arXiv:2602.17451v1 [math.AG] 19 Feb 2026

可对角化群固定点簇的维数与代数配边

OLIVIER HAUTION

Abstract. 我们确定了由环境簇的陈数所决定的、可对角化群作用于光滑射影簇时其不动点轨迹维数的所有限制。我们将问题归结为求出 p-群作用的下界，并通过借助集中定理分析等变配边环来得到这些下界。为此，我们构造了足够多的显式作用实例，使其达到预期的下界。随后，我们证明，在适当意义下，这一族在等变配边环中是极大的。

Contents

1. 引言 2 1.1. 不动点的存在性 2 1.2. 不动点轨迹维数 3 1.3. 注 5 1.4. 证明策略 7 1.5. 论文结构 8**2. Lazard 环** 9 2.1. 代数 Hurewicz 态射 9 2.2. 簇的配边类 11 2.3. Landweber 理想 12**3. 配边生成元上的作用** 15 3.1. 群在簇上的作用 15 3.2. Landweber 理想的生成元 16 3.3. Milnor 超曲面 17 3.4. q-滤过 19**4. 代数配边** 21 4.1. 作为上同调理论的配边 21 4.2. 分次向量丛的配边 23**5. 对角化群的配边** 24 5.1. 代数预备知识 24 5.2. 等变配边 27

日期：2026年2月20日。2010 数学主题分类。14C25、14L30、55 N22。关键词与短语。代数配边，簇上的群作用。

6. 代数独立 29 6.1. 素数幂的形式乘法 30 6.2. 等变配边环 32**7. 可对角化 p-群** 34 7.1. 无不动点的作用 35 7.2. 单射定理 36 7.3. 线性无关性 38 7.4. 按不动点轨迹维数滤过 40**8. 结论** 41 8.1. 无不动点的作用 41 8.2. 不动点轨迹维数 43 8.3. 陈数 44**附录 A. 有效性** 47**附录 B. 符号表** 50**参考文献** 52

1. 引言

1.1. 不动点的存在性。 代数簇上的群作用何时存在不动点？通常，人们借助不动点定理来回答这一基本问题。这些定理依据环境簇的非等变信息，给出不动点存在的充分条件。

本文所考虑的信息是簇的陈数集合。这些陈数是由其维数的分拆索引的一些数值不变量。它们利用交理论构造而成，粗略地说，刻画了簇的几何复杂性。在此引言中，我们固定一个基域，并假设它是特征零的代数闭域。将陈数相同的光滑射影簇视为等价，可得到一个环 $\mathbb{L}$，称为 Lazard 环。因此，光滑射影簇 X 具有一个配边类 $[\![X]\!] \in \mathbb{L}$，它恰好编码了该簇的陈数。

要完整确定涉及陈数的不动点定理，等价于计算子群 $J(G) \subset \mathbb{L}$；该子群由具有某个代数群 G 的无不动点作用的簇的配边类生成。

本文考虑有限型可对角化群 G。根据我们对域 k 的假设，这意味着 G 是分裂环面与（常值）有限阿贝尔群的积。博雷尔不动点定理意味着 $J(G \times \mathbb{G}_m) = J(G)$，因此我们只需考虑有限阿贝尔群 G。对于这类群，唯一真正有意义的情形是 G 是某个素数 p 的有限阿贝尔 p-群：事实上，结果表明除此之外 $J(G) = \mathbb{L}$（见 (8.1.7)）。

我们的第一个结果在 (8.1.8) 中得到证明，它确定了此情形下的理想 $J(G)$，从而给出了拓扑学中 tom Dieck 定理 [tD70] 的一个代数类比。有限阿贝尔群的秩 是指其循环因子的个数。

定理 1. 设 G 为一个有限阿贝尔 p-群，其秩为 r。则 $J(G)$ 是子群$I_p(r)$，即 $\mathbb{L}$ 中由维数为 $< p^{r-1}$、且所有陈数均可被 p 整除的光滑射影簇的类所生成的子群。

子群 $I_p(r)$ 是第 r 个***Landweber*** 理想，它在 cobordism 理论的诸多方面起着基本作用。作为理想，它由 r个显式簇的类生成，而这些簇恰好容许无不动点的 G-作用。其中第一个是 p 个点的不交并，故 $I_p(1) = p\mathbb{L}$。当 $r > 1$ 时，理想 $I_p(r)$ 可看作理想 $p\mathbb{L}$ 的高阶版本。例如，理想 $I_2(2)$ 由 2 和 $[\![\mathbb{P}^1]\!]$ 生成，而 $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2$ 在 $\mathbb{P}^1$ 上的一个无不动点作用由彼此交换的对合 $x \mapsto -x$ 与 $x \mapsto x^{-1}$ 给出。

具体而言，这一结果使我们能够检测不动点：在一个簇上，任何使其配边类不属于 $I_p(r)$ 的 G-作用都必定有不动点。该定理还表明，不能使用其他（非等变）配边不变量来检测不动点。

注意，定理 1 意味着，若阿贝尔 p-群在一个具有与 p 互素的陈数的簇上作用，则必定固定一个点；这一结果此前已在 [Hau19, (1.1.2)] 中得到。值得注意的是，在这一特定结果中，阿贝尔 p-群 G 的结构（包括其秩 r）并未发挥作用。对于 $r = 1$, 定理 1 还重新得到了 [Hau19, (1.2.2)] 中证明的、涉及算术亏格的循环 p-群作用的不动点定理。因此，定理 1 可被视为在这两个极端特例之间进行插值。

最后请注意，定理 1 以无不动点的作用而非陈数为依据，为 Landweber 理想 $I_p(r)$ 提供了一个新的定义。

1.2. **不动点轨迹维数**。 除了检测不动点外，还可以尝试控制不动点轨迹的维数。为此，对于每个整数 d，我们用 $\Delta^d(G) \subset \mathbb{L}$ 表示 Lazard 环中由满足以下条件的簇类生成的子群：这些簇允许一个 G-作用，且其不动点轨迹的维数为 d。我们注意到，$\Delta^d(G)$ 包含所有允许一个 G-作用且不动点轨迹维数为 $\leq d$ 的簇的类（见 (8.2.2)）。因此，环境簇的配边类对不动点轨迹维数只能给出下界。

我们在 (8.2.7) 中证明，当 G 包含乘法群 $\mathbb{G}_m$ 时，$\Delta^d(G) = \mathbb{L}$。由于 $J(G) \subset \Delta^d(G)$，§1.1 中的讨论意味着，当 G 对某个素数 p 而言不是有限阿贝尔 p-群时，$\Delta^d(G) = \mathbb{L}$（如上所述，对于 G 可对角化）。

因此，为了完整呈现这一图景，我们假设 G 是一个有限阿贝尔 p群。下一个定理（证明见 (8.2.9)）根据 G的基数q 及其秩 r （即 G中的循环因子个数）确定群 $\Delta^d(G)$。对于 $G = \mathbb{Z}/2$，这一结论已在 [Hau23, (8.1.2)]中证明。

定理 2. 考虑由以下条件生成的子群滤过

$$F_q^0\,\mathbb{L} \subset \ldots \subset F_q^d\,\mathbb{L} \subset F_q^{d+1}\,\mathbb{L} \subset \ldots \subset \mathbb{L}$$

由以下条件生成：

(i) $(F_q^d\mathbb{L})\cdot(F_q^e\mathbb{L})\subset F_q^{d+e}\mathbb{L}$，*(ii)* $F_q^{\lfloor i/q\rfloor}\mathbb{L}$ 包含所有 i 维簇的类，对于 $i\geq 0$。则对每个 d，$\Delta^d(G)=F_q^d\mathbb{L}+I_p(r)$。

为说明这一滤过，$F_2^d\mathbb{L}$ 的一个典型元素是簇$P=\mathbb{P}^{n_1}\times\cdots\times\mathbb{P}^{n_s}$的类，其中 $d=\lfloor n_1/2\rfloor+\ldots+\lfloor n_s/2\rfloor$。簇 P确实带有一个$\mathbb{Z}/2$-作用，其不动点轨迹为 d 维，由如下对合给出：将每个射影空间的一半坐标乘以 -1。

在定理 2 中，直和项 $I_p(r)$ 来自定理 1，而第一个条件源于不动轨迹与乘积可交换这一事实。第二个条件的必要性可通过在表示配边生成元的簇上构造具有低维不动点轨迹的显式 G-作用来看出。定理 2 证明这些自然条件事实上是充分的。本文的大部分工作致力于证明这一结果。

回顾 Lazard 环 $\mathbb{L}$ 是多项式环，在每个维数上（非典范地）各有一个生成元，从而定理 2 的滤过可以显式确定。因此，通过考察与其配边类 $[\![X]\!]$相关联的多项式中出现的单项式，可以得到簇 X上一个 G-作用的不动点轨迹的下界。更精确地说，假设 G 是非平凡的（$r\geq 1$）。则商 $\mathbb{L}/I_p(r)$ 是一个多项式 $\mathbb{F}_p$-代数，在每个维数 $i\notin\{p-1,\ldots,p^{r-1}-1\}$上各有一个生成元。通过将次数 $\lfloor i/q\rfloor$ 赋予 i维生成元，我们得到该代数的一个分次（它依赖于 q，并且不同于通常按维数给出的分次）。定理 2 断言，不动点轨迹 X^G 的维数不小于 $[\![X]\!]$的类模 $I_p(r)$ 关于该分次的次数。

请注意，这个界只取决于环境簇 X，而不取决于具体的G作用，这与上一节的不动点定理的精神一致。此外，定理 2 断言，无法从由环境簇的配边类生成的子群中推导出关于不动点轨迹维数的其他条件。

下面用几个具体推论来说明定理 2。我们固定一个基数为 q、秩为 r 的有限阿贝尔p群 G，以及一个带有G作用的光滑射影簇 X。配边类中的某些单项式可以通过模 p 的陈数检测出来，由此得到以下推论。Kosniowski–Stong 在拓扑学中针对群 $G=(\mathbb{Z}/2)^r$ 在流形上的作用得到了相同的界（见 [KS78，第 314] 页及 [KS79，第 737] 页）。

推论3. 若 $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_m)$ 是一个分拆，且陈数 $c_\alpha(X)=$次 $c_\alpha(-T_X)$ 不能被 p 整除，则

$$\dim X^G\geq\left\lfloor\frac{\alpha_1}{q}\right\rfloor+\cdots+\left\lfloor\frac{\alpha_m}{q}\right\rfloor. \tag{3.a}$$

例如，我们得到：若 X 是 $\mathbb{P}^{n+1}$ 中的光滑超曲面，其次数与p互素，且 $n+2$ 可被 p 整除，则 $\dim X^G\geq\lfloor n/q\rfloor$。

请注意，该推论只涉及 p-群 G的基数 q ，而不涉及其秩 r。这进一步印证了上文的观察：就模 p 的陈数而言， G 的群结构无关紧要。

然而，环境簇在 Lazard 环中的配边类携带着实质上更多的 p-初信息。事实上，对于某些分拆$\alpha=(\alpha_1、\ldots\ldots、\alpha_m)$，相应的陈数总是能被某个 p 的幂整除；例如，光滑射影曲线的欧拉数总是偶数。定理 2 断言，我们可以将陈数除以 p 的该幂，再用所得结果模 p 来得到下界 (3.a)，只要分拆 α 不是某个包含 $r-1$ 个整数 $p-1、\ldots\ldots、p^{r-1}-1$的分拆的细化（见 (8.3.13)）。当 $r=1$时，这个最后的条件是空泛的；一般而言，例如在 $\alpha_m \geq p^{r-1}$时，该条件成立。

与长度为一的分拆 $\alpha=(n)$ 相关的陈数能够检测 Lazard 环中的不可分解性，由此得到以下推论。注意，当 $n+1$ 是 p 的幂时，这些数总是被 p 整除，因此推论 3 不适用。

推论 4. 如果 X 具有纯维数 $n \notin \{p-1,\ldots,p^{r-1}-1\}$，且其在分次环 $\mathbb{L}/p$ 中的类不可分解，那么 维数 $X^G \geq \lfloor n/q \rfloor$。

另一个极端情形是对环 $F_q^0\mathbb{L}$ 的描述：

推论 5. 在商环 $\mathbb{L}/I_p(r)$ 中，允许带有孤立不动点的 G-作用的簇类构成由维数为 $<q$ 的簇类生成的子环。

Tom Dieck 在 [tD72, Satz 3 (a)] 中证明了定理 2 的一个较弱的“乘法”变体（在特殊情形 $r=1$ 下，即 G 是一个循环 p-群时）。它并未准确描述子群 $F_q^d\mathbb{L}$ 的拓扑版本，而是描述由其生成的子环。这足以推出推论 4 的类似结论（见 [tD72, Satz 3 (b)]），但一般而言，它给出的维数下界远比定理 2 粗略：例如在推论 3 中，下界 $\lfloor\alpha_1/q\rfloor+\cdots+\lfloor\alpha_n/q\rfloor$ 会被弱化为 $\lfloor\alpha_1/q\rfloor$。我们尚未发现定理 2 在拓扑学中的类似结果，尽管这类结果很可能成立。

1.3. **注**。

1.3.1. 我们强调，对于可对角化群 G 的作用，上述结果描述了由环境簇的陈数线性导出的不动点轨迹维数的所有可能限制。具体而言，令 $\Delta_q^{-\infty}(G)=J(G)$，

$$\Delta^d(G)=\begin{cases} I_p \\ (r)，若\ d=-\infty，且\ G\ 是环面与秩为\ r\ 的阿贝尔\ p\text{-群的积；若 是阶为 } q、秩为\ r\ 的阿贝尔\text{-} \\ \\ \end{cases}$$

群，则 $F_q^p\mathbb{L}+I_p\ r$　　G　　p　　()；否则为

$\mathbb{L}$　　。

值得注意的是，所有这类限制最终都来自一些相对简单的例子，这些例子通过三种基本构造得到：

— 平凡作用，— 射影空间或其上的射影丛上的线性作用，— 将这些作用限制到射影空间中次数为 p 的超曲面上。

1.3.2. 上述结果本质上是“可加的”：所得条件适用于由环境簇的配边类生成的子群，而非该类本身。附录 A 探讨了这两类条件之间的差异，其中我们讨论群 $J(G)$ 和 $\Delta^d(G)$ 的有效版本，即 $\mathbb{L}$ 的子集 $J_{\mathrm{eff}}(G)$ 和 $\Delta^d_{\mathrm{eff}}(G)$。这些子集由允许具有不动点的 G-作用，且不动点轨迹维数为 d的簇类组成。对于所有有限型可对角化群 G，我们能够完全确定集合 $J_{\mathrm{eff}}(G)$；当 G 为有限阿贝尔群时，也能完全确定集合 $\Delta^d_{\mathrm{eff}}(G)$。这些集合与其非有效对应物基本一致，只有零维部分例外，而零维部分很容易确定。与此相反，我们观察到 $\Delta^0_{\mathrm{eff}}(\mathbb{G}_m)$ 与 $\Delta^0(\mathbb{G}_m)$ 有显著差异。

1.3.3. 如上所述，定理 2 中的特殊情形 $G = \mathbb{Z}/2$ 已在[Hau23]中讨论。该方法从根本上依赖于 $\mathbb{Z}/2$-作用（即对合）的特殊性质，甚至无法推广到p 为奇数时的素数阶循环情形 $G = \mathbb{Z}/p$ 。情形 $G = \mathbb{Z}/2$ 的一个关键特征是，该群在不动点轨迹的法丛上始终通过同一特征作用。例如，这一性质使得在[Vis07], 中对素数 2 给出了 Vishik 对称运算的几何构造，而其他素数直到很久以后才在 [Vis16] 中用完全不同的方法处理。

当 $|G| > 2$ 时，等变配边环的结构似乎要复杂得多；而且目前相当不清楚，[Hau23]中关于 $G = \mathbb{Z}/2$ 的结构结果对其他阿贝尔 p-群是否有直接的类似物，抑或这些结果纯粹是对合所特有的。

1.3.4. 我们的结果是通过将代数配边作为代数簇的上同调理论来得到的。该理论的系数环恰好是 Lazard 环，因此它是研究陈数的自然选择。其他上同调理论，如 Chow 群或 K-理论，也曾被用于证明不动点定理，并获得涉及陈数的相关结果 [Hau19, Hau20b, Hau23]。这些理论的系数环对于本文的目的而言太小了。例如，尽管K-理论适合研究循环 p-群 [Hau23, §2.2], 的作用，但对于秩更高的 p-群可能并不适用，拓扑学中的结果也表明了这一点 [BtD78]。相比之下，在我们对点的等变环进行归纳计算时，Lazard 环的一个关键性质是它不是诺特环。

1.3.5. 事实上，我们在特征不等于 p 的任意域上证明了全部结果。在这种情形下，有限阿贝尔群自然地被有限对角化群所取代，后者同构于群 μ_n 的乘积，而基域中单位根的存在与否不起任何作用。

在正特征域上工作，迫使我们使用 Voevodsky 的 MGL 配边谱，而不是 Levine–Morel 版本的代数配边。这使我们必须将所有配边环在特征之外局部化；只要不影响

Lazard 环中的 p-主性质，且素数 p 与特征不同即可。

基域情 形的特征为 p 的情形仍基本上悬而未决，这是由于存在若干障碍 ：——目前尚无性质良好的 p-主代数配边理论可用；——对于常值有限阿贝尔群 p-G，通常的等变局部化技术（集中定理）并不可用，因为这些群不是线性约化的；——分类空间 BG 是 $\mathbb{A}^1$-可缩的，因此点的等变 Chow/K-理论/配边环不会携带任何非等变信息。

1.4. 证明策略。 我们的出发点是将 Levine 和 Morel 的代数配边理论 [LM07] 应用于集中定理 [Hau25, (4.5.4)] 。该结果表明，对于带有群作用的簇，将等变配边环对等变配边环的某个乘法子集 S 局部化后，便可将该簇的等变配边与其不动点轨迹的等变配边相对应。

假设 G 是一个特征群为 p-群的可对角化群（本文将这类群称为可对角化 p-群 ）。我们在 §5 中计算了点的G-等变配边环 $\Omega_G(k)$。随后，我们描述局部化映射 $\Omega_G(k) \to S^{-1}\Omega_G(k)$ 的核；它是 $\Omega_G(k)$ 的一个理想，并且在遗忘态射 $\Omega_G(k) \to \Omega(k) = \mathbb{L}$ 下映到 Lazard 环中的理想 $I_p(r)$。因此，商环 $\mathbb{L}/I_p(r)$ 捕捉了集中定理的非等变迹。这意味着，是否存在不动点可由模 $I_p(r)$ 的配边类检测；这是定理 1 的一个包含关系。另一包含关系在 §3 中得到证明：我们构造了簇上的显式无不动点作用，其配边类生成理想 $I_p(r)$。

集中定理给出的结论要更为精确。在点的等变配边环的局部化$S^{-1}\Omega_G(k)$ 中，它允许我们用带有 G-作用的簇的不动点轨迹的法丛来表示该簇的类；为简便起见，我们将其称为不动点数据 。相应地，我们在 §4.2 中引入由 G 的非平凡特征分次的向量丛配边环 $\mathcal{M}$ ，不动点数据的类自然属于其中。

在 §3 中，我们继续为 Lazard 环的一组生成元赋予 G 作用，以尽可能减小不动点轨迹的维数。特别是，这使我们能够验证，定理 2 中的群 F^d 由一组簇类生成，而这些簇带有 G 作用，且其不动点轨迹的维数为 $\leq d$。

在 §6 中，我们描述了一种方法：从 $\Omega_G(k)$ 中的元素出发，构造环 $S^{-1}\Omega_G(k)$ 中的代数独立元素；这些元素在 $\mathbb{L}/I_p(r)$ 中的非等变像在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立（当 $r \geq 1$ 时）。

随后，我们在 §7.2 中定义一个 $\mathbb{L}$ 代数态射 $\mathcal{M} \to S^{-1}\Omega_G(k)$，它将不动点数据的类映射为簇的等变类。我们在 (7.2.15) 中证明，

该态射是单射；注意，其源是一个含有无穷多个变量的多项式代数，而其目标是一个幂级数代数的商的局部化，其中含有r 个变量。这个定理尤其意味着集中定理的某种逆命题： $\mathcal{M}$ 中不动点数据的类由簇的等变类决定。

我们证明，环 $\mathcal{M}$ 是代数的，且是由不动点数据的类以及 $r-1$ 个额外显式元素生成的子环上的代数扩张。事实上，只需使用 §3 中构造的显式作用的不动点数据即可。这一观察引出了单射定理的证明。

下一步是：对于给定的 $d \in \mathbb{N}$，考虑由维数为 $\leq d$ 的基空间上的分次向量丛的类在 $\mathcal{M}$ 中生成的子群 $\mathcal{M}^{\leq d}$，并将其视为环 $\mathcal{M}^{\leq 0}$ 上的模。作为这样的模，它是有限秩自由模。§3 中构造的、表示配边生成元的簇上的显式作用，使我们能够构造一个显式的簇族 $\mathcal{F}$，其上带有 G-作用，且不动点轨迹的维数为 $\leq d$。相应不动点数据的类构成 $\mathcal{M}^{\leq 0}$-模 $\mathcal{M}^{\leq d}$ 中的一个线性无关元素族；该族是极大的，因为其基数恰好等于该模的秩。

我们随后在 (7.3.13) 中证明： $\mathcal{M}$ 中不动点数据的类在 $\mathcal{M}^{\leq 0}$ 上的线性相关关系，蕴含相应簇的非等变类在由维数 $1, \dots, q-1$ 的元素生成的子环上、于 $\mathbb{L}/I_p(r)$ 中的线性相关关系。我们的显式簇在 $\mathcal{F}$ 中的非等变配边类，作为该子环上的模，生成 $\mathbb{L}/I_p(r)$ 的一个直和项，它恰好是定理 2 的群 $F_q^d\mathbb{L}$ 模 $I_p(r)$ 的像。综合这些事实，我们在 (7.4.1) 中推出如下结论：若一个簇带有 G-作用，且其在 Lazard 环中的非等变配边类不属于 $F_q^d\mathbb{L} + I_p(r)$，则其不动点数据在 $\mathcal{M}$ 中的类与我们的显式族 $\mathcal{F}$ 的不动点数据的类线性无关。由前述极大性，该类不能属于 $\mathcal{M}^{\leq d}$。这表明该簇的不动点轨迹的维数必须为$> d$，从而完成定理 2 的证明。

1.5. **论文结构**。 在 §2 中，我们固定记号，并回顾全文所用的已知事实。

在 §3 中，我们在类生成 Lazard 环的簇上，显式构造不动点轨迹维数较低的作用。我们还引入“q-滤过”，并在主定理的表述中用到它。

在 §4 中，我们回顾代数配边所需的概念，并引入分次向量丛的配边环 $\mathcal{M}$。

在 §5 中，当群 G 可对角化时，我们计算点的 G-等变配边环。

在 §6 中，我们从纯代数的角度研究该环。我们给出一种方法来构造其中的代数独立元素，并说明集中定理会丢失哪些非等变信息。

在 §7 中，我们结合 §§4–6 的结果，证明关于可对角化 p-群作用的主定理。

在 §8 中，我们通过陈述关于一般可对角化群的结果、给出以陈数表述的具体推论，并提供若干例子来作结。

在附录 A 中，我们讨论了有效性方面的问题，包括我们的主要结果的“非加性”版本。

在附录 B 中，为帮助读者浏览本文，我们列出了文中使用的符号，重点列出贯穿各节使用的符号，并附上参考文献和简要说明。

2. The Lazard ring

假设所有环都是交换的、含幺的且结合的。

本节固定记号，并回顾一些本文将要用到的众所周知的事实。

2.1. 代数 Hurewicz 态射。

2.1.1. 当 R 是一个分次（即 $\mathbb{Z}$-分次）环时，我们将 $R[[t]]$ 记作分次幂级数代数，它定义为分次 R-代数 $R[t]/t^m$ （$m \in \mathbb{N}$）的极限，其中 t是次数为 1 的齐次元素。因此，$R[[t]]$ 由形如 $\sum_{j\in\mathbb{N}} r_{i-j}t^j$ （$i \in \mathbb{Z}$）的幂级数加性生成，其中每个 $r_k \in R$ 都是次数为 $k \in \mathbb{Z}$ 的齐次元素（它是通常幂级数环的一个子集）。更一般地，我们考虑以 r 个变量 $R[[x_1, \dots, x_r]]$为变量的分次幂级数代数；或者，当 E是一个集合时，考虑以变量 X_e （$e \in E$）为变量的分次幂级数代数 $R[[E]]$，其中变量的次数均为 1。

2.1.2. 我们用 $\mathbb{L}$ 表示 Lazard 环，它定义为通用交换一维形式群律 [的系数环 5]Ada74, I, §5]。它是一个分次环；我们用 $\mathbb{L}^n$ 表示其次数为 $n \in \mathbb{Z}$ 的齐次分量，当 $n > 0$ 时该分量为零。

2.1.3. $\mathbb{L}$ 的形式群律记作

$$x\,[+]\,y \in \mathbb{L}[[x, y]]. \tag{2.1.3.a}$$

整数 $n \in \mathbb{Z}$ 的形式乘法记作

$$[n](t) \in \mathbb{L}[[t]]. \tag{2.1.3.b}$$

对于 $n \geq 0$，定义为令 $[0](t) = 0$，并递归地令 $[n+1](t) = ([n](t))\,[+]\,t$。我们用 $[-1](t)$ 表示形式逆元；对于 $n < 0$，令 $[n](t) = [-1]([-n](t))$.

幂级数 (2.1.3.a) 和 (2.1.3.b) 是 1 次齐次的。若 R 是一个关于由某些元素 a 构成的理想完全的 -代数, $b \in R$，我们用 $a\,[+]\,b$ 表示 $x\,[+]\,y$ 在由 $\mathbb{L}[[x, y]] \to R$ 给出的态射下的像$x \mapsto a$， $y \mapsto b$。类似地，若 R 关于由 s 生成的理想完全，我们用 $[n](s)$ 表示 $[n](t)$ 在由 $\mathbb{L}[[t]] \to R$ 给出的态射下的像 $t \mapsto s$。

2.1.4. 当 R 是一个分次环时，我们考虑分次多项式 R-代数

$$R[\mathbf{b}] = R[b_i, i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}],$$

其中 b_i 是次数为 $-i$的齐次元素。我们还令 $b_0 = 1$。幂级数

$$\exp(t) = \sum_{i\in\mathbb{N}} b_i t^{i+1} \in R[\mathbf{b}][[t]] \tag{2.1.4.a}$$

存在复合逆 $\exp^{-1}(t)$。我们考虑环同态

$$\mathbb{L} \to \mathbb{Z}[\mathbf{b}] \tag{2.1.4.b}$$

对形式群律进行分类

$$(x,y) \mapsto \exp(\exp^{-1}(x) + \exp^{-1}(y)). \tag{2.1.4.c}$$

此态射是单射 [Ada74, II, 定理 7.8]。

2.1.5. 对每个 $n \in \mathbb{N}$，由 (2.1.4.b) 诱导的态射 $\mathbb{L}[[t]] \to (\mathbb{Z}[\mathbf{b}])[[t]]$ 将幂级数 $[n](t)$ 映为 $\exp(n\exp^{-1}(t))$。

2.1.6. 分拆 α 是一个（可以为空的）整数序列 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，满足 $\alpha_1 \geq \cdots \geq \alpha_n > 0$。整数 $n \in \mathbb{N}$ 是分拆 α的长度，记作$\ell(\alpha) \in \mathbb{N}$。 α 的权重是整数 $|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$。分拆 α对应于单项式 $b_\alpha = b_{\alpha_1}\cdots b_{\alpha_n} \in \mathbb{Z}[\mathbf{b}]$。应用态射 (2.1.4.b) 并取 b_α 系数，得到一个阿贝尔群态射：

$$c_\alpha \colon \mathbb{L} \to \mathbb{Z}. \tag{2.1.6.a}$$

2.1.7. 若 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ 和 $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_m)$ 是分拆，我们用 $\alpha \cup \beta$ 表示将元组 $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \ldots, \beta_m)$ 重新排列后得到的分拆。

2.1.8. 若 α 是一个分拆，则对每个 $x, y \in \mathbb{L}$，有

$$c_\alpha(xy) = \sum_{\beta\cup\gamma=\alpha} c_\beta(x) c_\gamma(y).$$

2.1.9. 分次环中的一个元素若属于 I^2，则称其为可分解元，其中 I 是由非零次数的齐次元素生成的理想。不可分解的元素称为不可分解。

2.1.10. 在分次环 $\mathbb{Z}[\mathbf{b}]$，中，可分解元素的理想由元素 $b_i b_j$（其中 $i, j > 0$）生成。因此，对每个 $i \in \mathbb{N}$，映射 $c_{(i)} \colon \mathbb{L} \to \mathbb{Z}$ 在像属于 $\mathbb{Z}[\mathbf{b}]$ 中的可分解元素上为零。

2.1.11（参见 [Ada74, II, §7.8]）。 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathbb{L}$ 是多项式代数，在每个次数 $-i$上各有一个生成元，其中 $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。当且仅当对每个 i ，整数 $c_{(i)}(\ell_i)$生成群 $c_{(i)}(\mathbb{L}^{-i})$时，$i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ 的族 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 才是多项式生成元，或者等价地

$$c_{(i)}(\ell_i) = \begin{cases} \pm 1 & \text{if } i+1 \text{ is not a power of a prime number,} \\ \pm p & \text{if } i+1 \text{ is a power of the prime number } p. \end{cases} \tag{2.1.11.a}$$

给定一个分拆 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，我们记作 $\ell_\alpha = \ell_{\alpha_1}\cdots\ell_{\alpha_n}$。

2.1.12. 对 $d \in \mathbb{N}$，用 $\mathbb{L}(d)$ 表示 $\mathbb{L}$ 中由次数为 $\geq -d$ 的齐次元素生成的子环。若元素 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 构成 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathbb{L}$ 的一族多项式生成元，则 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathbb{L}(d)$ 是关于元素$\ell_1, \dots, \ell_d$ 的多项式代数。

2.1.13. 设 $y \in \mathbb{L}^{-n}$ 满足 $n > 0$。由 (2.1.11) 可知，y 在 $\mathbb{L}$ 中是可分解元，当且仅当 $c_{(n)}(y) = 0$。

2.1.14. 设 p 是一个素数。那么，族 $y_i \in \mathbb{L}^{-i}/p$ 是 $\mathbb{F}_p$-代数 $\mathbb{L}/p$ 的一组多项式生成元，当且仅当每个 y_i 都是分次环 $\mathbb{L}/p$ 中的不可分解元。

2.1.15. 设 $y \in \mathbb{L}^{-n}$ 满足 $n > 0$，并设 p 是一个素数。由 (2.1.11) 可知，元素 y 模 p 化约为 $\mathbb{L}/p$ 中的不可分解元，当且仅当整数 $c_{(n)}(y)$ 在 $n+1$ 不是 p 的幂时不能被 p 整除，而在 $n+1$ 是 p 的幂时不能被 p^2 整除（另见 [Hau20b, (7.3.2.iii)]）。

2.1.16. 设 α、β为分拆。记作 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$。当存在分拆 $\alpha^1, \dots, \alpha^m$，使得对所有 $i = 1, \dots, m$ 均有 $\beta_i = |\alpha^i|$ 且 $\alpha = \alpha^1 \cup \cdots \cup \alpha^m$时，我们称 α 是β的细化，并记作 $\alpha \succeq \beta$。

2.1.17. 若 $\alpha \succeq \beta$，则 $\ell(\alpha) \geq \ell(\beta)$，且仅当 $\alpha = \beta$时等号成立。

2.1.18. **引理**。设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 是 $\mathbb{L}$的一族多项式生成元。若 α、β 是满足 $c_\alpha(\ell_\beta) \neq 0$ 的分拆，则 $\alpha \succeq \beta$。

证明。 记作 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$。由 (2.1.8) 可得

$$c_\alpha(\ell_\beta) = c_\alpha(\ell_{\beta_1} \cdots \ell_{\beta_m}) = \sum_{\alpha^1 \cup \cdots \cup \alpha^m = \alpha} c_{\alpha^1}(\ell_{\beta_1}) \cdots c_{\alpha^m}(\ell_{\beta_m}).$$

因此，存在分拆 $\alpha^1, \dots, \alpha^m$，使得 $\alpha^1 \cup \cdots \cup \alpha^m = \alpha$ 且对于$i = 1, \dots, m$，$c_{\alpha^i}(\ell_{\beta_i}) \neq 0$。根据次数理由，对于 $i = 1, \dots, m$，必有 $|\alpha^i| = \beta_i$，这就证明了 $\alpha \succeq \beta$。□

2.2. **簇的配边类**。本节固定一个基域 k，并回顾如何用光滑射影k-簇的陈数来诠释 Lazard 环。

2.2.1.（例如参见 [Hau20b, (3.1.2), (3.1.4)]。）光滑 k-X 簇X 上的每个线丛 L 都有第一陈类 $c_1(L) \in \mathrm{CH}(X)$，其取值于 Chow 环中，并且是幂零的。对于每个光滑射影 k-簇 X，存在唯一的定义方式，使得映射 $P\colon K_0(X) \to \mathrm{CH}(X)[\mathrm{b}]$ 满足以下条件（这里 K_0 指 X上向量丛的格罗滕迪克群）：

(i) 对任意态射 $f\colon Y \to X$，$f^*P(E) = P(f^*E)$ 且 $E \in K_0(X)$，

(ii) $P(L) = \sum c_1(L)^i b_i$ 当 L 是 X 上线丛的类时，$i \in \mathbb{N}$ (iii) 对任意 E，$F \in K_0(X)$，$P(E+F) = P(E)P(F)$。

给定 $E \in K_0(X)$，康纳–弗洛伊德陈类 $c_\alpha(E) \in \mathrm{CH}(X)$（其中 α 遍历所有分拆）由以下公式定义

$$P(E) = \sum_\alpha c_\alpha(E) b_\alpha \in \mathrm{CH}(X)[\mathbf{b}]. \tag{2.2.1.a}$$

注意，$c_\alpha(E)$ 仅对有限多个分拆 α 非零。

2.2.2. **定义**。设 X 为一个光滑射影 k-簇。利用 (2.2.1)，对一个分拆α 可对应陈数

$$c_\alpha(X) = \deg c_\alpha(-T_X) \in \mathbb{Z}.$$

我们令

$$[\![X]\!] = \sum_\alpha c_\alpha(X) b_\alpha \in \mathbb{Z}[\mathbf{b}], \tag{2.2.2.a}$$

其中 α 取遍所有分拆。换言之，采用 (2.1.6.a) 的记号，对每个分拆 α，我们有$c_\alpha([\![X]\!]) = c_\alpha(X)$。

2.2.3. 由 (2.1.4) 可知，我们可以把 $\mathbb{L}$ 视为 $\mathbb{Z}[\mathbf{b}]$ 的一个分次子环。在 [Mer02，定理 8.2] 中已证明，$\mathbb{Z}[\mathbf{b}]$ 中由类 $[\![X]\!]$ 生成的子群（其中X 取遍光滑射影 k-簇）为 $\mathbb{L}$。

2.2.4. **引理**。设 X 是 $\mathbb{P}^{n+1}$中次数为 d 的光滑超曲面，且 $n \geq 1$。则

$$c_{(n)}(X) = d(d^n - n - 2).$$

证明。设 $i\colon X \to \mathbb{P}^{n+1}$ 是闭浸入。切丛 X在 $K_0(X)$中的类是 $-\mathcal{O}(d) + \mathcal{O}(1)^{\oplus(n+2)} - 1 \in K_0(\mathbb{P}^{n+1})$的限制。利用康纳–弗洛伊德陈类的可加性$c_{(n)}$，我们在周 Chow 群$_0(X)$中计算

$$c_{(n)}(-T_X) = i^*\big(c_1(\mathcal{O}(d))^n - (n+2)c_1(\mathcal{O}(1))\big) = (d^n - n - 2)\cdot i^* c_1(\mathcal{O}(1))^n.$$

利用投影公式以及$i_*(1) = d \cdot c_1(\mathcal{O}(1))$这一事实，取次数即可得出结论。□

2.2.5. **例**。设 X 是 $\mathbb{P}^{n+1}$中次数为 d 的光滑超曲面，且 $n \geq 1$。若 p 是素数，则由（2.1.15）和（2.2.4）可知，在以下任一假设下，类 $[\![X]\!]$在分次环 $\mathbb{L}/p$ 中不可分解：

(i) $n = p-1$，且 d 与 p互素；(ii) $n+1$ 是 p的幂，且 $d \in p\mathbb{Z} \smallsetminus p^2\mathbb{Z}$；(iii) $n = -2$ 模 p，且 d 与 p互素。

2.3. **Landweber 理想**。在本节中，我们固定一个素数 p。

2.3.1. **定义**。记 $I_p(\infty) \subset \mathbb{L}$ 为复合映射的核

$$\mathbb{L} \to \mathbb{Z}[\mathbf{b}] \to \mathbb{F}_p[\mathbf{b}],$$

其中第一个映射是 (2.1.4.b)，第二个映射由环同态 $\mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ 诱导。这是 $\mathbb{L}$ 的一个齐次理想。对于 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$，我们用 $I_p(n)$ 表示由 $I_p(\infty)$ 中次数为 $\geq 1 - p^{n-1}$ 的齐次元素生成的 $\mathbb{L}$ 的理想。因此，特别地，$I_p(1) = p\mathbb{L}$。我们还设 $I_p(0) = 0 \subset \mathbb{L}$。

2.3.2. 如 (2.2.2) 和 (2.2.3) 中所述，固定一个基域 k，每个光滑射影 k-簇都有一个类 $[\![X]\!] \in \mathbb{L}$。于是， $I_p(n)$ 是由类 $[\![X]\!]$ 生成的 $\mathbb{L}$ 的子群，其中 X 遍历维数为 $\leq p^{n-1}-1$ 且所有陈数都能被 p 整除的光滑射影 k-簇。

2.3.3. **定义**。考虑满足条件的元素 $u_m \in \mathbb{L}^{-m}$ for $m \in \mathbb{N}$

$$[p](t) = \sum_{m\in\mathbb{N}} u_m t^{m+1} \in \mathbb{L}[[t]].$$

对于 $n \in \mathbb{N}$，设 $v_n = u_{p^n-1} \in \mathbb{L}^{1-p^n}$。

2.3.4. 注意到 $v_0 = p$。

2.3.5. **引理**。对于每个 $m \in \mathbb{N}$，我们有 $u_m \in I_p(\infty)$。

证明。由 (2.1.5) 可知， $[p](t) \in \mathbb{L}[[t]]$ 在 $\mathbb{F}_p[\mathbf{b}][[t]]$ 中的像为零。 □

2.3.6. **引理**。对于 $n \geq 1$，元素 v_n 在 $\mathbb{L}/p$ 中具有不可分解像 .

证明。记 $D \subset \mathbb{Z}[\mathbf{b}]$ 为可分解元素（在 $\mathbb{Z}[\mathbf{b}]$ 中）所生成的理想。令 $\alpha = \exp^{-1}(t) \in \mathbb{L}[[t]]$ （见 (2.1.4.a)）。于是，在 $(\mathbb{Z}[\mathbf{b}]/D)[[t]]$ 中，对任意 $j > 0$

$$tb_j = \exp(\alpha)b_j = \alpha b_j + \sum_{i>0} \alpha^{i+1} b_i b_j = \alpha b_j, \tag{2.3.6.a}$$

由于 $b_i b_j \in D$。因此，记 $\delta\colon \mathbb{L} \to \mathbb{Z}[\mathbf{b}]/D$ 为自然态射（以及由其诱导的分次幂级数环之间的态射），我们在 $(\mathbb{Z}[\mathbf{b}]/D)[[t]]$ 中有

$$\begin{aligned}
\delta([p](t)) = \exp(p\alpha) &= \sum_{i\geq 0} p^{i+1}\alpha^{i+1} b_i && \text{by (2.1.5)},\\
&= p\sum_{i\geq 0} \alpha^{i+1} b_i + \sum_{i>0} p(p^i-1)\alpha^{i+1} b_i\\
&= pt + \sum_{i>0} p(p^i-1)\alpha^{i+1} b_i\\
&= pt + \sum_{i>0} p(p^i-1) t^{i+1} b_i && \text{by (2.3.6.a)}.
\end{aligned}$$

这意味着，对于每个 $i > 0$，我们有 $\delta(u_i) = p(p^i-1)b_i$，其中属于 $\mathbb{Z}[\mathbf{b}]/D$。由 (2.1.10)，可推出 $c_{(i)}(u_i) = p(p^i-1)$。取 $i = p^n - 1$，利用 (2.1.15) 即得结论。□

2.3.7. **引理**。设 $w_j \in \mathbb{L}^{1-p^j}$ *for* $j \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，并令 $w_0 = p$。对于每个 $j > 0$，假设 w_j 属于 $I_p(\infty)$，且在 $\mathbb{L}/p$ 中有不可分解像。

那么对于每个 $n \in \mathbb{N}$，理想 $I_p(n) \subset \mathbb{L}$ 由元素 w_0、…、w_{n-1} 生成。此外，此理想是素理想，且不包含 w_n。

证明。$n = 0$ 的情形显然，因为 $I_p(0) = 0$，且 $\mathbb{L}$ 是一个整环，其中 $p \neq 0$（$\mathbb{Z}$-代数 $\mathbb{L}$ 是多项式代数）。

因此我们假设 $n > 0$。令 $J(\infty)$ 为由元素 w_j（其中 $j \in \mathbb{N}$）生成的 $\mathbb{L}$ 的理想，并令 $J(n) \subset \mathbb{L}$ 为由以下元素中的齐次元素生成的理想

$J(\infty)$ 的次数 $\geq 1-p^{n-1}$。由于 $\mathbb{L}$ 没有非零的正次数齐次元素，因此 $J(n)$ 由 w_0，……，w_{n-1} 生成。

设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ for $i \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$ 是一些元素，它们模 p 后化为 $\mathbb{F}_p$-代数 $\mathbb{L}/p$的多项式生成元。由于元素 w_i 在 $\mathbb{L}/p$中不可分解，根据 (2.1.14)，我们可以假设对每个 $j \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，都有 $\ell_{p^j-1} = w_j$。于是，对于所有 $s \in \{0,\dots,n-1\}$，$\mathbb{L}/J(n)$（分别地，$\mathbb{L}/J(\infty)$）是以变量 ℓ_i for $i \neq p^s-1$ 为变量的多项式 $\mathbb{F}_p$-代数（分别地，$s \in \mathbb{N}$）。特别地，$\mathbb{L}$ 的理想 $J(n)$ 是素理想。

由假设，$J(\infty) \subset I_p(\infty)$，因此存在诱导态射 $\psi\colon \mathbb{L}/J(\infty) \to \mathbb{F}_p[\mathbf{b}],$。根据 (2.1.11.a) 和 (2.1.13)，当 $i+1$ 不是 p的幂时，该态射将 ℓ_i 映为 b_i 模可分解元素的一个非零倍数。因此，对于满足 $i+1$ 不是 p的幂的 $i \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，元素$\psi(\ell_i) \in \mathbb{F}_p[\mathbf{b}],$ 在 $\mathbb{F}_p$上代数独立。由上述对 $\mathbb{L}/J(\infty)$ 的描述可知，态射 ψ 是单射，这意味着 $J(\infty) = I_p(\infty)$。因此，$I_p(n) = J(n)$ 由 w_0，……，w_{n-1}生成。

最后，理想 $I_p(n)$ 由 $w_0 = p$ 以及次数为 k、满足 $1-p^n < k < 0$ 的齐次元素生成。因此，$I_p(n)$ 不含任何次数为 p^n-1 且在 $\mathbb{L}/p$ 中具有不可分解像的齐次元素，特别是它不含 w_n。□

2.3.8. **命题**。设 $n \in \mathbb{N}$。则 $\mathbb{L}$ 的理想 $I_p(n)$

(i) 是素理想；*(ii)* 由元素 v_i（其中 $i \in \{0,\dots,n-1\}$）生成；*(iii)* 不含 v_n；*(iv)* 含有 u_m（其中 $m < p^n-1$）。

证明。由 (2.3.5) 和 (2.3.6)，根据 (2.3.7) 可得结论 (i)、(ii)、(iii)。

现在，(ii) 意味着 $I_p(\infty)$ 由元素 v_i（其中 $i \in \mathbb{N}$）生成，因此由 (2.3.5) 可知，对于每个 $m \in \mathbb{N}$，元素 u_m 是元素 v_i 的 $\mathbb{L}$-线性组合。由于 $\mathbb{L}$ 不含正次数的非零齐次元素，这样的组合只涉及 $p^i-1 \leq m$ 对应的 v_i。结合 (ii)，即可推出 (iv)。□

2.3.9. 当 M 是一个 $\mathbb{L}$-模时，对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们记

$$M_{(n)} = M/(I_p(n)M) = M \otimes_{\mathbb{L}} (\mathbb{L}/I_p(n)).$$

我们通常对 M 的元素及其在商 $M_{(n)}$ 中的像使用相同的记号。

2.3.10. 设 $L = \mathbb{L}[c^{-1}]$，其中 $c \in \mathbb{Z}\smallsetminus p\mathbb{Z}$，且 $n \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$。由于 $p = v_0 \in I_p(n)$，可知态射 $\mathbb{L}_{(n)} \to L_{(n)}$ 是双射。

2.3.11. 对于 $n,d \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathbb{L}_{(n)}(d)$ 表示由次数为 $\geq -d$ 的齐次元素生成的 $\mathbb{L}_{(n)}$ 的子环。

2.3.12. 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑 $\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$ 的子集

$$N_{(n)} = \{i \in \mathbb{N}\smallsetminus\{0\} \text{ such that } i \neq p^m-1 \text{ for } m = 1,\dots,n-1\}.$$

注意 $N_{(0)} = N_{(1)} = \mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$。若 $d \in \mathbb{N}$，我们令

$$N_{(n)}(d) = \{i \in \{1,\dots,d\} \text{ such that } i \neq p^m-1 \text{ for } m = 1,\dots,n-1\}.$$

2.3.13. 设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 为 $\mathbb{L}$ 的一族多项式生成元。设 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。则由 (2.3.6) 可知，对每个 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$ 存在 $a_i \in \mathbb{L}$，使得$v_i + pa_i - \ell_{p^i-1}$ 在 $\mathbb{L}$ 中是可分解元。由 (2.3.8.ii)，将 ℓ_{p^i-1} 替换为 $v_i + pa_i$（它仍属于 $I_p(n)$），从而我们可以安排使得理想 $I_p(n)$ 由 p 以及元素 ℓ_{p^i-1}（对 $i = 1, \ldots\ldots, n-1$）生成。

2.3.14. **引理**。设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$（$i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$ 的）是环 $\mathbb{L}$ 的一族多项式生成元。设 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。则 $\mathbb{F}_p$-代数 $\mathbb{L}_{(n)}$（分别为 $\mathbb{L}_{(n)}(d)$ 当 $d \in \mathbb{N}$ 时）由元素 ℓ_j（当 $j \in N_{(n)}$ 时分别为 $j \in N_{(n)}(d)$）构成多项式代数。

证明。由 (2.3.13)，不妨设理想 $I_p(n)$ 由 p 和 ℓ_j（当 $j \notin N_{(n)}$ 时）生成。结论随即由 (2.1.12) 得出。□

2.3.15. **定义**。若对于每个 $n \in \mathbb{N}$，元素 $v_n \in \mathbb{L}$ 在 $M_{(n)}$ 中都是非零因子，则称 $\mathbb{L}$-模 M 为*Landweber* 精确（在素数 p 处）。

2.3.16. 由 (2.3.8.i) 和 (2.3.8.iii) 可知，$\mathbb{L}$-模 $\mathbb{L}$ 是 Landweber 精确的，因此该模的任意局部化也都是 Landweber 精确的。

3. Actions on cobordism generators

本节将显式构造带有“最小”不动点轨迹的作用的簇。这一构造有双重目的：除了直接证明我们关于不动点轨迹维数的下界是最优的之外，它还是我们在后文中获得这些下界的方法的关键。

字母 k 表示基域，我们通常仍将 k 写作 $\operatorname{Spec} k$。我们所说的 k-簇 是指基于 k 的拟射影概形。

3.1. **簇上的群作用**。我们固定一个基于 k 的代数群 G。关于 G-作用在 k-簇上的概念及相关基本概念，参见例如 [Mil17, §1.f]。特别地，簇 k 总是带有平凡的 G-作用。

3.1.1. 设 X 是一个带有 G-作用的 k-簇。不动点轨迹 *fixed locus* X^G 是一个闭子概形，由以下性质刻画：对于任意 k-簇 T，子集 $X^G(T) \subset X(T)$由那些相对于 T上的平凡 G-作用而言为 G-等变的态射 $T \to X$ 组成。其存在性例如在 [Mil17, §7.b]中得到证明。

当 $X^G = \varnothing$时，我们称 X 上的 G-作用是无不动点的 。

3.1.2. 设 X 是一个带有 G-作用的 k-簇。G-等变向量丛 是一个向量丛 $E \to X$，其 $\mathcal{O}_X$-模的截面配备了 G-等变结构，具体含义见 [DG11, I, §6.5]。该结构在 k-簇 E上诱导出一个 G-作用，使得态射 $E \to X$ 是 G-等变的；此外，该作用在纤维上是“线性的”，参见 [DG11, I, Remarque 6.5.3]。

3.1.3.**命题**。设 X 是一个光滑的 k-簇，并配备了一个可对角化群 G 的作用。那么 k-簇 X^G 是光滑的。此外，浸入 $X^G \to X$ 的法丛 N 自然地具有 G- 等变结构，且 $N^G = 0$。

证明。参见 [Hau20a, (3.5.2),(3.5.3)] 或 [Hau25, (1.4.7)]。□

3.1.4. 我们用 $\widehat{G}$ 表示 G的特征群。每个特征 $g \in G$ 对应一个 G-等变线丛，其定义在 k 上，记为 $\mathcal{L}_g$。对于带有平凡 G-作用的任意 k-簇，我们也用相同记号表示其拉回。

3.1.5. 假设代数群 G 可对角化。设 X 是一个 k-簇，且 G作用平凡；设 $E \to X$ 是一个 G-等变向量丛。存在唯一的G-等变向量丛 $E(g) \to X$，其 G作用平凡，对 $g \in G$，使得

$$E = \bigoplus_{g \in \widehat{G}} E(g) \otimes \mathcal{L}_g. \tag{3.1.5.a}$$

这是关于 G作用的权分解。注意， $E(g)$仅对有限多个特征 $g \in \widehat{G}$非零，且 $E^G = E(0)$。

3.2. **Landweber 理想的生成元**。 下一个命题是 Floyd 的一个结果在代数上的版本 [Flo71，拓扑学中的定理 2。1]

3.2.1.**命题**。 设 p 是一个不同于 k特征的素数。那么，对所有 $s \in \mathbb{N}$，存在纯维数为 $p^s - 1$的光滑射影 k-簇 Y_s，满足以下条件。

(i) 对每个 $n \in \mathbb{N}$，理想 $I_p(n)$ 由类 $[\![Y_s]\!]$ *for* $s \in \{0, \dots, n-1\}$ 生成。*(ii)* 设 $s \in \mathbb{N}$。设 G 是定义在 k 上的代数群，其特征群 G 至少包含 $p^s + 1$ 个阶整除 p 的元素。那么簇 Y_s 存在一个无不动点的 G-作用。

证明。 设 $s \in \mathbb{N}$。取子集 $C \subset G$，使得 $|C| = p^s + 1$，并且 $pC = 0$。采用 (3.1.4) 中的记号，令

$$V = \bigoplus_{c \in C} \mathcal{L}_c.$$

群 G 作用于射影空间 $\mathbb{P}(V)$，其中 $\mathbb{P}(V)^G$ 由 $c \in C$ 对应的有理点 $p^s + 1$ $\mathbb{P}(\mathcal{L}_c)$ 构成。对于每个 $c \in C$，投影 $V \to \mathcal{L}_c$ 诱导出线丛 $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}_c$ 在 $\mathbb{P}(V)$ 上的一个 G-等变截面 x_c。利用典范同构 $(\mathcal{L}_c)^{\otimes p} \simeq \mathcal{L}_{pc} = \mathcal{L}_0 \simeq 1$，我们构造一个 G-等变截面

$$\sum_{c \in C} (x_c)^{\otimes p}$$

上的 G-等变线丛 $\mathcal{O}(p)$。它与零截面横截相交，其零点轨迹是一个 G-不变闭子概形 $Y_s \subset \mathbb{P}(V)$，具有纯维数 $p^s - 1$，根据特征假设，它在 k 上光滑。此外， Y_s 不包含任何点 $\mathbb{P}(\mathcal{L}_c)$（其中 $c \in C$），因此 $(Y_s)^G = \varnothing$，从而证明了 (ii)。

由于簇 Y_s 是 $\mathbb{P}^{p^s}$ 中次数为 p 的超曲面，因此容易得出， Y_s 的每个陈数都能被 p 整除（因为 T_{Y_s} 是 $\mathbb{P}(V)$ 上一个虚向量丛的限制，所以它的每个康纳–弗洛伊德陈类都是 CH（$\mathbb{P}(V)$）中某个元素的拉回；由投影公式可知，其次数都能被 p 整除）。因此，由 (2.3.2) 可得 $[\![Y_s]\!] \in I_p(s+1)$。由于 Y_0 是 $\mathbb{P}^1$ 中次数为 p 的超曲面（具体而言， $Y_0 \simeq \mu_p$），因此

$[\![Y_0]\!] = p \in \mathbb{L}$。若 $s \geq 1$，则由 (2.2.5.ii) 可知，类 $[\![Y_s]\!]$ 在 $\mathbb{L}/p$ 中不可分解。由 (2.3.7) 即得所述结论。□

3.2.2. **例**。当 $G = (\mu_p)^{s+1}$ 时，或更一般地，当 G 是秩为 r 的可对角化 p-群，且 $r \geq s+1$ 时，（ii）中对 G 的条件成立（见下文（7.0.1））。

3.2.3. **注**。假设域 k 含有一个阶为 p 的单位根。

(i) 在（3.2.1）的证明中构造的簇 Y_0 是 p 个有理点的并集。(ii) 对于 $s = 1$，另一种可能的选择是 $Y_1 = \mathbb{P}^{p-1}$（见 [Hau19,（5.1.5）]）。

3.3. Milnor 超曲面。

本节将赋予一些簇代数群的作用，这些簇的类构成 Lazard 环的一组多项式生成元，而该代数群具有给定数量的特征；赋予作用的方式旨在使不动点轨迹的维数最小。

我们固定平凡特征的代数群 $G = \mu_q \times \mathbb{Z}/q$ 以及一个有限的特征集 $Q \subset \widehat{\quad}$

3.3.1. 设 $0 \leq m \leq n$ 为满足 $n \geq 1$的整数。考虑定义在 $\mathbb{P}^m$ 上的向量丛U，其定义为满射 $1^{\oplus n+1} \to 1^{\oplus m+1} \to \mathcal{O}(1)$ 的核，其中第一个映射通过忘记 $n-m$ 最后几个坐标给出，第二个映射是典范满射。我们定义簇 $H_{m,\,n} = \mathbb{P}_{\mathbb{P}^m}(U)$，它是一个维数为 $m+n-1$ 的光滑射影连通 k-簇。

包含映射 $U \subset 1^{\oplus n+1}$ 使得 $H_{m,\,n}$ 成为 $\mathbb{P}_{\mathbb{P}^m}(1^{\oplus n+1}) = \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$中的一个超曲面，即 *Milnor 超曲面*。注意，$H_{0,\,n} = \mathbb{P}^{n-1}$。

3.3.2. 设 $0 \leq m \leq n$ with $n \geq 1$。那么使用 (2.2.2) 中的记号，我们有（例如参见 [Hau23, (5.1.2),(5.1.5)]）

$$c_{(m+n-1)}(H_{m,n}) = \begin{cases} -n & \text{if } m = 0, \\ \binom{m+n}{m} & \text{if } m \geq 2. \end{cases}$$

3.3.3. **命题**。设 $0 \leq m \leq n$ *with* $n \geq 1$。k-簇 $H_{m,n}$ 具有一个 G-作用，其不动点轨迹的维数为 $d \leq \lfloor (m+n-1)/q \rfloor$。更确切地说

$$d = \begin{cases} \lfloor (m+n-1)/q \rfloor & \textit{if } m \textit{ and } n \textit{ are both divisible by } q, \\ \lfloor m/q \rfloor + \lfloor n/q \rfloor & \textit{otherwise}, \end{cases}$$

证明。基本思路是在每个射影空间 $\mathbb{P}^m, \mathbb{P}^n$ 中尽可能均匀地分配 G 的特征，以控制不动点轨迹的维数。

记 $m+1 = qa + r$，其中 $a,\ r \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leq r \leq q$。选取一个子集 $R \subset Q$，使得 $|R| = r$ 且 $0 \in R$。考虑 G-等变向量丛 k 上（我们采用 (3.1.4) 中的记号）

$$M = \Big(\bigoplus_{g \in R} (\mathcal{L}_g)^{\oplus a+1} \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{g \in Q \smallsetminus R} (\mathcal{L}_g)^{\oplus a} \Big),$$

因此，使用 (3.1.5) 中的记号

$$\operatorname{rank}(M(g)) = \begin{cases} a+1 & \text{if } g \in R, \\ a & \text{if } g \notin R. \end{cases} \tag{3.3.3.a}$$

$P = \mathbb{P}(M)$底下的概形是 $\mathbb{P}^m$。记作 $P_g = \mathbb{P}(M(g))$，我们有

$$P^G = \coprod_{g \in Q} P_g. \tag{3.3.3.b}$$

接下来，记 $n+1 = qb+s$ 为 b， $s \in \mathbb{N}$ 和 $1 \leq s \leq q$。取一个子集 $S \subset Q$，使得 $|S| = s$ 且 $0 \in S$。在 $r \leq s$的情形下，我们还要求 $R \subset S$。考虑 G上的等变向量丛 k

$$N = \Big(\bigoplus_{g \in S} (\mathcal{L}_g)^{\oplus b+1} \Big) \oplus \Big(\bigoplus_{g \in Q \smallsetminus S} (\mathcal{L}_g)^{\oplus b} \Big),$$

使得

$$\operatorname{rank}(N(g)) = \begin{cases} b+1 & \text{if } g \in S, \\ b & \text{if } g \notin S. \end{cases} \tag{3.3.3.c}$$

我们固定一个包含关系 $M \subset N$ （我们对 S 的选择使这成为可能；注意，若 $r > s$，则必有 $a+1 \leq b$）。我们仍用 M， N 表示 G等变向量丛 M， N 在任意带有 G作用的 k簇上的拉回。

令 U 为 P上的 G等变向量丛$N^\vee \to M^\vee \to \mathcal{O}(1)$之间复合满射的核，并设 $H = \mathbb{P}_P(U)$。 H底下的概形是$H_{m,\ n}$。于是由(3.3.3.b)可得

$$H^G = \big(\mathbb{P}_{P^G}(U|_{P^G})\big)^G = \coprod_{g \in Q} \big(\mathbb{P}_{P_g}(U|_{P_g})\big)^G = \coprod_{g,h \in Q} \mathbb{P}_{P_g}(U|_{P_g}(h)). \tag{3.3.3.d}$$

设 $g \in Q$。由于 G 通过特征 $-g$ 作用于 $\mathcal{O}(1)$ 在 P_g 上的限制，对于每个 $h \in Q$，我们有

$$\operatorname{rank}(U|_{P_g}(h)) = \begin{cases} \operatorname{rank}(N(h)) & \text{if } h \neq -g, \\ \operatorname{rank}(N(h)) - 1 & \text{if } h = -g. \end{cases} \tag{3.3.3.e}$$

我们首先考虑 $r > 1$ 或 $s > 1$ 的情形。由 (3.3.3.e) 和 (3.3.3.c)，对于任意 g， $h \in Q$，我们有

$$\operatorname{rank}(U|_{P_g}(h)) \leq \operatorname{rank}(N(h)) \leq b+1,$$

当 $h \neq -g$ 且 $h \in S$ 时取等号。另一方面，(3.3.3.a) 蕴含 $\dim P_g \leq a$，当 $g \in R$ 时取等号。因此由 (3.3.3.d) 可得 $\dim H^G \leq a+b$。由于 $r > 1$ 或$s > 1$，我们可以找到 $g \in R$ 和 $h \in S$ 使得 $h \neq -g$，从而

$$\dim H^G = a + b = \lfloor m/q \rfloor + \lfloor n/q \rfloor,$$

由此完成了这一情形下的证明。

现在反过来假设 $r=1$ 和 $s=1$（即 m 和 n 都能被 q 整除）。那么$R=S=\{0\}$。由 (3.3.3.a)，我们有 $\dim P_0=a$。由 (3.3.3.e) 和 (3.3.3.c)，我们有

$$\operatorname{rank}(U|_{P_0}(0))=\operatorname{rank}(N(0))-1=b.$$

对于 $h\in Q\smallsetminus\{0\}$，由 (3.3.3.e) 和 (3.3.3.c) 可得

$$\operatorname{rank}(U|_{P_0}(h))=\operatorname{rank}(N(h))=b.$$

因此，对于任意 $h\in Q$，有 $\dim \mathbb{P}_{P_0}(U|_{P_0}(h))=a+b-1$。

另一方面，对于 $g\in Q\smallsetminus\{0\}$，由 (3.3.3.a) 可得 $\dim P_g=a-1$；而对于任意$h\in Q$，由 (3.3.3.e) 和 (3.3.3.c) 可得，

$$\operatorname{rank}(U|_{P_g}(h))\leq\operatorname{rank}(N(h))\leq b+1.$$

因此，对于任意 g，$h\in Q$ 且 $g\neq 0$，有 $\dim \mathbb{P}_{P_g}(U|_{P_g}(h))\leq a+b-1$。于是，结合 (3.3.3.d)，我们得出

$$\dim H^G=a+b-1=\left\lfloor\frac{qa+qb-1}{q}\right\rfloor=\left\lfloor\frac{m+n-1}{q}\right\rfloor. \qquad \square$$

3.3.4. **命题**。对于 $i\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，存在纯维数为 i、带有 G-作用的光滑射影 k-簇 X_i^+，X_i^-，使得：

(i) 元素 $[\![X_i^+]\!]-[\![X_i^-]\!]$ 是环 $\mathbb{L}$ 的多项式生成元，*(ii)* 维数$(X_i^+)^G\leq\lfloor i/q\rfloor$，*(iii)* 维数$(X_i^-)^G\leq\lfloor i/q\rfloor$。

证明。设 $i\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$。一个初等计算表明，(2.1.11.a) 中的整数等于

$$\gcd_{1\leq j\leq\lfloor(i+1)/2\rfloor}\binom{i+1}{j}.$$

(3.3.2) 的公式表明，这个整数是整数 $c_{(i)}(H_{m,n})$（其中 $0\leq m\leq n$ 和 $m+n-1=i$ 满足 $m\neq 1$）的最大公因数，因此特别是它们的 $\mathbb{Z}$-线性组合。由 (2.1.11) 可知，环 $\mathbb{L}$ 是由元素 $\ell_i\in\mathbb{L}^{-i}$ 构成的多项式环，其中 $i\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，且这些元素是类$[\![H_{m,n}]\!]$（其中 $0\leq m\leq n$ 和 $m+n-1=i$）的 $\mathbb{Z}$-线性组合。将负系数和正系数分开，我们可以写成 $\ell_i=[\![X_i^+]\!]-[\![X_i^-]\!]$，其中 X_i^+, X_i^- 是簇 $H_{m,n}$ 的不交并，对某些满足 $0\leq m\leq n$ 和 $m+n-1=i$ 的 m,n 而言。由此证明了 (i)。其余结论由 (3.3.3) 得出。$\square$

3.4. The q-滤过。在本节中，我们固定一个整数 $q\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$。我们引入 Lazard 环的一个滤过，它将发挥重要作用。

3.4.1. **定义**。设 R 是一个分次环，使得对于 $i>0$，$R^i=0$。我们考虑由以下条件生成的滤过

$$F_q^0R\subset\cdots\subset F_q^iR\subset F_q^{i+1}R\subset\cdots\subset R$$

对于每个 i，$j\in\mathbb{N}$

(i) F_q^iR是 R的子群，(ii) 对于每个 j，都有 $R^{-j}\subset F_q^{\lfloor j/q\rfloor}R$,

(iii) $F_q^i R \cdot F_q^j R \subset F_q^{i+j} R$。

3.4.2. 若 $R \to R'$ 是满射分次环态射，则对于每个 d， $F_q^d R \to F_q^d R'$ 都是满射的。

3.4.3. 若 $S \subset R$ 是由次数为 0 的齐次元素构成的乘法封闭子集，则对于每个 d，态射 $S^{-1}(F_q^d R) \to F_q^d(S^{-1}R)$ 都是双射。

3.4.4. 注意， $F_q^0 R$ 是由次数为 $> -q$ 的齐次元素生成的 R 的子环。

3.4.5. 设 A 是一个环， $N \subset \mathbb{N} \setminus \{0\}$ 是一个子集。考虑多项式环 $A[T_i, i \in N]$。令变量 T_i 的次数为 i（分别为 $\lfloor i/q \rfloor$），并用 $\deg P$（分别用 $\deg_q P$）表示多项式 P 关于该分次的次数。

3.4.6. 由公式 $\lfloor a/q \rfloor + \lfloor b/q \rfloor \leq \lfloor (a+b)/q \rfloor$，我们推得，对于任意如 (3.4.5) 中的多项式 P，$\deg_q P \leq \lfloor (\deg P)/q \rfloor$。

3.4.7. **命题**。 设 n、 $d \in \mathbb{N}$，且令 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 为 $\mathbb{L}$ 的多项式生成元。将 ℓ_i 在 $\mathbb{L}_{(n)}$ 中的像赋予次数 $\lfloor i/q \rfloor$，其中 $i \in N_{(n)}$，这便在环 $\mathbb{L}_{(n)}$ 上诱导出一个（新的）分次；相对于此分次，由次数为 $\leq d$ 的齐次元素生成的子群为 $F_q^d \mathbb{L}_{(n)}$。

换言之，若 $n = 0$，则置 $A = \mathbb{Z}$；若 $n > 0$，则置 $A = \mathbb{F}_p$，我们有

$$F_q^d \mathbb{L}_{(n)} = \{P(\ell_1, \ldots) \text{ where } P \in A[T_i, i \in N_{(n)}] \text{ and } \deg_q P \leq d\}.$$

证明。 回忆 (2.3.14) 和 (2.3.10)， A-代数 $\mathbb{L}_{(n)}$ 是关于变量 ℓ_i（ $i \in N_{(n)}$）的多项式代数。由于对每个 $i \in N_{(n)}$ 都有 $\ell_i \in F_q^{\lfloor i/q \rfloor} \mathbb{L}_{(n)}$，且 $F_q^\bullet \mathbb{L}_{(n)}$ 是环滤过，因此任意多项式 $P \in A[T_i, i \in N_{(n)}]$ 都满足 $P(\ell_1, \ldots) \in F_q^{\deg_q P} \mathbb{L}_{(n)}$。

反过来，群 $F_q^d \mathbb{L}_{(n)}$ 由乘积 $y_1 \cdots y_k$ 生成，其中 $y_j \in \mathbb{L}_n^{-d_j}()$ 对每个 j都成立，且满足 $\lfloor d_1/q \rfloor + \cdots + \lfloor d_k/q \rfloor \leq d$。每个 y_j 都具有 $Q_j(\ell_1, \ldots)$ 的形式，其中 $Q_j \in A[T_i, i \in N_{(n)}]$ 是一个满足 $\deg Q_j = d_j$ 的多项式。因此 $y_1 \cdots y_k = Q(\ell_1, \ldots)$，其中 $Q = Q_1 \cdots Q_k$ 根据 (3.4.6) 满足，

$$\deg_q Q = \deg_q Q_1 + \cdots + \deg_q Q_k \leq \lfloor d_1/q \rfloor + \cdots + \lfloor d_k/q \rfloor \leq d. \qquad \square$$

3.4.8. **注**。 (3.4.7) 中 $\mathbb{L}_{(n)}$ 的分次取决于生成元 ℓ_i 的选择（当 $q > 1$时），而滤过 $F_q^\bullet \mathbb{L}_{(n)}$ 则不然。

3.4.9. **命题**。 设 G 是定义在 k上的代数群，且 q 是满足$1 \leq q \leq |\widehat{G}|$的整数。那么群 $F_q^d \mathbb{L}$ 由一组光滑射影 k-簇 X 的类生成，这些簇具有 G-作用，且满足 维数 $X^G \leq d$。

证明。 考虑 (3.3.4) 中的簇 X_i^+， X_i^-。由 (3.3.4.i)，我们可以在 (3.4.7) 中取 $\ell_i = [\![X_i^+]\!] - [\![X_i^-]\!]$。由此可得，群 $F_q^d \mathbb{L}$ 由类$[\![X]\!]$生成，其中 $X = Z_1 \times \cdots \times Z_m$ 满足 i_1，……，$i_m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$，且 $\lfloor i_1/q \rfloor + \cdots + \lfloor i_m/q \rfloor \leq d$，并且对每个 $j \in \{1, \ldots, m\}$都有 $Z_j \in \{X_{i_j}^+, X_{i_j}^-\}$。现在由 (3.3.4.ii) 和 (3.3.4.iii)

可知，每个 Z_j 都允许一个 G-作用，使得 $\dim(Z_j)^G \le \lfloor i_j/q \rfloor$，因此簇 X允许一个 G-作用，使得

$$\dim X^G = \dim(Z_1)^G + \cdots + \dim(Z_m)^G \le \lfloor i_1/q \rfloor + \cdots + \lfloor i_m/q \rfloor \le d. \qquad \square$$

4. 代数配边

4.1. 作为上同调理论的配边。 本文需要使用一种代数配边理论。当基域 k 的特征为零时，我们可以使用 Levine 和 Morel 在 [LM07] 中构造的理论 Ω。为了适用于正特征的基域，我们将使用由 Voevodsky 的动机谱 MGL（在 [Voe98] 中引入）表示的上同调理论的纯部分作为替代，并将 k 的特征指数求逆。本节简要回顾我们所需的相关事实。

4.1.1. 如 [Pan09, 2.9.7], 中所述，谱 MGL 诱导出一种“环上同调理论”，它具有典范定向。这使我们能够定义向量丛 $E \to X$ 的陈类 $c_i^{\mathrm{MGL}}(E) \in \mathrm{MGL}^{2i,\,i}(X)$，其中 X 是光滑的 k 簇；此外，对于光滑 k 簇之间的每个态射 $f\colon\ X \to Y$，还可以定义推前映射 $f_*^{\mathrm{MGL}}\colon \mathrm{MGL}^{2*,\,*}(X) \to \mathrm{MGL}^{2*,\,*}(Y)$，其中

$$\mathrm{MGL}^{2*,*}(X) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{MGL}^{2n,n}(X).$$

函子$\mathrm{MGL}^{2*,\,*}$ 满足 [LM07，定义 1.1.2]意义下的定向上同调理论公理（其中不包括局部化序列）。

4.1.2. 令 c 为 k的特征指数。当 X 是光滑 k-簇时，我们定义

$$\Omega(X) = \mathrm{MGL}^{2*,*}(X)[c^{-1}].$$

我们将 c_i^{MGL}和 f_*^{MGL}的局部化分别简记为 c_i 和 f_* .

4.1.3. **命题。** 态射 $\mathbb{L} \to \Omega(k)$ 是单射，并且将（*2.2.2*）中的类 $[\![X]\!] \in \mathbb{L}$映到类 $p_*(1) \in \Omega(k)$；对于每个结构态射为 $p\colon\ X \to k$的光滑射影 k-簇 X ，结论均成立。

证明。 考虑表示系数为 $\mathbb{Z}[\mathbf{b}]$的动机上同调的 Eilenberg–Mac Lane谱 HB。存在唯一的环谱态射 $\varphi\colon \mathrm{MGL} \to \mathrm{HB}$，它将每个线丛 L （定义在光滑k-簇 Y 上）的第一陈类 $c_1^{\mathrm{MGL}}(L) \in \mathrm{MGL}^{2,1}(Y)$映为（记号 exp 的定义见（2.1.4.a））

$$\exp(c_1^{\mathrm{CH}}(L)) \in \mathrm{CH}^*(Y)[\mathbf{b}] = \mathrm{HB}^{2*,*}(Y).$$

这给出了由谱 HB 诱导的环上同调理论的定向。其形式群律为 (2.1.4.c)，这意味着态射 (2.1.4.b) 分解为

$$\mathbb{L} \to \mathrm{MGL}^{2*,*}(k) \xrightarrow{\varphi_*} \mathrm{HB}^{2*,*}(k) = \mathbb{Z}[\mathbf{b}].$$

由于态射 (2.1.4.b) 是单射，因此 $\mathbb{L} \to \mathrm{MGL}^{2*,\,*}(k)$ 也是单射，由此可得所述的单射性。因此，只需验证对于任意光滑射影 k簇 X，类 $p^{\mathrm{HB}}{}_*\ \varphi(1)$ 在 $\mathrm{HB}^{*,\,*}(k) = \mathbb{Z}[\mathbf{b}]$ 中由公式 (2.2.2.a) 给出，其中 $p\colon\ X \to k$ 是

结构态射，而 $p^{\mathrm{HB},*}$ φ: $\mathrm{HB}^{2*,*}(X) \to \mathrm{HB}^{2*,*}(k)$ 表示与定向 φ 对应的推前。

为此，考虑表示系数为 $\mathbb{Z}$ 的动机上同调的 Eilenberg–Mac Lane谱 $\mathrm{H}\mathbb{Z}$，以及环谱的态射 $\mathrm{MGL} \to \mathrm{H}\mathbb{Z}$，它将 $c_1^{\mathrm{MGL}}(L)$ 映射到 $c_1^{\mathrm{CH}}(L)$，其中每个 L 都是光滑 k-簇上的线丛。相应的推前 $p_*: \mathrm{H}\mathbb{Z}^{2*,*}(X) \to \mathrm{H}\mathbb{Z}^{2*,*}(k)$ 是次数映射 $\deg$: 周 Chow 群$(X) \to \mathbb{Z}$。

接下来考虑复合 ψ: $\mathrm{MGL} \to \mathrm{H}\mathbb{Z} \to \mathrm{HB}$，其中第二个映射由包含 $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}[\mathrm{b}]$, 诱导，并记 $p^{\mathrm{HB},*}$ ψ: $\mathrm{HB}^{2*,*}(X) \to \mathrm{HB}^{2*,*}(k)$ 为与定向 ψ 相应的推前。由 [Pan09，注 2.16]（另见 [Mer02，§4]）可知

$$p_*^{\mathrm{HB},\varphi}(1) = p_*^{\mathrm{HB},\psi}(P(-T_X)),$$

where P 是（2.2.1）中定义的类。根据公式（2.2.1.a 得出结论). □

4.1.4. 记

$$L = \mathbb{L}[c^{-1}].$$

文献 [Hoy15 的命题 8.2] 证明，典范态射 $L \to \Omega(k)$ 是一个同构。

4.1.5.**命题**。设 X 是一个光滑的 k-簇。设 Z 是 X的一个闭子概形，U 是其开补。假设 k-簇 Z 是光滑的。记浸入为 i: $Z \to X$和 j: $U \to X$。则有一个 L-模的正合列

$$\Omega(Z) \xrightarrow{i_*} \Omega(X) \xrightarrow{j^*} \Omega(U) \to 0.$$

证明。带基点动机空间的余纤维序列

$$\Sigma_+^\infty U \to \Sigma_+^\infty X \to \Sigma^\infty \mathrm{Th}(N),$$

其中，$\mathrm{Th}(N)$ 表示法丛 N 到 i的 Thom空间；再结合由 MGL 的定向诱导的（非分次）同构 $\mathrm{MGL}^{2*,*}(\mathrm{Th}(N)) \simeq \mathrm{MGL}^{2*,*}(Z)$，可得一个正合列

$$\mathrm{MGL}^{2*,*}(Z) \xrightarrow{i_*} \mathrm{MGL}^{2*,*}(X) \xrightarrow{j^*} \mathrm{MGL}^{2*,*}(U) \to \mathrm{MGL}^{2*+1,*}(Z).$$

这里，对于一个 Y 光滑射影 k簇，我们记作

$$\mathrm{MGL}^{2*,*}(Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{MGL}^{2n,n}(Y) \quad \text{and} \quad \mathrm{MGL}^{2*+1,*}(Y) = \bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \mathrm{MGL}^{2n+1,n}(Y).$$

因此，最后只需验证，对于每个 $n \in \mathbb{Z}$

$$\mathrm{MGL}^{2n+1,n}(Z)[c^{-1}] = 0. \tag{4.1.5.a}$$

为此，我们使用强收敛的 Hopkins–Hoyois–Morel 谱序列 [Hoy15, (8.14)]，对于固定的 n,

$$L^q \otimes_{\mathbb{Z}} H^{p-q,n-q}(Z,\mathbb{Z}) \Rightarrow \mathrm{MGL}^{p+q,n}(Z)[c^{-1}]$$

其中 $H^{*,*}(-,\mathbb{Z})$ 指的是动机上同调。对于 $p+q = 2n+1$，我们有

$$H^{p-q,n-q}(Z,\mathbb{Z}) = H^{2(n-q)+1,n-q}(Z,\mathbb{Z}) = 0,$$

这可由与高阶 Chow 群的识别 [Voe02] 得出。因此，谱序列给出 (4.1.5.a)，证明完毕。□

4.2. **分次向量丛的上同调配边**。 本节中，我们固定域 k 上的一个可对角化群 G 。

4.2.1. 当 R 是一个环时，我们考虑变量$a_{i,\ g}$、$\widehat{\ }$中的多项式 R-代数 $R[\mathbf{a}]$ ，其中 $g \in G \smallsetminus \{0\}$ 和 $i \in \mathbb{N}$。

4.2.2. 对于每个 G-等变向量丛 $E \to X$，其中 X 是一个光滑的 k-簇，带有平凡的 G-作用，并且 $E^G = 0$，存在一个类 $Q(E) \in \Omega(X)[\mathbf{a}]$ ，它与拉回相容，并满足：

(i) 若 $0 \to E' \to E \to E'' \to 0$ 是 X 上的 G-等变向量丛的正合列，且 $E^G = 0$，则 $Q(E) = Q(E')Q(E'')$。$\widehat{\ }$(ii) 若 $L \to X$ 是带有平凡 G-作用的线丛，且 $g \in G \smallsetminus \{0\}$，则

$$Q(L \otimes \mathcal{L}_g) = \sum_{i \in \mathbb{N}} c_1(L)^i a_{i,g}.$$

这可借助分裂原理证明，类似于 (2.2.1)，并额外使用 (3.1.5.a) 以按特征论证，以及线丛的第一陈类是幂零的这一事实 [LM07，引理 1.1.3]。

4.2.3. **定义**。 回顾 c 是域 k的特征指数。我们令

$$\mathcal{M} = L[\mathbf{a}] = (\mathbb{L}[c^{-1}])[\mathbf{a}] = \Omega(k)[\mathbf{a}].$$

当 X 是具有平凡 G-作用的光滑射影 k-簇，且 $E \to X$ 是满足 $E^G = 0$ 的 G-等变向量丛时，我们定义一个类

$$[\![E \to X]\!] = p_*(Q(E)) \in \mathcal{M},$$

其中 $p\colon X \to k$ 是结构态射，而 $p_*\colon \Omega(X)[\mathbf{a}] \to L[\mathbf{a}] = \mathcal{M}$ 是由沿 p 的推前态射 $\Omega(X) \to \Omega(k) = L$ 诱导的映射。

$\widehat{\ }$4.2.4. **例**。 对每个 $g \in G \smallsetminus \{0\}$ ，我们有 $[\![\mathcal{L}_g \to k]\!] = a_{0,g}$。

4.2.5. 通过令 $a_{i,g}$ 的次数为 $-i$， L-代数 $\mathcal{M} = L[\mathbf{a}]$ 成为分次代数。注意，当 X 具有纯维数 d 时，类 $[\![E \to X]\!]$ 是次数为 $-d$ 的齐次元素。

对于 $d \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathcal{M}(d)$ 表示由次数为 $\geq -d$ 的齐次元素生成的 $\mathcal{M}$ 的子环。

4.2.6. 若 $G = 1$，则 $\mathcal{M} = L$ 是分次 L-代数。

$\widehat{\ }$4.2.7. 对于 $g \in G \smallsetminus \{0\}$ 和 $i \in \mathbb{N}$，我们记

$$p_{i,g} = [\![\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}_g \to \mathbb{P}^i]\!] \in \mathcal{M}, \tag{4.2.7.a}$$

其中 G 在 $\mathcal{O}(1)$ 上平凡作用。

4.2.8. **命题**。 L-代数 $\mathcal{M}$ 是关于元素 $p_{i,\ g}$ 的多项式，其中 $i \in \mathbb{N}$ 和$\frown g \in G \smallsetminus \{0\}$。

证明。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，令 $q_n \colon \mathbb{P}^n \to k$ 为结构态射。那么，对于每个 $i \in \mathbb{N}$ 和 $g \in \widehat{G \smallsetminus \{0\}}$

$$p_{i,g} = \sum_{j\in\mathbb{N}} (q_i)_*\big(c_1(\mathcal{O}(1))^j\big) a_{j,g} = \sum_{j=0}^{i} (q_{i-j})_*(1) a_{j,g} = \sum_{j=0}^{i} [\![\mathbb{P}^{i-j}]\!] a_{j,g},$$

换言之 $p_{i,\ g} = a_{i,\ g} + [\![\mathbb{P}^1]\!] a_{i-1,\ g} + \cdots + [\![\mathbb{P}^i]\!] a_{0,\ g}$。这意味着元素 $p_{i,\ g}$是 L-代数 $\mathcal{M}$ 的多项式生成元。□

4.2.9. 注。 由 (4.2.8) 可推知， $\mathbb{Z}[c^{-1}]$-模 $\mathcal{M}$ 由元素 $[\![E \to X]\!]$生成，其中 X 是一个具有平凡 G-作用的光滑射影 k-簇，而 $E \to X$ 是一个 G-等变向量丛，使得 $E^G = 0$。

4.2.10. **命题。** 设 $d \in \mathbb{N}$。设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$（$i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$）是 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathbb{L}$ 的一族多项式生成元。那么， $\mathbb{Z}[c^{-1}]$-代数 $\mathcal{M}(d)$ 是由以下元素生成的多项式代数

$$\ell_1, \dots, \ell_d, p_{0,g}, \dots, p_{d,g} \text{ for } g \in \widehat{G} \smallsetminus \{0\}.$$

证明。 由 (4.2.8) 可知， $\mathbb{Z}[c^{-1}]$-代数 $\mathcal{M}$ 是由元素 ℓ_n（其中 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$、$\widehat{\ }$ 和 p_i）以及 $_g$（其中 $i \in \mathbb{N}$ 和 $g \in \widehat{G \smallsetminus \{0\}}$）生成的多项式代数. 。由于 ℓ_n（分别地，$p_{i,\ g}$）的次数分别为 $-n$ 和 $-i$，结论得证。□

5. Cobordism of diagonalizable groups

本节计算点的 G-等变配边环 $\Omega_G(k)$，其中 G 是可对角化群。Landweber 在拓扑学中于 [Lan70], 做过类似的计算，这启发了本节中的一些论证。

We fix an element $c \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$, and write $L = \mathbb{L}[c^{-1}]$.

5.1. 代数预备知识。 我们首先确立代数结果 (5.1.5)，它将在 §5.2 中用于确定环 $\Omega_G(k)$。这是从 $\Omega_G(k)$ 计算 $\Omega^{G\times\mu_n}(k)$ 时所用的代数输入，使我们能够进行归纳。

这一结果关键地利用了如下事实：Lazard 环并非诺特环。这正是采用作为上同调理论的配边、而非采用 Chow 理论或 K-理论等具有诺特系数环的理论的代数原因。

5.1.1.**引理**([Lan70，引理 5])。 设 I 为L 的一个有限生成齐次理想，使得 $I \neq L$，并设 $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$。则 $[m](t) \neq 0$ 在 $L[[t]]/I$ 中。

证明。 理想 $I \cap \mathbb{Z}[c^{-1}] \subset \mathbb{Z}[c^{-1}]$ 是适当理想，因此包含于某个素数 $\ell \in \mathbb{N}$对应的理想 $\ell\mathbb{Z}[c^{-1}]$中。设 $s \in \mathbb{N}$ 满足： I 由次数为 $\geq -s$的齐次元素生成。于是， I 包含于由 ℓ 和 L中的次数为 $-1, \dots, -s$ 的齐次元素生成的理想 $J \subset L$ 中。注意，由 (2.1.11) 可知（每个次数 $< -s$上各有一个生成元）， $\mathbb{F}_\ell$-代数 L/J是多项式代数，因此理想 J 是素理想。用 J替换 I 后，我们还可以假设理想 I是素理想。

现在，若 $a,b\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，则在 $L[[t]]/I\simeq(L/I)[[t]]$ 中有 $[ab](t)=[a]([b](t))$。因此，若引理对 $m=a$ 和 $m=b$成立，则对 $m=ab$ 也成立（这里用到了 L/I 是整环这一事实）。此外，引理对 $m=-1$也成立，因为

$$[-1]\big([-1](t)\big)=t\neq 0\in(L/I)[[t]].$$

因此，我们只需假设 $m=p$ 是一个素数。由于 $[p](t)=0$ 属于 $(L/I)[[t]]$，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，都有 $v_n\in I$（见（2.3.3））。特别地，当 $p^n>s$ 时，元素 v_n 必须在 L 中是可分解元（在（2.1.9）的意义下）。由于 $p=v_0$ 属于 L 的真理想 I，数 c 不能被 p 整除。因此，$\mathbb{L}\to\mathbb{L}/p$ 经由 L 分解。由此可知，v_n 在 $\mathbb{L}/p$ 中是可分解元，这与（2.3.6）矛盾。□

5.1.2. 固定一个整数 $n\in\mathbb{Z}\smallsetminus\{0\}$。设 M 是一个有限表示的分次 L-模。对于 $d\in\mathbb{N}$，我们考虑分次 $L[[t]]$-模

$$M_d=M\otimes_L(L[[t]]/t^d),$$

以及分次 L-模 I_d 和 Q_{d+1}，它们构成如下正合列

$$0\to I_d\to M_d\xrightarrow{\cdot[n](t)}M_{d+1}\to Q_{d+1}\to 0. \tag{5.1.2.a}$$

5.1.3. **引理**。存在 $m\in\mathbb{N}$，使得对所有$d\in\mathbb{N}$，自然映射 $I_{d+m}\to I_d$ 均为零。特别地，

$$\lim_d I_d=0\quad and\quad \lim_d{}^1 I_d=0.$$

证明。由于在 $L[[t]]$ 中，$[n](t)=nt$ 模 t^2，且 n 是 L中的非零因子，对每个 $d\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，存在一个 L-模 T_d，使其构成如下 L-模正合列

$$0\to L[[t]]/t^d\xrightarrow{\cdot[n](t)}L[[t]]/t^{d+1}\to T_d\to 0.$$

注意，$I_d=\operatorname{Tor}_1^L(M,\ T_d)$。

首先考虑特殊情形 $M=L/\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 是 L的有限生成齐次素理想。由 (5.1.1) 可得，对于某个 $m\in\mathbb{N}\smallsetminus\{0\}$，且 a 在整环 $L/\mathfrak{p}$中非零，有 $[n](t)=at^m$ 模 t^{m+1} 属于 $(L/\mathfrak{p})[[t]]$。这意味着对所有 $d\in\mathbb{N}$，$I_d=t^{d+1-m}M_d$。于是 $I_{d+m}\to I_d$ 为零，正如所需。

让我们回到一般情形。对 $s\in\mathbb{N}$，记 $L(s)=\mathbb{L}(s)[c^{-1}]$（见 (2.3.11)）。我们断言，存在一个整数 $s\in\mathbb{N}$ 以及一个有限生成的分次 $L(s)$-模N，使得 $M=N\otimes_{L(s)}L$。事实上，我们将 M 写成一个分次 L-模态射 φ 的余核：$L^{\oplus a}\to L^{\oplus b}$，其中 $a,b\in\mathbb{N}$。这样的态射由一个系数属于 L 的 $(b\times a)$-矩阵给出；该矩阵的系数位于子环 $L(s)$ 中，对某个 $s\in\mathbb{N}$。由此得到分次 L-模之间的一个态射 ψ：$L(s)^{\oplus a}\to L(s)^{\oplus b}$，使得$\varphi=\psi\otimes_{L(s)}L$。令 $N=\operatorname{coker}\psi$，即证明了该断言。

现在，由于环 $L(s)$ 是诺特的，分次模 N 具有一个有限滤过，其逐次商的形式为 $L(s)/P$，其中 P 是 $L(s)$ 的一个齐次素理想（例如参见 [Bou06, IV, §3, 命题 2]）。由于 L 是定义在 $L(s)$ 上的多项式环，对于上述的 P，环 $(L(s)/P)\otimes_{L(s)}L\simeq L/(PL)$ 是定义在 $L(s)/P$ 上的多项式环，因此理想 PL 是 L 的素理想。由此，我们得到 M 的一个有限滤过，其子模均为有限表示，逐次商的形式为 $L/\mathfrak{p}$，其中 $\mathfrak{p}$ 是 L 的一个有限生成齐次素理想。

对该滤过的长度运用归纳法，我们可以假设有一个分次 L-模的正合列

$$0 \to M' \to M \to L/\mathfrak{p} \to 0$$

对于某个有限生成齐次素理想 $\mathfrak{p}$ of L，以及某个整数 r，使得对于所有 d，$\mathrm{Tor}_1^L(M', T_{d+r}) \to \mathrm{Tor}_1^L(M', T_d)$ 均为零。根据上文讨论的特殊情形，我们可以找到一个整数 s，使得对于所有 d，$\mathrm{Tor}_1^L(L/\mathfrak{p}, T_{d+s}) \to \mathrm{Tor}_1^L(L/\mathfrak{p}, T_d)$ 均为零。在具有正合行的交换图中

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Tor}_1^L(M', T_{d+r+s}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^L(M, T_{d+r+s}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^L(L/\mathfrak{p}, T_{d+r+s}) \\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow 0 \\
\mathrm{Tor}_1^L(M', T_{d+r}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^L(M, T_{d+r}) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^L(L/\mathfrak{p}, T_{d+r}) \\
0 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
\mathrm{Tor}_1^L(M', T_d) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^L(M, T_d) & \longrightarrow & \mathrm{Tor}_1^L(L/\mathfrak{p}, T_d)
\end{array}$$

因此中间的竖直复合映射为零，所以我们可以取 $m = r + s$ 来完成证明。□

5.1.4. 态射 $M_{d+1}/I_{d+1} \to M_d/I_d$ 是满射，因此 $\varprojlim_d M_d/I_d = 0$。因此，正合列 (5.1.2.a)

$$0 \to M_d/I_d \xrightarrow{\cdot[n](t)} M_{d+1} \to Q_{d+1} \to 0$$

给出一个正合列

$$0 \to \varprojlim_d M_d/I_d \xrightarrow{\cdot[n](t)} \varprojlim_d M_d \to \varprojlim_d Q_d \to 0$$

现在，根据正合列

$$0 \to I_d \to M_d \to M_d/I_d \to 0$$

对于 $d \in \mathbb{N}$，由 (5.1.3) 可知，态射 $\varprojlim_d M_d \to \varprojlim_d M_d/I_d$ 是双射。因此，我们有一个正合列

$$0 \to \varprojlim_d M_d \xrightarrow{\cdot[n](t)} \varprojlim_d M_d \to \varprojlim_d Q_d \to 0. \tag{5.1.4.a}$$

5.1.5. **命题**。设 $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。设 R 是一个分次 L-代数，且作为分次 L-模是有限表示的。那么我们有一个分次 L-模的正合列

$$0 \to R[[t]] \xrightarrow{\cdot[n](t)} R[[t]] \to \varprojlim_d \Big(R[[t]] / \big(t^d, [n](t)\big) \Big) \to 0.$$

证明。取 (5.1.4.a) 中的 $M = R$。□

5.2. **等变配边**。本节旨在计算环 $\Omega_G(k)$，其中 G 是有限型可对角化群。本节在基域 k 上进行，并设 $L = \mathbb{L}[c^{-1}]$，其中 c 是 k 的特征指数。

我们首先简要回顾基于 [HML13], 根据 [Tot99]的 Borel 构造定义的等变配边。固定一个基于 k的仿射代数群 G。

5.2.1. G 的良好表示系是由 $m \in \mathbb{N}$ 索引的一组三元组（V_m， U_m， W_m），其中

— $\cdots \subset V_m \subset V_{m+1} \subset \cdots$ 是基于 k的 G-等变向量子丛链，— 对每个 $m \in \mathbb{N}$， U_m 是 V_m 的 G-不变开子概形，— 对每个 $m \in \mathbb{N}$， $W_m \subset V_m$ 是一个 G-等变子丛，

满足以下条件：

(i) G在 U_m 上的作用是自由的，且 U_m/G 是光滑的 k簇；(ii) 我们有 $V_{m+1} = V_m \oplus W_m$；(iii) 子概形 $U_{m+1} \subset V_{m+1}$ 包含 $U_m \times W_m$；(iv) U_m 在 V_m 中的补集的余维是 $m \in \mathbb{N}$的严格递增函数。

5.2.2. 由 [Tot99, 注 1.4]可知，这样的系统总是存在的 s.

5.2.3. **定义**。给定 G的一个良好表示系（V_m, U_m, W_m），具有 G作用的光滑 k簇 X 的等变配边环定义为

$$\Omega_G(X) = \lim_m \Omega((X \times U_m)/G),$$

其中，极限是在分次环范畴中取得的。如 [HML13, §3.1.1]中所解释的（“无名引理”，其不需要假设 k 具有特征零），这个分次环不依赖于 G的良好表示系的选择。

由此得到一个函子 Ω_G，它从带有 G-作用的光滑 k-簇范畴映到分次 L-模范畴。此外，在理论 Ω_G 中，沿 G-等变射影态射存在推前，并且 G-等变向量丛具有取值于该理论的陈类（例如参见 [HML13, §4]）。

5.2.4. **定义**。设 R 是一个分次 $\mathbb{L}$-代数，且 H 是一个阿贝尔群。我们考虑变量 X_h（对应于 $h \in H$）上的分次幂级数代数 $R[[H]]$（见 (2.1.1)）。我们定义一个分次 R-代数 $\mathcal{S}_R(H) = R[[H]]/I$，其中 I 是由这些元素生成的齐次理想（我们使用 (2.1.3) 的记号）

$$X_{a+b} - (X_a \,[+]\, X_b) \quad \text{for } a, b \in H.$$

我们将证明如下结论：

5.2.5.**定理**。设 G 是定义在 k 上的有限型可对角化群，其特征$\widehat{}$群为 G。将 G 的特征映射为相应的 G-等变线丛在 k 上的第一陈类，由此诱导出分次 L-代数的一个同构

$$\mathcal{S}_L(\widehat{G}) \simeq \Omega_G(k).$$

注意，对于 $n \in \mathbb{N}$ 和阿贝尔群 A，B，我们有

$$\mathcal{S}_R(\mathbb{Z}/n) = R[[t]]/[n](t), \quad \mathcal{S}_R(A \times B) = \mathcal{S}_{\mathcal{S}_R(A)}(B).$$

因此 (5.2.5) 可以重新表述为：

5.2.6. **定理.** 设 q_1，……，$q_r \in \mathbb{N}$ 与 $G = \mu_{q_1} \times \cdots \times \mu_{q_r}$，其中我们已记 $\mu_0 = \mathbb{G}_m$。则将 t_i 映到 k 上与特征 $G \to \mu_{q_i} \subset \mathbb{G}_m$ 相伴的 G-等变线丛的第一陈类，便得到分次 L-代数的一个同构

$$L[[t_1, \dots, t_r]]/([q_1](t_1), \dots, [q_r](t_r)) \simeq \Omega_G(k).$$

证明. 这由对 r 的归纳法及下文 (5.2.7) 得出。 □

5.2.7. **引理.** 设 G' 为 k 上的仿射代数群，并设 $q \in \mathbb{N}$。设 $G = G' \times \mu_q$，并以 $g\colon G \to \mu_q \subset \mathbb{G}_m$ 表示所诱导的特征。假设存在 G' 的一个良好表示系 (V'_m, U'_m, W'_m)，使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，分次 L-模 $\Omega(U'_m/G)$ 是有限表示的。则

(i) 存在 G 的一个良好表示系 (V_m, U_m, W_m)，使得对每个 $m \in \mathbb{N}$，分次 L-模 $\Omega(U_m/G)$ 是有限表示的。*(ii)* 映射 $t \mapsto c_1(\mathcal{L}_g)$ 诱导分次 L-代数的一个同构

$$\Omega_{G'}(k)[[t]]/[q](t) \simeq \Omega_G(k).$$

证明。记 $C = \mathcal{L}_g$。令 $V_m = V'_m \oplus C^{\oplus m}$ 与 $U_m = U'_m \times (C^{\oplus m} \smallsetminus 0)$。设 $W_m = W'_m \oplus C \subset V_{m+1}$，其中 $C \subset C^{\oplus(m+1)}$ 是最后一个直和项的包含映射。则 (V_m, U_m, W_m) 是 G 的一个良好表示系。

记 $B_d = (C^{\oplus d} \smallsetminus 0)/\mu_q$ 与 $U_{m,d} = U'_m \times (C^{\oplus d} \smallsetminus 0)$。则

$$U_{m,d}/G = (U'_m/G') \times B_d. \tag{5.2.7.a}$$

此外 $U_{m,\ m} = U_m$ 对每个 m 均成立，因此

$$\lim_m \Omega(U_m/G) = \lim_m \lim_d \Omega(U_{m,d}/G). \tag{5.2.7.b}$$

簇 B_d 同构于线丛 $\mathcal{O}(q)$ 上零截面的开补（当 $q \neq 0$ 时），而当 $q = 0$ 时则同构于 $\mathbb{P}^{d-1}$。从现在起，我们假设 $q \neq 0$；情形 $q = 0$ 类似，但要简单得多，且本文余下部分不会用到。

考虑到 (5.2.7.a)，局部化序列 (4.1.5) 给出一个正合列，

$$\Omega((U'_m/G') \times \mathbb{P}^{d-1}) \to \Omega((U'_m/G') \times \mathcal{O}(q)) \to \Omega(U_{m,d}/G) \to 0$$

由同伦不变性，中间项可识别为 $\Omega((U'_m/G') \times \mathbb{P}^{d-1})$；在此识别下，左箭头变为乘以 $c_1(\mathcal{O}(q)) = [q](c_1(\mathcal{O}(1)))$。回想一下，射影丛定理 [Pan03，定理 3.9] 断言，我们有一个 $\Omega(U'_m/G')$-代数同构

$$\Omega(U'_m/G')[[t]]/t^d \xrightarrow{\sim} \Omega((U'_m/G') \times \mathbb{P}^{d-1}), \quad t \mapsto c_1(\mathcal{O}(1)).$$

现在， B_d 上的线丛 $((C^{\otimes d} \smallsetminus 0) \times C)/\mu_q$ 是 $\mathcal{O}(1)$ 在态射 $B_d \to \mathbb{P}^{d-1}$下的拉回。这对每个 $d \in \mathbb{N}$ 都给出一个正合列，

$$\Omega(U'_m/G')[[t]]/t^d \xrightarrow{\cdot[q](t)} \Omega(U'_m/G')[[t]]/t^d \to \Omega(U_{m,d}/G) \to 0 \tag{5.2.7.c}$$

其中 t 被映射到线丛的第一陈类

$$(U'_m/G') \times ((C^{\otimes d} \smallsetminus 0) \times C)/\mu_q = (U_{m,d} \times C)/G$$

在 $(U'_m/G') \times B_d = U_{m,d}/G$ 上。根据假设， L-模 $\Omega(U'_m/G')$ 是有限表示的，因此 $\Omega(U'_m/G')[[t]]/t^d$ 也是有限表示的，而上述正合列表明 $\Omega(U_{m,d}/G)$ 也具有相同性质。特别地， $\Omega(U_m/G) = \Omega(U_{m,m}/G)$ 是有限表示的，从而证明了 (i)。

由 (5.1.5)，序列 (5.2.7.c) 给出了一个 L-模的正合列

$$0 \to \Omega(U'_m/G')[[t]] \xrightarrow{\cdot[q](t)} \Omega(U'_m/G')[[t]] \to \lim_d \Omega(U_{m,d}/G) \to 0.$$

现在，由同伦不变性和局部化序列 (4.1.5)，(5.2.1) 的条件 (iii) 蕴含态射 $\Omega(U'_{m+1}/G') \to \Omega(U'_m/G')$ 是满射，因此 $\lim^1 \Omega(U'_m/G')[[t]] = 0$，故我们得到一个正合列 m

$$0 \to \lim_m \left(\Omega(U'_m/G')[[t]]\right) \xrightarrow{\cdot[q](t)} \lim_m \left(\Omega(U'_m/G')[[t]]\right) \to \lim_m \lim_d \Omega(U_{m,d}/G) \to 0,$$

其中 t 被映到 k上的 G-等变线丛 C 的第一陈类。由下文的 (5.2.7.b) 与 (5.2.8)，由此得到同构 (ii)。□

5.2.8.**引理**。 设 R_m 是分次 $\mathbb{L}$-代数的直接系。则态射

$$\left(\lim_m R_m\right)[[t]] \to \lim_m \left(R_m[[t]]\right)$$

是双射。

证明。当 B 是环时， B-模 $B[[t]]$ 同构于以 $\mathbb{N}$为指标的若干 B 的一个积。因此，该引理由乘积与极限可交换这一事实推出。□

6. Algebraic independence

这一纯粹代数的节受§5的几何计算启发，但在逻辑上独立于它。它将服务于两个目的：

— 描述执行集中定理所需的局部化会丢失哪些非等变信息。— 给出一种方法，用于构造可对角化 p-群的等变配边环中的代数独立元素，

归纳过程将在 §6.1 中介绍，其中包含大部分技术性论证。我们将在 §6.2 中利用这一过程，得出可直接应用于等变配边环的结论。

6.1. 素数幂的形式乘法。 设素数 p 及其 p 的幂 $q>1$ 固定。回顾我们在 (2.3.3) 中定义了元素 $v_n \in \mathbb{L}$，并在 (2.3.11) 中定义了环 $\mathbb{L}_{(n)}$。

6.1.1. **引理。** 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们在 $\mathbb{L}_{(n)}[[t]]$ 中有

$$[q](t) = (v_n)^{\frac{q^n-1}{p^n-1}} t^{q^n} \mod t^{q^n+1}.$$

证明。 设 $v = v_n$，并令 $q = p^a$，其中 $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。我们对 a 进行归纳。情形 $a = 1$ 由 (2.3.8.iv) 得出，并意味着存在 $y \in \mathbb{L}_{(n)}[[t]]$，使得

$$[p](t) = vt^{p^n} + t^{p^n+1} y \in \mathbb{L}_{(n)}[[t]]. \tag{6.1.1.a}$$

若 $a \geq 2$，则利用归纳法和 (6.1.1.a)，我们在 $\mathbb{L}_{(n)}[[t]]$ 中得到

$$\begin{aligned}
[p^a](t) &= [p^{a-1}]([p](t)) \\
&= v^{\frac{p^{n(a-1)}-1}{p^n-1}} (vt^{p^n} + t^{p^n+1} y)^{p^{n(a-1)}} \mod (vt^{p^n} + t^{p^n+1} y)^{p^{n(a-1)}+1} \\
&= v^{\frac{p^{na}-1}{p^n-1}} t^{p^{na}} \mod t^{p^{na}+1}.
\end{aligned}$$

□

6.1.2. 令 T 为由幂级数 $[m](t)$ 生成的 $\mathbb{L}[[t]]$ 的乘法子集，其中 $m \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$。

6.1.3. 我们考虑幂级数 $s = [q/p](t) \in \mathbb{L}[[t]]$。

6.1.4. **引理。** 设 $Q = \mathbb{L}[[t]]/[q](t)$。则态射 $Q[s^{-1}] \to T^{-1}Q$ 是一个同构。

证明。 将 $q = p^a$ 写成 $a \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。设 $m \in \mathbb{Z} \setminus q\mathbb{Z}$，并将 $m = p^b r$ 写成 $b, r \in \mathbb{N}$，其中 r 与 p 互素。注意到 $b < a$。取 $u, v \in \mathbb{Z}$ 使得 $ur + vp = 1$，并令 $w = up^{a-1-b}$。于是我们在 Q 中有

$$\begin{aligned}
[mw](t) = [up^{a-1}r](t) &= [p^{a-1} - vq](t) \\
&= \left([p^{a-1}](t)\right)[+]\left([-v]([q](t))\right) \\
&= [p^{a-1}](t) = s.
\end{aligned}$$

由于 $[mw](t) = [w]([m](t))$ 能被 $[m](t)$ 整除，因此 $[m](t)$ 在 $Q[s^{-1}]$ 中可逆，从而证明了该命题。 □

6.1.5. 根据 (2.3.8.iv)，存在唯一的幂级数 $\pi_n \in \mathbb{L}_{(n)}[[t]]$，使得 $[p](t) = t^{p^n}\pi_n$，此外还有 $\pi_n = v_n \bmod t$。利用 (6.1.3) 中的幂级数 s，定义幂级数

$$h_n = \pi_n(s) \in \mathbb{L}_{(n)}[[t]].$$

换言之，我们有

$$s^{p^n} h_n = [q](t) \in \mathbb{L}_{(n)}[[t]]. \tag{6.1.5.a}$$

我们记录如下：

$$h_n = v_n \mod t. \tag{6.1.5.b}$$

6.1.6. 设 R 是一个分次的 $\mathbb{L}$-代数。我们假设 R 作为一个 $\mathbb{L}$-模是 Landweber 精确的（见 (2.3.15)）。我们令

$$A = R[[t]]/[q](t).$$

采用 (2.3.9) 的记号，我们于是得到分次 $\mathbb{L}$-代数 $R_{(n)}, A_{(n)}$，其中 $n \in \mathbb{N}$。此外，对每个 $n \in \mathbb{N}$，我们考虑分次 $\mathbb{L}$-代数，

$$B_n = R_{(n)}[[t]]/h_n. \tag{6.1.6.a}$$

6.1.7. **引理.** 对于任意 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\bigcap_{k\in\mathbb{N}} t^k B_n = 0.$$

证明. 我们先注意到，对于每个 $k \geq 1$， h_n 都是 $R_{(n)}[[t]]/t^k$ 中的非零因子。事实上，对于 $k = 1$，这由 (6.1.5.b) 得出，因为根据 R 是 Landweber 精确的假设， v_n 是 $R_{(n)}$ 中的非零因子。假设 $k > 1$，并令 $a, b \in R_{(n)}[[t]]$ 满足 $h_n a = t^k b$。对 k 作归纳法，我们可以写成 $a = t^{k-1}a'$，其中 $a' \in R_{(n)}[[t]]$，于是 $h_n a' = tb$。由情形 $k = 1$，我们推得 $a' \in tR_{(n)}[[t]]$，最终得到 $a \in t^k R_{(n)}[[t]]$。这就证明了该断言。

现在令 $f \in R_{(n)}[[t]]$ 映射到 $\bigcap_{k\in\mathbb{N}} t^k B_n \subset B_n$。那么对于每个 $k \geq 1$，我们都可以找到$g_k \in R_{(n)}[[t]]$，使得 $f = g_k h_n$ 模 t^k。因此，对于所有 $k \geq 1$，都有 $g_{k+1}h_n = g_k h_n$ 模 t^k，由上述观察可知， $g_{k+1} = g_k$ 模 t^k。于是存在 $g \in R_{(n)}[[t]]$，使得对于所有 $k \geq 1$，都有 $g = g_k$ 模 t^k。那么 $f - gh_n \in \bigcap_{k\in\mathbb{N}} t^k(R_{(n)}[[t]]) = 0$，因此 f在 B_n中映射为零。□

6.1.8. **引理**。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，元素 v_n 在 B_n中是非零因子 .

证明。 假设对于某个 f， $g \in R_{(n)}[[t]]$， $v_n f = h_n g$ 属于 $R_{(n)}[[t]]$。那么 $h_n g = 0$ 属于$R_{(n+1)}[[t]]$。将 s^{p^n} 相乘，并利用 (6.1.5.a)，我们得到：

$$0 = [q](t) \cdot g \in R_{(n+1)}[[t]]. \tag{6.1.8.a}$$

根据 (6.1.1)， $[q](t)$ 的首项系数是 v_{n+1} 的幂，因此它是 $R_{(n+1)}$ 中的非零因子（因为 R 是 Landweber 精确的），这意味着幂级数 $[q](t)$ 是 $R_{(n+1)}[[t]]$ 中的非零因子。由 (6.1.8.a) 可得 $g = 0$ 属于 $R_{(n+1)}[[t]]$。因此，对某个 $g' \in R_{(n)}[[t]]$，有 $g = v_n g'$ 属于 $R_{(n)}[[t]]$，所以 $v_n f = v_n h_n g'$ 属于 $R_{(n)}[[t]]$。由于 v_n 是 $R_{(n)}$ 中的非零因子（因为 R 是 Landweber 精确的），我们可得 $f = h_n g'$ 属于 $R_{(n)}[[t]]$，于是 f 在 B_n 中的像为零。□

6.1.9. **引理**。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，元素 s 是 B_n 中的非零因子。

证明。 由于 $h_n = v_n$ 模 s 在 $\mathbb{L}_{(n)}[[t]]$中， v_n 在 B_n 中的像可被 s整除。因此结论由 (6.1.8) 得出。□

回顾一下， T 表示由幂级数 $[m](t)$ 生成的 $\mathbb{L}[[t]]$ 的乘法子集，其中 $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus q\mathbb{Z}$。

6.1.10. **命题**。 ***(i)*** $\mathbb{L}$-模 $T^{-1}A$ 是 ***Landweber*** 精确的。***(ii)*** 对于 $n \in \mathbb{N}$，态射 $A_{(n)} \to T^{-1}A_{(n)}$ 的核在复合映射 $A_{(n)} \xrightarrow{t\mapsto 0} R_{(n)} \to R_{(n+1)}$下映为零。

(iii) 对于 $n \in \mathbb{N}$，态射 $A_{(n)} \to T^{-1}A_{(n)}$ 的像同构于 B_n。

证明。令 $n \in \mathbb{N}$。自然态射 $A_{(n)} \to B_n$ 是满射，其核是由 h_n生成的理想 H 。由于 $s^{p^n}h_n = [q](t)$ 在 $A_{(n)}$中为零，态射$A_{(n)} \to B_n$ 诱导出同构 $A_{(n)}[s^{-1}] \simeq B_n[s^{-1}]$。由 (6.1.9) 可知 $B_n \to B_n[s^{-1}]$ 是单射，因此我们推出态射 $A_{(n)} \to A_{(n)}[s^{-1}]$ 的核为 H，其像同构于 B_n。根据 (6.1.5.b)，元素 h_n 在映射 $A_{(n)} \to R_{(n)}$下映为 v_n ，故其在 $R_{(n+1)}$中的像为零。因此， H 在 $R_{(n+1)}$中映为零。由于 $A_{(n)}[s^{-1}] \to T^{-1}A_{(n)}$ 是同构（见 (6.1.4)），我们得到 (ii) 和 (iii)。我们还推出 $T^{-1}A_{(n)} = (T^{-1}A)^{(n)}$ 同构于 $B_n[s^{-1}]$，因此 (6.1.8) 蕴含 (i)。□

6.1.11. **引理**。设 $n \in \mathbb{N}$，且设 $y_1, \ldots, y_m$ 是 $A_{(n)}$ 的元素，其在 $A_{(n)} \xrightarrow{t\mapsto 0} R_{(n)} \to R_{(n+1)}$ 下的像在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立。

(i) 若 $n \neq 0$，则 $y_1, \ldots, y_m, t^{-1} \in T^{-1}A_{(n)}$ 在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立。*(ii)* 若 $n = 0$，则 $y_1, \ldots, y_m \in T^{-1}A$ 在 $\mathbb{Z}$ 上代数独立。

证明。(i)：假设 $P \in \mathbb{F}_p[Y_1, \ldots, Y_m, T]$ 是一个非零多项式，使得 $P(y_1, \ldots, y_m, t^{-1}) = 0$ 属于 $T^{-1}A_{(n)}$。写作 $P = P_0 + \cdots + T^k P_k$，其中对每个 $i = 0, \ldots, k$，都有 $P_i \in \mathbb{F}_p[Y_1, \ldots, Y_m]$，并且 $P_k \neq 0$。于是 $P_k(y_1, \ldots, y_m) + \cdots + t^k P_0(y_1, \ldots, y_m)$ 属于 $A_{(n)} \to T^{-1}A_{(n)}$ 的核，因此根据 (6.1.10.ii)，在 $R_{(n+1)}$ 中映射为零。于是 $P_k(y_1, \ldots, y_m)$ 在 $R_{(n+1)}$ 中映射为零。代数独立这一假设随即推出 $P_k = 0$，矛盾。

(ii)：设 $P \in \mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_m]$ 是一个非零多项式，使得 $P(y_1, \ldots, y_m) = 0$ 属于 $T^{-1}A$。根据 (6.1.10.i)，元素 $p = v_0$ 是 $T^{-1}A$ 中的非零因子。因此，我们可以假设 P 在 $\mathbb{Z}[Y_1, \ldots, Y_m]$ 中不能被 p 整除。于是， $P(y_1, \ldots, y_m)$ 属于 $A \to T^{-1}A$ 的核，因此根据 (6.1.10.ii)，它在 $R_{(1)}$ 中映射为零。代数独立的假设进而意味着 P 的像在 $\mathbb{F}_p[Y_1, \ldots, Y_m]$ 中消失，这就产生了矛盾。□

6.2. **等变配边环**。设给定整数 $q_1, \ldots, q_r > 1$，它们都是同一个素数 p 的幂。令 $L = \mathbb{L}[c^{-1}]$，其中 $c \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$。

6.2.1. 对于每个 $j \in \{0, \ldots, r\}$，我们考虑分次 L-模

$$H_j = L[[t_1, \ldots, t_j]]/([q_1](t_1), \ldots, [q_j](t_j)).$$

Let S_j 为由以下元素生成的 $\mathbb{L}[[t_1, \ldots, t_j]]$ 的乘法子集

$$[m_1](t_1)\,[+]\cdots[+][m_j](t_j)$$

其中 $m_i \in \mathbb{Z}$，且整数 m_i 中至少有一个不能被 q_i 整除。

6.2.2. 对于 $j \in \{0, \ldots, r\}$，我们定义

$$C_j = \operatorname{im}\big((H_j)_{(r-j)} \to S_j^{-1}(H_j)_{(r-j)}\big).$$

6.2.3. 我们将在这一设定下使用 §6.1 的结果，因此让我们把这一联系明确表述出来。对每个 $j \in \{0, \ldots, r\}$，记 $R_j = S_j^{-1}H_j$。对 $j \geq 1$，我们令

$$A_j = S_{j-1}^{-1}H_j = R_{j-1}[[t_j]]/[q_j](t_j).$$

设 $T_j \subset \mathbb{L}[[t_j]]$ 是由幂级数 $[m](t_j)$（对 $m \in \mathbb{Z} \smallsetminus q_j\mathbb{Z}$）生成的乘法子集。当 $j \geq 1$ 时，我们便处于 §6.1 的情形，其中

$$q = q_j, R = R_{j-1}, A = A_j, t = t_j, T = T_j,$$

（除了 R_{j-1} 是 Landweber 精确这一事实外，这一点很快就会得到证明）。根据 (6.1.10.iii)，使用 (6.1.6.a) 中的记号，我们还有

$$B_{r-j} = \operatorname{im}\left(S_{j-1}^{-1}(H_j)_{(r-j)} \to S_j^{-1}(H_j)_{(r-j)}\right),$$

因此

$$C_j \subset S_{j-1}^{-1}C_j = B_{r-j} \subset S_j^{-1}C_j = S_j^{-1}(H_j)_{(r-j)}. \tag{6.2.3.a}$$

6.2.4. **引理**。 ***(i)*** 对每个 $j \in \{0, \dots, r\}$， $\mathbb{L}$-模 $S_j^{-1}H_j$ 都是 ***Landweber*** 精确的。

(ii) 对每个 $j \in \{1, \dots, r\}$ 和 $n \in \mathbb{N}$，由 $t_j \mapsto 0$ 给出的态射 $H_j \to H_{j-1}$ 可下降到 $C_j \to C_{j-1}$。 ***(iii)*** 设 $j \in \{1, \dots, r\}$ 和 $n \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。假设 $y_1, \dots, y_m \in S_{j-1}^{-1}(H_j)^{(n)}$ 在 $S_{j-1}^{-1}(H_{j-1})^{(n+1)}$ 中映为在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立的元素。那么

$$y_1, \dots, y_m, t_j^{-1} \in S_j^{-1}(H_j)_{(n)}$$

在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立。

(iv) 设 $j \in \{1, \dots, r\}$。假设 $y_1, \dots\dots, y_m \in S_{j-1}^{-1}H_j$ 在 $S_{j-1}^{-1}(H_{j-1})^{(1)}$ 中映射到 $\mathbb{F}_p$ 上的代数独立元素。则

$$y_1, \dots, y_m \in S_j^{-1}H_j$$

在 $\mathbb{Z}$ 上代数独立。

证明。 采用 (6.2.3) 的记号，我们断言态射 $T_j^{-1}A_j \to R_j$ 是双射。为看出这一点，设 $m_1, \dots\dots, m_j \in \mathbb{Z}$ 使得对某个 $i \in \{1, \dots, j\}$ 有 $m_i \notin q_i\mathbb{Z}$，并考虑 $R_{j-1}[[t_j]]$ 中的元素 $a = [m_1](t_1) [+] \cdots [+] [m_{j-1}](t_{j-1})$ 与 $b = [m_j](t_j)$。为确立该断言，我们证明 $a\,[+]\,b$ 在 $T_j^{-1}A_j$ 中可逆。

首先假设存在 $i \in \{1, \dots, j-1\}$，使得 m_i 不能被 q_i 整除。存在一个齐次幂级数 $f \in R_{j-1}[[t]]$，使得

$$a\,[+]\,b = a + bf(b) \in R_{j-1}[[t_j]].$$

由于 b 能被 t_j 整除，且 a 在 R_{j-1} 中可逆，因此 $a\,[+]\,b$ 在环 $R_{j-1}[[t_j]]$ 中可逆，其在商 A_j 中的像也可逆。

如果现在反过来，对每个 $i \in \{1, \dots, j-1\}$， m_i 都能被 q_i 整除，那么 $a = 0$ 属于 R_{j-1}，因此 $a\,[+]\,b = b$。由于 m_j 不能被 q_j 整除，元素 b 在 $T_j^{-1}A_j$ 中可逆。我们已经证明了这一断言。

(i)：我们对 j 使用归纳法。情形 $j = 0$ 由 (2.3.16) 得出，因为$S_0^{-1}H_0 = L$。当 $j \geq 1$ 时，我们刚刚已经看到 $R_j \simeq T_j^{-1}A_j$。因此，由归纳假设和 (6.1.10.i) 可得 (i)。

(ii)：由 (6.1.10.ii) 和 (6.1.10.iii) 可知，复合态射

$$(A_j)_{(r-j)} \xrightarrow{t_j \mapsto 0} (R_{j-1})_{(r-j)} \to (R_{j-1})_{(r+1-j)}$$

经过子环分解

$$B_{r-j} = \operatorname{im}\big((A_j)_{(r-j)} \to T_j^{-1}(A_j)_{(r-j)} = (R_j)_{(r-j)}\big).$$

因此我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccccc} H_j & \longrightarrow & (H_j)_{(r-j)} & \longrightarrow & (A_j)_{(r-j)} & \longrightarrow & B_{r-j} \hookrightarrow (R_j)_{(r-j)} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ H_{j-1} & \longrightarrow & (H_{j-1})_{(r-j)} & \longrightarrow & (R_{j-1})_{(r-j)} & \longrightarrow & (R_{j-1})_{(r+1-j)} \end{array}$$

因此，上方水平复合的像（即 C_j）被映射到下方水平复合的像（即 C_{j-1}）中。

(iii) 和 (iv)：由 (6.1.11) 可得。 □

6.2.5. 考虑环同态

$$\varepsilon\colon H_r \to H_0 = L, \quad t_i \mapsto 0 \quad \text{for all } i = 1, \dots, r. \tag{6.2.5.a}$$

6.2.6. **命题**。 $H_r \to S_r^{-1}H_r$ 的核在 ε 下映射到 $I_p(r)L$ 。

证明。 由 (6.2.4.ii) 对 $j \in \{0, \dots, r\}$ 作归纳可知，复合态射 $H_j \to L \to L_{(r)}$ 经由 C_j 分解。对于 $j = r$ ，这正是该命题。□

7. 对角化 p-群

本节将确立本文的主要结果。我们先在 §7.1 描述允许无不动点作用的簇的配边类；这是通过结合迄今得到的结果与集中定理来实现的。

接着，我们在 §7.2 证明“单射定理”（7.2.15），该定理与集中定理相辅相成，用于描述簇的等变配边类与其不动点数据之间的关系。

在 §7.3，我们说明如何将非等变配边环中的线性相关关系提升到等变配边环中。随后在 §7.4 运用这一方法，证明关于不动点轨迹维数的主定理。

7.0.1. 设 p 为素数。域 k 上的有限对角化 p群是指这样的可对角化^群：其定义在 k 上，且 $|G|$ 是 p 的一个（有限）次幂。 G 的秩是阿贝尔群 G的生成元的最小^数。因此，当且仅当 G 同构于 $\mu_{q_1} \times \cdots \times \mu_{q_r}$ 时， G 是秩为 r 的有限对角化群，其中每个 q_i 都是 p 的非平凡次幂。

现在固定本节所需的背景。设 p 为不同于域 k 的^特征的素数。我们固定域 k 上的有限对角化 p-群 G ，令 $q = |G|$，并设 r 为 G 的秩。

7.0.2. 我们考虑由类 $c_1(\mathcal{L}_g)$^for $g \in G \smallsetminus \{0\}$ 生成的乘法子集 $S \subset \Omega_G(k)$。

7.0.3. 我们沿用 §6.2 中关于 $L = \mathbb{L}[c^{-1}] = \Omega(k)$ 的记号，其中 c 是 k 的指数^特征。我们固定 r 个特征 $g_1, \dots, g_r \in G$，它们诱导出一个同构$G \simeq \mu_{q_1} \times \cdots \times \mu_{q_r}$，其中每个 q_i 都是 p 的非平凡幂。我们在 (5.2.6) 中已经看到， $t_i \mapsto c_1(\mathcal{L}_{g_i})$ 诱导出一个同构

$$H_r = L[[t_1, \dots, t_j]]/([q_1](t_1), \dots, [q_j](t_j)) \simeq \Omega_G(k)$$

在此同构下，子集 $S_r \subset H_r$ 被映射到 $S \subset\Omega_G(k)$。我们通常会隐式地作此识别，例如将 $t_i \in\Omega_G(k)$记作 $c_1(\mathcal{L}_{g_i})$。

7.1. **无不动点作用**。

7.1.1. 当 X 是一个带有 G作用的光滑射影 k-簇时，我们考虑 $\Omega_G(k)$中的元素

$$[\![X]\!]_G = p_*^G(1) \quad \text{and} \quad [\![u]\!]_G = p_*^G(u) \text{ for } u \in \Omega_G(X),$$

其中 $p_*^G\colon \Omega_G(X) \to \Omega_G(k)$ 是沿结构态射 $p\colon X \to k$ 的等变推前映射。我们对它们在 $S^{-1}\Omega_G(k)$中的像也使用相同的记号。

7.1.2. 设 X 为一个带有 G作用的光滑射影 k-簇。由 (4.1.3) 可知，在自然态射 $\Omega_G(k) \to \Omega(k)$ 下，类 $[\![X]\!]_G$ 的像与 (2.2.2) 中的类 $[\![X]\!] \in \mathbb{L}$ 在映射 $\mathbb{L} \to\Omega(k)$ 下的像一致。

7.1.3.**定理**。 设 X 是一个带有 G作用的光滑射影 k簇，且满足$X^G = \varnothing$。则类 $[\![X]\!] \in \mathbb{L}$（见 *(2.2.2)*）属于 $I_p(r)$。

证明。 不妨设 G 非平凡，即 $r \geq 1$。集中定理[Hau25, (4.5.4)] 断言

$$S^{-1}\Omega_G(X) \simeq S^{-1}\Omega_G(X^G).$$

由于 $\Omega_G(X^G) =\Omega_G(\varnothing) = 0$，我们推得 $S^{-1}\Omega_G(X) = 0$。这意味着 $[\![X]\!]_G$在 $S^{-1}\Omega_G(k)$中消失。结合 (2.3.10) 和 (7.1.2)，利用 (6.2.6) 得出结论。□

7.1.4. **注**。 若 X 有一个与 p互素的陈数，则由 (2.3.2) 可得 $[\![X]\!] \notin I_p(r)$。因此， X 上的任何 G作用都必须固定一个点；由此我们重新得到不动点定理[Hau19, (1.1.2)]。

7.1.5. **注**。 我们已经看到，(3.2.1) 中的簇 Y_s 对于 $s = 0, \dots, r-1$ 都存在无不动点的 G 作用。另一方面，当 $s \geq r$ 时，它们不存在这样的作用。事实上，根据 (2.3.8)，对每个 $n \in \mathbb{N}$，都有 $I_p(n) \neq I_p(n+1)$；而 (3.2.1) 蕴含 $I_p(n+1)$ 由 $[\![Y_{n+1}]\!]$ 和 $I_p(n)$ 生成。因此，对所有 $s \geq r$，都有 $[\![Y_s]\!] \notin I_p(r)$，故结论由 (7.1.3) 得出。

注意， Y_s 的每个陈数都能被 p整除，因此（7.1.4）不适用于 $X = Y_s$。

7.2. **单射定理**。

7.2.1. 设 X 是一个光滑的 k-簇，带有一个 G-作用，并且 $p\colon\ E \to X$ 是一个 G-等变向量丛。记 $s\colon\ X \to E$ 为其零截面。 E 的欧拉类定义为

$$e(E) = (p^*)^{-1} \circ s_*(1) \in \Omega_G(X).$$

注意，当 E 是线丛时， $e(E) = c_1(E)$。

7.2.2. 若 $0 \to E_1 \to E_2 \to E_3 \to 0$ 是 G-等变向量丛的正合列，且这些向量丛定义在 X 上，则 $e(E_2) = e(E_1)e(E_3)$。这由该陈述的非等变版本推出，而后者本身是横截性公理 [Hau20b, (2.1.3.v)]的推论（例如参见 [EKM08, 命题 53.1]的证明）。

7.2.3. 设 $E \to X$ 是一个 G-等变向量丛，其中 X 是一个光滑的 k-簇，且带有平凡的 G-作用。若 $E^G = 0$，则 [Hau25, (4.5.6)] 证明了类 $e(E)$ 在 $S^{-1}\Omega_G(X)$ 中变为可逆。我们将其逆元记为 $e(-E)$。

7.2.4.**命题**。 存在一个 L-代数态射

$$\mathcal{M} \to S^{-1}\Omega_G(k), \qquad [\![E \to X]\!] \mapsto [\![e(-E)]\!]_G.$$

证明。 幂级数 $x\,[+]\,y \in \mathbb{L}[[x,y]] = (\mathbb{L}[[x]])[[y]]$ 的常数项为 x。将其视为系数取自 $\mathbb{L}[[x]]$、变量为 y 的幂级数时，它因此在环 $(\mathbb{L}[[x]][x^{-1}])[[y]]$中可逆。记

$$(x\,[+]\,y)^{-1} = \sum_{i\in\mathbb{N}} f_i(x)y^i, \quad \text{with } f_i(x) \in \mathbb{L}[[x]][x^{-1}].$$

对于每个带平凡 G-作用的光滑 k-簇 X ，考虑 $\Omega(X)$-代数态射

$$\eta\colon \Omega(X)[\mathbf{a}] \to S^{-1}\Omega_G(X), \quad a_{i,g} \mapsto f_i(c_1(\mathcal{L}_g)) \quad (\text{for } i \in \mathbb{N} \text{ and } g \in \widehat{G} \smallsetminus \{0\}).$$

于是， η 与带平凡 G-作用的光滑k-簇之间态射所诱导的拉回和推前相交换。对于每个向量丛 $E \to X$，其中 X 是带平凡 G-作用的光滑k-簇，且 $E^G = 0$，在 $S^{-1}\Omega_G(X)$ 中有

$$\eta(Q(E)) = e(-E). \tag{7.2.4.a}$$

事实上，当 E 是一个线丛且 G 通过单个特征作用于其上时，这一点显然成立（利用公式 (4.2.2.ii)）；一般情形则由欧拉类的乘法性 (7.2.2) 得出，这是鉴于类 $Q(E)$ 按照 (4.2.2) 的构造。当k-簇 X 还具有射影性时，沿态射 $X \to k$推前公式 (7.2.4.a)，我们在 $S^{-1}\Omega_G(k)$ 中得到

$$\eta([\![E \to X]\!]) = [\![e(-E)]\!]_G. \qquad \square$$

7.2.5. 设 X 是一个带有 G-作用的光滑射影 k-簇。设 $N \to X^G$ 为不动点轨迹 $X^G \to X$ 闭浸入的法丛。回顾 (3.1.3)，可知 $N^G = 0$，因此我们有一个类 $[\![N \to X^G]\!] \in \mathcal{M}$ （见 §4.2）。集中定理 [Hau25, (4.5.7)] 断言，在 (7.2.4) 的映射下，元素 $[\![N \to X^G]\!] \in \mathcal{M}$ 被映为 $S^{-1}\Omega_G(k)$ 中的类 $[\![X]\!]_G$。

7.2.6. 选取满足 (3.3.4) 条件的光滑射影 k-簇 X_i^+, X_i^-，并赋予 G-作用，其中 $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。我们用 x_i 表示 $S^{-1}\Omega_G(k)$ 中的类 $[\![X_i^+]\!] - [\![X_i^-]\!]$。此外，我们用 $n_i \in \mathcal{M}$ 表示类 $[\![N_i^+ \to (X_i^+)^G]\!] - [\![N_i^- \to (X_i^-)^G]\!]$，其中 N_i^+ 和 N_i^- 分别是下列不动点轨迹浸入的法丛：$(X_i^+)^G \to X_i^+$ 和 $(X_i^-)^G \to (X_i)^-$。

7.2.7. 如（7.2.5）所述，元素 n_i 在（7.2.4）的映射下被映到 x_i。

7.2.8. 由（4.2.5）可知，$\mathcal{M}(0)$-代数 $\mathcal{M}$ 是分次的。对于 $d \in \mathbb{N}$，我们用$\mathcal{M}^{\leq d}$ 表示由次数为 $\geq -d$的齐次元素生成的 $\mathcal{M}$ 的子群。

7.2.9. 设 $E \to X$ 是一个 G-等变向量丛，其中 X 是具有平凡 G-作用的光滑射影k-簇，且 $E^G = 0$。若$\dim X \leq d$，则 $[\![E \to X]\!] \in \mathcal{M}^{\leq d}$。

7.2.10. 由（3.3.4）和（7.2.9）可知，对每个 $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$都有 $n_i \in \mathcal{M}^{\leq \lfloor i/q \rfloor}$。因此，对任意非零的 $P \in (\mathbb{Z}[c^{-1}])[Y_i, i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}]$，我们有 $P(n_1, \ldots) \in \mathcal{M}^{\leq \deg_q P}$（见（3.4.5））。

7.2.11. **引理**。对于 $j \in \{0, \ldots, r-1\}$，这些元素

$$x_1, \ldots, x_m, t_1^{-1}, \ldots, t_j^{-1} \in S_j^{-1}(H_j)_{(r-j)}$$

在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立。

证明。这些元素 x_i（$i \in N_{(r)}$）在 $L_{(r)} = S_0^{-1}(H_0)_{(r)}$ 中的像是类 $[\![X_i^+]\!] - [\![X_i^-]\!]$，因此根据 (3.3.4.i) 和 (2.3.14)，它们在 $\mathbb{F}_p$ 上代数独立。这就证明了该引理的情形 $j = 0$。情形 $0 < j < r$ 可利用 (6.2.4.iii) 通过归纳法得出。□

7.2.12.**引理**。这些元素

$$x_1, \ldots, x_m, t_1^{-1}, \ldots, t_{r-1}^{-1} \in S_r^{-1} H_r$$

在 $\mathbb{Z}$ 上代数独立。

证明。当 $r = 0$ 时，这由 (3.3.4.i) 得出。当 $r > 0$ 时，这由 (7.2.11) 和 (6.2.4.iv) 得出。□

对每个 $i = 1, \ldots, r$，(4.2.7.a) 中的元素 $p_{0,g_i} \in \mathcal{M}$ 在 (7.2.4) 的态射下映射为 $t_i^{-1} \in S^{-1}\Omega_G(k)$。

7.2.14. **引理**。设 $d \in \mathbb{N}$。令 $\mathcal{P}(d) \subset \mathcal{M}$ 为由元素 n_i（见 *(7.2.6)*）生成的子环，其中 $i \in N_{(r)}(qd + q - 1)$（见 *(2.3.12)*），且 $p_{0,g_1}, \ldots, p_{0,g_{r-1}}$。

(i) 我们有 $\mathcal{P}(d) \subset \mathcal{M}(d)$。*(ii)* 环 $\mathcal{M}(d)$ 在 $\mathcal{P}(d)$上是代数的。

(iii) 由 *(7.2.4)* 诱导的态射 $\mathcal{P}(d) \to S^{-1}\Omega_G(k)$ 是单射。

证明。我们有 $p_{0,\,g_1}, \ldots\ldots, p_{0,\,g_{r-1}} \in \mathcal{M}(0) \subset \mathcal{M}(d)$。此外，对于 $i \in N_{(r)}(qd + q - 1)$，我们有 $\lfloor i/q \rfloor \leq d$，因此由 (7.2.10) 可知，元素 n_i 属于 $\mathcal{M}^{\leq d} \subset \mathcal{M}(d)$，从而证明了 (i)。

注意，当 $r \geq 1$

$$|N_{(r)}(qd + q - 1)| = (qd + q - 1) - (r - 1) = qd + q - r.$$

由 (7.2.12)（给定 (7.2.7) 与 (7.2.13)）可知，$qd+q-1$ 元素$p_{0,\ g_1}$，……，$p_{0,\ g_{r-1}}$ 以及 n_i（对于 $i \in N_{(r)}(qd+q-1)$）在 $\mathbb{Z}$ 上于 $S^{-1}\Omega_G(k)$ 中具有代数无关的像（我们包含情形 $r=0$）。这蕴含 (iii)，并且还表明 $\mathbb{Z}$-代数 $\mathcal{P}(d)$ 是关于 $qd+q-1$ 个变量的多项式。由 (4.2.10)，$\mathbb{Z}[c^{-1}]$-代数 $\mathcal{M}(d)$ 亦然。因此，整环 $\mathcal{P}(d)$ 与 $\mathcal{M}(d)$ 的分式域在 $\mathbb{Q}$上具有相同的超越次数，故后者在前者之上是代数的，从而得到 (ii)。□

7.2.15. **定理。** *(7.2.4)* 中的态射 $\mathcal{M} \to S^{-1}\Omega_G(k)$ 是单射。

证明。 假设非零元素 $b \in \mathcal{M}$ 映射到 $S^{-1}\Omega(k)$ 中为零。那么，对于某个 $d \in \mathbb{N}$，有 $b \in \mathcal{M}(d)$。由 (7.2.14.ii)，我们可以找到一个非零多项式 $Q \in \mathcal{P}(d)[X]$，使得$Q(b) = 0$。由于 $\mathcal{M}(d)$ 是整环且 $b \neq 0$，我们可以假设 Q 不能被X整除，即 $Q(0) \neq 0$ 在 $\mathcal{P}(d)$ 中成立。但 $Q(0) \in \mathcal{P}(d)$ 在 $S^{-1}\Omega(k)$ 中映射为 $Q(b) = 0$ （因为b 映射为 0 ）。因此，由 (7.2.14.iii) 可得 $Q(0) = 0$ 在 $\mathcal{P}(d)$ 中成立，矛盾。□

因此，我们将 $\mathcal{M}$ 中的元素视为 $S^{-1}\Omega_G(k)$ 中的元素，特别是将元素 x_i 与 n_i，或元素 $p_{0,\ g_j}$ 与 t_j^{-1} 视为相同。

7.2.16. **注。** (7.2.15) 的证明沿用了 tom Dieck 在拓扑学中采用的论证，见 [tD71, §2]。

7.3. 线性无关。

本节是本文的技术核心。我们的目标是证明 (7.3.13)，它将成为下一节证明主定理时所用的核心工具。

7.3.1. 回顾 (7.0.3)，映射 t_i 到 $c_1(\mathcal{L}_{g_i}) \in \Omega_G(k)$，其中 $i=1$、…、r，诱导出一个分次 L-代数的同构

$$S_r^{-1}H_r \simeq S^{-1}\Omega_G(k). \tag{7.3.1.a}$$

由 (6.2.4.ii) 可推得，对于 $j=1$、…、r，由 $t_j \mapsto 0$ 给出的态射 $H_j \to H_{j-1}$ 诱导出一个态射 $C_j \to C_{j-1}$ （子环 $C_j \subset S_j^{-1}(H_j)_{(r-j)}$ 在 (6.2.2) 中定义），其核是由 t_j 生成的理想。我们将它在 S_{j-1} 处的局部化记为

$$\rho_j \colon S_{j-1}^{-1}C_j \to S_{j-1}^{-1}C_{j-1}.$$

7.3.2. 我们来归纳构造子环，对于 $j=r,\ \ldots,\ 0$

$$M_j \subset S_j^{-1}C_j = S_j^{-1}(H_j)_{(r-j)}.$$

首先，在同构 (7.3.1.a) 下令 M_r 对应于 $\mathcal{M}(0)$。接下来，假设已为某个 $j \in \{1,\ldots,r\}$ 构造出 M_j，令

$$M_{j-1} = \rho_j\big(M_j \cap S_{j-1}^{-1}C_j\big) \subset S_{j-1}^{-1}C_{j-1}. \tag{7.3.2.a}$$

7.3.3. **注。**我们可以将 M_j 看作 $\mathcal{M}(0)$ 中“充分整”的元素的像集，它在 $M_r \simeq \mathcal{M}(0) \subset S^{-1}\Omega_G(k)$ 与 $M_0 \subset \mathbb{L}_{(r)}$ 之间进行插值。

7.3.4. 由于对每一个 $j \in \{1,\ldots,r\}$ 都有 $\rho_j(C_j) \subset C_{j-1}$，态射 ρ_j 诱导一个态射

$$M_j \cap C_j \to M_{j-1} \cap C_{j-1}. \tag{7.3.4.a}$$

7.3.5. **引理**。 对每一个 $j \in \{1, \dots, r\}$，元素 t_1^{-1}，……，$t_j^{-1} \in S_j^{-1}C_j$ 属于M_j。

证明。 我们对 j 作下降归纳，情形 $j = r$ 由 (7.2.13) 显然成立。若 $j < r$，则由归纳法可知 t_1^{-1}，……，$t_j^{-1} \in M_{j+1}$，且这些元素也属于$S_j^{-1}C_{j+1}$。因此，由定义公式 (7.3.2.a)，它们在 ρ_{j+1} 下的像属于M_j。□

7.3.6. **引理**。 设 $j \in \{1, \dots, r\}$。设 y_1，……，$y_m \in C_j$ 使得元素$\rho_j(y_1)$……，$\rho_j(y_m) \in C_{j-1}$ 在 $M_{j-1} \cap C_{j-1}$ 上线性无关。则 y_1，……，$y_m \in C_j$ 在 $M_j \cap C_j$ 上线性无关。

证明。假设 $a_1, \dots, a_m \in M_j \cap C_j$ 满足

$$\sum_{i=1}^{m} a_i y_i = 0 \in C_j.$$

我们证明，对每个 $i = 1, \dots, m$，都有 $a_i = 0$。为此，我们对 $k \in \mathbb{N}$ 作归纳法，证明对所有 i，$a_i \in t_j^k(M_j \cap C_j)$ 都成立。由 (6.1.7)（回顾 (6.2.3.a)，其中 $C_j \subset B_{r-j}$），这足以完成引理的证明。

现在取 $k \geq 0$，并假设 $a_i = t_j^k b_i$，其中对所有 $i = 1, \dots, m$，都有 $b_i \in M_j \cap C_j$。由于$C_j \subset S_j^{-1}(H_j)^{(r-j)}$ 且 $t_j \in S_j$，可知 t_j^k 是 C_j 中的非零因子，因此

$$\sum_{i=1}^{m} b_i y_i = 0 \in C_j, \text{ and so } \sum_{i=1}^{m} \rho_j(b_i)\rho_j(y_i) = 0 \in C_{j-1}.$$

注意，$\rho_j(b_i) \in \rho_j(M_j \cap C_j) \subset M_{j-1} \cap C_{j-1}$（见 (7.3.4)），因此引理的假设蕴含：对所有 i，$\rho_j(b_i) = 0$。这意味着，对于所有 $i = 1, \dots, m$，都有 $b_i = t_j c_i$，其中 $c_i \in C_j$。由 (7.3.5)，$t_j^{-1}M_j \subset M_j$，故有 $c_i \in M_j \cap C_j$。归纳证明至此完成。□

7.3.7. 回忆 (7.2.14.i)，当 $i \in N_{(r)}(q-1)$ 时，$n_i = x_i$ of $\mathcal{M} \subset S^{-1}\Omega_G(k)$ 中的元素属于$\mathcal{M}^{(0)}$。因此，它在态射 (7.3.1.a) 下映射为 M_r。

另一方面，元素 x_i 属于 $\Omega_G(k) \simeq S^{-1}\Omega_G(k)$，因此在态射 (7.3.1.a) 下映射为 $C_r = \mathrm{im}(H_r \to S_r^{-1}H_r)$。

利用映射 (7.3.4.a)，我们因而可以对每个$j = 0, \dots, r$ 以及 $i \in N_{(r)}(q-1)$，考虑 x_i in $M_j \cap C_j$ 的像。

7.3.8. **引理**。 对于 $j \in \{0, \dots, r-1\}$，环 M_j 在由元素 t_1^{-1}、. . . 、t_j^{-1} 以及当 $i \in N_{(r)}(q-1)$ 时元素 x_i 的像生成的子环上是代数的。

证明.我们再次用 $x_i \in M_j$ 表示元素 x_i的像。我们对 j进行下降归纳。用 D_j 表示由元素$t_1^{-1}, \dots, t_j^{-1}$ 以及 $i \in N_{(r)}(q-1)$ 时的 x_i所生成的 M_j 的子环。假设 M_j包含一个在 D_j上不是代数的元素 y。由(7.2.11)，我们推出元素 $y, t_1^{-1}, \dots, t_j^{-1}$ 以及 $i \in N_{(r)}(q-1)$ 时的 x_i在 M_j 中于 $\mathbb{F}_p$上代数独立。将 $y = \rho_{j+1}(x)$ 写成带有$x \in M_{j+1}$的形式，并寻求一个矛盾。

首先假设 $j = r-1$。则由(6.2.4.iv)，元素 $x, t_1^{-1}, \dots, t_{r-1}^{-1}$ 以及$i \in N_{(r)}$（$q-1$）时的 x_i在 M_r 中于 $\mathbb{Z}$上代数独立。特别地， $x \in M_r \simeq \mathcal{M}(0)$在 $D_r \simeq \mathcal{P}(0)$上不是代数的，这与(7.2.14)矛盾。

接下来反过来假设 $j < r-1$。于是由 (6.2.4.iii)，元素 x、t_1^{-1}、.....、t_{j+1}^{-1}和 x_i 对 $i \in N_{(r)}$($q-1$) 在 M_{j+1} 上关于 $\mathbb{F}_p$代数独立。特别地，$x \in M_{j+1}$ 在 D_{j+1}上不是代数的，这与归纳假设矛盾。□

7.3.9. 对于 $d \in \mathbb{N}$，我们用 $L_{(r)}(d)$ 表示由次数为 $\geq -d$的齐次元素生成的 $L_{(r)}$ 的子环。

7.3.10. **命题**。我们有 $M_0 = L_{(r)}(q-1)$。

证明。当 $r = 0$时，我们有 $q = 1$，且由 (4.2.6) 得 $\mathcal{M}(0) = L(0) = \mathbb{Z}[c^{-1}]$，这意味着 $M_0 = \mathbb{Z}[c^{-1}]$，符合要求。因此我们假设 $r > 0$，于是由 (2.3.10) 得 $\mathbb{L}_{(r)} = L_{(r)}$。由 (7.3.8)，子环 $M_0 \subset L_{(r)}$ 在由元素 x_i 对 $i \in N_{(r)}(q-1)$ 的像在 $L_{(r)}$ 中生成的 $\mathbb{F}_p$-子代数上代数，亦即子环 $L_{(r)}(q-1)$（由 (3.3.4) 和 (2.3.14)）。但是 $L_{(r)}(q-1)$ 在 $L_{(r)}$ 中代数闭（后者是以该环为系数的多项式环，由 (2.3.14)），因此结论成立。□

我们用 C 表示 $\Omega_G(k) \to S^{-1}\Omega_G(k)$ 的像。

7.3.12. **引理**。包含映射 $\mathcal{M}(0) \cap C \subset \mathcal{M}(0)$ 的余核是 p-主挠。

证明。设 $g \in G \smallsetminus \{0\}$，并令 $x = c_1(\mathcal{L}_g) \in \Omega_G(k)$。那么当 m 足够大时，我们有$p^m g = 0$ 属于 G，因此

$$[p^m](x) = 0 \in \Omega_G(k).$$

回忆一下，幂级数 $[p^m](t) \in \mathbb{L}[[t]]$ 的首项系数是 p^m。由于 $x \in S$，我们可以推出存在 $a \in C$ 使得

$$p^m = xa \in C \subset S^{-1}\Omega_G(k).$$

由于 $p_{0,\ g} = x^{-1} \in \mathcal{M}(0)$，我们得出 $p^m p_{0,\ g} = a \in \mathcal{M}(0) \cap C$。由于环 $\mathcal{M}(0)\widehat{\ }$ 由元素 $p_{0,\ g}$（其中 $g \in G \smallsetminus \{0\}$）生成，引理得证。□

7.3.13. **命题**。设 $y_1, \dots, y_m \in \Omega_G(k)$ 为一些元素，它们在 $L_{(r)}$ 中的像在 $L_{(r)}(q-1)$ 上线性无关。那么 $y_1, \dots, y_m \in S^{-1}\Omega_G(k)$ 在 $\mathcal{M}(0)$上线性无关。

证明。注意，在同构 (7.3.1.a) 下，C 对应于 C_r，且 $M_0 = M_0 \cap C_0$。由 (7.3.10)，根据 (7.3.6) 归纳可得，$y_1, \dots, y_m \in S^{-1}\Omega_G(k)$ 在 $\mathcal{M}(0) \cap C$上线性无关。由于 $\mathcal{M}(0)$ 没有非零的 p-主挠（见 (4.2.10)），由 (7.3.12) 可推出，这些元素在$\mathcal{M}(0)$上线性无关。□

7.4. **按不动点轨迹维数过滤**。由 (6.2.6) 可知，遗忘态射 $\Omega_G(k) \to \Omega(k) = L$ 下降为一个态射（见 (7.3.11)）

$$\epsilon \colon C \to L_{(r)}.$$

我们考虑 (3.4.1) 中定义的滤过 $F_q^\bullet L_{(n)}$，以及 (7.2.8) 中定义的子群 $\mathcal{M}^{\leq d} \subset \mathcal{M}$。

7.4.1. **命题.** 设 $d \in \mathbb{N}$。态射 $\epsilon\colon C \to L_{(r)}$ 将 $\mathcal{M}^{\leq d} \cap C$ 映入 $F_q^d L_{(r)}$。

证明。 首先回顾， $F_q^0 L_{(r)}$ 是 $L_{(r)}$的子环；事实上，如(3.4.4)中所述，我们有$F_q^0 L_{(r)} = L_{(r)}(q-1)$。

固定一组 $\mathbb{L}$ 的多项式生成元 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ （由(2.1.11)可知这是可行的）。由(4.2.10)可知，分次 $\mathcal{M}(0)$-代数 $\mathcal{M}$ 是多项式代数，在每个负次数上都有 q 个生成元：具体而言，在次数 $-e<0$ 上，这些生成元是$p_{e,\ g}$ （其中$\frown g \in G \smallsetminus \{0\}$），以及 ℓ_e。

由(3.4.7)、(3.4.3)和(2.3.14)可知， $L_{(r)}$ 作为 $F_q^0 L_{(r)}$-代数也是多项式代数；相对于(3.4.7)的分次，每个正次数上的生成元个数都相同，即在次数 $e>0$ 上，这些生成元是 ℓ_{qe}, $\ldots$， ℓ_{qe+q-1}；注意，由于 $qe \geq q \geq p^r > p^{r-1}-1$，所以 $\{qe, \ldots, qe+q-1\} \subset N_{(r)}$。特别地， $\mathcal{M}(0)$-模 $\mathcal{M}^{\leq d}$ 与$F_q^0 L_{(r)}$-模 $F_q^d L_{(r)}$都是自由模，且秩相同，均为 $r(d)$。

设 $y_1, \ldots, y_{r(d)} \in F_q^d L_{(r)}$ 是关于 $F_q^0 L_{(r)}$线性无关的族。对每个$i \in \{1, \ldots, r(d)\}$，于是可写成 $y_i = \epsilon(z_i)$，其中 $z_i \in \mathcal{M}^{\leq d} \cap C$：事实上，由 (3.4.7) 可知，对于某个多项式 $P_i \in (\mathbb{Z}[c^{-1}])[Y_1, \ldots]$，有 $y_i = P_i(\ell_1, \ldots)$，且 $\deg_q P_i \leq d$；于是由 (7.2.10)，可取 $z_i = P_i(x_1, \ldots)$。

现在假设 $x \in \mathcal{M} \cap C$ 满足 $\epsilon(x) \notin F_q^d L_{(r)}$。回想一下， $F_q^d L_{(r)}$ 是相对于 $F_q^0 L_{(r)}$-代数 $L_{(r)}$的某个分次而言次数为 $\leq d$ 的元素集合。因此，商 $L_{(r)}/F_q^d L_{(r)}$ 没有 $F_q^0 L_{(r)}$-挠，因为它是自由模。由此可知， $L_{(r)}$ 中的元素 $\epsilon(x)$ $y_1, \ldots, y_{r(d)}$ 关于 $F_q^0 L_{(r)} = L_{(r)}(q-1)$ 线性无关。因此由 (7.3.13)， $r(d)$ 个 $+1$ 元素 $x, z_1, \ldots, z_{r(d)}$ 关于 $\mathcal{M}(0)$ 线性无关。这些元素不可能全都属于 $\mathcal{M}^{\leq d}$，因为它作为 $\mathcal{M}(0)$-模是秩为 $r(d)$ 的自由模（例如，将其与整环 $\mathcal{M}(0)$ 的函数域张量即可看出这一点）。因此 $x \notin \mathcal{M}^{\leq d}$，证明完毕。□

现在我们可以证明主定理，它确立了引言中定理 2 的一个包含关系。我们记作 $F_q^{-\infty} \mathbb{L}_{(r)} = 0$。

7.4.2.**定理**。 设 X 是一个带有 G 作用的光滑射影 k-簇，并设 $d =$维数 X^G。那么 $[\![X]\!] \in F_q^d \mathbb{L}_{(r)}$。

证明。 由于情形 $X^G = \varnothing$ 已由 (7.1.3) 涵盖，我们假设 $d \neq -\infty$。我们还可以假设 G 是非平凡的，即 $r \geq 1$。由 (2.3.10) 可知 $\mathbb{L}_{(r)} = L_{(r)}$。于是，类 $[\![X]\!]_G \in S^{-1}\Omega_G(k)$ 属于子群 $\mathcal{M}^{\leq d} \cap C$，因此，根据 (7.4.1)，它在 $\mathbb{L}_{(r)}$ 中的像属于子环 $F_q^d \mathbb{L}_{(r)}$。根据 (7.1.2)，该像为 $[\![X]\!]$。□

8. Conclusion

本节中， G是定义在 k上的有限型代数群。

8.1. **无不动点作用**。

8.1.1. 定义。 我们用 $J(G)$ 表示由类 $[\![X]\!]$ 生成的 $\subset \mathbb{L}$ 子群，其中 X 遍历具有 G 作用且满足 $X^G = \varnothing$ 的光滑射影 k-簇。

8.1.2.**引理**。 每个带有 G 作用的 k-簇都可被等维的 G-不变开子概形覆盖。

证明。 设 X 是一个带有 G-作用的 k-簇，且 U 是 X的一个连通分支。 $G \times U \to X$ 在 X 中的像 V是一个包含 U的 G-不变开子概形。我们证明 V 是等维的。为此，我们可以扩张标量，因此不妨设 k 是可分闭的。令 G的单位连通分支为 G° 。于是 $G^\circ \times U$ 是连通的[Mil17，命题 1.3.4]，，这意味着它在 X 中的像是 U；换言之， X 的开子概形 U 是 G°-不变的。现在，根据我们对 k的假设，簇 G被开子概形 αG°覆盖，其中 α 遍历k(G)。这意味着 V被开子概形 αU覆盖，其中每个都同构于 U。由于 U是等维的， V也是如此。□

8.1.3. 由 (8.1.2) 可知， $\mathbb{L}$ 的子群 $J(G)$ 是分次的。

8.1.4. 设 X， Y 是光滑射影的 k-簇，并假设 G 在 X 上的作用没有不动点。若赋予 Y 平凡的 G-作用，则群 G 在积 $X \times Y$ 上的作用没有不动点。这说明 $J(G)$ 是 $\mathbb{L}$ 的理想。

8.1.5. 若 $G \to H$ 是定义在 k 上的代数群之间的满态射，则 $J(H) \subset J(G)$。

8.1.6.**命题**。我们有 $J(G \times \mathbb{G}_m) = J(G)$。

证明。 设 X 是一个带有 $G \times \mathbb{G}_m$-作用的光滑射影 k-簇，且满足 $X^{G \times \mathbb{G}_m} = \varnothing$。那么射影 k-簇 $Y = X^G$ 带有一个满足 $Y^{\mathbb{G}_m} = \varnothing$ 的 $\mathbb{G}_m$- 作用。博雷尔不动点定理（例如参见 [Mil17，定理 (16.51)]）表明 $Y = \varnothing$。这证明了 $J(G \times \mathbb{G}_m) \subset J(G)$。反向包含关系由 (8.1.5) 得出。□

8.1.7. **命题**。 设 p、 q 是两个不同的素数，且都不等于 k的特征。则 $J(\mu_{pq}) = \mathbb{L}$。

证明。 对每个 $n \in \{p, q\}$ ，商态射 $\mu_{pq} \to \mu_n$ 诱导代数群 $\mu_{p,q}$ 在射影 k-簇 μ_n上的作用。由于 n 与 k的特征互素，该簇是光滑的。因此 $n = [\mu_n] \in J(\mu_{pq})$。于是 $1 \in J(\mu_{pq})$，结论由 (8.1.4) 得出。□

The 可对角化 p-群的情形即为引言中的定理 1，也就是说：

8.1.8.**定理**。 设 p 是一个与 k的特征不同的素数。设 G 是一个有限可对角化 p-群， r 是其秩（见 *(7.0.1)*）。则 $J(G) = I_p(r)$。

证明。 这由结合 (3.2.1) 和 (7.1.3) 得出。 □

8.1.9. 因此，我们已经确定了所有在 k 上有限型、且没有阶可被 k 的特征整除的特征的可对角化群 G 的理想 $J(G)$。即：

$$J(G) = \begin{cases} I_p(r), \text{ 如果 } G \simeq \mu_{p^{n_1}} \times \ldots \times \mu_{p^{n_r}} \times (\mathbb{G}_m)^s \text{ 对某个素数成立 } p \\ \quad \text{以及整数 } s \in \mathbb{N} \text{和 } n_1, \ldots\ldots, n_r \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}, \mathbb{L} \\ \text{否则。} \end{cases}$$

8.2. **不动点轨迹维数**。

8.2.1. **定义**。 对于 $d \in \mathbb{N}$，我们用 $\Delta^d(G) \subset \mathbb{L}$ 表示由类 $[\![X]\!]$生成的子群，其中 X 遍历允许一个 G-作用且满足 $\dim X^G = d$ 的光滑射影 k-簇。

8.2.2. **引理**。 子群 $\Delta^d(G) \subset \mathbb{L}$ 由类 $[\![X]\!]$生成，其中 X 遍历承认 G-作用的光滑射影 k-簇，且满足 维数 $X^G \leq d$。

证明。 令 $C \subset \mathbb{P}^2$ 为一条光滑射影三次曲线（每个域上都存在这样的曲线k）。那么线丛 T_C 是平凡的，因此 $[\![C]\!] = 0 \in \mathbb{L}$ （见 (2.2.2)）。因此，若 X是一个带有 G-作用的光滑射影 k-簇，则对每个 $d \geq$ 维数 X^G，光滑射影 k-簇 $X' = X \sqcup C^d = X \sqcup (C \times \cdots \times C)$ 满足

$$\dim X'^G = \dim C^d = d \quad \text{and} \quad [\![X']\!] = [\![X]\!] + [\![C]\!]^d = [\![X]\!]. \qquad \square$$

8.2.3. 引理 (8.2.2) 尤其断言，对于每个 $d \in \mathbb{N}$， $J(G) \subset \Delta^d(G)$。

8.2.4.**注**。 引理 (8.2.2) 意味着，从由环境簇的配边类生成的子群所能得到的不动点轨迹维数限制，只有下界。

8.2.5. 根据 (8.2.2) 给出的描述，利用 (8.1.2) 可知， $\Delta^d(G)$ 是 $\mathbb{L}$ 的分次子群。

8.2.6. 若 $G \to H$ 是定义在 k 上的代数群之间的满态射，则对于每个 $d \in \mathbb{N}$， $\Delta^d(H) \subset \Delta^d(G)$。

8.2.7. **命题**。 对于每个 $d \in \mathbb{N}$，有 $\Delta^d(\mathbb{G}_m) = \mathbb{L}$。

证明。 根据 (8.2.2)，只需讨论 $d = 0$ 的情形。由 (3.4.9) 可知，对于每个 $q \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$， $F_q^0 \mathbb{L} \subset \Delta^0(\mathbb{G}_m)$。但 (3.4.1.ii) 蕴含 $\mathbb{L} = \bigcup_{q \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}} F_q^0 \mathbb{L}$。 $\square$

8.2.8. **命题**。 设 p、q 是两个不同的素数，且都不同于 k 的特征。那么对每个 $d \in \mathbb{N}$，都有 $\Delta^d(\mu_{pq}) = \mathbb{L}$。

证明。 这由 (8.1.7) 和 (8.2.3) 得出。 $\square$

现在我们可以证明引言中的定理 2：

8.2.9.**定理**。 设 p 是一个不同于 k 的特征的素数。设 G 是 k 上的一个有限可对角化 p-群 $\widehat{\ }$，其秩为 r （见 *(7.0.1)*），并令 $q = |G|$。那么对每个 $d \in \mathbb{N}$，作为 $\mathbb{L}$ 的子群，

$$\Delta^d(G) = F_q^d \mathbb{L} + I_p(r).$$

证明。 由 (8.1.8) 和 (8.2.3)，我们有 $I_p(r) \subset \Delta^d(G)$；由 (3.4.9)，我们有 $F_q^d \mathbb{L} \subset \Delta^d(G)$。另一方向的包含关系由 (7.4.2) 得出。 $\square$

8.2.10. **注**。 在（8.2.9）中取 $d = 0$，并结合（3.4.4），即可得到引言中的推论 5。

8.2.11. 因此，对于所有 $d \in \mathbb{N}$ 以及所有定义在 k 上、有限型且没有阶可被 k 的特征整除的特征的可对角化群 G，我们都确定了子群 $\Delta^d(G) \subset \mathbb{L}$。具体而言：

$$\Delta^d(G) = \begin{cases} F_q^d\mathbb{L} + I_p(r), & \text{若 } G \text{ 是秩为 } r \text{ 的有限可对角化 } p\text{-群且 } q = |\widehat{G}|; \\ \text{否则为} \end{cases}$$

$\mathbb{L}$ 。

8.3. **陈数**。 现在让我们从 (8.2.9) 推出一些具体结论。设 p 是一个不同于域 k 的特征的素数。设 G 是定义在 k 上、秩为 r 的有限可对角化 p-群（见 (7.0.1)），并设 $q = |G|$。我们将使用 (3.4.5) 中的记号 $\deg_q$。

8.3.1. **定理**。 设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 是环 $\mathbb{L}$ 的多项式生成元。设 X 是一个光滑射影 k-簇，带有一个 G-作用。若 $G = 1$，则令 $A = \mathbb{Z}$；否则令 $A = \mathbb{F}_p$。设 $P \in A[T_i, i \in N_{(r)}]$ 是满足 $[\![X]\!] = P(\ell_1, \ldots)$ 属于 $\mathbb{L}_{(r)}$ 的唯一多项式。那么

$$\dim X^G \geq \deg_q P.$$

证明。 根据 (2.3.14)，这样的 P 存在且唯一。令 $d = \dim X^G$。则由 (7.4.2) 得 $[\![X]\!] \in F_q^d\mathbb{L}_{(r)}$，因此由 (3.4.7) 可得 $\deg_q P \leq d$。□

8.3.2. 对于一个分拆 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$，我们考虑整数

$$\pi_q(\alpha) = \lfloor \frac{\alpha_1}{q} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{\alpha_n}{q} \rfloor.$$

8.3.3. 我们注意到：

(i) 对于每个分拆 α，$\pi_q(\alpha) = \deg_q(T_\alpha)$（见 (3.4.5)）；

(ii) 对于每个分拆 α，$\pi_q(\alpha) \leq \lfloor |\alpha|/q \rfloor$（见 (2.1.6)）；(iii) 对于每个分拆 α、β，$\pi_q(\alpha \cup \beta) = \pi_q(\alpha) + \pi_q(\beta)$。

我们回顾 根据 (2.1.16)，$\succeq$ 指的是分拆之间的细化关系。

8.3.4. **引理**。 设 α、β 为分拆，且满足 $\alpha \succeq \beta$。则 $\pi_q(\alpha) \leq \pi_q(\beta)$.

证明。 若 $\alpha^1, \ldots, \alpha^m$ 为分拆，且满足 $\beta = (|\alpha^1|, \ldots, |\alpha^m|)$ 和 $\alpha = \alpha^1 \cup \cdots \cup \alpha^m$，则由 (8.3.3.ii) 和 (8.3.3.iii) 可得

$$\pi_q(\beta) = \lfloor \frac{|\alpha^1|}{q} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{|\alpha^m|}{q} \rfloor \geq \pi_q(\alpha^1) + \cdots + \pi_q(\alpha^m) = \pi_q(\alpha). \qquad \square$$

回顾 自 (2.1.6.a) 可知，对每个分拆 α，都有一个态射 c_α: $\mathbb{L} \to \mathbb{Z}$.

8.3.5. **引理**。 设 α 为一个分拆。则对任意 $d < \pi_q(\alpha)$，都有 $c_\alpha(F_q^d\mathbb{L}) = 0$。

证明。 设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 是 $\mathbb{L}$ 的一族多项式生成元。那么由 (3.4.7)（以及 (8.3.3.i)），群 $F_q^d\mathbb{L}$ 由元素 ℓ_β 生成，其中 β 是一个满足 $\pi_q(\beta) \leq d$ 的分拆。若 $d < \pi_q(\alpha)$，则由 (8.3.4) 可知，这样的 β 无法验证 $\alpha \succeq \beta$，因此由 (2.1.18)，$c_\alpha(\ell_\beta) = 0$。□

8.3.6. **命题**。 设 X 是一个带有 G作用的光滑射影 k-簇。设 $d \in \mathbb{N}$，并设 c 是态射 $c_\beta\colon \mathbb{L} \to \mathbb{Z}$的一个 $\mathbb{Z}$-线性组合，其中 $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_m)$是满足以下条件的分拆

$$\lfloor \frac{\beta_1}{q} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{\beta_m}{q} \rfloor \geq d.$$

若 $c([\![X]\!]) \notin c(I_p(r))$，则维数 $X^G \geq d$。

证明。反设。则由(8.2.9)得 $[\![X]\!] \in F_q^{d-1}\mathbb{L} + I_p(r)$。由于 $c(F_q^{d-1}\mathbb{L}) = 0$由(8.3.5)，从而 $c([\![X]\!]) \in c(I_p(r))$，矛盾。□

下一注表明(8.3.6)的界是精确的：

8.3.7. 注。设 X 为具有 G-作用的光滑射影 k-簇。假设$[\![X]\!] \notin \Delta^{d-1}(G)$，其中 $d \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。我们还假设 $G \neq 1$，即 $r \geq 1$。设$\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 为环 $\mathbb{L}$的一族多项式生成元，使得理想 $I_p(r)$由 p 以及当 $i = 1$，……，$r-1$ 时的 ℓ_{p^i-1} 生成（见(2.3.13)）。记 $[\![X]\!] = P(\ell_1, \dots\dots)$，其中$P \in \mathbb{Z}[T_i, i \in \mathbb{N}]$。由(8.2.9)与(3.4.7)可知，多项式 P 含有形如 λT_α 的单项式，其中 $\lambda \in \mathbb{Z} \smallsetminus p\mathbb{Z}$，而 α 是满足 $\pi_q(\alpha) \geq d$且不含形如 $p^i - 1$（其中 $i \in \{1, \dots, r-1\}$）的元素的分拆。由(8.3.8)给出的态射d_α 满足 $c([\![X]\!]) = \lambda d_\alpha(\ell_\alpha)$。另一方面，群 $I_p(r)$由 $p\mathbb{L}$ 以及元素 ℓ_β生成，其中 β 遍历一组不同于α的分拆。因此 $d_\alpha(I_p(r)) = pc(\mathbb{L}) = pd_\alpha(\ell_\alpha)$。由(8.3.4)，态射 $c = d_\alpha$ 因而满足(8.3.6)的条件。

8.3.8. **引理**。 设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$ 是 $\mathbb{L}$ 的一族多项式生成元， α 是一个分拆。那么存在映射 d_α: $\mathbb{L} \to \mathbb{Z}$，使得

(i) $d_\alpha(\ell_\alpha) \neq 0$，*(ii)* 对所有 $\beta \neq \alpha$， $d_\alpha(\ell_\beta) = 0$，*(iii)* d_α 是态射 c_β （其中 $\alpha \succeq \beta$）的 $\mathbb{Z}$- 线性组合。

证明。我们对 α 的长度作归纳。若 $\alpha = \varnothing$，则令 $d_\alpha = c_\varnothing$: $\mathbb{L} \to \mathbb{Z}$，即投影到次数为 0 的齐次分量。现在假设 $\ell(\alpha) > 0$。由归纳法和 (2.1.17)，我们可以假设已为 $\beta \neq \alpha$ 构造了 d_β，使得 $\alpha \succeq \beta$。我们还可以假设整数 $d_\beta(\ell_\beta) = u \in \mathbb{Z} \smallsetminus \{0\}$ 与 β 无关（将每个 d_β 乘以适当的整数即可）。令

$$d_\alpha = uc_\alpha - \sum_{\substack{\alpha \succeq \beta \\ \alpha \neq \beta}} c_\alpha(\ell_\beta) d_\beta.$$

于是，对所有满足 $\alpha \succeq \beta$ 的 $\beta \neq \alpha$， $d_\alpha(\ell_\alpha) = uc_\alpha(\ell_\alpha) \neq 0$，且 $d_\alpha(\ell_\beta) = 0$。另一方面，当 $\alpha \not\succeq \beta$ 时，由 (2.1.18)（以及关系 $\succeq$的传递性），有 $d_\alpha(\ell_\beta) = 0$。□

现在我们介绍几种寻找满足 (8.3.6) 条件的态射 c 的具体方法。最直接的方法是使用模 p 的陈数：

8.3.9.**推论** (of(8.3.6)). 设 X 是一个带有 G-作用的光滑射影 k-簇。若 α 是一个分拆，且陈数 $c_\alpha(X)$ 不能被 p整除，则

$$\dim X^G \geq \lfloor \frac{\alpha_1}{q} \rfloor + \cdots + \lfloor \frac{\alpha_n}{q} \rfloor.$$

证明。 由于 $c_\alpha(I_p(r)) \subset p\mathbb{Z}$，我们可以将 (8.3.6) 应用于 $c = c_\alpha$。 □

为了使用模 p 的更高次幂的陈数，我们需要排除某些分拆。

8.3.10. 对于 $n \in \mathbb{N}$，我们用 $\mathcal{A}_{(n)}$ 表示那些不是某个包含 $\{p-1, \dots, p^{n-1}-1\}$ 中元素的分拆的细化（见 (2.1.16)）的分拆集合（特别地，$\mathcal{A}_{(0)} = \mathcal{A}_{(1)}$ 是所有分拆的集合）。等价地，分拆 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 属于 $\mathcal{A}_{(n)}$，当且仅当对于每个子集 $I \subset \{1, \dots, m\}$

$$\sum_{i \in I} \alpha_i \notin \{p-1, \dots, p^{n-1}-1\}.$$

8.3.11. **注**。 在以下任一假设下，分拆 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$ 属于 $\mathcal{A}_{(n)}$：

(i) $n = 1$，(ii) $\alpha_m \geq p^{n-1}$，(iii) 每个 α_i 都能被 p 整除，(iv) 对所有 $i \in \{1, \dots, n-1\}$，$m = 1$ 和 $\alpha_1 \neq p^i - 1$。

8.3.12. **引理**。 设 $n \in \mathbb{N}$。若 $\alpha \in \mathcal{A}_{(n)}$，则 $c_\alpha(I_p(n)) \subset pc_\alpha(\mathbb{L})$。

证明。 我们不妨设 $n \geq 1$，从而 $p\mathbb{L} \subset I_p(n)$。设 $\ell_i \in \mathbb{L}^{-i}$，其中 $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$，是一组环 $\mathbb{L}$ 的多项式生成元，使得理想 $I_p(n)$ 由 p 和 ℓ_{p^i-1}（对 $i = 1, \dots, n-1$）生成（见 (2.3.13)）。于是，群 $I_p(n)/(p\mathbb{L})$ 由元素 ℓ_β 生成，其中 β 含有一个来自 $\{p-1, \dots, p^{n-1}-1\}$ 的元素。由于 $\alpha \in \mathcal{A}_{(n)}$，这样的分拆 β 不可能满足 $\alpha \succeq \beta$，因此由 (2.1.18) 可得 $c_\alpha(\ell_\beta) = 0$。□

8.3.13. **推论**（关于（8.3.6））。 设 X 是一个带有 G-作用的光滑射影 k-簇。设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathcal{A}_{(r)}$ 满足 $c_\alpha(X) \notin pc_\alpha(\mathbb{L})$。则

$$\dim X^G \geq \left\lfloor \frac{\alpha_1}{q} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{\alpha_n}{q} \right\rfloor.$$

证明。 根据（8.3.12），态射 $c = c_\alpha$ 满足（8.3.6）的条件。 □

8.3.14. **注**。 设 $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ 是一个分拆，满足 $\alpha_n \geq p^r - 1$，且对于每个 $i = 1, \dots, n$，$\alpha_i + 1$ 是 p 的幂。则根据（8.3.11），有 $\alpha \in \mathcal{A}_{(r)}$；又由 Hau20b，（7.3.3）可得 $c_\alpha(\mathbb{L}) \subset p\mathbb{Z}$。因此，若 X 是一个带有 G-作用的光滑射影 k-簇，且满足 $c_\alpha(X) \neq 0 \mod p^2$，则根据（8.3.13），$\dim X^G \geq \pi_q(\alpha)$。

8.3.15. **推论**。 设 X 是一个纯维数为 $n \notin \{p-1, \dots, p^{r-1}-1\}$ 的光滑射影 k-簇。假设 $[\![X]\!]$ 在分次环 $\mathbb{L}/p$ 中不可分解。那么对于 X 上的任意 G-作用，我们有

$$\dim X^G \geq \left\lfloor \frac{n}{q} \right\rfloor.$$

证明。 不可分解性假设意味着 $c_{(n)}(X) \notin pc_{(n)}(\mathbb{L})$，由 (2.1.15) 得。由于 $(n) \notin \mathcal{A}_{(r)}$，由 (8.3.11.iv) 得，结论由 (8.3.13) 推出。□

8.3.16. 设 X 是 $\mathbb{P}^{n+c}$ 中次数为 d_1、……、d_c 的 c 个超曲面的交。假设 X 光滑且具有纯维数 n，并且 $n \geq 1$。那么

$$c_{(n)}(X) = d_1 \cdots d_c(d_1^n + \cdots + d_c^n - n - c - 1).$$

由 (2.1.15)，若该整数与 p 互素，或者当 $n+1$ 是 p 的幂时它落在 $p\mathbb{Z} \smallsetminus p^2\mathbb{Z}$ 中，则类 $[\![X]\!]$ 在 $\mathbb{L}/p$ 中不可分解。我们列出若干出现这种情况的显式情形：

(i) $n+c=-1$ 模 p，$c \neq 0$ 模 p，$d_1 = \cdots = d_c \neq 0$ 模 p，(ii) $n \neq -1$ 模 p，$c=0$ 模 p，$d_1 = \cdots = d_c \neq 0$ 模 p，(iii) $n=(p-1)s$，其中 $s \neq 1$ 模 p，且 $d_1, \ldots, d_c$ 与 p 互素。(iv) $n+1$ 是 p 的幂，$d_1 \in p\mathbb{Z} \smallsetminus p^2\mathbb{Z}$，且 $d_2, \ldots, d_c$ 与 p 互素。

8.3.17. **例**。设 X 如 (2.2.5) 或 (8.3.16) 所列任一情形。若 X 的维数 n 不同于 $p-1$、……、$p^{r-1}-1$，且 G 作用于 X，则由 (8.3.15) 得 $\dim X^G \geq \lfloor n/q \rfloor$。

8.3.18. **例**。设 X 是 $\mathbb{P}^{p^{s+1}+1}$ 中次数为 d 的光滑超曲面，其中 $p^s \geq q$ 和 d 与 p 互素。于是可以验证，陈数 $c_{(p^s,\ldots,p^s)}(X)$ 与 p 互素。因此，若 G 作用于 X，则 (8.3.9) 蕴含 $\dim X^G \geq p^{s+1}/q$。（注意，当 $p \neq 2$ 且 d 模 p 同余于 2 时，由 (2.2.4) 可知，类 $[\![X]\!]$ 在周 Chow 群 $\mathbb{L}/p$ 中是可分解元。）

8.3.19. **例**。设 c，d，$n \in \mathbb{N}$ 满足 $n = cd \geq 1$，且 $n+c+1$ 是 p 的幂。设 X 是 $\mathbb{P}^{n+c}$ 中次数为 d_1，……，d_c 的 c 个超曲面的交，其中 d_1，……，d_c 与 p 互素。假设 X 是光滑的，且纯维数为 n。则可验证，陈数 $c_{(d,\ldots,d)}(X)$ 与 p 互素。因此，若 G 作用于 X，则由 (8.3.9) 可得 $\dim X^G \geq c\lfloor d/q \rfloor$。

Appendix A. Effectivity

本节中，G 是定义在 k 上的代数群。

A.1. 令 $\mathbb{L}^{<0} = \bigoplus_{i>0} \mathbb{L}^{-i} \subset \mathbb{L}$。

A.2. **引理** ([Tho95，§5])。$\mathbb{L}^{<0}$ 的每个元素都具有 $[\![X]\!]$ 的形式，其中 X 是一个光滑射影 k-簇。

证明。令 $V \subset \mathbb{L}$ 为由具有 X 光滑射影 k-簇的 $[\![X]\!]$ 类组成的集合。由于光滑射影 k-簇的不交并（分别为积）的配边类，是其配边类之和（分别为积），因此可知 V 在加法和乘法下是稳定的。

我们对 n 作归纳法，证明当 $n>0$ 时，$\mathbb{L}^{-n} \subset V$。设 $H \subset \mathbb{P}^{n+1}$ 是次数为 $d \geq 4$ 的光滑超曲面（这样的超曲面存在于任意域 k 上）。那么 $c_{(n)}(H) = d(d^n - n - 2) > 0$。另一方面，$c_{(n)}(\mathbb{P}^n) = -n-1 < 0$。因此，$c_{(n)}(V) \subset \mathbb{Z}$ 是一个对加法封闭的子集；根据 (2.2.3)，它生成子群 $c_{(n)}(\mathbb{L}^{-n})$，并且同时包含一个正整数和一个负整数。这很容易推出 $c_{(n)}(V) = c_{(n)}(\mathbb{L}^{-n})$。由于 $c_{(n)}$ 的核：$\mathbb{L}^{-n} \to \mathbb{Z}$ 根据 (2.1.11) 由可分解元素构成，且 V 对加法封闭，因此只需证明 V 包含所有次数为

$-n$ 的可分解元素。当 $n=1$ 时，这显然成立，因为零是唯一这样的元素。若 $n>1$，则由对 n 的归纳法可得，因为 V 对加法和乘法封闭。□

A.3. **定义**。 我们用 $J_{\text{eff}}(G) \subset \mathbb{L}$ 表示由满足以下条件的类 $[\![X]\!]$构成的子集： X 是一个光滑射影 k-簇，且其上有一个 G-作用，使得 $X^G = \varnothing$。

A.4. 子集 $J_{\text{eff}}(G)$ 在加法下封闭。

A.5. 由 (8.1.2) 可知，对每个 $i \in \mathbb{Z}$， $J_{\text{eff}}(G) \subset \mathbb{L}$中元素的次数为 i 的齐次分量仍属于 $J_{\text{eff}}(G)$。

A.6. (8.1.4) 的论证结合 (A.2) 表明，子集 $J_{\text{eff}}(G)$ 在被 $\mathbb{L}^{<0}$ 的元素乘法作用下封闭。

$\widehat{\ }$A.7.**命题**。 设 G 是定义在 k 上的有限对角化群，并假设 $|G|$ 不是 k 的特征的幂。那么 $J_{\text{eff}}(G) \cap \mathbb{L}^{<0} = J(G) \cap \mathbb{L}^{<0}$。

证明。 由假设，群 G 容许一个形如 μ_n 的商，其中 $n>1$是与 k 的特征互素的整数。因此 G 在光滑射影 k-簇 μ_n 上无不动点地作用，从而 $[\mu_n] = n \in J_{\text{eff}}(G)$。

设 X 是带有 G-作用的光滑射影 k-簇，使得 $X^G = \varnothing$。若$[\![X]\!] \in \mathbb{L}^{<0}$，则 $-[\![X]\!] \in \mathbb{L}^{<0}$，因此由 (A.6) 可得 $-n[\![X]\!] \in J_{\text{eff}}(G)$。由于我们还有 $[\![X]\!] \in J_{\text{eff}}(G)$，利用 (A.4) 可推得 $J_{\text{eff}}(G)$ 包含由 $[\![X]\!]$生成的子群，从而证明了该命题。□

A.8. (8.1.6) 的证明表明 $J_{\text{eff}}(G \times \mathbb{G}_m) = J_{\text{eff}}(G)$。

A.9. **注**。 当 G 是有限对角化群，且 $p_1, \dots, p_n$ 是整数 $|G|$ 中与 k的特征不同的素因子时，我们有

$$J_{\text{eff}}(G) \cap \mathbb{L}^0 = \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i p_i | a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N} \Big\}.$$

结合 (A.8)、(A.7)、(8.1.8)，并考虑到 (A.5)，这就完全确定了 $J_{\text{eff}}(G)$，其中 G 是 k 上的有限型对角化群，且没有阶可被 k的特征整除的特征。

A.10. **定义**。 设 $d \in \mathbb{N}$。我们用 $\Delta^d_{\text{eff}}(G) \subset \mathbb{L}$ 表示那些类 $[\![X]\!]$构成的子集，其中 X 是一个光滑射影 k-簇，允许一个 G-作用，并满足 $\dim X^G = d$。

A.11. 对任意 $d \in \mathbb{N}$，我们有 $\Delta^d_{\text{eff}}(G) \cap \mathbb{L}^0 = \mathbb{N} \subset \mathbb{Z} = \mathbb{L}^0$。

A.12. 集合 $\Delta^d_{\text{eff}}(G)$ 在加法下稳定，并且对于每个 e， $f \in \mathbb{N}$， $\Delta^d_{\text{eff}}(G) \cdot \Delta^e_{\text{eff}}(G) \subset \Delta^{d+e}$有效$(G)$。

A.13. (8.2.2) 的证明表明， $\Delta^d_{\text{eff}}(G)$ 是由满足以下条件的类 $[\![X]\!]$ 构成的子集：其中X 是一个光滑射影 k-簇，具有一个 G-作用，使得 $\dim X^G \leq d$。

A.14. 根据 (A.13)，特别地，对于每个 $d \in \mathbb{N}$，我们有 $J_{\text{eff}}(G) \subset \Delta^d_{\text{eff}}(G)$。

A.15. 由 (A.13) 和 (8.1.2) 可知，对于每个 $i \in \mathbb{Z}$， $\Delta^d_{\text{eff}}(G)$ 中一个元素的次数为 i 的齐次分量仍属于 $\Delta^d_{\text{eff}}(G)$。

A.16. **引理**。 设 p、q 是两个不同的素数，且都不同于 k 的特征。那么对于每个 $d \in \mathbb{N}$，都有 $\Delta^d_{\mathrm{eff}}(\mu_{pq}) \cap \mathbb{L}^{<0} = \mathbb{L}^{<0}$。

证明。 由 (8.1.7)、(A.7) 和 (A.14) 可得。 □

A.17. **引理**。 设 G 是 k 上的有限可对角化群，并令 $q = |G|$。对于每个 $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$，存在一个纯维数为 i 的光滑射影 k-簇 Y_i，其带有一个 G-作用，使得 $c_{(i)}(Y_i) > 0$，且 维数$(Y_i)^G \leq \lfloor i/q \rfloor$。

证明。 设 $a = \lfloor (i+1)/q \rfloor$。选取一个映射 $\varphi\colon \{1, \dots, i+2\} \to G$，使得

$$|\varphi^{-1}\{g\}| \leq a+1 \text{ for every } g \in \widehat{G}. \tag{A.17.a}$$

这是可行的，因为

$$q(a+1) = q\lfloor (i+1)/q \rfloor + q \geq i+1-(q-1)+q = i+2.$$

对于 $j \in \{1, \dots, i+2\}$，令 $L_j = \mathcal{L}_{\varphi(j)}$。考虑 k 上的 G-等变向量丛

$$V = \bigoplus_{j=1}^{i+2} L_j,$$

以及带有诱导的 G-作用的射影空间 $\mathbb{P}(V) = \mathbb{P}^{i+1}$。不动点轨迹 $\mathbb{P}(V)^G$ 是以下射影空间的不交并

$$P_g = \mathbb{P}\Big(\bigoplus_{\varphi(j)=g} L_j \Big)$$

对于 $g \in \widehat{G}$（我们记 $\mathbb{P}(0) = \varnothing$）。条件 (A.17.a) 蕴含 $\dim \mathbb{P}(V)^G \leq a$。

现在令 $m = p^2 q$（我们需要 m 是一个可被 q 和 $m \geq 4$ 整除的 p 次幂）。对每个 $j \in \{1, \dots, i+2\}$，投影 $V \to L_j = \mathcal{L}_{\varphi(j)}$ 诱导出一个定义在 $\mathbb{P}(V)$ 上的 G-等变截面 x_j，其值属于 $\mathcal{O}(1) \otimes \mathcal{L}_{\varphi(j)}$。利用典范同构 $(\mathcal{L}_{\varphi(j)})^{\otimes m} = \mathcal{L}_{m\varphi(j)} = \mathcal{L}_0 = 1$，我们构造一个 G-等变截面

$$\sigma = \sum_{j=1}^{i+2} (x_j)^{\otimes m}$$

它属于定义在 $\mathbb{P}(V)$ 上的 G-等变线丛 $\mathcal{O}(m)$。此截面处处非零，其零点轨迹是一个光滑的 G-不变超曲面 $Y_i \subset \mathbb{P}(V)$，次数为 m（根据我们关于 k 的特征所作的假设）。对每个 $g \in G$，截面 σ 限制在 P_g 上后，是 $\mathcal{O}(m)|_{P_g}$ 的一个非零截面，因此 $Y_i \cap P_g$ 是 P_g 中一个（次数为 m）的超曲面。特别地，$(Y_i)^G = Y_i \cap \mathbb{P}(V)^G$ 在 $\mathbb{P}(V)^G$ 中处处稠密，因此

$$\dim (Y_i)^G \leq \dim \mathbb{P}(V)^G - 1 \leq a - 1 = \left\lfloor \frac{i+1}{q} \right\rfloor - 1 \leq \left\lfloor \frac{i}{q} \right\rfloor.$$

最后，由于 $m \geq 4$ 和 $i \geq 1$，根据 (2.2.5) 可得 $c_{(i)}(Y_i) > 0$。 □

A.18. **注**。 （A.17）中的关键情形是 $i = 1$、2。事实上，设 G 为任意代数群， $Q \subset G$ 为一个包含 0 的有限特征集。令 $q = |Q|$。对于$i \geq 3$，Milnor 超曲面 $Y_i = H_{2,\, i-1}$ （见（3.3.1））具有纯维数 i，满足$c_{(i)}$（Y_i） > 0 （根据（3.3.2））， 并带有一个 G-作用，使得 dim（Y_i）$^G \leq \lfloor i/q \rfloor$ （根据（3.3.3））。

另一方面，我们将在（A.20）中看到，当 $G = \mathbb{G}_m$ 且 $q \geq 2$时，不可能为$i = 1$构造这样的 Y_i。

A.19.**命题**。设 G 是 k 上的有限对角化群，并假设 $|G|$ 不是 k 的特征的幂。则对于每个 $d \in \mathbb{N}$

$$\Delta^d_{\text{eff}}(G) \cap \mathbb{L}^{<0} = \Delta^d(G) \cap \mathbb{L}^{<0}.$$

证明。由 (A.16)，不妨设 G 是一个有限对角化 p-群，其中 p 是一个不同于 k 的特征的素数。令 r 为 G 的秩，并设 $q = |G|$。由 (8.1.8)、(A.7) 和 (A.14) 可得

$$I_p(r) \cap \mathbb{L}^{<0} = J(G) \cap \mathbb{L}^{<0} = J_{\text{eff}}(G) \cap \mathbb{L}^{<0} \subset \Delta^d_{\text{eff}}(G).$$

由 (8.2.9) 和 (A.12)，只需证明

$$(F^d_q \mathbb{L}) \cap \mathbb{L}^{<0} \subset \Delta^d_{\text{eff}}(G). \tag{A.19.a}$$

设 $i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$。我们在 (3.3.3) 中已看到 $[\![\mathbb{P}^i]\!] = [\![H_{0,\ i+1}]\!] \in \Delta^{\lfloor i/q \rfloor}{}_{\text{有效}}(G)$。回想 (3.3.2)，$c_{(i)}(\mathbb{P}^i) = -i - 1 < 0$。因此，由 (A.17)，子集 $c_{(i)}(\Delta^{\lfloor i/q \rfloor}{}_{\text{有效}}(G)) \subset \mathbb{Z}$ 同时包含正整数和负整数。由于它在根据 (A.12) 加法下封闭，因此它是 $\mathbb{Z}$ 的一个子群。由 $c_{(i)}(\Delta^{\lfloor i/q \rfloor}{}_{\text{有效}}(G))$ 生成的子群是 $c_{(i)}(\Delta^{\lfloor i/q \rfloor}(G))$，根据 (3.3.4) 和 (2.1.11)，它与 $c_{(i)}(\mathbb{L}^{-i})$ 重合，由此可得

$$c_{(i)}(\Delta^{\lfloor i/q \rfloor}_{\text{eff}}(G)) = c_{(i)}(\mathbb{L}^{-i}). \tag{A.19.b}$$

根据 (3.4.7)，$(F^d_q \mathbb{L}) \cap \mathbb{L}^{-i}$ 中的每个元素都是形如 $\mathbb{L}^{-i_1} \cdots \mathbb{L}^{-i_n}$ 的元素之和，其中 $\lfloor i_1/q \rfloor + \ldots + \lfloor i_n/q \rfloor \leq d$ 且 $i_1 + \ldots + i_n = i$。鉴于 (A.12)，为了证明 (A.19.a)，只需证明对所有$i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$都有 $\mathbb{L}^{-i} \subset \Delta^{\lfloor i/q \rfloor}{}_{\text{有效}}(G)$，对此我们对 i 进行归纳法。给定一个满足 $i > 0$ 的元素 $x \in \mathbb{L}^{-i}$，根据 (A.19.b)，可找到一个 $y \in \Delta^{\lfloor i/q \rfloor}{}_{\text{有效}}(G)$，使得 $c_{(i)}(y) = c_{(i)}(x)$。由 (2.1.13) 可知，这意味着 $x - y \in \mathbb{L}^{-i}$ 在 $\mathbb{L}$ 中是可分解元。若 $i > 1$，则根据归纳法和 (A.12)，我们推出 $x \in \Delta^{\lfloor i/q \rfloor}{}_{\text{有效}}(G)$。若 $i = 1$，同样的结论也成立，因为此时 $x = y$。因此，我们已经证明了 (A.19.a)，从而完成了该命题的证明。□

A.20. **注**。(A.19) 的结论对 $G = \mathbb{G}_m$ 不成立。事实上，设 X 是一个带有 $\mathbb{G}_m$ 作用的光滑射影 k-簇。则由 [Ive72], 得 $\chi(X) = \chi(X^{\mathbb{G}_m})$，其中 χ 是欧拉数（即当 Y 是一个纯维数为 d 的光滑射影 k- 簇时，$\chi(Y) = \deg c_d(T_Y)$）。由于函数 χ 在零维簇上取正值，这意味着只要 $\chi(X) < 0$，就有 $\dim X^{\mathbb{G}_m} > 0$。因此，例如，集合 $\Delta^0_{\text{eff}}(\mathbb{G}_m)$ 不含类 $-[\![\mathbb{P}^1]\!]$，而根据 (8.2.7)，该类属于$\Delta^0(\mathbb{G}_m)$。

Appendix B. Glossary of notation

符号	参考描述	
$\mathbb{L}$	(2.1.2)	Lazard 环
$[+]$	(2.1.3)	形式和

符号	参考描述	
$[n]$	(2.1.3)	乘以 $n \in \mathbb{Z}$ 的形式乘法
$R[\mathbf{b}]$	(2.1.4)	R 分次代数 $R[b_1, \ldots]$
$\ell(\alpha)$	(2.1.6)	分拆的长度 α
$\lvert\alpha\rvert$	(2.1.6)	分拆的权重 α
b_α	(2.1.6)	与分拆 α相关的单项式 $R[\mathbf{b}]$
c_α	(2.1.6)	由 b_α系数给出的映射 $\mathbb{L} \to \mathbb{Z}$
ℓ_i	(2.1.11)	$\mathbb{L}$的选定多项式生成元集合
$\succeq$	(2.1.16)	分拆之间的细化关系
$c_\alpha(X)$	(2.2.2)	簇 X 关于分拆 α 的陈数
$[\![X]\!]$	(2.2.2)	簇 X在 $\mathbb{L}$中的配边类
$I_p(n)$	(2.3.1)	$\mathbb{L}$中的 Landweber 理想
u_i	(2.3.3)	幂级数 $[p](t)$ 的系数
v_n	(2.3.3)	$= u_{p^n-1}$, $I_p(\infty)$ 的生成元
$M_{(n)}$	(2.3.9)	$\mathbb{L}$模 M 关于子模 $I_p(n)M$ 的商
$\mathbb{L}_{(n)}(d)$	(2.3.11)	由次数为 $\geq -d$ 的元素生成的 $\mathbb{L}_{(n)}$ 子环
$N_{(n)}$	(2.3.12)	不具有 $p^m - 1$ 形式且满足 $m < n$ 的正整数集合
$N_{(n)}(d)$	(2.3.12)	$\leq d$ 中的整数集合
X^G	(3.1.1)	G 在簇 X 上的作用的不动点轨迹
$\widehat{G}$	(3.1.4)	G 的特征群
$\mathcal{L}_g$	(3.1.4)	G-等变线丛，定义在 k 上，由 $g \in$给出 $\widehat{G}$
$E(g)$	(3.1.5)	特征 g 对应的 G-等变向量的特征子空间
		丛 E，定义在具有平凡 G-作用的基空间上
$H_{m,n}$	(3.3.1)	$\mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^n$ 中的 Milnor 超曲面，维数为 $m+n-1$
X_i^+, X_i^-	(3.3.4)	具有 G 作用的显式簇（$i \in \mathbb{N} \smallsetminus \{0\}$）
$F_q^d \mathbb{L}_{(n)}$	(3.4.1)	q 的滤过 $\mathbb{L}_{(n)}$
$\deg_q P$	(3.4.5)	q多项式 P 的次数
Ω	(4.1.2)	代数配边（将特征指数求逆）
L	(4.1.4)	$= \mathbb{L}[c^{-1}]$ =$\Omega(k)$（其中 c 是 k 的特征指数）
$R[\mathbf{a}]$	(4.2.1)	分次多项式 R-代数在 a_i中 $_g$ 对于 $i \in \mathbb{N}$, $g \in \widehat{G} \smallsetminus \{0\}$
$\mathcal{M}$	(4.2.3)	$= L[\mathbf{a}]$, 的配边环（ $\widehat{G} \smallsetminus \{0\}$）-分次向量丛在
		光滑射影基上
$\mathcal{M}(d)$	(4.2.5)	由向量丛的类生成的 $\mathbb{Z}[c^{-1}]$-子代数（属于 $\mathcal{M}$）
		在维数为 $\leq d$ 的基底上
$\mathcal{M}^{\leq d}$	(7.2.8)	由向量丛的类生成的 $\mathbb{Z}[c^{-1}]$-子模（属于 $\mathcal{M}$）
		在维数为 $\leq d$ 的基底上
$[\![E \to X]\!]$	(4.2.3)	$\mathcal{M}$ 中 G-等变向量丛 $E \to X$的类，其中
		G 在 X 和 $E^G = 0$上作用平凡，且 X 光滑射影
$p_{i\,g}$	(4.2.7)	$[\![\mathcal{O}(1) \to \mathbb{P}^i]\!] \in \mathcal{M}$, 其中 G 通过 $g \in$作用于 $\mathcal{O}(1)$ $\widehat{G} \smallsetminus \{0\}$
Ω_G	(5.2.3)	等变代数配边理论（将 c 逆化）

符号	参考描述	
S	(7.0.2)	由以下对象的欧拉类生成的 $\Omega_G(k)$ 的乘法子集 G 的非平凡特征
C	(7.3.11)	$\Omega_G(k) \to S^{-1}\Omega_G(k)$的像
H_j	(6.2.1)	$= L[[t_1,\dots,t_j]]/([q_1](t_1)\dots,\ [q_j](t_j))$（附带 $H_r \simeq \Omega_G(k)$)
S_j	(6.2.1)	H_j 的乘法子集（含 $S_r \simeq S$）
C_j	(6.2.2)	$(H_j)_{(r-j)} \to S_j^{-1}\ (H_j)^{(r-j)}$ 的像（含 $C_r \simeq C$）
$[\![X]\!]_G$	(7.1.1)	G-簇 X 在 $\Omega_G(k)$ 中的等变配边类
$e(E)$	(7.2.1)	G-向量丛 $E \to X$ 在 $\Omega_G(X)$ 中的欧拉类
$e(-E)$	(7.2.3)	$E \to X$ 在 $S^{-1}\Omega_G(X)$ 中的逆欧拉类，当 $E^G = 0$ 时
n_i	(7.2.6)	$= [\![N_i^+ \to X_i^+]\!]_G - [\![N_i^- \to X_i^-]\!]_G$属于 $\mathcal{M}$
x_i	(7.2.6)	$= [\![X_i^+]\!]_G - [\![X_i^-]\!]_G$ 在 $S^{-1}\Omega_G(k)$
$J(G)$	(8.1.1)	由容许的簇类生成的 $\mathbb{L}$ 的子群 一个无不动点的 G-作用
$\Delta^d(G)$	(8.2.1)	由允许具有以下结构的簇类生成的 $\mathbb{L}$ 子群 具有维数为 d 的不动点轨迹的 a G-作用
$J_{\text{eff}}(G)$	(A.3)	$J(G)$ 的有效版本， $\mathbb{L}$ 的子集
$\Delta^d_{\text{eff}}(G)$	(A.10)	$\Delta^d(G)$ 的有效版本， $\mathbb{L}$ 的子集

References

[Ada74] J. Frank Adams. 稳定同伦与广义同调。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州—伦敦，1974年。芝加哥数学讲义。[Bou06] 尼古拉·布尔巴基。 ´El ´数学要素。交换代数。第 1 至 4 章。施普林格出版社，柏林，2006年。1985 年原版的重印本。[BtD78] Michael Bix 和 Tammo tom Dieck。 G流形的示性数与乘性归纳。《美国数学会会刊》，235:331–343，1978年。[DG11] Michel Demazure 和亚历山大·格罗滕迪克。群概形（SGA 3，第 I 卷），群概形的一般性质。《数学文献》（巴黎），7。法国数学会，巴黎，2011年。布瓦-马里代数几何研讨班 1962–64，1970 年法文原版的修订注释版。[EKM08] Richard Elman、Nikita A. Karpenko 和 Alexander S. Merkurjev。二次型的代数与几何理论。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，2008年。[Flo71] E. E. Floyd。没有不动点的（Z_p）^{k} 作用。《拓扑学》，10:327–336，1971年。[Hau19] Olivier Haution。涉及数值不变量的不动点定理。《组合数学》，155(2):260–288，2019年。[Hau20a] Olivier Haution。作用于射影簇的对角化 p群不可能恰好固定一个点。《代数几何杂志》，29:373–402，2020年。[Hau20b] Olivier Haution。簇的对合与陈数。《赫尔维提数学评论》，95(4):811–843，2020年。[Hau23] Olivier Haution。关于对合的代数配边环。《高等科学研究所科学年刊》（第 4 辑），56(4):981–1028，2023年。[Hau25] Olivier Haution。几何集中定理。《数学进展》，469:论文编号 110237，48 页，2025年。

[HML13] Jeremiah Heller 和 José Malagón-López。等变代数配边。《纯粹与应用数学杂志》，684:87–112，2013年。[Hoy15] Marc Hoyois。从代数配边到动机上同调。《纯粹与应用数学杂志》，702:173–226，2015年。[Ive72] Birger Iversen。环面作用于代数簇的不动点公式。《数学发明》，16:229–236，1972年。[KS78] Czes Kosniowski 和 Robert E. Stong。对合与示性数。《拓扑学》，17(4):309–330，1978年。[KS79] Czes Kosniowski 和 R. E. Stong。（Z_2）^{k}作用与示性数。《印第安纳大学数学杂志》，28(5):725–743，1979年。[Lan70] Peter S. Landweber。分类空间的相干性、平坦性与配边。载于《高等研究所代数拓扑研讨会论文集》（奥胡斯，1970），第 II 卷，第 256–269 页。奥胡斯大学，奥胡斯，1970年。[LM07] Marc Levine 和 Fabien Morel。代数配边。施普林格数学专著。施普林格出版社，柏林，2007年。[Mer02] Alexander S. Merkurjev。代数定向上同调理论。载于《代数数论与代数几何》，《当代数学》第 300 卷，第 171–193 页。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，2002年。[Mil17] J. S. Milne。代数群，《剑桥高等数学研究》第 170 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017年。[Pan03] Ivan Panin。代数簇的定向上同调理论。 K-理论，30(3):265–314，2003年。纪念 Hyman Bass 七十寿辰专刊。第三部分。[Pan09] Ivan Panin。代数簇的定向上同调理论。II（据 I. Panin 和 A. Smirnov）。《同调、同伦与应用》，11(1):349–405，2009年。[tD70] Tammo tom Dieck。没有不动点的有限阿贝尔 p群的作用。《拓扑学》，9:359–366，1970年。[tD71] Tammo tom Dieck。 G流形的示性数。I。《数学发明》，13:213–224，1971年。[tD72] Tammo tom Dieck。可定向流形上的周期映射。《数学杂志》，126:275–295，1972年。[Tho95] René Thom。Milnor 关于配边的工作。载于《布尔巴基研讨班》，第 5 卷，第 180 号报告，第 169–177 页。法国数学会，巴黎，1995年。[Tot99] Burt Totaro。分类空间的 Chow 环。载于《代数 K-理论》（华盛顿州西雅图，1997），《纯粹数学研讨会论文集》第 67 卷，第 249–281 页。美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。[Vis07] Alexander Vishik。代数配边中的对称运算。《数学进展》，213(2):489–552，2007年。[Vis16] Alexander Vishik。对所有素数的对称运算与代数配边中的 Steenrod 运算。《组合数学》，152(5):1052–1070，2016年。[Voe98] Vladimir Voevodsky。$\mathbb{A}^1$-同伦论。载于《国际数学家大会论文集》，第 I 卷（柏林，1998），特刊第 I 卷，第 579–604 页，1998年。[Voe02] Vladimir Voevodsky。任意特征下的动机上同调群同构于高阶 Chow 群。《国际数学研究通报》，(7):351–355，2002年。电子邮箱：olivier.haution at unimib.it

Dipartimento di Matematica e Applicazioni, Università degli Studi di Milano-Bicocca, via Roberto Cozzi 55, 20125 Milano, Italy