arXiv:2602.17741v1 [math.SP] 19 Feb 2026

关于图的顶点Seidel能量

Kalpesh M. Popat[a]，**Enide Andrade**[b]

[a]印度古吉拉特邦拉杰果德-
360005，萨乌拉什特拉大学数学系。

[b]数学与应用研究发展中心（*CIDMA*），阿威罗大学数学系，葡萄牙阿威罗 *3810-193*。

kalpeshmpopat@gmail.com, enide@ua.pt

摘要

我们通过 Seidel 矩阵绝对值的对角元引入顶点Seidel能量。我们建立了一个谱公式，计算了若干图族的精确值，推导了界，并给出了用于分析这一不变量的 Coulson 型积分表示。我们还证明，顶点Seidel能量在 Seidel 切换和取补图下保持不变。

关键词： Seidel 矩阵；图能量；顶点能量；库尔森积分公式。

2020年数学主题分类： 05C50；15A18。

1 引言

在简要介绍当前研究现状之前，我们先介绍本文中使用的记号和定义。设 G 是一个有 n个顶点的简单无向图，其邻接矩阵记为 $A(G)$。当顶点v_i 和 v_j 相邻时，我们简记为 $v_i \sim v_j$. 。矩阵 J_k 和I_k 分别表示阶数为 k的全1矩阵和单位矩阵。当阶数可由上下文确定时，我们分别简记为 J 和 I.。矩阵 B 的绝对值定义为 $|B| = (BB^{\star})^{1/2}$ ，其中 $B^{\star}$ 是其共轭转置。 B 的转置记为 $B^{\top}$ ；当B 为方阵时， B 的迹记为 $\mathrm{tr}(B)$。我们用 $\mathbb{F}_q$ 表示含有 q 个元素的有限域。我们用 $e_i \in \mathbb{R}^n$ 表示第 i个标准基

向量。两个向量 u、$v \in \mathbb{R}^n$ 的内积记为$\langle u$、$v\rangle$. 。完全图和完全二部图分别记为 K_n 和$K_{m、n}$。本文中，$\mathrm{i}=\sqrt{-1}$ 表示虚数单位。我们用 $S = S(G)$表示 G 的塞德尔矩阵，并用$S^{(i)}$ 表示删去第 i行和第 i列（对应于顶点 v_i）后得到的主子矩阵。设 $\Phi(\lambda)$表示 S的特征多项式，$\Phi_i(\lambda)$表示 $S^{(i)}$的特征多项式，即$\Phi(\lambda) := \det(\lambda I - S)$ $\Phi_i(\lambda) := \det(\lambda I - S^{(i)})$。$G$的塞德尔谱是 S 的特征值及其重数。当需要明确指出所涉及的图时，我们将 v_i 在 G中的顶点Seidel能量记为 $\mathcal{E}_S(v_i; G)$。

如果每个顶点的度都是 k，则称图为 k-正则图。若图 G 有 v 个顶点，是k-正则图，且每一对相邻顶点恰有 λ 个公共邻点、每一对不相邻顶点恰有 μ 个公共邻点，则称其为参数为（v, k, λ, μ）的强正则图。阶为 v 的会议图是参数为$\left(v,\ \frac{v-1}{2},\ \frac{v-5}{4},\ \frac{v-1}{4}\right)$. 的强正则图。对于满足 $q \equiv 1 \pmod 4$的素数幂，Paley图P_q 的顶点集为 $\mathbb{F}_q$，即含有 q 个元素的有限域；当且仅当$\overline{x-y}$ 是$\mathbb{F}_q$中的非零二次剩余时，两个不同顶点 x 和 y 相邻。Paley图是参数为 $v = q$的强正则图。如果一个图的自同构群在其顶点集上具有传递作用，则称该图为顶点传递图。设 G 为一个简单图。G的补图记为 G，它与 G有相同的顶点集，且当且仅当两个不同顶点在 G中不相邻时，它们在 G 中相邻。设 G 是顶点集为 V 的图，且 $X \subseteq V$。关于 X 进行Seidel切换后得到图 G^X，其中 X 与 $V \setminus X$ 之间的边被取补，而 X 内部及 $V \setminus X$ 内部的边保持不变。

谱图论与数学化学之间的相互作用催生了许多“能量”不变量。Gutman 的经典图能量 [7] 是邻接矩阵 $A(G)$ 的特征值绝对值之和。此后，这一概念得到系统化，并沿多个方向得以扩展；参见专著 [1, 4, 19]。

图 G 的 塞德尔矩阵 （顶点集为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$）是 $n \times n$矩阵 $S(G) = [s_{ij}]$，其定义为：对于所有 i，由 $s_{ii} = 0$ 给出；对于 $i \neq j$，由 $s_{ij} = -1$给出

若 $v_i \sim v_j$，否则为 $s_{ij} = 1$。等价地， $S(G) = J - I - 2A(G)$。若θ_1, ……， θ_n 是 $S(G)$ 的特征值，则 塞德尔能量 [18] 定义为

$$\mathcal{E}_S(G) := \sum_{j=1}^{n} |\theta_j|.$$

该不变量在文献中已被广泛研究；特别地，它在 Seidel 切换与图补下保持不变 [6, 12,13, 17, 18]。Haemers 提出猜想（Akbari 等人后来证明），即对每个阶为 n 的图，$\mathcal{E}_S(G) \geq 2n - 2$，且对 K_n [16, 18] 等号成立。

设 $M \in \mathbb{R}^{n\times n}$ 为具有谱分解$M = U\mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)U^\top$ 的实对称矩阵，其中 $U = [u_{ij}]$ 是正交归一的。则 $|M| =(M^2)^{1/2} = U\mathrm{diag}(|\lambda_1|, \ldots, |\lambda_n|)U^\top$。对 $1 \leq i \leq n$，用 φ_i 表示第 i 个坐标泛函 $\varphi_i(X) = e_i^\top X e_i$。在坐标 i 处的顶点 M能量（或当 M 为图矩阵时在顶点 v_i 处）为

$$\mathcal{E}_M(v_i) := \varphi_i\big(|M|\big) = |M|_{ii} = \sum_{j=1}^{n} u_{ij}^2\, |\lambda_j|.$$

总 M能量等于 $\mathrm{tr}\,|M| = \sum_{j=1}^{n} |\lambda_j|$，并满足 $\mathcal{E}(M) =\sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_M(v_i)$，因此各顶点能量构成总能量的划分。这一框架已广泛用于顶点能量研究：例如， [2, 3, 5, 8, 14, 15], 中的邻接顶点能量、 [9],中的拉普拉斯顶点能量，以及 [11]中的 Randi´c 顶点能量。

将矩阵能量框架具体应用于塞德尔矩阵 $S(G)$，我们引入顶点 v_i 的顶点*Seidel*能量；其形式化定义、谱表示，以及完全图、完全二部图和帕利图等标准图族的闭式表达见第 2 节。我们在第 3 节推导一般界，在第 4 节刻画顶点Seidel能量何时为常数，在第 5 节给出 Coulson 型积分公式，并在第 6 节讨论塞德尔切换与补图。

2 顶点Seidel能量

本节介绍本文的核心对象，记录其基本结构性质，并计算若干标准情形下的结果。

定义 1. 设 G 是一个具有 Seidel 矩阵 $S = S(G)$的简单图。对于顶点 v_i ，顶点*Seidel*能量 为

$$\mathcal{E}_S(v_i) := \big|S(G)\big|_{ii},$$

其中 $|S| = (S^2)^{1/2}$。等价地，若 $S = W\mathrm{diag}(\theta_1, \dots, \theta_n)W^\top$ 且 $W = [w_{ij}]$ 正交归一，则

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2 \, |\theta_j|.$$

T下一命题汇集了若干直接而有用的结构事实。

命题 1. 采用上述记号，总塞德尔能量可分解为

$$\mathcal{E}_S(G) = \operatorname{tr} |S| = \sum_{i=1}^{n} \mathcal{E}_S(v_i).$$

证明. 这是平凡恒等式 $\operatorname{tr}|S| = \sum_i |S|_{ii}$。等价地，将谱表示 $\mathcal{E}_S(v_i) = \sum_j w_{ij}^2 |\theta_j|$ 对 i 求和并利用$\sum_i w_{ij}^2 = 1$ ，可得 $\sum_i \mathcal{E}_S(v_i) = \sum_j |\theta_j| = \mathcal{E}_S(G)$。 ∎

命题 2. 设 G的塞德尔谱恰好有两个不同的绝对值 $a > b \geq 0$；等价地，谱包含于 $\{\pm a, \pm b\}$ （含重数）。那么对于每个顶点 v_i，

$$\mathcal{E}_S(v_i) \;=\; b + (a-b)\,\frac{n - 1 - b^2}{a^2 - b^2}. \tag{1}$$

证明。设 Π_a 表示到 S 对应于$|\theta| = a$的特征子空间上的谱投影算子。由于 S^2 仅有特征值 a^2 和 b^2，投影算子 Π_a 是 S^2的多项式；一种简便形式为

$$\Pi_a = \frac{S^2 - b^2 I}{a^2 - b^2}.$$

定义 $p_{ij}：=w_{ij}^2,\quad 1\le i,\ \ j\le n$. 则对每个顶点 v_i,

$$\mathcal{E}_S(v_i)=\sum_{j=1}^{n} w_{ij}^2\,|\theta_j|=\sum_j p_{ij}|\theta_j|=a\sum_{j:|\theta_j|=a} p_{ij}+b\sum_{j:|\theta_j|=b} p_{ij}.$$

令 $q_i=\sum_{j:\ |\theta_j|=a} p_{ij}=(\Pi_a)_{ii}$。由于 $\sum_j p_{ij}=1$，我们得到

$$\mathcal{E}_S(v_i)=aq_i+b(1-q_i)=b+(a-b)q_i.$$

利用投影算子的表达式,

$$q_i=(\Pi_a)_{ii}=\frac{[S^2]_{ii}-b^2}{a^2-b^2},$$

最后注意到，对于每个顶点 v_i，$[S^2]_{ii}=\sum_j S_{ij}^2=n-1$

$$\mathcal{E}_S(v_i)=b+(a-b)\,\frac{n-1-b^2}{a^2-b^2}.$$

■

双绝对特征值公式立即给出若干具体推论。

推论。对于完全图 K_n（其中 $n\ge 3$），每个顶点都有

$$\mathcal{E}_S(v_i)=\frac{2(n-1)}{n},\qquad i=1,\dots,n.$$

证明。完全图 K_n的塞德尔谱为 $1-n$和 1（重数为 $n-1$）。因此，两个不同的绝对特征值为 $a=n-1$和 $b=1$。利用命题 2，我们得到

$$\mathcal{E}_S(v_i)=1+(n-2)\frac{n-2}{(n-1)^2-1}=\frac{2(n-1)}{n},\qquad i=1,\dots,n.$$

■

推论。 对于完全二部图 $G = K_{r,\ s}$ 每个顶点都有

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \frac{2(r+s-1)}{r+s}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

证明。 设 $p = r + s$。$K_{r,s}$ 的塞德尔谱为 $p-1$ 和 -1 （重数为 $p-1$）。因此，两个绝对特征值为 $a = p-1$ 和$b = 1$。应用命题 2 得

$$\mathcal{E}_S(v_i) = 1+(p-2)\frac{p-2}{(p-1)^2-1} = \frac{2(p-1)}{p} = \frac{2(r+s-1)}{r+s}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

■

推论。 设 G是一个阶为 v的会议图。那么每个顶点都满足

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \frac{v-1}{\sqrt{v}} \qquad i = 1, \ldots, n.$$

证明。 对于会议图，其邻接谱为

$$k = \frac{v-1}{2}, \qquad \lambda_\pm = \frac{-1 \pm \sqrt{v}}{2} \quad \text{(each of multiplicity } (v-1)/2).$$

由于 $S = J - I - 2A$，全 **1** 向量 **1** 是 S 的一个特征向量，对应特征值 0，因为:

$$S\mathbf{1} = (v - 1 - 2k)\mathbf{1} = 0,$$

而 A 中任何与 **1** 正交、对应特征值 λ的特征向量，都会给出 S 的一个特征向量，对应特征值 $-1-2\lambda$。将此应用于 $\lambda = \lambda_\pm$，得到塞德尔谱 $\mp\sqrt{v}$，其每个特征值的重数均为 $(v-1)/2$，此外还有一个单重特征值 0。在命题 2 中取 $a = \sqrt{v}$和 $b = 0$，得到

$$\mathcal{E}_S(v_i) = 0 + (a-0)\,\frac{v-1-0}{a^2-0} = \frac{v-1}{\sqrt{v}}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

(同一公式也适用于满足 P_q $q \equiv 1$ （模 4）的帕利图 .) ■

3 顶点塞德尔能量的界

本节中，我们建立了若干基本界限，以约束顶点 Seidel 能量可能取到的值。

定理 3. 设 G 是一个阶为 n 的图。那么对于每个顶点 v_i,

$$\mathcal{E}_S(v_i) \le \sqrt{n-1}.$$

此外，当且仅当以下条件成立时，对每个顶点 v_i 等号成立

$$S^2 = (n-1)I_n.$$

证明. 令 $M := |S| = (S^2)^{1/2}$。矩阵 M 是对称半正定的，因此对于每个标准基向量 e_i，我们可以在 $\mathbb{R}^n$ 中对向量 Me_i 和 e_i 应用柯西–施瓦茨不等式：

$$\langle Me_i, e_i\rangle^2 \le \langle Me_i, Me_i\rangle\langle e_i, e_i\rangle.$$

左边等于 $\varphi_i(M)^2 = \big(|S|\big)_{ii}^2 = \mathcal{E}_S(v_i)^2$。右边等于 $e_i^\top M^2 e_i \cdot 1 = e_i^\top S^2 e_i = [S^2]_{ii} = n-1$。因此

$$\mathcal{E}_S(v_i)^2 \le n-1.$$

假设对每个 i 等号都成立。那么对于每个 i，我们有 $\mathcal{E}_S(v_i)^2 = [S^2]_{ii}$，即 $\langle Me_i,\ e_i\rangle^2 = \langle Me_i,\ Me_i\rangle\langle e_i,\ e_i\rangle$. 根据柯西–施瓦茨不等式的等号条件，向量 Me_i 和 e_i 线性相关；因此存在 $\lambda_i \in \mathbb{R}$，使得 $Me_i = \lambda_i e_i$。于是 M 在标准基下是对角矩阵，且 $M = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$。接着

$$[S^2]_{ii} = e_i^\top M^2 e_i = \lambda_i^2 = n-1,$$

因此 $\lambda_i = \sqrt{n-1}$（因为 M 是半正定的）。所以 $M = \sqrt{n-1}\, I_n$，等价地，$|S| = \sqrt{n-1}\, I_n$。平方后得到 $S^2 = (n-1)I_n$。反之，若 $S^2 = (n-1)I_n$，则 $|S|^2 = S^2 = (n-1)I_n$，从而对于每个 i，$|S| = \sqrt{n-1}\, I_n$ 且 $\mathcal{E}_S(v_i) = \sqrt{n-1}$。 ∎

注记。代数等号条件为 $S^2 = (n-1)I$。任何其 Seidel 矩阵满足该矩阵方程的图，都在每个顶点处达到 $\mathcal{E}_S(v_i) = \sqrt{n-1}$。这类 Seidel 矩阵恰好是对角线为零且平方等于 $(n-1)I$ 的对称 $(0,\ \pm 1)$-矩阵；文献中通常称其为 对称会议矩阵 [10]。本文不在此断言对所有 n都存在这类矩阵；相反，我们指出，当这类矩阵存在时，它们为定理 3 提供了紧性。

等号示例。下面的两个小图展示了等号情形 $S^2 = (n-1)I_n$。在每个示例中，所示的 Seidel 矩阵满足$S^2 = (n-1)I_n$，因此 $|S| = \sqrt{n-1}\, I_n$，且每个顶点都达到逐顶点 Seidel 能量 $\sqrt{n-1}$。各顶点的数值能量标注在节点内。

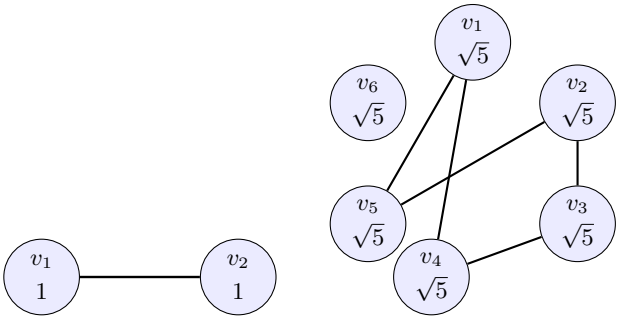


图 1。左：K_2，其顶点 Seidel 能量为 $\sqrt{1} = 1$。右：一个 6 阶会议型示例，其顶点 Seidel 能量为 $\sqrt{5}$。

定理 4。设 G 是一个阶数为 $n \geq 2$ 的图。那么对于每个顶点 v_i，

$$\mathcal{E}_S(v_i) \;\geq\; \frac{(n-1)^{3/2}}{\sqrt{[S^4]_{ii}}}.$$

证明。令 $\theta_1, \ldots, \theta_n$ 为 Seidel 特征值，并选取一个标准正交特征基，使得 $S = W\,\mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n)W^{\top}$，其中 $W = [w_{ij}]$。设 $a_j =$

$|\theta_j| \geq 0,\ p_j = w_{ij}^2 \geq 0$, 使得 $\sum_{j=1}^n p_j = 1$。于是

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \sum_{j=1}^n p_j a_j, \qquad [S^2]_{ii} = \sum_{j=1}^n p_j a_j^2, \qquad [S^4]_{ii} = \sum_{j=1}^n p_j a_j^4.$$

观察以下恒等式

$$\sum_{j=1}^n p_j a_j^2 \ = \ \sum_{j=1}^n (p_j a_j)^{2/3} \, (p_j a_j^4)^{1/3}.$$

对非负数列 $x_j := (p_j a_j)^{2/3}$ 和 $y_j := (p_j a_j^4)^{1/3}$, 使用指数为 $p = 3/2$ 和 $q = 3$ 的 H¨older 不等式。H¨older 不等式给出

$$\sum_{j=1}^n x_j y_j \leq \Big(\sum_{j=1}^n x_j^{3/2} \Big)^{2/3} \Big(\sum_{j=1}^n y_j^3 \Big)^{1/3}.$$

计算这些和,

$$\sum_{j=1}^n x_j^{3/2} = \sum_{j=1}^n (p_j a_j)^{(2/3)\cdot(3/2)} = \sum_{j=1}^n p_j a_j = \mathcal{E}_S(v_i),$$

$$\sum_{j=1}^n y_j^3 = \sum_{j=1}^n (p_j a_j^4)^{(1/3)\cdot 3} = \sum_{j=1}^n p_j a_j^4 = [S^4]_{ii}.$$

因此

$$\sum_{j=1}^n p_j a_j^2 \leq \mathcal{E}_S(v_i)^{2/3} \, [S^4]_{ii}^{1/3}.$$

整理可得

$$\mathcal{E}_S(v_i) \geq \frac{\big(\sum_{j=1}^n p_j a_j^2 \big)^{3/2}}{\big(\sum_{j=1}^n p_j a_j^4 \big)^{1/2}} = \frac{[S^2]_{ii}^{3/2}}{\sqrt{[S^4]_{ii}}} = \frac{(n-1)^{3/2}}{\sqrt{[S^4]_{ii}}}$$

■

4 顶点Seidel能量何时为常数?

上文讨论的具体图族——完全图、完全二部图以及佩利图/会议图——都具有每个顶点的塞德尔能量相同这一特征。这引出一个自然的问题：哪些结构性质会迫使这种恒定性？关键在于，仅有正则性并不足够。

例如，图4中6阶的非正则会议型图尽管度不相等，其顶点 Seidel 能量却完全相同。反之，对彼得森图作微小扰动会得到一个连通三正则图，其顶点 Seidel 能量并不全部相等：此时度序列是均匀的，但特征向量权重分布并不均匀，因此 $|S|$的对角元互不相同。这些例子表明，这种恒定性是一种谱现象，而非仅仅由度正则性所导致。

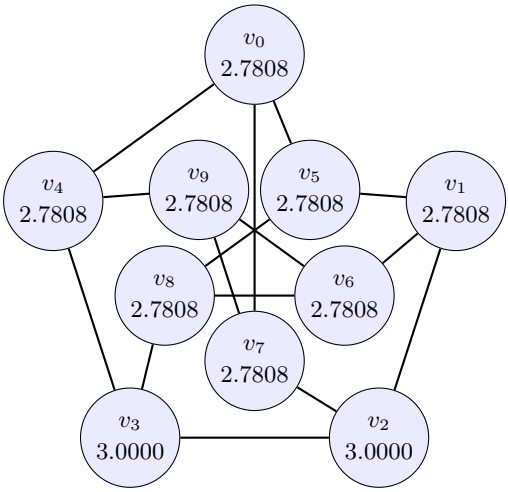


图2. 具有非常数顶点Seidel能量的连通三正则图（修改后的彼得森图）。

以下列出三种（并非穷尽）能确保顶点 Seidel 能量为常数的结构机制。对具有恒定顶点 Seidel 能量的图进行完整刻画，仍是一个开放问题。**(i)** 若 $S^2 = \alpha I$ 对于某个$\alpha > 0$，则 $|S| = \sqrt{\alpha}\, I$ 和 $\mathcal{E}_S(v_i) = \sqrt{\alpha}$ 对于每个顶点 v_i 都成立 ——会议图是主要例子—— 。**(ii)** 若 Seidel 谱仅有两个

不同的绝对值，则每个顶点的 Seidel 能量都是这些值的相同凸组合；这涵盖了完全图、完全二分图和帕利图。

(iii) 如果 G 是顶点传递的，则 $|S|$ 具有恒定对角线，因此所有顶点都具有相同的塞德尔能量。

5 Coulson 型积分表示

本节推导顶点Seidel能量的 Coulson 型积分表示（用 Seidel 矩阵的特征多项式及其主子式表示）。这类公式源于化学图论，其中 Coulson 积分公式用图的特征多项式表示图能量。

定理 5. 设 G 是一个图，其 *Seidel* 矩阵为 S。对于任意顶点 v_i，

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \mathrm{i}t\,\frac{\Phi_i(\mathrm{i}t)}{\Phi(\mathrm{i}t)}\right)dt,$$

其中*“p.v.”*表示柯西主值。

证明。 设 θ_1，……， θ_n 是 S的（实）特征值，并设 $\{w_k\}_{k=1}^{n}$ 是满足 $w_k = (w_{k,\,1}$，……， $w_{k,\,n})^{\top}$的特征向量的一个正交归一基。则

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \sum_{k=1}^{n} |\theta_k|\,(w_{k,i})^2.$$

我们首先证明这个标量恒等式

$$|\theta| = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1 - \frac{\mathrm{i}t}{\mathrm{i}t - \theta}\right)dt$$

对所有实数 θ 均成立。若 $\theta = 0$，则被积函数恒为零，等式两边也均为零，因此不妨设 $\theta \neq 0$。记

$$1 - \frac{it}{it-\theta} = \frac{it-\theta-it}{it-\theta} = \frac{-\theta}{it-\theta} = \frac{\theta}{\theta-it}.$$

因此

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{it}{it-\theta}\right)dt=\theta\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\theta-it}.$$

Now

$$\frac{1}{\theta-it}=\frac{\theta+it}{\theta^2+t^2}=\frac{\theta}{\theta^2+t^2}+i\,\frac{t}{\theta^2+t^2}.$$

第二项是关于 t 的奇函数，因此它在 $\mathbb{R}$ 上的柯西主值积分为零。因此

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\theta-it}=\theta\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dt}{\theta^2+t^2}=\theta\cdot\frac{\pi}{|\theta|}=\pi\,\frac{\theta}{|\theta|}.$$

结合上述两个公式可得

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\frac{it}{it-\theta}\right)dt=\theta\cdot\pi\,\frac{\theta}{|\theta|}=\pi|\theta|,$$

再除以 π，得到恒等式。
将此恒等式乘以 $(w_{k,i})^2$ 并对 k 求和，可得

$$\mathcal{E}_S(v_i)=\frac{1}{\pi}\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\mathrm{i}t\sum_{k=1}^{n}\frac{(w_{k,i})^2}{\mathrm{i}t-\theta_k}\right)dt,$$

注意到预解式的有限谱展开

$$(\mathrm{i}tI-S)^{-1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\mathrm{i}t-\theta_k}\,w_kw_k^{\top},$$

我们得到

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(w_{k,i})^2}{\mathrm{i}t-\theta_k}=\big((\mathrm{i}tI-S)^{-1}\big)_{ii}.$$

最后，由伴随矩阵与行列式恒等式可得

$$\big((\mathrm{i}tI-S)^{-1}\big)_{ii}=\frac{\det(\mathrm{i}tI-S^{(i)})}{\det(\mathrm{i}tI-S)}=\frac{\Phi_i(\mathrm{i}t)}{\Phi(\mathrm{i}t)}.$$

将其代入上面的积分表达式，得到

$$\mathcal{E}_S(v_i)=\frac{1}{\pi}\,\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\left(1-\mathrm{i}t\,\frac{\Phi_i(\mathrm{i}t)}{\Phi(\mathrm{i}t)}\right)dt.$$

例 1. 设 $G = K_n$。则 $S = I - J$，并且采用通常的代换$a = \mathrm{i}t - 1$，$\mathrm{i}tI - S = aI + J$. 根据 Sherman–Morrison 公式，

$$(aI + J)^{-1} = \frac{1}{a} I - \frac{1}{a(a+n)} J,$$

因此，对角预解式元素等于

$$\big((\mathrm{i}tI - S)^{-1}\big)_{ii} = \frac{1}{a} - \frac{1}{a(a+n)} = \frac{a+n-1}{a(a+n)}.$$

因此，定理 5 中出现的被积函数为

$$1 - \mathrm{i}t\,\frac{a+n-1}{a(a+n)} \;=\; 1 - \mathrm{i}t\,\frac{\mathrm{i}t - 1 + n - 1}{(\mathrm{i}t-1)(\mathrm{i}t-1+n)} \;=\; \frac{n-1}{(t+\mathrm{i})\big(t - \mathrm{i}(n-1)\big)}.$$

被积　函数是一个有理函数，在 $t = -\mathrm{i}$ 处有简单极点（下半　-

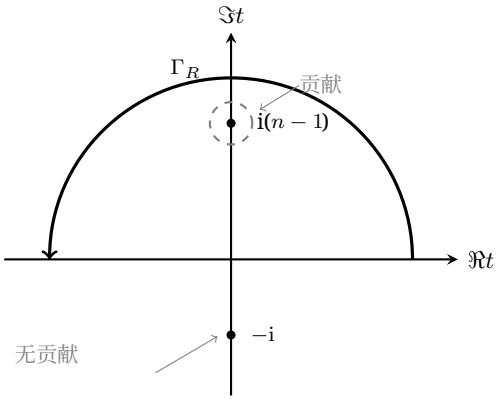


图 3. Coulson 积分在复　t 平面上的围道。位于　$t = \mathrm{i}(n-1)$ 的极点（上半平面）被围住，并通过其留数产生贡献；位于下半平面的极点　$t = -\mathrm{i}$ 不产生贡献。

平面）和 $t = \mathrm{i}(n-1)$（上半平面）。用上半平面内的大半圆闭合积分路径，会得到 $t = \mathrm{i}(n-1)$处的留数；由于被积函数按 $O(t^{-2})$衰减，半圆上的积分贡献趋于零

当 $|t| \to \infty$时。

$$\text{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{n-1}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i}(n-1))}\,dt = 2\pi\mathrm{i}\ \operatorname{Res}\left(\frac{n-1}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i}(n-1))},\, t=\mathrm{i}(n-1)\right).$$

由于极点 $t=\mathrm{i}(n-1)$ 是简单极点，其留数等于

$$\operatorname{Res}\left(\frac{n-1}{(t+\mathrm{i})(t-\mathrm{i}(n-1))},\, t=\mathrm{i}(n-1)\right) = \frac{n-1}{\mathrm{i}(n-1)+\mathrm{i}} = \frac{n-1}{\mathrm{i}n} = -\frac{\mathrm{i}(n-1)}{n}.$$

因此，围道积分等于

$$2\pi\mathrm{i}\cdot\left(-\frac{\mathrm{i}(n-1)}{n}\right) = \frac{2\pi(n-1)}{n},$$

再按定理 5 中的方式除以 π，得到逐顶点能量

$$\mathcal{E}_S(v_i) = \frac{2(n-1)}{n}.$$

6 塞德尔切换与补图

塞德尔切换和图补自然地作用于 Seidel 矩阵，并保持 $|S|$ 的谱不变，因此也保持顶点 Seidel 能量不变。本节将证明，这两种操作都不会改变顶点 Seidel 能量。

设 G 是一个图，其顶点集为 V，且 $X \subseteq V$。考虑 $D_X := \mathrm{diag}(d_1, \ldots\ldots, d_n)$ 是对角矩阵，其中当顶点 v_i 属于 X 时，$d_i = -1$；否则，$d_i = 1$。那么，G 和 G^X 的 Seidel 矩阵满足

$$S(G^X) = D_X\, S(G)\, D_X.$$

定理 6. 设 G 是一个 n 顶点图，G^X 是 G 关于 X 的 *Seidel*切换。那么对于每个顶点 v_i

$$\mathcal{E}_S(v_i; G^X) = \mathcal{E}_S(v_i; G).$$

证明。 记为 $S = S(G)$。切换时使用 $D = D_X$。由于 D 是对角矩阵

其对角元为 ± 1，因此有 $D^{-1} = D$ 和 $D^2 = I$，且 $S' = S(G^X)$ $= DSD$.因此

$$S'^2 = DS^2D, \qquad |S'| = (S'^2)^{1/2} = D(S^2)^{1/2}D = D\,|S|\,D,$$

其中，中间的等式由谱分解下的共轭变换得到。取对角元可得

$$|S'|_{ii} = e_i^\top D|S|De_i = d_i^2\,|S|_{ii} = |S|_{ii},$$

因此，对每个 i，$\mathcal{E}_S(v_i;\, G^X) = |S'|_{ii} = \mathcal{E}_S(v_i;\, G)$。 ■

定理 7. 设 G 为一个图，G为其补图。那么对每个顶点 v_i

$$\mathcal{E}_S(v_i; \overline{G}) = \mathcal{E}_S(v_i; G),$$

证明。利用 $S(G) = J - I - 2A(G)$ 和 $A(\overline{G}) = J - I - A(G)$，我们得到

$$S(\overline{G}) = J - I - 2A(\overline{G}) = J - I - 2(J - I - A(G)) = -S(G).$$

因此，$S(\overline{G})$ 是 $S(G)$ 的相反数。特别地，如果

$$S(G) = W\,\mathrm{diag}(\theta_1, \ldots, \theta_n)W^\top$$

具有正交的 W，则

$$S(\overline{G}) = W\,\mathrm{diag}(-\theta_1, \ldots, -\theta_n)W^\top.$$

因此，$S(G)$ 和 $S(\overline{G})$具有相同的特征向量，而它们的特征值互为相反数。因此，G 和 G的权重矩阵 P 相同，并且

$$|S(\overline{G})| = |-S(G)| = |S(G)|.$$

由此可知，对于每个顶点 v_i,

$$\mathcal{E}_S(v_i; \overline{G}) = \big|S(\overline{G})\big|_{ii} = \big|S(G)\big|_{ii} = \mathcal{E}_S(v_i; G).$$

■

7 结语。

顶点Seidel能量对塞德尔能量进行了自然的顶点级细化，融合了谱、组合和解析观点。本文所得结果表明，这一不变量具有显式公式、有意义的界以及高效的解析表示，并为进一步研究开辟了多个方向。

致谢。 E.Andrade 的研究得到了 CIDMA（https: // ror.org/05pm2mw36）的支持，该项目隶属于葡萄牙科学技术基金会（FCT，https://ror.org/00snfqn58），资助编号为 UID/04106/2025 和 UID/PRR/04106/2025。

参考文献

[1] A. E. Brouwer, W. H. Haemers，《图的谱》，施普林格，2012 年。[2] C. Dede, K. M. Popat，双图和二部双覆盖中的顶点能量不变性，《组合学与优化通讯》(2025)。https://doi.org/10.22049/cco.2025.30721.2592[3] C. K. Shrikanth, H. T. Sharathkumar, N. Narahari, H. M. Nagesh, U. V. Chandra Kumar，若干整数图的顶点能量，《工业数学国际期刊》17 (2025), 2550014。[4] D. Cvetkovi´c, P. Rowlinson, S. Simi´c，《图谱理论导论》，剑桥大学出版社，2010 年。[5] H. M. Nagesh, U. V. Chandra Kumar, N. Narahari，正则图结构中的顶点能量分布，arXiv:2508.11970 (2025)。[6] H. S. Ramane, I. Gutman, M. M Gundloor，正则图迭代线图的塞德尔能量，《克拉古耶瓦茨数学杂志》，39(1) (2015) 7–12。[7]I. Gutman，图的能量，《格拉茨研究中心数学与统计部门报告》103 (1978)，1–22。

[8] I. Gutman, B. Furtula，计算图的顶点能量——教程，《MATCH 数学、计算与化学通讯》93 (2025)，691–698。[9] J. Guerrero，顶点拉普拉斯能量，《线性代数及其应用》706 (2025)，124–143。[10] J. J. Seidel，二图综述，载于：《组合理论国际学术研讨会论文集》(罗马，1973)，林琴国家科学院，罗马，1976 年，第 481–511 页。[11] J. G. Idweep, J. Buragohain, A. Bharali, E. Devi，顶点的兰迪克能量，arxiv.org/abs/2509.22539 (2025)。[12] M. R. Oboudi，图的能量与塞德尔能量，《MATCH 数学、计算与化学通讯》75 (2016) 291–303。[13] M. R. Oboudi, M. A. Nematollahi，改进图的塞德尔能量下界，《MATCH 数学、计算与化学通讯》89 (2) (2023) 489–502。[14] O. Arizmendi, B. C. Luna-Olivera, M. R. Ram´ırez Ib´a˜nez，图的顶点能量库尔森积分公式，《线性代数及其应用》580 (2019)，166–183。[15] O. Arizmendi, J. F. Hidalgo, O. Juarez-Romero，顶点能量，《线性代数及其应用》557 (2018)，464–495。[16] S. Akbari, M. Einollahzadeh, M. M. Karkhaneei, M. A. Nematollahi，关于图的塞德尔能量猜想的证明，《欧洲组合学杂志》86 (2020) 103078。[17] S. K. Vaidya, K.M. Popat，关于塞德尔等能图的新结果，《庆北数学杂志》59 (2019) 335–340。[18]W. H. Haemers, X. Huang，Seidel 切换与图能量，《MATCH 数学、计算与化学通讯》68 (2012)，653–659。[19] X. Li, Y. Shi, I. Gutman，《图能量》，施普林格，纽约，2012 年。