'$作出贡献。

**命题 4.11.** 滤过复形 $(CKh(D)\ d+d')$ 在 *[BS15]* 中给出，同构于 $y$-化 *Khovanov* 复形的特化

$$yCKh(D;R_\nu) := yCKh(D)\otimes_{R[y_1,\dots,y_l]} R_\nu$$

其中 $R_\nu$ 表示将 $R$ 视为 $R[y_1,\dots,y_l]$-模，且 $y_k$ 按 $\nu_k$作用。

综合迄今所得的结果，我们得到第1节中所声称的如下命题。首先，回顾 [Ras15]，存在一个三重分次复形 $\mathbf{C}(D)$，配备微分 $d_+, d_v$，使得 HOMFLY–PT 同调由

$$\mathcal{H}(D) = H(H(\mathbf{C}(D), d_+), d_v).$$

我们令 $\mathcal{C}(D) = H(\mathbf{C}(D)\ d_+)$，并称之为*HOMFLY–PT* 复形。

**命题 4.12.** *HOMFLY–PT* 复形 $(\mathcal{C}(D)\ d_v)$ 关于微分 $d_-, d'_v$ 容许双重滤过，由此产生如下四个谱序列：*(i) Rasmussen* 谱序列 *[Ras15]* 对于 $N=2$，*(ii)* 其 $y$-化延拓 *[CG24]* 经 $y_k=\nu_k$ 特化，*(iii) Batson–Seed* 的链环分裂谱序列 *[BS15]* 关于约化 *Khovanov* 同调，以及 *(iv)* 其 *HOMFLY–PT* 类似物 *[GH22]*。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(L) = H(\mathcal{C}(D), d_v) & \xrightarrow{(ii)} & y\mathcal{H}(L;\mathbb{Q}_\nu) = H(\mathcal{C}(D), d_v + d'_v) \\ \Big\Vert{\scriptstyle (i)} & & \Big\Vert{\scriptstyle (iv)} \\ \widetilde{Kh}(L^*) = H(\mathcal{C}(D), d_v + d_-) & \xrightarrow{(iii)} & y\widetilde{Kh}(L^*;\mathbb{Q}_\nu) = H(\mathcal{C}(D), d_v + d_- + d'_v). \end{array}$$

证明（概要）。微分 $d_-$ 在 [Ras15], 中给出，使得

$$\overline{C}_2(D) \cong H(\mathbf{C}(D), d_+ + d_-)$$

and

$$\overline{H}_2(D) \cong H(H(\mathbf{C}(D), d_+ + d_-), d_v).$$

微分 $d'_v$ 是特化 $d'_v := (D_v - d_v)\,|_{y_k=\nu_k}$，即微分 $D_v$的线性项的特化，该微分属于 $y$-化 HOMFLY–PT 复形（见 [CG24，第 3 节。4]）。这些映射的次数为

$$\deg(d_+) = (2,2,0), \quad \deg(d_-) = (4,-2,0), \quad \deg(d_v) = (0,0,2), \quad \deg(d'_v) = (2,0,-2).$$

注意以下几点：（i）映射 $d_-$、$d_v$、$d'_v$关于 $\mathrm{gr}_t + \mathrm{gr}_{q_2} = \mathrm{gr}_q + \mathrm{gr}_a +$ 是次数为 1 的齐次映射，（ii）映射 $d_v$、$d'_v$ 保持 $\mathrm{gr}_a$，而 $d_-$ 使其减少 2，（iii）映射 $d_-$、$d_v$保持 $\mathrm{gr}_{q_2}$，而 $d'_v$ 使其增加 2。因此，我们得到一个双重滤过复形

$$(\mathcal{C}(D), d_v + d_- + d'_v)$$

关于三重分次

$$(\mathrm{gr}_t + \mathrm{gr}_{q_2},\ \mathrm{gr}_a,\ \mathrm{gr}_{q_2}).$$

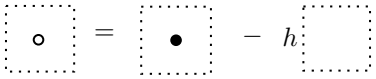
可以看出，这四个谱序列确实是由 $\mathcal{C}(D)$ 上的这个双重滤过导出的，并结合了定理 4 和命题 4.11中的识别。□

# 5 图解计算

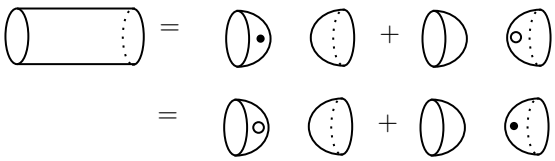
在接下来的两节中，我们将说明，我们构造的 $y$-化 Khovanov 同调和 e-算子非常适用于实际计算。本节中，我们将介绍一种图示计算方法，其思路源自 Bar-Natan 在 [Bar07] 中给出的 Khovanov 同调计算。

## 5.1 一般方法

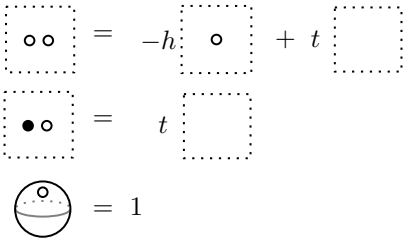
这里汇总一些在图解计算中有用的方法。首先，我们引入空心点[15]的记号




它对应于 $Y = X - h$ 中的元素 $A_{U(2)^\circ}$。利用空心点，颈切关系 (NC) 可以写成:

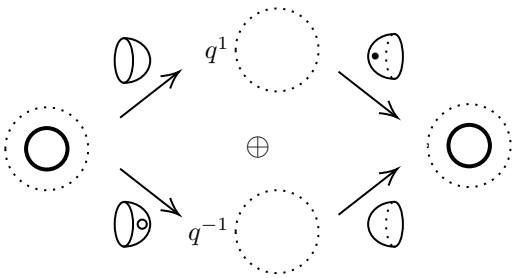



以下关系也很有用:




该去环同构最初由 [Bar07], 引入，是颈切关系的直接推论。[16]

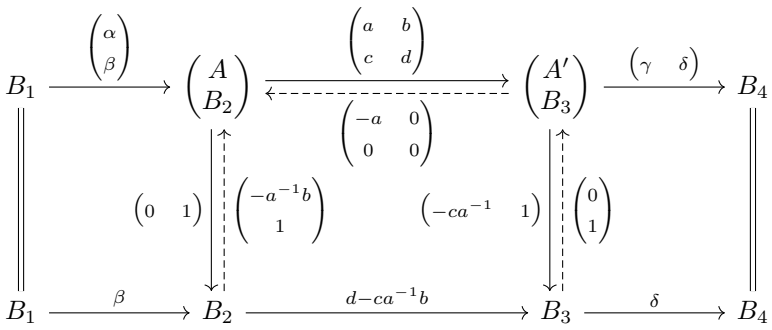
**命题 5.1**（去环）。 以下态射矩阵给出了范畴 $\mathrm{Mat}(\mathrm{Cob}_\bullet(B))$ 中的一对互逆同构




以下命题出现在 [Bar07，引理 4。2], 该命题允许在任意加性范畴中约化链复形。

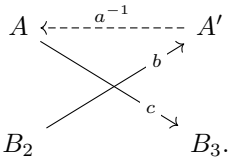
[15]我们对空心点的定义 $\circ$ 与 [Bel+23b]和 [Kho06]中给出的定义[16]整体相差一个符号。再次说明， $q$-分次移位与原文中的 [Bar07引理 41], 相反，这是由于约定发生了变化。

**命题 5.2**（高斯消元）。 设下图的顶行是链复形 Ω 的一部分，且态射 $A \xrightarrow{a} A'$ 可逆。那么存在一个由底行描述的$\Omega'$ 的强变形收缩，其中$\Omega$ 。




强变形收缩 $g$ 由向下的垂直箭头表示，包含映射 $f$ 由向上的虚线箭头表示，而同伦 $h$ 由向左的虚线箭头表示。

态射 $d-ca^{-1}b$ 出现在命题 5.2 的底行中，是矩阵 $\left(\begin{smallmatrix}a & b\\ c & d\end{smallmatrix}\right)$ 关于可逆项 $a$的舒尔补。可以将被减去的项 $ca^{-1}b$ 视为由箭头 $a$反向产生的




在第 2.5 节中，我们讨论了如何通过强变形收缩转移一个 $\mathcal{A}$-作用的问题。以下命题描述了当强变形收缩由命题 5.2 的映射给出时，转移后的映射。

**命题 5.3**。 保留命题 *5.2* 中的记号。假设我们有 Ω 中的映射，

$$u = \begin{pmatrix}u_1 & u_2\end{pmatrix} : \begin{pmatrix}A\\ B_2\end{pmatrix} \to X$$

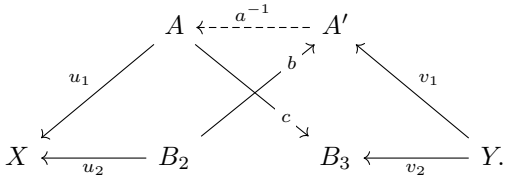
*and*

$$v = \begin{pmatrix}v_1\\ v_2\end{pmatrix} : Y \to \begin{pmatrix}A'\\ B_3\end{pmatrix}$$

其中 $X$、$Y$ 是不同于 $A$、$A'$ 的对象。映射 $u' := guf$、 $v' := gvf$ 属于 $\Omega'$，由下式给出

$$u' = u_2 - u_1 a^{-1} b \colon B_2 \to X,$$
$$v' = v_2 - ca^{-1} v_1 \colon Y \to B_3.$$

再次，命题 5.3 可以用图形方式表示为



这里， $u$， $v$ 绘制为降低同调次数的映射，这对 $\xi_i$ 和 $u$确实如此。

现在，令 $C$ 为一个 $\mathcal{A}_n^w$-模，并设存在强变形收缩 $C'$，将 $C$ 作为 $R$-链复形给出， 其由映射

$$C \underset{h}{\overset{g}{\underset{f}{\rightleftarrows}}} C'.$$

由命题 2.25可知，映射 $\xi_i' := g\xi_i f$， $u' := guf$未必给出 $\mathcal{A}_n^w$在 $C'$上的严格作用，即使给出，由命题 2.27可知，映射 $f$、$g$、$h$ 也未必（严格地或同伦相容地） $\mathcal{A}_n^w$线性。下文旨在通过将e-算子作用于特定类别的纽结 $K$分解 $K$ 为其复形在 $R$上具有强变形收缩的缠结片段，从而描述普通 Khovanov 同调上的 $\mathcal{A}_n^w$线性。我们不声称中间映射具有（严格或同伦相容的） $\mathcal{A}_n^w$-线性。以下命题为这种懒惰的方法提供了正当性。

命题*5.4.* 设 $D$ 为一个二输入平面弧图。对于 $a = 1$、*2*，令 $X_a$ 为 *Kob(*$B_a$*)*中的一个复形，并赋予其一个 $\mathcal{A}_{n_a}^{w_a}$-作用，使得 $X_1$ 和 $X_2$ 可通过 $D$ 复合，且这些作用相容。进一步假设：*(i)* $X = D(X_1, X_2)$由单个虚圈 $\gamma$组成；*(ii)* $\xi_1$在 $X$上的作用是平凡的；*(iii)* 存在强变形收缩 $(g^a, f^a, h^a)$： $X_a \to Y_a$在 $R$上，该收缩将 $\mathcal{A}_{n_a}^{w_a}$-作用传递给 $Y_a$。置 $f = D(f^1, f^2)$、 $g = D(g^1, g^2)$，并令 $u$、$u'$表示诱导在 $\mathcal{CA}_1$-模 $X = D(X_1, X_2)$ 和 $Y = D(Y_1, Y_2)$ 上的自同态。那么 $f$、 $g$ 是 $u$-等变的，即 $[u, f] \simeq [u, g] \simeq 0$ 在 $R$上。

证明。 对于 $a = 1$，2，设 $\xi_i^a$， $u^a$ 表示 $\mathcal{A}_{n_a}^{w_a}$ 对 $X_a$ 的作用的自同态。由命题 2.27，存在同伦 $f_i^a := h^a\xi_i^a f^a$与 $f_u^a := h^a u^a f^a$给出

$$[d, f_i^a] + [\xi_i^a, f^a] = 0$$

and

$$[d, f_u^a] + [u^a, f^a] + \sum_i (x_i^a + x'^a_{w_a(i)}) f_i^a = 0.$$

Let

$$\gamma\colon p_1 \xrightarrow{\zeta_1} p_2 \xrightarrow{\zeta_2} \cdots \xrightarrow{\zeta_r} p_{r+1} = p_1$$

为 $X$ 的唯一虚圈，由虚弧 $\{\zeta_j\} = \{\xi_i^a\}$ 组成。我们将 $\{f_j\} = \{f_i^a\}$ 重新排序，使得 $[\zeta_j, f] = [d, f_j]$ 对每个 $j$ 成立。由第 3.7 节，自同态 $u$ 在 $D(X_1, X_2)$ 上定义为

$$u = u^1 + u^2 + \sum_{j<j'} \zeta_j \zeta_{j'}.$$

对于 $u'$，我们也有类似的描述。通过与命题 3.5 的证明中所给计算类似的计算，我们得到

$$[u, f] \simeq -2x_{p_1} \sum_j f_j$$

然而，由假设 (ii)，我们有

$$\sum_j f_j = h(\sum_j \zeta_j) f = 0.$$

对 $g$，类似的论证成立。 □

**推论 5.5.** 设 $K$ 是一个分解为 $K = D(T_1, T_2)$ 的纽结图。假设对于 $a = 1,2$，复形 $[T_a]$ 在 $R$上有一个强变形收缩 $E_a$，且 $[T_a]$ 上的 $\mathcal{A}_{n_a}^{w_a}$-作用转移到 $E_a$上。那么 $[K] = D([T_1], [T_2])$ 与 $E = D(E_1, E_2)$ 是 e- 等变同伦等价的。特别地，$Kh(K)$ 与 $\mathcal{F}_0(E)$ 的同调 e- 等变同构。

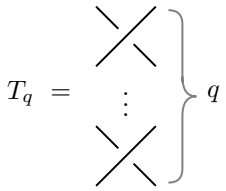



图15：扭结缠络 $T_q$

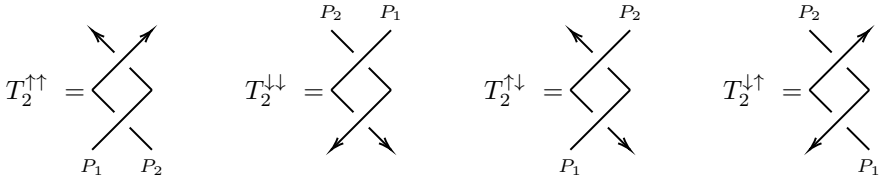


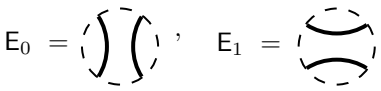

图16： $T_q$上的各种定向

## 5.2 扭结缠络

扭结缠络的 Khovanov 复形的链同伦类型此前已在[Kho00，第 6 节。2], [Tho18，命题 4。1], [Sch21，命题 5。1] 以及 [KS25b，命题 4。3]中得到研究。本文进一步研究强变形收缩如何改变 $\mathcal{A}_2^w$-作用。

对于 $q \in \mathbb{Z}$，令 $T_q$ 表示通过给一对无交叉竖直股添加 $|q|$ 个半扭转而得到的无向缠络图；根据 $q$ 的正负，扭转方向相应为正或负（见图15）。 $T_q$ 上的定向对于接下来的论证至关重要，因此我们固定以下记号。 $T_q^{\uparrow\uparrow}$表示这样一个缠结图：两条辫股均朝上定向。交叉按从下到上的顺序排列， $P_1$、 $P_2$ 分别是 $T_q$左下方和右下方的端点。这与有向辫图 $\sigma_1^q$ 的约定一致。 $T_q^{\downarrow\downarrow}$表示将 $T_q^{\uparrow\uparrow}$ 180 绕垂直于平面的轴旋转 $T_q^{\uparrow\uparrow}$ 180 度后得到的图，因此交叉按从上到下的顺序排列， $P_1$、 $P_2$ 分别是 $T_q$右上方和左上方的端点。 $T_q^{\uparrow\downarrow}$表示这样一个图：包含左下方端点 $P_1$ 的辫股朝上定向，而另一条辫股朝下定向。当 $q$ 为偶数时，右上方端点是 $P_2$；当 $q$为奇数时，左上方端点是 $P_2$。 $T_q^{\downarrow\uparrow}$表示将 $T_q^{\uparrow\downarrow}$ 180绕平行于平面的轴旋转 $T_q^{\uparrow\downarrow}$ 180度后得到的图，因此 $P_1$ 是右下方的端点。对于所有这些图，我们令 $P_1'$、 $P_2'$为满足 $P_1 \sim P_1'$和 $P_2 \sim P_2'$的端点。当$q = 2$时的情形见图16。对于所有这些缠结图，我们选取可容许的 $ab$-着色 $\theta$，使得 $\theta(P_1) = a$。注意， $T_q^{\uparrow\uparrow}$和 $T_q^{\uparrow\downarrow}$的保向分解并不同位。对于这个可容许的$ab$-着色，同伦 $\xi_1$、 $\xi_2$ 由分别始于 $P_1$ 和 $P_2$的路径定义。下文中，我们倾向于研究 $T_q^{\downarrow\downarrow}$而非 $T_q^{\uparrow\uparrow}$，因为它与上述前人工作的结果更为吻合。

令 $\mathsf{E}_0$ 和 $\mathsf{E}_1$ 表示以下无向四端无交叉缠络图，



在 $\mathsf{E}_1$ 上定义度为 $-2$ 的自同态 $a$，$b$ 如下：

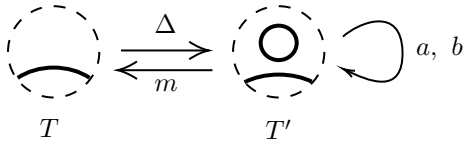
$$a = u_X + l_Y = u_Y + l_X,$$
$$b = u_X - l_X = u_Y - l_Y$$

其中 $u_X, l_X$ 是如下定义的自同态

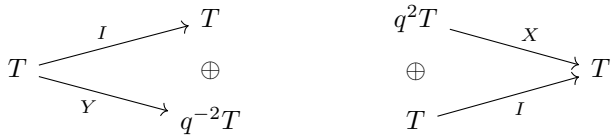
$u_X$ =  ，　$l_X$ = 

并且 $u_Y, l_Y$ 是利用空心点 $\circ$ 定义的类似自同态。令 $s$ 表示从 $\mathsf{E}_0$ 到 $\mathsf{E}_1$ 、以及从 $\mathsf{E}_1$ 到 $\mathsf{E}_0$ 的亏格 0 鞍点协边。注意，我们有 $ab = ba = 0$、 $sb = 0$ 和 $bs = 0$。

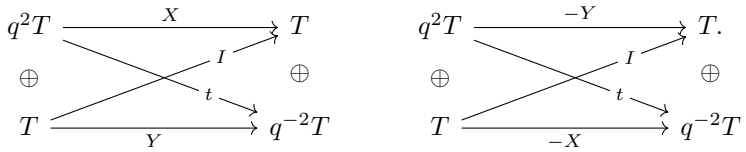
**引理 5.6.** 考虑以下缠结图 $T$、$T'$ 以及态射 $m$、$\Delta$、$a$、$b$，它们由




这里假定，通过适当地平移对象的分次，这些态射保持 $q$-分次。通过对缠结 $T'$ 中出现的圆进行去环，态射 $\Delta$、$m$ 变换为

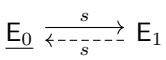



并且自同态 $a$、$b$ 变换为



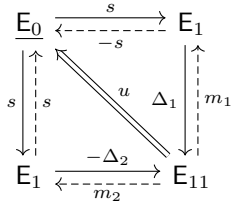

以下例子是命题 5.10 与5.11的特例，它们说明了一般证明的思想。

**例 5.7**。 复形 $[T_1^{\downarrow\downarrow}]$ 如下




实线箭头表示微分，虚线箭头表示同伦 $\xi_1$。我们有$\xi_2 = -\xi_1$ 和 $u = 0$。

**例 5.8.** 复形 $[T_2^{\downarrow\downarrow}]$ 由下式给出



这里， $E_{11}$ 表示将 $E_1$ 的两个副本竖直叠放所得到的图。实线箭头描述微分，其中垂直箭头对应于第一个交叉的边映射，水平箭头对应于第二个交叉的边映射。下标表示态射所作用的交叉的指标。虚线箭头描述同伦 $\xi_1$，其由下式给出

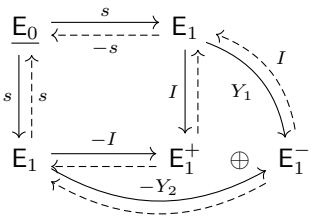
$$\xi_1 = \chi_1 - \chi_2.$$

显然，我们有 $\xi_2 = -\xi_1$。双箭头表示同伦 $u$，它由下式给出

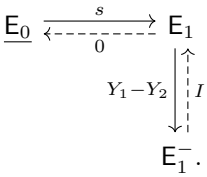
$$u = \chi_1(-\chi_2) + (-\chi_1)\chi_2 = -2\chi_1\chi_2 = 2s_1s_2$$

其中 $s_1s_2$ 是一个协边，由两个鞍点组成，将中心圆与 $E_{11}$ 的顶部和底部弧相连。

现在，应用 对 $E_{11}$ 的中心圆进行去环。由引理 5.6，该复形变为

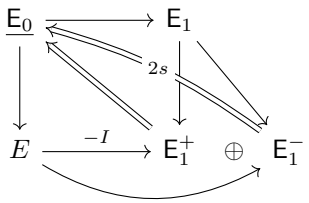



暂时省略双箭头。接着，对标记为 $-I$ 的最底部水平箭头应用高斯消元，得到

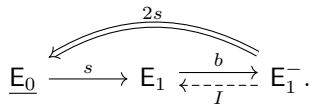



注意，映入右下方 $\mathsf{E}^+$ 的实线箭头以及 $\xi_1$ 从右上方E 映出的虚线箭头，已根据命题 5.2 和 5.3 作了修改。

Next，去环变换将 $u$ 变为




消去的效果只是移除始于 $\mathsf{E}_1^+$ 的映射。因此，我们得到一个带有转移后的 $\mathcal{A}_2^w$-作用的简化复形



**例5.9**。 不考虑微分分次代数作用时，复形 $[T_2^{\uparrow\downarrow}]$ 与 $[T_2^{\downarrow\downarrow}]$ 除了双分次平移外完全相同。令 $P_2'$ 表示 $T_2^{\uparrow\downarrow}$ 的左上端点。由 $T_2^{\uparrow\downarrow}$ 上的 $ab$-着色可知， $\xi_1 = \xi_{P_1} = \xi_{P_2'} = -\xi_{P_2} = -\xi_2$。至于 $u$，我们有

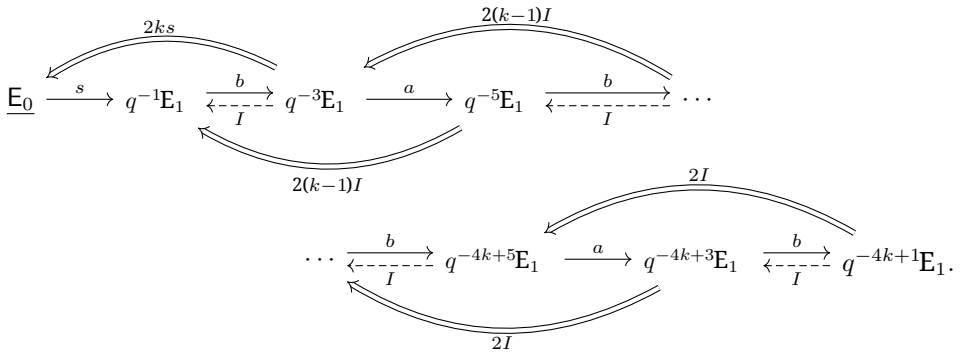
$$u = \chi_1(-\chi_2) + \chi_2(-\chi_1) = 0.$$

在例 5.8 的变换下，转移后的 $\mathcal{A}_2^w$-作用由下式给出

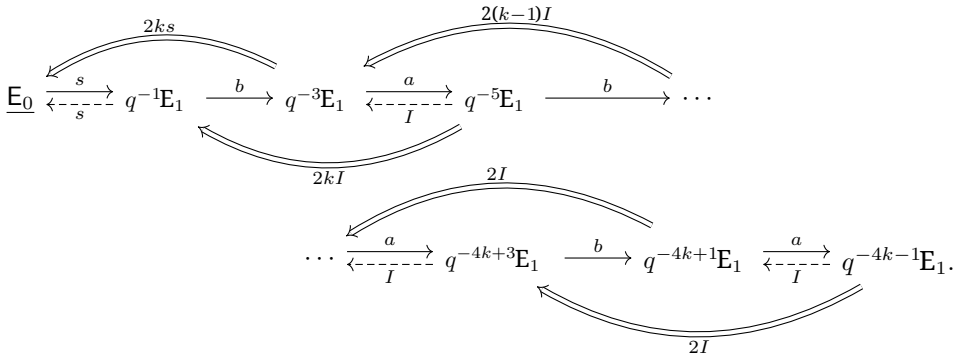
$$\underline{\mathsf{E}_0} \xrightarrow{s} \mathsf{E}_1 \underset{I}{\overset{b}{\rightleftarrows}} \mathsf{E}_1^-$$

其中 $u = 0$。

**命题 5.10.** 对于每个 $k \geq 0$，复形 $[T_{2k}^{\downarrow\downarrow}]$ 在 $R$ 上强变形收缩到复形 $E_{2k}^{\downarrow\downarrow}$，后者具有转移后的 $\mathcal{A}_2^w$-作用：



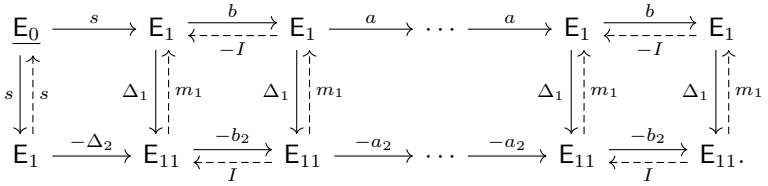

类似地，复形 $[T_{2k+1}^{\downarrow\downarrow}]$ 强变形收缩（在 $R$ 上）到一个复形 $E_{2k}^{\downarrow\downarrow}$，该复形具有转移得到的 $\mathcal{A}_2^w$-作用：




这里的双重分次是相对于带下划线的对象 $\mathsf{E}_0$而言的。虚线箭头表示 $\xi_1 = -\xi_2$ 的作用，双箭头表示 $u$ 的作用。情况 $k < 0$ 可通过反转所有箭头得到，此时对象 $\mathsf{E}_0$ 位于最右端。

证明。 重复以下证明即可得到该结论： [KS25b，命题 4。3], 同时还要跟踪同伦 $\xi_1$ 并 $u$ 使用命题 5.3。我们已经证明该结论对 $k = 0$成立。现在，假设该结论对不超过 $2k$的情形成立。

令 $D$ 为一个二输入平面弧图，它给出 $T_{2k+1} = D(T_1,\ T_{2k})$。于是，根据归纳假设，复形 $[T_{2k+1}] = D([T_1],\ [T_{2k}])$ 变形收缩到 $D(E_1,\ E_{2k})$，其描述如下：

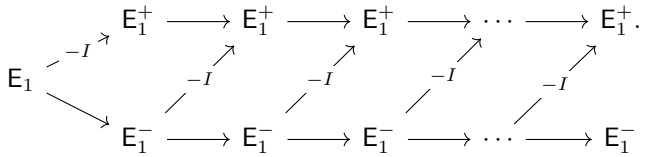


这里，实线垂直箭头对应于 $E_1$ 的边映射，实线水平箭头对应于 $E_{2k}$ 的边映射。虚线箭头描述了同伦 $\xi_1$，其定义为

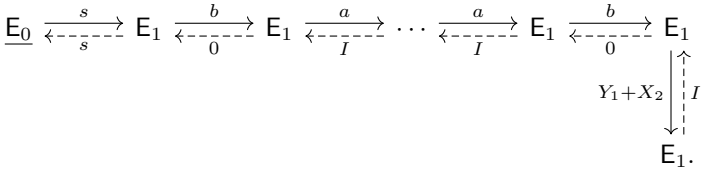
$$\xi_1 = \xi_1(E_1) + \xi_2(E_{2k}) = \xi_1(E_1) - \xi_1(E_{2k}).$$

暂时省略双箭头。

对于底行中的每个对象，去环同构给出 $\mathsf{E}_{11} \cong \mathsf{E}_1^+ \oplus \mathsf{E}_1^-$，其中记作 $\mathsf{E}_1^{\pm} := q^{\pm 1}\mathsf{E}_1$。由引理 5.6，底行可写为

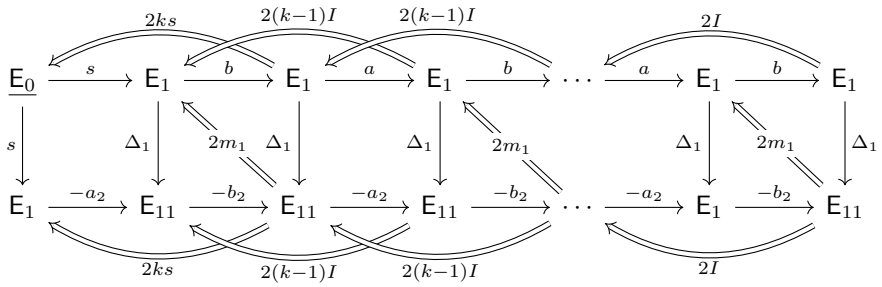


从左端消去标记为 $-I$ 的对角箭头后，可见 $D(E_1,\ E_{2k})$ 化为复形 $E_{2k+1}$，



注意命题 5.3 对虚线箭头的影响。

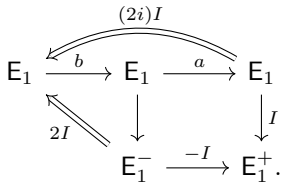
接下来，我们观察 $u$ 如何变换。在 $D(E_1,\ E_{2k})$ 中，我们有：



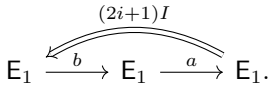
注意这些指向左上方的对角箭头，它们来自 $u$ 的交叉项，

$$\xi_1(E_1)\xi_2(E_{2k}) + \xi_2(E_1)\xi_1(E_{2k}) = 2\xi_1(E_1)\xi_2(E_{2k}).$$

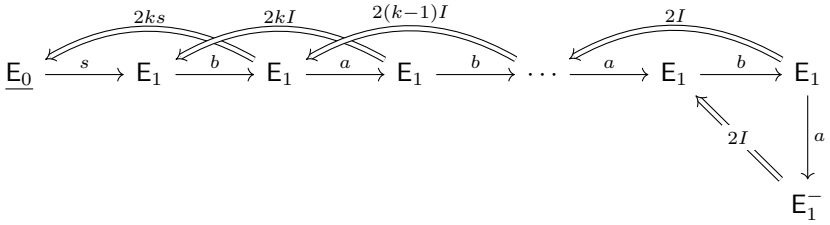
去环后，我们看到有些部分呈现出以下模式




消去底部的水平箭头后，来自下方路径的因子与现有因子相加，得到




因此，经过高斯消元后，复形变为




并得到预期的复形 $E_{2k+1}$。类似的论证表明，可以从 $D(E_1,\ E_{2k+1})$ 得到复形 $E_{2k+2}$。

□

**命题 5.11.** 对于 $k \geq 0$，复形 $[T_{2k}^{\uparrow\downarrow}]$（在 $R$上）强变形收缩到复形 $E_{2k}^{\uparrow\downarrow}$，该复形与命题 $E_{2k}^{\downarrow\downarrow}$ 中的复形 *5.10*类似（相差一个双分次平移），但所有双箭头（表示 $u$）均被移除。复形 $[T_{2k+1}^{\uparrow\downarrow}]$也有类似结论。

证明。对于 $l = 2k,\ 2k+1$，强变形收缩 $[T_l] \to E_l$ 的定义与定向无关，因此复形 $E_l^{\uparrow\downarrow}$ 和同伦 $\xi_1$ 的描述与命题 5.10中的完全相同。对于 $u$，我们看到，对于 $l = 2k,\ 2k+1$，

$$u_1 = \sum_{j<j'} (-1)^{j-1}(-1)^{j-1}\chi_j\chi_{j'}$$
$$u_2 = \sum_{j<j'} (-1)^{j}(-1)^{j'}\chi_{j'}\chi_j$$

因此 $u = u_1 + u_2 = 0$。

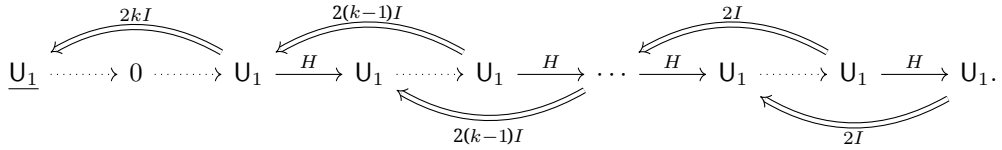
□

## 5.3 $(2,\ q)$-环面纽结

对于奇数 $q > 0$，令 $T_{2,\ q}$ 表示 $(2,\ q)$-环面纽结的图，它由$T_q^{\downarrow\downarrow}$的闭包得到。对于 $l \geq 1$，令 $\mathsf{U}_l$ 表示 $l$ 分支的无套叠无交叉平凡链环图。态射$H\colon \mathsf{U}_1 \to \mathsf{U}_1$ 定义为 $H = X + Y = 2X - h$。

**命题 5.12**。 对于 $k \geq 0$，复形 $[T_{2,2k+1}]$ 在 $R$ 上强变形收缩到以下复形，该复形具有转移得到的 $\mathcal{CA}_1$-作用：

$$\begin{tikzcd}
\underline{\mathsf{U}_1} \arrow[r, dotted] & 0 \arrow[r, dotted] & \mathsf{U}_1 \arrow[r, "H"] \arrow[l, bend right, "2kI"'] & \mathsf{U}_1 \arrow[r, dotted] & \mathsf{U}_1 \arrow[r, "H"] \arrow[l, bend right, "2(k-1)I"'] & \cdots \arrow[r, "H"] \arrow[l, bend left, "2(k-1)I"] & \mathsf{U}_1 \arrow[r, dotted] & \mathsf{U}_1 \arrow[r, "H"] \arrow[l, bend right, "2I"'] & \mathsf{U}_1. \arrow[l, bend left, "2I"]
\end{tikzcd}$$



这里，双分次是相对于双分次为$(0, -2k)$的带下划线对象而言的。对于每个箭头，目标对象的$q$-分次相对于源对象平移 $-2$ 。

证明。 将闭包函子 cl 应用于命题 5.10，我们得到

$$\mathrm{cl}(\mathsf{E}_0) = \mathsf{U}_2', \quad \mathrm{cl}(\mathsf{E}_1) = \mathsf{U}_1$$

其中，$\mathsf{U}_2'$ 表示嵌套的二分支平凡链环图，并且

$$\mathrm{cl}(a) = H, \quad \mathrm{cl}(b) = 0.$$

图的左端为

$$\underline{\mathsf{U}_2'} \xrightarrow{m} q^{-1}\mathsf{U}_1$$

这化简为

$$q^1\underline{\mathsf{U}_1} \xrightarrow{0} 0.$$

现在，我们来考察约化复形上的 $\mathcal{CA}_1$-作用。首先，有

$$\bar{\xi}_1 = \xi_1 + \xi_2 = 0.$$

（回忆命题 3.33 指出，这对任意纽结图都成立。）此外， $\bar{u}$ 的修正项为

$$\xi_1\xi_2 = 0$$

因此 $u = u_\circ$ □

**推论 5.13**。 对于任意 $k \geq 0$，未约化同调 $Kh(T_{2,2k+1}, \mathbb{Q})$ 支撑在两个 $\delta$-分次上$\delta = -2k \pm 1$，其 $\mathbb{Q}[e]$-模结构由下式给出

$$\begin{tikzcd}
\delta = -2k+1 \quad : & \underline{\mathbb{Q}} & \mathbb{Q} \arrow[l, "2k"'] & \cdots \arrow[l, "2(k-1)"'] & \cdots & \mathbb{Q} \arrow[l, "2"'] \\
\delta = -2k-1 \quad : & \underline{\mathbb{Q}} \arrow[loop below, "0"] & 0 & 0 & \mathbb{Q} \arrow[l, "2(k-1)"'] & \cdots & \mathbb{Q} \arrow[l, "2"'] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

类似地，约化同调 $Kh(T_{2,2k+1}, \mathbb{Q})$ 支撑在单个 $\delta$-分次上，其 $\mathbb{Q}[e]$-模结构由下式给出

$$\begin{tikzcd}
\delta = -2k \quad : & \underline{\mathbb{Q}} & \mathbb{Q} \arrow[l, "2k"'] & \cdots \arrow[l, "2(k-1)"'] & \cdots & \mathbb{Q} \arrow[l, "2"'] \\
& \underline{0} & 0 & 0 & \mathbb{Q} \arrow[l, "2(k-1)"'] & \cdots & \mathbb{Q} \arrow[l, "2"'] & \mathbb{Q}
\end{tikzcd}$$

在这两种情况下，e-算子都唯一地延拓为同调群上的 $\mathfrak{sl}_2$-作用 .

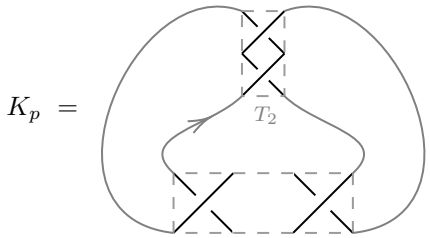



图 17：扭结 $K_p$

证明。 将拓扑量子场论 $\mathcal{F}$ 应用到命题5.12的复形，该片段

$$\mathsf{U}_1 \xrightarrow{H} q^{-2}\mathsf{U}_1$$

变换为

$$q^{-1}\begin{pmatrix} R\{X\} \\ R\{1\} \end{pmatrix} \xrightarrow{\begin{pmatrix} h & 2 \\ 2t & -h \end{pmatrix}} q^{-3}\begin{pmatrix} R\{X\} \\ R\{1\} \end{pmatrix}$$

特别地，当 $R=\mathbb{Q}$ 且 $h=t=0$时，该段同伦于

$$q^{-1}\mathbb{Q}\{X\} \xrightarrow{0} q^{-3}\mathbb{Q}\{1\}$$

在约化情形中，该段变换为

$$q^{-2}\bar{A} \xrightarrow{X} q^{-4}\bar{A}$$

其中 $A=A/(X)$ 。因此，当 $h=t=0$时，该映射变为平凡映射。最后的结论直接由命题3.40得出。 □

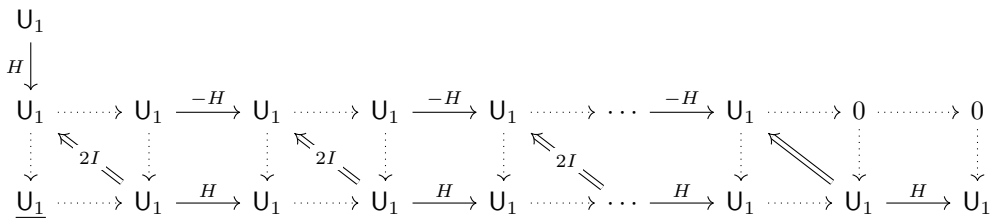
## 5.4 扭结

对于 $p\in\mathbb{Z}$，令 $K_p$ 表示具有 $-p$ 个半扭转的扭结图，如图 17所示。按照我们的约定， $K_p$ 其中 $p$ 较小的纽结对应于

$$K_0=0_1,\quad K_1=3_1^*,\quad K_2=4_1^*,\quad K_3=5_2^*,\quad K_4=6_1^*,\quad \dots$$

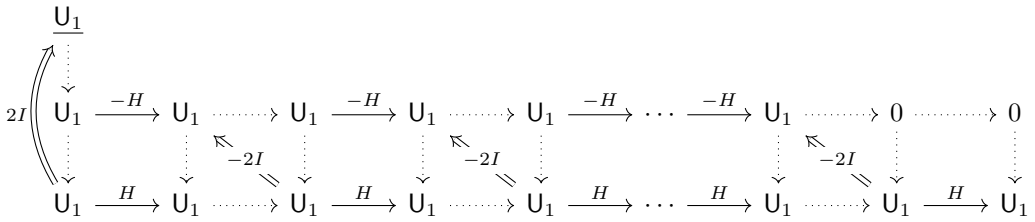
Rolfsen 结表中的纽结。另请注意，对于 $p>0$，我们有 $K_{-p}=K_{p-1}^*$，因此可以假设 $p>0$。对于图 17 所示的二输入平面弧图 $D$ ，我们有 $K_p=D(T_2,T_{-p})$。当 $p$ 为奇数时，缠结的定向为 $D(T_2^{\uparrow\uparrow},T_{-p}^{\downarrow\uparrow})$；当 $p$ 为偶数时，定向为 $D(T_2^{\uparrow\downarrow},T_{-p}^{\downarrow\uparrow})$。请注意， $T_{-p}$ 的交叉符号均为正，与 $p$ 无关；而 $T_2$ 的交叉符号在 $p$ 为奇数时为正，否则为负。

**命题 5.14**。 对于 $k\geq 0$，复形 $[K_{2k}]$ 在 $R$上强变形收缩到下面这个具有转移的 $\mathcal{CA}_1$-作用的复形：



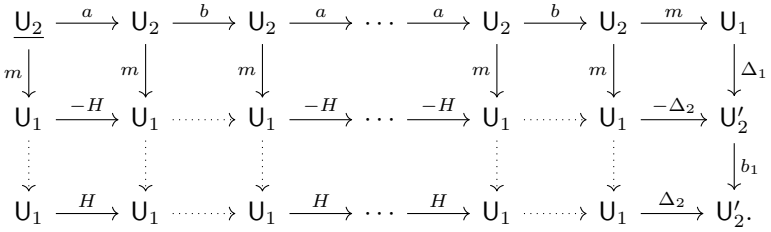
双分次是相对于双分次为 (0,0) 的带下划线对象而言的。对于每个水平箭头和垂直箭头，目标对象的 $q$-分次相对于源对象偏移 $-2$ 。

类似地，复形 $[K_{2k+1}]$ 在 $R$ 上强变形收缩到以下复形，该复形带有传递而来的 $\mathcal{CA}_1$ 作用：



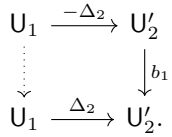
这里，双分次是相对于双分次为$(0,-2)$的带下划线对象而言的。

证明。 首先，我们证明奇数情形。由命题 5.10 和 5.11，复形 $K_{2k+1}=D([T_2^{\uparrow\uparrow}],[T_{-2k-1}^{\downarrow\uparrow}])$ 在 $R$上强变形收缩到由下式给出的复形 $X_{2k+1}=D(E_2^{\uparrow\uparrow},E_{-2k-1}^{\downarrow\uparrow})$：

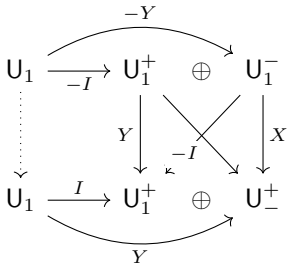


这里，垂直方向对应于 $E_2^{\uparrow\uparrow}$ 的微分，水平方向对应于 $E_{-2k-1}^{\downarrow\uparrow}$ 的微分。右端出现的图 $\mathrm{U}_2'=D(\mathrm{E}_1,\mathrm{E}_0)$ 表示嵌套的二分支平凡链环图。虚线箭头表示零映射，双箭头暂时省略。

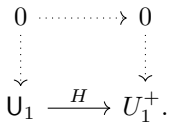
可以看到，顶行可以消去，左端留下一个 $\mathrm{U}_1$ 。这会将竖直的 $\mathrm{U}_2\xrightarrow{m}\mathrm{U}_1$ 变为 $\mathrm{U}_1\xrightarrow{0}\mathrm{U}_1$。此外，考虑右下方框



对 $\mathrm{U}_2'$ 的内圆进行去环处理后，它变为，



然后，对顶部的水平箭头 $-I$ 和对角箭头$-I$ 应用高斯消元，化简为



由此，我们得到陈述中描述的底复形。

Next，我们描述 $u = u\,(X_{2k+1})$。回忆一下，

$$u(E_2^{\uparrow\uparrow})\colon \mathsf{E}_1 \xrightarrow{2s} \underline{\mathsf{E}_0}$$

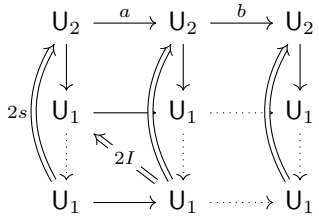
以及 $u(E_{-p}^{\uparrow\downarrow}) = 0$。令 $\xi^1 = \xi_1(E_2^{\uparrow\uparrow})$ 以及 $\xi^2 = \xi_1(E_{-p}^{\uparrow\downarrow})$。在图 17 中，从画有箭头的点出发，17 的交叉项为

$$\xi^1(\xi^2 - \xi^1 - \xi^2) + \xi^2(-\xi^1 - \xi^2) + (-\xi^1)(-\xi^2) = 2\xi^1\xi^2.$$

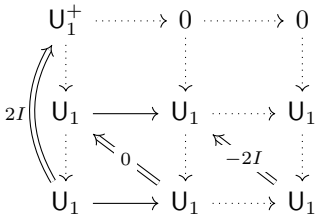
因此，我们有

$$u = u(E_2^{\uparrow\uparrow}) + 0 + 2\xi^1\xi^2.$$

考虑 $X_{2k+1}$ 中以下重复块:



顶行的消去将此块变换为



因此，我们得到如陈述中所述的 $u$的描述。

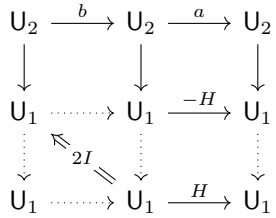
偶数情形的证明类似地进行。化简过程类似，我们得到陈述中所述的 $K_{2k}$ 的强变形收缩 $X_{2k}$。在此情形下，我们有$u(E_2^{\uparrow\downarrow}) = u(E_{-2k}^{\downarrow\uparrow}) = 0$。结合 $\xi^1 = \xi_1(E_2^{\uparrow\downarrow})$与 $\xi^2 = \xi_1(E_{-p}^{\downarrow\uparrow})$， $u(X_{2k})$的交叉项由下式给出

$$\xi^1(\xi^2 - \xi^1 - \xi^2) + \xi^2(-\xi^1 - \xi^2) + (-\xi^1)(-\xi^2) = 2\xi^1\xi^2$$

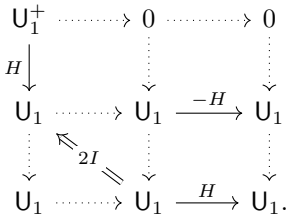
因此，我们有

$$u(X_{2k}) = 2\xi^1\xi^2.$$

$X_{2k}$ 中的以下重复块:



变换为



□

在下面的推论中，我们省略 $q$分次，因为从命题 5.14中可以轻易读出。

**推论 5.15.** 对于任意 $k \geq 0$，以下结论成立。

*1. $Kh(K_{2k}, \mathbb{Q})$ 支撑在 $gr_\delta = \pm 1$ 上，且 $e$ 的作用为 0。2. $Kh(K_{2k+1}, \mathbb{Q})$ 支撑在 $gr_\delta = -1, -3$ 上，并且在 $\delta = -1$ 上有一个维数为 2 的 $e$-串 $(\mathbb{Q} \to \mathbb{Q})$；其他 $e$-串的维数均为 1。3. $Kh(K_{2k}, \mathbb{Q})$ 支撑在 $gr_\delta = 0$ 上，并分解为 $2k+1$ 个 $\mathbb{Q}$ 与 $k$ 个 $(\mathbb{Q} \to \mathbb{Q})$ 的直和。4. $Kh(K_{2k+1}, \mathbb{Q})$ 支撑在 $gr_\delta = -2$ 上，并分解为 $2k+1$ 个 $\mathbb{Q}$ 与 $k+1$ 个 $(\mathbb{Q} \to \mathbb{Q})$ 的直和。*

证明。 令 $A$表示线段

$$\mathsf{U}_1 \xrightarrow{H} \mathsf{U}_1 \xLeftarrow{2I} \mathsf{U}_1 \xrightarrow{H} \mathsf{U}_1$$

并令 $B$ 表示线段

$$\mathsf{U}_1 \xLeftarrow{2I} \mathsf{U}_1 \xrightarrow{H} \mathsf{U}_1$$

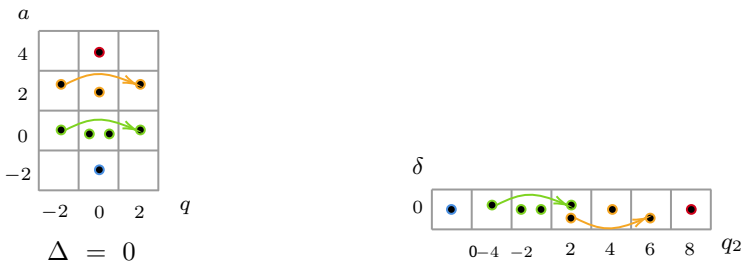
经过适当的双分次平移。由命题5.14可知，复形 $[K_{2k}]$ 与以下直和同伦：$\mathsf{U}_1$ 和 $k$ 个 $A$的副本；而 $[K_{2k+1}]$ 与以下直和同伦： $B$ 和 $k$ 个 $A$的副本。在 $\mathcal{F}_0$ 上的拓扑量子场论 $\mathbb{Q}$下，线段 $\mathcal{F}_0(A)$ 同伦于

$$\mathbb{Q}\{X\} \xrightarrow{0} \mathbb{Q}\{1\} \xLeftarrow{0} \mathbb{Q}\{X\} \xrightarrow{0} \mathbb{Q}\{1\},$$

且 $\mathcal{F}_0(B)$ 同伦于

$$\begin{pmatrix} \mathbb{Q}\{X\} \\ \mathbb{Q}\{1\} \end{pmatrix} \xLeftarrow{\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}} \mathbb{Q}\{X\} \xrightarrow{0} \mathbb{Q}\{1\}.$$

约化情形的计算类似。 □




(a) $\mathcal{H}(6_1^*)$ (b) $\widetilde{Kh}(6_1)$

图 18: $K_6 = 6_1^*$

## 5.5 与 HOMFLY–PT 同调的比较

两类纽结（$2, q$）环面纽结和扭结均为 2-桥纽结，并且 [Ras15，推论 1]证明了 2-桥纽结是 KR-薄的。因此，（i）它们的 HOMFLY–PT 同调由*HOMFLY–PT* 多项式 和纽结符号 （支撑于 $\Delta = \sigma(K)$）确定；（ii）它们的 HOMFLY–PT 同调与约化 Khovanov 同调同构（将三重分次合并后）。下面我们比较推论5.13 和5.15 的结果与这些纽结的 HOMFLY–PT 同调的三重分次 $\mathfrak{sl}_2$-模结构。

环面纽结的 HOMFLY–PT 多项式由 Jones 在 [Jon87], 中发现，特别地，$(2, 2k+1)$-环面纽结的公式在 [DGR06，(72)] 中给出为

$$P(T_{2,2k+1})(q,a) = a^{2k}\sum_{i=0}^{k} q^{4i-2k} \;-\; a^{2k+2}\sum_{i=1}^{k} q^{4i-2k-2}.$$

从上述公式可以看出，$\mathcal{H}(T_{2,2k+1})$ 有简单（不可约的） $\mathfrak{sl}_2$-直和项，其维数为$k+1$和 $k$，分别位于 $a$-分次 $2k$和 $2k+2$上。关于21 节中的 $k=3$情况，参见图。

扭结的 HOMFLY–PT 多项式由 Ta.sk¨opr¨u 和 Sinan 在 [TS21，推论 2 中计算得出。6] 如

$$P(K_p)(q,a) = \begin{cases} -(q-q^{-1})^2\left(\sum_{i=0}^{k-1} a^{2i}\right) + a^{2k} - a^{2k-2} + a^{-2} & p = 2k, \\ (q-q^{-1})^2 a^2\left(\sum_{i=0}^{k} a^{2i}\right) - a^{2k+4} + a^{2k+2} + a^2 & p = 2k+1. \end{cases}$$

对于偶数 $K_{2k}$，有 $k$ 个简单的二维 $\mathfrak{sl}_2$-直和项

$$q^{-2}a^{2i}\mathbb{Q} \to q^2 a^{2i}\mathbb{Q},$$

以及 $2k+1$ 个平凡的一维 $\mathfrak{sl}_2$-直和项，位于 $\mathrm{gr}_q = 0$ 上。类似地，对于奇数 $K_{2k+1}$，有 $k+1$ 个简单的二维 $\mathfrak{sl}_2$-直和项

$$q^{-2}a^{2i+2}\mathbb{Q} \to q^2 a^{2i+2}\mathbb{Q},$$

以及 $2k+1$ 位于 gr 上的平凡一维$_q = 0$。参见图 18 中的情形 $K_4 = 6_1^*$。因此，在所有这些情形下，我们都直接验证了定理 4 成立。

# 6 算法计算

最后，我们描述一种算法，用于计算双分次 $k[e]$-模结构，其中 $Kh(L;k)$ 定义在任意可计算域上 $k$，并展示由作者开发的程序 [YUI] 所得到的计算结果。

## 6.1 算法与实现

回想一下，对于一个有限生成的分次 $k[e]$-模 $M$，若 $e$ 在 $M$ 上幂零地作用，则结构定理指出，$M$ 可分解为有限直和

$$M \cong \bigoplus_i q^{j_i}(k[e]/(e^{l_i})) \tag{6.1}$$

其中 $j_i \in \mathbb{Z}$ 和 $0 < l_1 \leq l_2 \leq \cdots$。

首先，可以如下计算 $M$ 的（非分次）$k[e]$-模结构。取 $M$ 的一个 $k$-基 $\{m_i\}$，并令 $\varphi\colon k^n \to M$ 为将每个单位向量 $e_i$ 映射到 $m_i$ 的映射。令 $A$ 为表示 $e$ 在 $M$ 上作用的矩阵。将 $\varphi$ 和 $A$ 都扩张到 $k[e]$ 上后，得到一个短正合列

$$0 \longrightarrow k[e]^n \xrightarrow{eI-A} k[e]^n \xrightarrow{\varphi} M \longrightarrow 0$$

从而得到同构 $M \cong k[e]^n/(eI - A)$。计算 $eI - A$ 的 史密斯标准形 (SNF)

$$S = \mathrm{diag}(1, \ldots, 1, e^{l_1}, e^{l_2}, \ldots)$$

通过初等行列变换得到可逆矩阵 $P, Q \in GL(n; k[e])$，使得下图交换：

$$\begin{array}{ccc} k[e]^n & \xrightarrow{eI-A} & k[e]^n \\ {\scriptstyle Q}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle P} \\ k[e]^n & \xrightarrow{S} & k[e]^n. \end{array}$$

底行的余核给出了分解（6.1）（不考虑分次）。此外，令$v_i$ 表示在 $i$下第 $e_i$ 个单位向量的原像 $P$。

$$v_i := P^{-1}e_i \in k[n]^n.$$

那么 $z_i := \varphi(v_i) \in M$ 给出了直和项 $k[e]/(e^{l_i})$ 的一个生成元。

接下来，假设 $M$ 是分次的，$e$ 是齐次的，并且选取 $M$ 的 $k$-基为齐次基。这样，我们可以在分次 $k[e]$-模的范畴中进行史密斯标准形计算（即限制为保持分次的初等行列变换）。此时，每个生成元 $z_i$ 都是齐次的，并且可表示为齐次基的线性组合 $z_i = \sum_j c_j m_j$，其系数为单项式。其分次可由一个含有非零常数系数 $c_j \in k^\times$的项 $c_j m_j$ 读出；在这种情况下，$\deg(z_i) = \deg(m_j)$。

现在令 $K$ 为一个纽结图。作为一个双分次的 $k$-模，$M = Kh(K;k)$ 显然满足上述条件。要进行实际计算，首先计算同调 $Kh(K;k)$，并求出显式的齐次生成元和变换矩阵。然后计算 $e$ 在每个代表元上的作用，从而得到表示 $e$ 对 $Kh(K;k)$ 作用的矩阵。进行分次史密斯标准形计算，以获得 $Kh(K;k)$ 的 $e$-串分解。

这里，我们介绍一种更紧凑的形式来表示 $Kh(L;k)$ 的 $e$-串分解。令

$$e(l) := 1 + q^4 e + \cdots + q^{4(l-1)} e^{l-1}$$

并将其识别为分次 $k[e]$-模 $k[e]/(e^l)$（维数为 $l$）。总的双分次 $k[e]$-模结构 $Kh(L;k)$，如（3.16）所示，将表示为关于（$\delta$，$q$，$e$）的多项式，如下：

$$Kh(L;k) = \sum_{i,j,l} \delta^i q^j e(l).$$

上述算法已在程序 [YUI] 中实现。它能够计算纽结的非约化和约化 Khovanov 同调的 $e$-串分解，系数域为 $k = \mathbb{Q}$ 及其他可计算域。它还可以选择以矩阵形式显示 e，此功能在 $k = \mathbb{Z}$ 上也可使用。（在 $e$ 上的 $\mathbb{Z}$ -串分解没有意义，因为 $\mathbb{Z}[e]$ 不是主理想整环。）

这里，我们将演示如何计算左手三叶结的 $e$-串分解 $3_1$ .
使用命 令，

>ykh sl2 3_1 -t 有理数域

该程序输出

```
j\i  -3  -2  -1  0
 9   Q   .   .   .
 7   .   .   .   .
 5   .   Q   .   .
 3   .   .   .   Q
 1   .   .   .   Q

 d^1 q^1 e(2) + d^3 q^3 e(1)  + d^3 q^9 e(1)
```

它展示了带有通常双分次（$\mathrm{gr}_t$，$\mathrm{gr}_q$）的双分次模 $Kh(3_1;\mathbb{Q})$，以及一个 $e$-串分解

$$Kh(3_1;\mathbb{Q}) = \delta^1 q^1 e(2) + \delta^3 (q^3 e(1) + q^9 e(1)).$$

该结果与推论 5.13 关于 $k = 1$在镜像变换后相符。

下面是另一个关于 $7_1$, 的约化 Khovanov 同调的计算，这次是在$\mathbb{Z}$上计算的。它没有展示 $e$-串分解，而是以矩阵的形式明确描述 e。

>ykh sl2 7_1 -t 整数

```
j\i  -7  -6  -5  -4  -3  -2  -1  0
 20  Z   .   .   .   .   .   .   .
 18  .   Z   .   .   .   .   .   .
 16  .   .   Z   .   .   .   .   .
 14  .   .   .   Z   .   .   .   .
 12  .   .   .   .   Z   .   .   .
 10  .   .   .   .   .   Z   .   .
 8   .   .   .   .   .   .   .   .
 6   .   .   .   .   .   .   .   Z
```

德尔塔：6

整数(0, 6) -> 整数(-2, 10)；秩：1[-6]
整数(-2, 10) ->整数(-4, 14)；秩：1[4]
整数(-3, 12) ->整数(-5, 16)；秩：1[-
4]整数(-4, 14) ->整数(-6, 18)；秩：
1[-2]整数(-5, 16) ->整数(-7, 20)；秩：
1[2]

再次可以看到，结果与推论 5.13 对 $k = 3$的结论一致。

当前实现的效率不高，因为它直接计算 $Kh(K)$（没有使用 Bar-Natan 的快速计算算法 [Bar07]），然后再计算 e对应的矩阵。显然，第 5 节介绍的约化技术可以与 Bar-Natan 的算法结合实现，从而大幅提升性能。改进留待未来工作完成。

## 6.2 计算结果

我们使用程序 $\mathbb{Q}[e]$，结合 [YUI] 以及 *Knot Atlas* [KAT]提供的数据集，计算了最多有 11 个交叉的所有素纽结的约化 Khovanov 同调的 [NS25]-模结构。下面总结这些结果，其中还合并了文献 [NS25] 中计算的（约化）HOMFLY–PT 同调结果。

以下命题给出了 *Conway* 结 $K_C = 11n_{34}$ 和 *Kinoshita– Terasaka* 结 $K_{KT} = 11n_{42}$ 的结果，它们也出现在定理 5中。

**命题 6.1**。 在 *[NS25*的命题 *4* 中给出的 *44* 组素纽结里，*4],* 每组都包含两个或更多个 *HOMFLY–PT* 同调和约化 *Khovanov* 同调完全相同的不同纽结，而以下四对的约化 *Khovanov* 同调上的 $e$-算子各不相同。

$$(11n_{34}, 11n_{42}), \quad (11n_{39}, 11n_{45}), \quad (11n_{73}, 11n_{74}), \quad (11n_{151}, 11n_{152}).$$

事实上， $\mathbb{Q}[e]$-模结构如下：

$$\begin{aligned}
&\widetilde{Kh}(11n_{34}) \\
&= \delta^{-2}(q^{-6}e(2) + q^{-4}e(2) + q^{-4}e(3) + q^{-2}e(3) + e(1) + q^2e(1) + q^2e(2) + q^4e(2)) \\
&+ \delta^{0}(q^{-12}e(2) + q^{-10}e(2) + q^{-10}e(3) + q^{-8}e(3) + q^{-6}e(1) + q^{-4}e(1) + q^{-4}e(2) + q^{-2}e(2) + e(1)) \\
&\widetilde{Kh}(11n_{42}) \\
&= \delta^{-2}(q^{-6}e(2) + q^{-4}e(1) + q^{-4}e(3) + q^{-2}e(2) + 2e(1) + 2q^2e(2) + q^4e(1) + q^8e(1)) \\
&+ \delta^{0}(q^{-12}e(1) + 2q^{-10}e(2) + q^{-8}e(1) + q^{-8}e(3) + q^{-6}e(2) + 2q^{-4}e(1) + q^{-2}e(2) + 2e(1)), \\
&\widetilde{Kh}(11n_{39}) \\
&= \delta^{0}(q^{-4}e(1) + 3q^{-2}e(2) + 3e(1) + 2e(3) + 2q^2e(2) + 4q^4e(1) + 3q^6e(2) + 2q^8e(1) + q^{12}e(1)) \\
&+ \delta^{2}(q^{-8}e(1) + q^{-6}e(2) + q^{-4}e(1) + q^{-2}e(2) + e(1) + q^4e(1)),
\end{aligned}$$

$$\widetilde{Kh}(11n_{45})$$
$$= \delta^0(q^{-4}e(1) + 3q^{-2}e(2) + 2e(1) + e(2) + 2e(3) + q^2e(2) + q^2e(3) + 3q^4e(1) + q^6e(1) + 2q^6e(2)$$
$$+ q^8e(1) + q^8e(2)) + \delta^2(q^{-8}e(2) + q^{-6}e(3) + q^{-2}e(1) + e(2))$$
$$\widetilde{Kh}(11n_{73})$$
$$= \delta^0(q^{-2}e(2) + e(1) + e(2) + e(3) + q^2e(3) + q^4e(1) + q^6e(1) + q^6e(2) + q^8e(2))$$
$$+ \delta^2(q^{-8}e(2) + q^{-6}e(3) + q^{-2}e(1) + e(2)),$$
$$\widetilde{Kh}(11n_{74})$$
$$= \delta^0(q^{-2}e(2) + 2e(1) + e(3) + q^2e(2) + 2q^4e(1) + 2q^6e(2) + q^8e(1) + q^{12}e(1))$$
$$+ \delta^2(q^{-8}e(1) + q^{-6}e(2) + q^{-4}e(1) + q^{-2}e(2) + e(1) + q^4e(1)),$$
$$\widetilde{Kh}(11n_{151})$$
$$= \delta^2(3q^2e(2) + 2q^4e(1) + 2q^4e(3) + 2q^6e(2) + 4q^8e(1) + 3q^{10}e(2) + 2q^{12}e(1) + q^{16}e(1)$$
$$+ \delta^4(q^{-4}e(1) + q^{-2}e(2) + e(1) + q^2e(2) + q^4e(1) + q^8e(1)),$$
$$\widetilde{Kh}(11n_{152})$$
$$= \delta^2(3q^2e(2) + q^4e(1) + q^4e(2) + 2q^4e(3) + q^6e(2) + q^6e(3) + 3q^8e(1) + q^{10}e(1) + 2q^{10}e(2)$$
$$+ q^{12}e(1) + q^{12}e(2)) + \delta^4(q^{-4}e(2) + q^{-2}e(3) + q^2e(1) + q^4e(2)).$$

**命题 6.2**。 在 *90* 组最多包含11 个交叉的素纽结中，每组都包含两个或更多约化 *Khovanov* 同调相同的纽结；以下 *57* 组被排除，因为它们具有不同的e-算子。

$\{9_8, m(11n_{60})\}$, $\{9_{12}, m(11n_{15})\}$, $\{9_{14}, m(11n_{53})\}$, $\{9_{20}, m(11n_{90})\}$, $\{9_{21}, m(11n_{129})\}$,$\{9_{22}, m(11n_3)\}$, $\{9_{25}, m(11n_{25})\}$, $\{9_{27}, 11n_{83}\}$, $\{9_{30}, m(11n_{114})\}$, $\{9_{36}, 11n_{16}\}$,$\{9_{39}, 11n_{11} = 11n_{112}\}$, $\{9_{41}, m(11n_4) = m(11n_{21})\}$, $\{10_{22}, 10_{35}\}$, $\{10_{41}, m(10_{94})\}$, $\{10_{43}, 10_{91}\}$,$\{10_{59}, 10_{106}\}$, $\{10_{60}, m(10_{86})\}$, $\{10_{71}, 10_{104})\}$, $\{10_{73}, m(10_{83})\}$, $\{10_{81}, m(10_{109})\}$,$\{10_{137}, m(10_{155}) = 11n_{37}\}$, $\{10_{138}, 11n_{117}\}$, $\{11a_3, 11a_{51}, 11a_{331}\}$, $\{11a_5, 11a_{112}\}$, $\{11a_7, 11a_{325}\}$,$\{11a_9, 11a_{140}\}$, $\{11a_{10}, 11a_{42}\}$, $\{11a_{16}, 11a_{280}\}$, $\{11a_{28}, m(11a_{87}) 11a_{96}\}$, $\{11a_{30} = 11a_{272}, m(11a_{189})\}$, $\{11a_{34}, 11a_{89}\}$, $\{11a_{35} = 11a_{316}, m(11a_{36})\}$, $\{11a_{45}, 11a_{118}\}$,$\{11a_{60}, 11a_{220}\}$, $\{11a_{66}, 11a_{121}\}$, $\{11a_{67}, 11a_{317}\}$, $\{11a_{68}, 11a_{111}\}$, $\{11a_{80}, m(11a_{270})\}$,$\{11a_{84}, 11a_{88}\}$, $\{11a_{86}, m(11a_{205})\}$, $\{11a_{110}, 11a_{257}\}$, $\{11a_{120}, 11a_{295}\}$, $\{11a_{125}, m(11a_{297})\}$,$\{11a_{131}, 11a_{218}\}$, $\{11a_{146}, 11a_{294}\}$, $\{11a_{147}, m(11a_{322})\}$, $\{11a_{159}, 11a_{347}\}$, $\{11a_{228}, 11a_{251} = 11a_{253}\}$,$\{11n_7, 11n_{36} = 11n_{44}\}$, $\{11n_{34}, 11n_{42}\}$, $\{11n_{39}, 11n_{45}\}$, $\{11n_{66}, 11n_{150}\}$, $\{11n_{73}, 11n_{74}\}$,$\{11n_{103}, m(11n_{175})\}$, $\{11n_{124}, 11n_{166}\}$,$\{11n_{148}, 11n_{168}\}$, $\{11n_{151}, 11n_{152}\}$.

这里，像 $\{K_1, K_2 = K_3\}$ 这样的记号表示 $K_1$ 和 $K_2$ 的e-算子彼此不同，而 $K_2$ 和 $K_3$ 的算子相同。

另一个有趣的问题是，e 能否检测出 HOMFLY–PT 同调和约化 Khovanov 同调无法检测的手性纽结 $K$ （即 $K \neq K^*$）。不过，在我们的计算中并未发现这样的纽结。

**命题 6.3**。 以下四个是交叉数不超过 11 且其 *HOMFLY–PT* 同调与其镜像相同的唯一手性素纽结（*[NS25, 命题 4。3]*）。这些纽结的约化 *Khovanov* 同调上的 e算子也与其镜像相同。

$$10_{48},\ 10_{71},\ 10_{91},\ 10_{104}.$$

我们还对未约化 Khovanov 同调进行了计算。正如我们在推论 5.15中所见，e 的强度在两者之间并不相同（事实上，对于扭结，未约化同调上的e算子几乎是平凡的）。在我们的计算中，约化同调与未约化同调之间的强度没有差异。确切地说，将6.1至 6.3 中所有命题里的约化 替换为未约化，上述命题仍然逐字成立。

近年来，人们已对 Khovanov 同调和 HOMFLY–PT 同调进行了大规模计算，相关工作见 [CM24; Kel+25]。值得探究的是，e 在多大程度上改进了他们的结果。

## 6.3 命题6.1的分析

最后，我们对命题6.1进行更深入的分析，尤其关注*Conway* 结 $K_C = 11n_{34}$ 和*Kinoshita–Terasaka* 结 $K_{KT} = 11n_{42}$。下文中，令 $K$ 表示 $K_C$ 或 $K_{KT}$。首先，根据 [NS25], 的计算结果，三重分次 $\mathbb{Q}$-模 $\mathcal{H}(K)$的结构为

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | . | $1_{(-4)}$ | $1_{(-2)}$ | $3_{(0)}$ | $1_{(2)}$ | $1_{(4)}$ | . |
| $-2$ | $1_{(-10)}$ | $1_{(-8)}$ | $3_{(-6)}$ | $2_{(-4)}$ | $3_{(-2)}$ | $1_{(0)}$ | $1_{(2)}$ |
| $-4$ | . | $1_{(-12)}$ | $1_{(-10)}$ | $2_{(-8)}$ | $1_{(-6)}$ | $1_{(-4)}$ | . |

$\Delta = 0$

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | . | $1_{(0)}$ | $1_{(2)}$ | $2_{(4)}$ | $1_{(6)}$ | $1_{(8)}$ | . |
| $0$ | $1_{(-6)}$ | $1_{(-4)}$ | $3_{(-2)}$ | $2_{(0)}$ | $3_{(2)}$ | $1_{(4)}$ | $1_{(6)}$ |
| $-2$ | . | $1_{(-8)}$ | $1_{(-6)}$ | $2_{(-4)}$ | $1_{(-2)}$ | $1_{(0)}$ | . |

$\Delta = -2$

这里，两个非平凡的 $\Delta$-切片 $\Delta = -2$、0 表示为具有双分次 $(q, a)$ 的双分次 $\mathbb{Q}$-模。位置 $(q, a)$ 处单元格中的每个数字 $=(i, j)$ 表示 $\mathcal{H}^{i,j}$, $\Delta$-$(i+j)(K)$ 的维数，下标数字表示 $\mathfrak{sl}_2$-修正的 $q$-分次 $q + 2a$。如第 4.1 节所述，从 $\mathcal{H}(K)$ 到 $H_2(K)$ 的谱序列的首个~~-~~微分 $d^1$ Kh$(K^*)$ 的次数为 (deg$_\Delta$, deg$_q$, deg$_a$) =(2, 4, $-2$)，且所有高阶微分均为零。因此，我们有

$$E^2(K) = H(\mathcal{H}(K), d^1) \cong \widetilde{Kh}(K^*).$$

~~$Kh(K^*)$~~ 的双分次 $\mathbb{Q}$-模结构由下式给出

| $\delta \setminus q$ | $-12$ | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 3 | 1 | . | . | . |
| $-2$ | . | . | . | 1 | 2 | 2 | 3 | 3 | 2 | 2 | 1 |

~~由 $E^2 \cong Kh(K^*)$~~ 可知，其三重分次结构被部分确定为

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | . | $1^?_{(0)}$ | $1^?_{(2)}$ | $1_{(4)}$ | $1_{(6)}$ | $1_{(8)}$ | . |
| $0$ | $1^?_{(-6)}$ | $1^?_{(-4)}$ | $1_{(-2)}$ | $2^?_{(0)}$ | $3^?_{(2)}$ | $1_{(4)}$ | $1_{(6)}$ |
| $-2$ | . | . | $1^?_{(-6)}$ | $2^?_{(-4)}$ | $1_{(-2)}$ | $1_{(0)}$ | . |

$\Delta = -2$

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | . | $1_{(-4)}$ | $1_{(-2)}$ | $3^{?}_{(0)}$ | $1^{?}_{(2)}$ | . | . |
| $-2$ | $1_{(-10)}$ | $1_{(-8)}$ | $3^{?}_{(-6)}$ | $2^{?}_{(-4)}$ | $1_{(-2)}$ | $1^{?}_{(0)}$ | $1^{?}_{(2)}$ |
| $-4$ | . | $1_{(-12)}$ | $1_{(-10)}$ | $1_{(-8)}$ | $1^{?}_{(-6)}$ | $1^{?}_{(-4)}$ | . |

$$\Delta = 0$$

此处，诸如 $n^{?}_{(q)}$ 的记号表示该维数尚未确定，且以 $n$ 为上界。~现在，$Kh(K_C^*)$ 的双分次 $\mathbb{Q}[e]$-模结构由

| $\delta \setminus q$ | $-12$ | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $e(2)$ | $e(2)+e(3)$ | $e(3)$ | $e(1)$ | $e(1)+e(2)$ | $e(2)$ | $e(1)$ | . | . | . | . |
| $-2$ | . | . | . | $e(2)$ | $e(2)+e(3)$ | $e(3)$ | $e(1)$ | $e(1)+e(2)$ | $e(2)$ | . | . |

一般而言，$e$-串长度越长，给出的约束就越强。例如，考虑 $e$-串$\delta^{-2}q^{-4}e(3)$。由于e-算子与谱序列相容（命题4.5），它在 $E^2(K_C)$中只有一个可能的位置，即

$$\Delta^{-2}q^{-4}a^{0}e(3)\colon 1_{(-4)} \to 1_{(0)} \to 1_{(4)}.$$

这样，我们就可以完全确定 $E^2(K_C)$的三重分次 $\mathbb{Q}[e]$-模结构，如下：

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | . | . | $e(2)$ | $e(2)$ | . | . | . |
| $0$ | . | $e(3)$ | $e(3)$ | $e(1)$ | $e(1)$ | . | . |
| $-2$ | . | . | $e(2)$ | $e(2)$ | . | . | . |

$$\Delta = -2$$

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | . | $e(2)$ | $e(2)$ | $e(1)$ | . | . | . |
| $-2$ | $e(3)$ | $e(3)$ | $e(1)$ | $e(1)$ | . | . | . |
| $-4$ | . | $e(2)$ | $e(2)$ | . | . | . | . |

$$\Delta = 0$$

~Next，$Kh(K_{KT}^*)$ 的分次 $\mathbb{Q}[e]$-模结构为

| $\delta \setminus q$ | $-12$ | $-10$ | $-8$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | $e(1)$ | $2e(2)$ | $e(1)+e(3)$ | $e(2)$ | $2e(1)$ | $e(2)$ | $2e(1)$ | . | . | . | . |
| $-2$ | . | . | . | $e(2)$ | $e(1)+e(3)$ | $e(2)$ | $2e(1)$ | $2e(2)$ | $e(1)$ | . | $e(1)$ |

按照之前的方法，我们确定 $E^2(K_{KT})$ 的三重分次 $\mathbb{Q}[e]$-模结构为

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2$ | . | . | $e(2)$ | $e(1)$ | . | $e(1)$ | . |
| $0$ | . | $e(3)$ | $e(2)$ | $e(1)$ | $e(2)$ | . | . |
| $-2$ | . | . | $e(2)$ | $e(1)$ | . | $e(1)$ | . |

$$\Delta = -2$$

| $a \setminus q$ | $-6$ | $-4$ | $-2$ | $0$ | $2$ | $4$ | $6$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $0$ | . | $e(1)$ | $e(2)$ | $2e(1)$ | . | . | . |
| $-2$ | $e(2)$ | $e(3)$ | $e(2)$ | $e(1)$ | . | . | . |
| $-4$ | . | $e(1)$ | $e(2)$ | $e(1)$ | . | . | . |

$$\Delta = 0$$

这些结果在第3b 和3c 节中的图1中可视化展示。

# 参考文献

[Ali19] Akram Alishahi.《解纽数与 Khovanov 同调》。载于：《太平洋数学杂志》301.1（2019年），第15–29页。[AD19] Akram Alishahi 和 Nathan Dowlin.《Lee谱序列、解纽数与骑士步猜想》。载于：《拓扑学及其应用》254（2019年），第29–38页。[ATZ23] Akram Alishahi、Linh Truong 和 Melissa Zhang.《Khovanov 同调与分支双覆盖的对合Heegaard Floer同调》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2305.07172（2023年）。[APS04] Marta M. Asaeda、J´ozef H. Przytycki 和 Adam S. Sikora.《曲面上 $I$-丛的 Kauffman 括号 skein 模的范畴化》。载于：《代数与几何拓扑》4（2004年），第1177–1210页。[Bal+21] John A Baldwin、Nathan Dowlin、Adam Simon Levine、Tye Lidman 和 Radmila Saz- danovic.《Khovanov 同调可检测八字结》。载于：《伦敦数学会通报》53.3（2021年），第871–876页。[BHS24] John A Baldwin、Ying Hu 和 Steven Sivek.《Khovanov 同调与五叶结》。载于：《欧洲数学会杂志》（2024年）。[BS22] John A Baldwin 和 Steven Sivek.《Khovanov 同调可检测三叶结》。载于：《杜克数学杂志》171.4（2022年），第885–956页。[BG12] John A. Baldwin 和 William D. Gillam.《Heegaard-Floer 纽结同调的计算》。载于：《结理论及其分支》21.8（2012年），第1250075卷，65页。[BSX19] John A. Baldwin、Steven Sivek 和 Yi Xie.《Khovanov 同调可检测 Hopf链环》。载于：《数学研究快报》26.5（2019年），第1281–1290页。[Bar02] Dror Bar-Natan.《关于 Khovanov 对 Jones 多项式的范畴化》。载于：《代数与几何拓扑》2（2002年），第337–370页。[Bar05] Dror Bar-Natan.《缠结与协边的 Khovanov 同调》。载于：《几何与拓扑》9（2005年），第1443–1499页。[Bar07] Dror Bar-Natan.《快速计算 Khovanov 同调》。载于：《结理论及其分支》16.3（2007年），第243–255页。[BS15] Joshua Batson 和 Cotton Seed.《Khovanov 同调中的链环分裂谱序列》。载于：《杜克数学杂志》164.5（2015年），第801–841页。[Bel+23a] Anna Beliakova、Matthew Hogancamp、Krzysztof K. Putyra 和 Stephan M. Wehrli.《关于 $\mathfrak{sl}_2$ 缠结同调的函子性》。载于：《代数与几何拓扑》23.3（2023年），第1303–1361页。[Bel+23b] Anna Beliakova、Matthew Hogancamp、Krzysztof K. Putyra 和 Stephan M. Wehrli.《关于 $\mathfrak{sl}_2$ 缠结同调的函子性》。载于：《代数与几何拓扑》23.3（2023年），第1303–1361页。[Bla10] Christian Blanchet.《Khovanov 同调的一个定向模型》。载于：《结理论及其分支》19.2（2010年），第291–312页。[Blo11] Jonathan M Bloom.《单极子Floer同调中的链环手术谱序列》。载于：《数学进展》226.4（2011年），第3216–3281页。[Bor+25] Maciej Borodzik、Irving Dai、Abhishek Mallick 和 Matthew Stoffregen.《Khovanov 同调与等变曲面》。2025年。arXiv: 2507.13642 [数学广义拓扑]。

[Cap07] Carmen Caprau. 一种 sl(2) 缠结同调与带缝余边界。博士论文——爱荷华大学。ProQuest 有限责任公司，密歇根州安娜堡，2007年，第132页。[Cap+21] Carmen Caprau、Nicolle Gonz´ález、Christine Ruey Shan Lee、Adam M. Lowrance、Rad- mila Sazdanovi´ć 和 Melissa Zhang。“关于 Khovanov 同调及相关不变量”。载于：《辛几何与接触几何及拓扑的研究方向》，第27卷。美国数学女性协会丛书。Springer，Cham，2021年，第273–292页。[CS96] J. Scott Carter 和 Masahico Saito。“辫子与电影”。载于：《结理论及其分支》5.5（1996），第589–608页。[CS98] J. Scott Carter 和 Masahico Saito。《纽曲面及其图示》。第55卷。数学调查与专著。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998年，第xii+258页。[CG24] Alex Chandler 和 Eugene Gorsky。“HOMFLY-PT同调中的结构”。载于：Exp. Math. 33.4（2024年），第817–842页。[CY25] Daren Chen 和 Hongjian Yang。《翻转映射与 Khovanov 同调上的对合》。2025年。arXiv：2506.00824 [数学广义拓扑]。[CM24] Vladimir Chernov 和 Ryan Maguire。《关于 Legendrian 纽结与横截简单纽结的 Khovanov 同调的猜想》。2024年。arXiv：2205.11430 [数学广义拓扑]。[CMW09] David Clark、Scott Morrison 和 Kevin Walker。“修正 Khovanov 同调的函子性”。载于：《几何与拓扑》13.3（2009），第1499–1582页。[Dae15] Aliakbar Daemi。“阿贝尔规范理论、纽结与奇 Khovanov 同调”。载于：arXiv预印本 arXiv:1508.07650（2015年）。[Dow24] Nathan Dowlin。“从 Khovanov 同调到纽结 Floer 同调的谱序列”。载于：《美国数学会杂志》（2024年）。[DGR06] Nathan M. Dunfield、Sergei Gukov 和 Jacob Rasmussen。“纽结同调的超多项式”。载于：Experiment. Math. 15.2（2006），第129–159页。[Gab86] David Gabai。“树状链环的亏格”。载于：Mem. Amer. Math. Soc. 59.339（1986），第i–viii页及第1–98页。[GH22] Eugene Gorsky 和 Matthew Hogancamp。“Hilbert概形与 Khovanov-Rozansky 同调的 $y$ 化”。载于：《几何与拓扑》26.2（2022），第587–678页。[GHM24] Eugene Gorsky、Matthew Hogancamp 和 Anton Mellit。“Khovanov-Rozansky同调中的典范类与对称性”。载于：Duke Math. J. 173.13（2024），第2481–2561页。[GLW18] J. Elisenda Grigsby、Anthony M. Licata 和 Stephan M. Wehrli。“环面Khovanov同调与纽结Schur-Weyl表示”。载于：Compos. Math. 154.3（2018），第459–502页。[Guj20] Onkar Singh Gujral。《由 Bar-Natan同调与 $\alpha$-同调得到的带状距离界》。2020年。arXiv：2011.01190 [数学广义拓扑]。[Hay23] Kyle Hayden。《解决 Wall型稳定化问题的原子化方法》。2023年。arXiv：2302.10127 [数学广义拓扑]。[HS24] Kyle Hayden 和 Isaac Sundberg。“Khovanov 同调与四维球中的奇异曲面”。载于：J. Reine Angew. Math. 809（2024），第217–246页。[HN13] Matthew Hedden 和 Yi Ni。“Khovanov模与平凡链环的检测”。载于：《几何与拓扑》17.5（2013），第3027–3076页。[Hom22] Jennifer Hom。“破解 Conway 结之谜”。载于：Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.) 59.1（2022），第19–29页。

[Hug14] Mark C. Hughes。“关于 Khovanov-Rozansky $sl_2$-同调与普通 Khovanov 同调的简注”。载于：《结理论及其分支》23.12（2014），第1450057号，25页。[ILM25] Damian Iltgen、Lukas Lewark 和 Laura Marino。《Khovanov 同调与有理数域上的解结》。2025年。arXiv：2110.15107 [数学广义拓扑]。[Imo+25] Hayato Imori、Taketo Sano、Kouki Sato 和 Masaki Taniguchi。《Khovanov 同调与奇异瞬子同调中的协边映射 II》。2025年。arXiv：2510.09399 [数学广义拓扑]。[Imo+26] Hayato Imori、Taketo Sano、Kouki Sato 和 Masaki Taniguchi。《Khovanov 同调与奇异瞬子同调中的协边映射 I》。2026年。arXiv：2505.12095 [数学广义拓扑]。[Jac04] Magnus Jacobsson。“由 Khovanov 同调得到的链环协边不变量”。载于：Algebr. Geom. Topol. 4（2004），第1211–1251页。[Jon87] V. F. R. Jones。“辫群的 Hecke 代数表示与链环多项式”。载于：《数学年刊》（第2辑）126.2（1987），第335–388页。[Kel+25] Tuomas Kelom¨äki、Abel Lacabanne、Daniel Tubbenhauer、Pedro Vaz 和 Victor L. Zhang。《链环不变量的检测概率》。2025年。arXiv：2509.05574 [数学广义拓扑]。[Kho00] Mikhail Khovanov。“Jones 多项式的范畴化”。载于：Duke Math. J. 101.3（2000），第359–426页。[Kho03] Mikhail Khovanov。“纽结上同调中的模式 I”。载于：Experiment. Math. 12.3（2003），第365–374页。[Kho06] Mikhail Khovanov。“链环同调与Frobenius扩张”。载于：《基础数学》190（2006），第179–190页。[Kho07] Mikhail Khovanov。“三重分次链环同调与 Soergel 双模的 Hochschild 同调”。载于：Internat. J. Math. 18.8（2007），第869–885页。[KR22] Mikhail Khovanov 和 Louis-Hadrien Robert。“链环同调与 Frobenius 扩张 II”。载于：《基础数学》256.1（2022），第1–46页。[KR08a] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。“矩阵分解与链环同调”。载于：《基础数学》199.1（2008），第1–91页。[KR08b] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。“矩阵分解与链环同调 II”。载于：《几何与拓扑》12.3（2008），第1387–1425页。[KR16] Mikhail Khovanov 和 Lev Rozansky。“Witt 代数的正半部分作用于三重分次链环同调上”。载于：Quantum Topol. 7.4（2016），第737–795页。[KS25a] Mikhail Khovanov 和 Taketo Sano。《等变 Khovanov 同调的对称性》。2025年。arXiv：2509.03785 [math.QA]。[KT07] Mikhail Khovanov 和 Richard Thomas。“辫配边、三角范畴与旗簇”。载于：Homology Homotopy Appl. 9.2（2007），第19–94页。[KS25b] KeeTaek Kim 和 Taketo Sano。《通过缠结与余边界图示化研究 Rasmussen 不变量》。2025年。arXiv：2503.05414 [数学广义拓扑]。[KM11] P. B. Kronheimer 和 T. S. Mrowka。“Khovanov 同调是平凡结检测器”。载于：Publ. Math. Inst. Hautes ´Etudes Sci. 113（2011），第97–208页。[Lee05] Eun Soo Lee。“Khovanov 不变量的一个自同态”。载于：Adv. Math. 197.2（2005），第554–586页。[LMZ24] Lukas Lewark、Laura Marino 和 Claudius Zibrowius。《Khovanov 同调与戈尔迪安距离的精细界》。2024年。arXiv：2409.05743 [数学广义拓扑]。

[Li24] Jiakai Li.《实单极子与从 Khovanov 同调出发的谱序列》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2406.00152（2024年）。[Lin19] Francesco Lin.《Khovanov 同调的 Bar-Natan 变形与对合单极 Floer 同调》。载于：《数学年刊》373.1（2019年），第489–516页。[LS24] Robert Lipshit 和 Sucharit Sarkar.《强可逆结及其商的 Khovanov 同调》。载于：《几何与拓扑前沿》第109卷，《纯数学讨论会论文集》。美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2024年，第157–182页。[LS14a] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar.《Khovanov 稳定同伦类型》。载于：J. Amer. Math. Soc. 27.4（2014年），第983–1042页。[LS14b] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar.《Rasmussen 不变量的精化》。载于：Duke Math. J. 163.5（2014年），第923–952页。[LS14c] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar.《Khovanov 同调上的 Steenrod 平方》。载于：《拓扑学杂志》7.3（2014年），第817–848页。[LS22] Robert Lipshitz 和 Sucharit Sarkar.《Khovanov 同调可检测分裂链环》。载于：American Journal of Mathematics 144.6（2022年），第1745–1781页。[LW21] Andrew Lobb 和 Liam Watson.《Khovanov 同调的一种精化》。载于：《几何与拓扑》25.4（2021年），第1861–1917页。[MTV07] Marco Mackaay、Paul Turner 和 Pedro Vaz.《关于结的 Rasmussen 不变量的一则评论》。载于：《结理论及其分支》16.3（2007年），第333–344页。[MV08] Marco Mackaay 和 Pedro Vaz.《Conway 结与 Kinoshita-Terasaka 结的约化 HOMFLY-PT 同调》。2008年。arXiv: 0812.1957 [数学广义拓扑]。[Mar22] Gage Martin.《Khovanov 同调可检测 $T(2, 6)$》。载于：《数学研究快报》29.3（2022年），第835–849页。[MC96] Hugh R. Morton 和 Peter R. Cromwell.《用纽结多项式区分突变结》。载于：《结理论及其分支》5.2（1996年），第225–238页。[Nah25] Gheehyun Nahm.《无定向链环 Floer 同调中的谱序列》。载于：arXiv 预印本 arXiv:2505.01914（2025年）。[NS25] Keita Nakagane 和 Taketo Sano.《HOMFLY 同调的计算》。载于：《结理论及其分支》34.12（2025年），论文编号2550062，共27页。[Nao06] Gad Naot.《普适 Khovanov 链环同调理论》。载于：《代数与几何拓扑》6（2006年），第1863–1892页。[NRS17] Satoshi Nawata、P. Ramadevi 和 Vivek Kumar Singh.《可区分突变结的着色 HOMFLY 多项式》。2017年。arXiv: 1504.00364 [数学广义拓扑]。[OS03] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o.《纽结 Floer 同调与四维球亏格》。载于：《几何与拓扑》7（2003年），第615–639页。[OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o.《纽结 Floer 同调、亏格界与突变》。载于：《拓扑学及其应用》141.1-3（2004年），第59–85页。[OS05] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o.《分支双覆盖的 Heegaard Floer 同调》。载于：《数学进展》194.1（2005年），第1–33页。[Pic20] Lisa Piccirillo.《Conway 结不是切片结》。载于：Ann. of Math. (2) 191.2（2020年），第581–591页。[Pol19] Wojciech Politarczyk.《周期链环的等变 Khovanov 同调》。载于：Michigan Math. J. 68.4（2019年），第859–889页。

[Qi+23] You Qi、Louis-Hadrien Robert、Joshua Sussan 和 Emmanuel Wagner.《等变 Khovanov-Rozansky 同调的对称性》。2023年。arXiv: 2306.10729 [数学广义拓扑]。[Qi+24] You Qi、Louis-Hadrien Robert、Joshua Sussan 和 Emmanuel Wagner.《$\mathfrak{gl}_N$-foams 的对称性》。载于：《量子拓扑》（2024年5月）。[Ras10] Jacob Rasmussen.《Khovanov 同调与切片亏格》。载于：《数学发明》182.2（2010年），第419–447页。[Ras15] Jacob Rasmussen.《Khovanov–Rozansky 同调上的一些微分》。载于：《几何与拓扑》19.6（2015年），第3031–3104页。[Ril71] Robert Riley.《纽结群到有限群的同态》。载于：《数学计算》25（1971年）。[Rou04] Raphael Rouquier.《辫群的范畴化》。2004年。arXiv: math/0409593 [math.RT

].

[San21] Taketo Sano。《修正 Khovanov 同调的函子性：一种简单的方法》。载于：《结理论及其分支》30.11（2021年），论文编号 2150074，12 页。[San25] Taketo Sano。《对合 Khovanov 同调与等变纽结》。2025年。arXiv: 2404.08568 [数学广义拓扑].[YUI] Taketo Sano。YUI, https://github.com/taketo1024/yui。版本 0.5.0。[SS24] Taketo Sano 和 Kouki Sato。《由 Lee 类的整除性得到的一族切片环面不变量》。载于：《拓扑学及其应用》（2024年），第 109059 页。[Sar20] Sucharit Sarkar。《带状距离与 Khovanov 同调》。载于：《代数与几何拓扑》20.2（2020年），第 1041–1058 页。[Sca15] Christopher W Scaduto。《瞬子与奇 Khovanov 同调》。载于：《拓扑学杂志》8.3（2015年），第 744–810 页。[Sch21] Dirk Sch¨utz。《计算 $S$-不变量的快速算法》。载于：《格拉斯哥数学杂志》63.2（2021年），第 378–399 页。[Shu14] Alexander N. Shumakovitch。《Khovanov 同调的挠》。载于：《基础数学》225.1（2014年），第 343–364 页。[Sza15] Zolt´an Szab´o。《Khovanov 同调中的几何谱序列》。载于：《拓扑学杂志》8.4（2015年），第 1017–1044 页。[TS21] Kemal Ta¸sk¨opr¨u 和 Zekiye S¸evval Sinan。《扭结纽结的纽结多项式递推关系》。载于：《基础数学与应用杂志》4.1（2021年），第 59–66 页。[KAT] 纽结图谱。URL：http://katlas.org/（访问于2026年2月19日）。[Tho18] Benjamin Thompson。《有理缠结的 Khovanov 复形》。2018年。arXiv: 1701.07525[数学广义拓扑].[Tur20] Paul Turner。《Khovanov 同调与可对角化 Frobenius 代数》。载于：《结理论及其分支》29.01（2020年1月），第 1950095 页。[Tur06] Paul R. Turner。《计算 Bar-Natan 特征二 Khovanov 同调》。载于：《结理论及其分支》15.10（2006年），第 1335–1356 页。[Vog20] Pierre Vogel。《Khovanov 同调的函子性》。载于：《结理论及其分支》29.4（2020年），第 2050020 页，66 页。[Weh03] Stephan M. Wehrli。《Khovanov 同调与 Conway 变异》。2003年。arXiv: math/0301312 [数学广义拓扑]。

[Wig16] Yuval Wigderson. “Bar-Natan 理论的分裂”. In: 《结理论及其分支》25.4 (2016), pp. 1650014, 19.[Zhu22] Zipei Zhuang. “结纽 cobordism 与 Lee 扰动对 Khovanov 同调的影响”. In: 《结理论及其分支》31.2 (2022), Paper No. 2250012,6.