arXiv:2602.17752v1 [math.PR] 19 Feb 2026

一种关于集中性的逻辑方法

Michael Benedikt* Maksim Zhukovskii†

摘要

集中性结果表明，一列随机变量会逐渐集中于均值附近。这类结果常见于随机图函数的研究中。我们引入一种带有多种图上聚合算子（包括求和）的实值逻辑，并证明：在经典 Erd˝os–R´enyi 随机图模型中，将语言中的每个项视为随机图上的随机变量时，该随机变量都是集中的。对于 Erd˝os–R´enyi 图的稠密变体和稀疏变体，我们都证明了这一点。一方面，我们的结果拓展了由 Fagin 和 Glebskii等人开创的关于稠密随机图零一律的研究方向，以及 Shelah 和 Spencer 零一律关于稀疏随机图的研究。另一方面，这些结果也可视为用于推断随机图上集中性结果的元定理；我们给出了这类应用的示例。

1 引言

对于一列实值随机变量 ξ_n，如果它依概率收敛于 1（当 $n \to \infty$ 时），我们就称其集中于期望值 $\mathbb{E}\xi_n$，或简称为集中，其中 $\xi_n/\mathbb{E}\xi_n$。本文研究最常见的 Erd˝os–R´enyi（或二项式）随机图模型，记作 $G(n,p)$：来自一个含有 n 个顶点的集合的任意一对顶点之间的边，都以概率 $p = p(n)$ 独立于其他边出现。将图映射到实数的函数 τ 在 $G(n,p)$ 上取值，会诱导出一列随机变量；如果这些随机变量集中，我们就称 τ 集中。许多自然的图函数（例如子图计数）已知在广泛的 $p = p(n)$ 范围内，于 $G(n,p)$ 中集中：例如，当 $n \to \infty$ [41] 时，所有满足 $pn \to \infty$ 的 p 所对应的三角形数量都会集中；而当 $n \to \infty$ [6, 7, 22]时，所有满足 $pn/\ln n \to \infty$ 的 p 所对应的最大度都会集中。

对于不同的图特征以及 p 的各种取值范围，集中性现象已得到广泛研究。特别是，当 p 超过某个阈值时，

- 对于每个图 H，在 $G(n,\ p)$ 中与 H 同构的子图 X_H 的数量会集中于 [41]，
- 对于每个带有指定根集合的图 H，在 $G(n,\ p)$ 中，根集合的“H-扩张”的最大数量会在 p 超过某个阈值 [45] 时集中（例如，最大度是一个顶点的 H-扩张的最大数量，其中 H 有两个顶点、一条单边和一个根）。

围绕集中性现象，还有许多其他自然方向已得到深入研究，例如尾界、积分极限定理和局部极限定理，参见例如 [5, 11, 19,25, 26, 41, 42]。

*计算机科学系，牛津大学，英国牛津 OX1 3QD
†计算机科学学院，谢菲尔德大学，英国谢菲尔德 S1 4DP

在本文中，我们提出一种基于逻辑的广泛方法来获得集中性结果。我们定义了一种实值逻辑，其中的项表示实值图函数。该语言在一大类实值函数下封闭——它们是布尔联结词的实值类比。该语言还在求和聚合以及最小与最大聚合下封闭；后两者是存在量化与全称量化的实值类比。我们的主要结果表明，当 $p =$ 为常数或 $p = n^{-\alpha}$时，该语言中的每个项都具有集中性，其中 $\alpha \in (0, 1)$ 是无理数。此外，我们证明，在对联结词施加某些限制时，只要一个项有界，其期望就可以用多项式逼近，并且会收敛到一个常数。这一结果涵盖了前文提到的子图计数和最大扩展的集中性结果。因此，我们的结果可视为关于集中性的元定理：它们既能推出文献中关于随机图的若干集中性结果，也能用于生成新的集中性结果。

另一方面，我们的结果可以放在关于随机图逻辑的长期研究脉络中来看。这些结果大多涉及一阶（FO）逻辑，并侧重于收敛。这一研究脉络始于 Fagin [14] 和 Glebskii等人 [15], 的工作，他们证明，对于 $p =$常数，图上的一阶逻辑中任意句子的概率都趋于零或一：也就是说， $G(n,p)$ 遵循一阶零一律。后续研究为其他布尔值逻辑建立了零一律（当 $p =$ 为常数时）， [28], 一阶零一律以及适用于各种$p = p(n)$增长率的 $G(n,p)$收敛律； [33, 44, 48], 还研究了一阶逻辑片段 [37, 51, 52, 53], 以及其他随机图模型[12, 18, 20, 27, 34, 35, 38]的相关性质。 $G(n,p)$是否满足一阶零一律取决于p的取值：

- 当 $p = n^{o(1)}$ （特别是当 p为常数时） [15, 14, 46]，它满足一阶零一律；
- 对于 $p = n^{-\alpha}$，其中 $\alpha \in (0, 1]$, 当且仅当 α 为无理数时，它满足该定律 [44, 33]。

情形 $\alpha > 1$ 在一阶极限律的背景下也得到了充分研究 [44] ，并非本文的重点：在这一范围内，高概率下随机图是无环的，并且对于每棵树 T，与其同构的连通分量数量的渐近行为 T 已得到充分理解。对于任意有理数 $\alpha \in (0, 1)$，都存在一阶逻辑句子，使得其成立的概率不收敛（因此，也不可能在我们的语言中得到集中性结果）。我们强调，实值逻辑中项的收敛性也已得到研究 [1, 2, 23, 29, 30]。这些结果并未对集中性提供任何见解；关于这些结果与我们工作的详细比较，请参见第 3节。

组织结构。在第2节中，我们介绍所用的语言，并回顾所需的图论与概率背景。第3 节讨论相关工作，并将以往结果与我们的贡献进行比较。该比较的技术细节将在后文第7节中说明。第4节讨论保持集中性的联结函数类别及其性质。第5节和6节将进一步利用这些性质，并陈述和证明我们的主要结果——稠密和稀疏随机图中闭项的集中性。在第6.2节中，我们陈述另一项结果，将收敛定律从 [2] 推广到稀疏 $G(n, n^{-\alpha})$（其中具有无理数α）。第8 节提出相关研究方向，并讨论一些尚未解决的未决问题。

记号与约定。给定一个正整数 n，我们将 $[n]$ 记作集合 $\{1, \ldots, n\}$。对于正整数 n 和 $k \leq n$ ，我们记 $(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!}$。对于集合 X 和正整数 k，我们将由 X中互不相同的元素构成的 k元组的集合记作 $(X)_k$ 。因此，如果 X 是有限集合，那么 $(|X|)_k$ 就是 $(X)_k$的基数。带上划线的变量（例如 $\bar{v}$）表示任意长度的有限元组

为 $|v|$。有时，我们会将 v 同时用于表示元组本身，或表示构成该元组的元素所组成的集合。

2 预备知识

图。图 G $V\ G$ $E\ G\ \subseteq$由一个有限的顶点集合 $\binom{V\ G}{2}$ u $\mathcal{N}\ u\ =\{u\in V\ G\ \mid\{u,v\}\in E\ G\ \}$ （）和一个无向边集合（） （）组成，且没有自环。对于任意顶点，其邻域为（）：（） （）。

定义 2.1（多根图 $F[x]$）。一个多根图（MRG）是一个图 F，以及一个由特定顶点组成的元组 $x=(x_1,\ldots\ldots,\ x_k)\in(V(F)\ )_k$，称为根。我们用 $F[x]$ 表示这样的 MRG。我们称 MRG $F[x]$ 和 $G[u]$ 同构，若对于某个正整数 k，存在一个同构 $f\colon\ V(F)\ \to V(G)$，它是（无根）图 F 和 G 之间的同构，且对每个 $i\in[k]$，都有 $f(x_i)\ =u_i$。

注意，在本论文中，所有图，因而所有 MRG，都是有限的。图论中的通常概念以自然的方式推广到 MRG。

定义 2.2 (诱导子图). 给定一个图 G 及其顶点的一个集合 $U\subset V(G)$，我们令 $G\restriction U$ 表示 G 在集合 U 上的诱导子图，即 $G\restriction U$ 以 U 为顶点集，并以 G 中两端点均位于 U 的所有边为边集。

概率论背景。在所有概率陈述和参数中，我们始终假设存在某个我们未显式定义的基础概率空间。当随机变量 X 的分布为 Q 时，我们记作 $X\sim Q$。

定义 2.3 (高概率). 我们称事件序列 $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 高概率（简记为 w.h.p.）成立，如果 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(A_n)\ =1$。

定义 2.4（收敛）。设 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个随机变量序列，X 是一个随机变量。我们称

- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 依概率收敛到 X，记作 $X_n\xrightarrow{P}X$，若对每个 $\varepsilon>0$，几乎处处都有 $.\ |X_n-X|\leq\varepsilon$；
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 依分布收敛到 X，记作 $X_n\xrightarrow{d}X$，若 X_n 的分布弱收敛到 X 的分布，也就是说，对每个连续有界实值 f，都有 $\mathbb{E}f(X_n)\ \to\mathbb{E}f(X$；
- $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛于 L_p 到 X，对某个 $p>0$ 成立，记作 $X_n\xrightarrow{L_p}X$，若 $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}|X_n-X|^p=0$。

我们记得，L_p 中的收敛强于依概率收敛，而依概率收敛又强于依分布收敛。

定义2.5（均值附近集中）。若随机变量序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 集中于其均值附近，则称其具有集中性；如果对任意 $p>0$，当 $X_n/\mathbb{E}X_n\xrightarrow{L_p}1$ 时，$n\to\infty$。

Erd˝os–R´enyi 随机图。设 $p=p(n)\ \in(0,\ 1)$ 是 $n\in\mathbb{Z}_{>0}$ 的一个函数。Erd˝os– R´enyi 随机图 $G(n,\ p)$ 是定义在顶点集合 $[n]$ 上的所有图构成的集合上的一个分布，定义如下：任意两个不同的 $i,\ j\in[n]$ 之间的每条边都以概率 $p(n)$ 出现，且彼此独立。也就是说，若 $\mathbf{G}_n\sim G(n,\ p)$，那么对于 $[n]$ 上的每个图 G，都有 $\mathbb{P}(\mathbf{G}_n=G)\ =p^{|E(G)|}(1-p)(\binom{n}{2})^{-|E(G)|}$。我们列举 Erd˝os–R´enyi 随机图中 p 增长率的几种特殊情形，这些情形在逻辑极限定律的背景下尤其值得关注：

- 稠密： p 是一个常数；
- 无理数稀疏：（或者直接说“稀疏”，因为这是我们讨论的唯一稀疏情形） $p = n^{-\alpha}$，其中 $0 < \alpha < 1$ 是无理数。

带聚合算子的实值逻辑。我们介绍将要分析的实值逻辑。设 $\mathcal{F}$ 是从 $\mathbb{R}^m$ 到 $\mathbb{R}$的一组函数，其中 m是正整数。依照连续逻辑领域的文献，我们将这些函数称为联结函数，因为它们类似于经典逻辑中的联结词。

定义 2.6（聚合实值逻辑）。项语言 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}}$ 包含节点变量$u, v, w, \ldots$，以及按以下方式归纳定义的项。

- 基本项，或原子项，包括常数 c、边关系 $\mathsf{E}(u, v)$ 的示性函数，以及顶点相等 $u = v$。
- 给定一个项 $\tau(u, v)$，其自由变量为 u, v，变量 v的全局平均 为 $\mathsf{Avg}_v\,\tau(u, v)$，其自由变量为 u；给定一个项 $\tau(w, u, v)$，其自由变量为 w, u, v，变量 w, v的局部平均为 $\mathsf{LAvg}_{wEv}\,\tau(w, u, v)$，其自由变量为 w, u。
- 给定具有自由变量 u, v 的 $\tau(u, v)$，变量 v 的最大值 为 $\mathsf{Max}_v\tau(u, v)$，其自由变量为 u。
- 给定具有自由变量 u, v 的 $\tau(u, v)$，变量 v 的最小值 为 $\mathsf{Min}_v\tau(u, v)$，其自由变量为 u。
- 给定具有自由变量 u, v 的 $\tau(u, v)$，变量 u 的求和 为 $\Sigma_v\tau(u, v)$，其自由变量为 u。

对于每个 $f \in \mathcal{F}$，项在应用函数符号后仍是项。

我们通过省略一个或多个聚合算子来定义子语言，例如 $\mathrm{Agg}[\mathcal{F}, \mathsf{LAvg}, \text{平均值}, \mathsf{Max}]$,。

定义 2.7（项的解释）。设 τ 是一个具有 k 个自由变量的项，G 是一个图，且 $u = (u_1, \ldots, u_k) \in (V(G))^k$。设 $\mathbb{G} = G[u]$。对于 $v \in V(G)$，令 $\mathbb{G}[v] = G[u_1, \ldots, u_k, v)]$。项 τ 在 $\mathbb{G}$ 中的解释 $[\![\tau]\!]_{\mathbb{G}}$ 递归定义如下：

- $[\![c]\!]_{\mathbb{G}} = c$ 对于任意常数 $c \in \mathbb{R}_{\geq 0}$。
- $[\![$当 $\{u_i, u_j\} \in E(G)$ 时，$]\!]_{\mathbb{G}}\,\mathsf{E}(u_i, u_j)]\!]_{\mathbb{G}}$ 为 1，否则为 0；等号情形也类似。
- $[\![f(\tau_1, \ldots, \tau_m)]\!]_{\mathbb{G}} = f([\![\tau_1]\!]_{\mathbb{G}}, \ldots, [\![\tau_m]\!]_{\mathbb{G}})$对于 $f \in \mathcal{F}$.
- 定义 $[\![$平均值$_v\,\tau]\!]_{\mathbb{G}}$ 为 $\frac{1}{|V(G)|}\sum_{v\in V(G)}[\![\tau]\!]_{\mathbb{G}[v]}$。
- 定义 $[\![\mathsf{LAvg}_{u_1Ev}\,\tau]\!]_{\mathbb{G}}$ 为 $\frac{1}{|\mathcal{N}(u_1)|}\sum_{v\in\mathcal{N}(u_1)}[\![\tau]\!]_{\mathbb{G}[v]}$；若分母非零，则取此值，否则取零。
- $[\![$最大值$_v\tau]\!]_{\mathbb{G}} = \max_{v\in V(G)}[\![\tau]\!]_{\mathbb{G}[v]}$，Min 的情况也相同。
- $[\![\Sigma_v\tau]\!]_{\mathbb{G}} = \Sigma_{v\in V(G)}[\![\tau]\!]_{\mathbb{G}[v]}$。

如果一个项没有自由变量，则称它为闭合的。

在整篇论文中，我们对 $\mathbf{G}_n \sim G(n, p)$ 进行抽样，固定一个 k-元组 $(u_1, \ldots, u_k) \in [n]^k$，并考虑随机变量 $[\![\tau]\!]_{\mathbf{G}_n[u]}$。注意，我们经常会将 τ 兼作表示该项或随机变量。当我们说某个性质对 τ（或简称“几乎必然”）成立时，是指它作为随机变量以概率 *1* 成立。对于我们考虑的概率空间，这将由该性质作为图和元组的函数始终成立这一事实推出。特别地，我们说 τ 依概率收敛／依分布收敛／在 L_p 收敛，如果相应的随机变量序列 $([\![\tau]\!]_{\mathbf{G}_n[u]})^{n\in\mathbb{Z}_{>0}}$ 以相同的意义收敛。类似地，我们说 τ 集中于均值，如果相应的随机变量序列按照定义 2.5 的意义集中。

项语言的示例。 我们的语言表达能力相当强。

- 本文所考虑的所有函数类都允许我们模拟二元布尔联结词：也就是说，对于每个 f_0：$\in \{0,1\}^2 \to \{0,1\}$，都存在 $f \in \mathcal{F}$，使得对于所有$x \in \{0,1\}^2$, $f(x) = f_0(x)$。因此，对于一阶逻辑中的任意公式 ϕ，都存在一个项 $\tau_\phi \in \mathrm{Agg}_{\mathcal{F}}$，当 ϕ成立时返回 1，否则返回 0。我们通过归纳构造 τ_ϕ ，使用最大值模拟存在量化，并使用联结函数模拟布尔联结词。

- 对于任意一阶逻辑公式 ϕ，在子语言 $\mathrm{Agg}[\mathcal{F}, \mathrm{Avg}, \mathrm{Max}]$ 中都存在一个项 $\tau_{\%\phi}$，它返回满足 ϕ 的节点元组所占的百分比。如果 ϕ只有一个变量，我们可以写出一个项$\tau_{\%\phi}(v) \in \mathrm{Agg}[\mathcal{F}, \mathrm{LAvg}, \mathrm{Max}]$，它返回满足 ϕ 的 v 的邻居所占的百分比。
- 对于任意一阶公式 ϕ，在子语言 $\mathrm{Agg}[\mathcal{F}, \Sigma, \mathrm{Max}]$ 中都存在一个项 $\tau_{\text{计数}\phi}$，它返回满足 ϕ 的节点元组的数量。例如，存在一个项可以计算三角形的数量。

在第4节中，我们将定义函数类 $\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$ 和 $\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$，并证明对于$\mathcal{F}$ $=\mathrm{Agg}[\mathcal{F}, \Sigma, \mathrm{Max}]$，无论是 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$ 还是 $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$，结论都成立。

3 相关工作

在 p =const 的稠密情形下， [14, 15] 证明了，当 $n \to \infty$ 时，每个一阶句子的概率都趋近于 0 或 1。对于 $\mathrm{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \mathrm{Avg}$ 、 $\mathrm{LAvg}]$, 中的项，其中 $\mathcal{F}_{LP}$ 是 Lipschitz 函数的集合， [1] 证明了每个项都依概率收敛到一个常数。 [2] 将这一结论扩展到了包含最大值的情形。我们的集中性结果意味着，对于带求和的语言 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$ 中的有界项，这些收敛结果仍然成立，尽管联结词类有所不同；如果其取值为 0-1，则可推出其极限为 0 或 1（详见第7节）——尤其是，我们的结果涵盖了一阶逻辑 0-1 定律。请注意，这些收敛结果不能推广到整个 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}_{LP}}$ 中的有界项：例如，$\sin x \in \mathcal{F}_{LP}$，因此 $\sin |E(G)|$ 可在 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}_{LP}}$ 中表示，而 $\sin |E(\mathbf{G}_n)|$ 在 $\mathbf{G}_n \sim G(n,p)$ 时并不收敛。对于函数 f，若存在一列随机变量 ξ_n 集中于其均值附近，而 $f(\xi_n)$ 却不集中，就会出现这种情况。正如本文所示，这是带求和的语言无法使项集中的唯一障碍。

对于稀疏随机图 $\mathbf{G}_n \sim G(n, n^{-\alpha})$， $0 < \alpha < 1$, [44] 证明了当α 为无理数时，一阶逻辑 0-1 定律成立。对于有理数 $\alpha \in (0,1)$，他们证明存在一个一阶句子 ϕ ，使得$\mathbb{P}(\mathbf{G}_n \models \phi)$ 不收敛。因此，当 $\mathcal{F}$ 包含所有布尔联结词且 $\alpha \in (0,1)$为有理数时，对于任何包含 Max 的 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}}$ 子语言，都不可能有收敛性。相比之下，对于限制最严格的语言 $\mathrm{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \mathrm{Avg}$、$\mathrm{LAvg}]$ ，以及所有 $\alpha \in (0,1)$， [1] 证明了每个项都依概率收敛。我们将 [1, 2] 的结果加以拓展，证明当 $\alpha \in (0,1)$为无理数时，语言 $\mathrm{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \mathrm{Avg}$、$\mathrm{LAvg}$、$\mathrm{Max}]$ 中的每个项都依概率收敛到一个常数。我们还证明，$\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$ 中的每个项都是集中的，且 $\mathrm{Agg}_{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$ 中的每个有界项都依概率收敛到一个常数。这个结果显然蕴含了 [44]中的 0-1 定律。关于这些结果的详细比较，见第7节。

实值逻辑背景下的收敛律也在 [23, 29, 30]中得到了研究。 [29] 的主要定理是关于称为 PLA 的项语言的几乎必然聚合消除结果，该结果蕴含了广泛一类图上的分布（包括稠密$G(n,p)$ ）的收敛定律，并推广了 [23]的结果。在 [30], 中给出了另一项针对更广泛概率分布族的聚合消除结果，该族也涵盖稀疏 $G(n,p)$ 。然而，所涉及的逻辑并未扩展一阶逻辑。至关重要的是，这些论文所考虑的语言中的项在 $[0,1]$ 中取值，且聚合函数包括平均值和 LAvg，但不包括 Σ。一个一般

对 $[0,1]$值项的聚合函数作渐近消去的方法，适用于任意有界聚合函数与联结函数，在 [31]中提出。

我们的结果推出了子图计数和扩展计数的集中性，这些结果此前已在 [41, 45] 中得到证明。尽管如此，我们指出，我们的方法可用于为这些统计量渐近展开中的二阶项建立相当接近最优的界限——对于任意扩张，此类结果此前尚不为人知，尽管针对某些特定的 MRG，已有研究在 [21, 40, 49, 50] 中得到了最优结果。例如，扩展计数中一个有趣且重要的情形是最大度 Δ_n，它满足 $\Delta_n = np + \sqrt{2np(1-p)\ln n}(1-o(1))$ w。h。p。当 $p = \text{const}$ [6, 7, 22], 时，我们的方法表明存在一个常数 $C > 0$，使得 w。h。p. $|\Delta_n - np| \le C\sqrt{n \ln n}$。对于与给定固定图$H$同构的子图数量 X_H，其二阶渐近项早已为人所知：当 p 高于某个阈值时，$X_H = \mathbb{E}X_H + \eta_n\sqrt{\mathrm{Var}\, X_H}$，其中 η_n 依分布收敛于标准正态随机变量 [41]。我们强调，我们结果的优势在于其普适性，而非最优性：我们并不针对特定统计量优化渐近界，而是构建一个通用框架，以获得新的集中性结果，并为概率论中的集中现象提供一种全新的逻辑视角。

4 联结函数

接下来，我们定义一类实值函数 f，它们能够保持一列随机变量的集中性质；也就是说，若序列 $\tau_{(i)n}$ 是集中的，那么 $f(\tau_n)$（其中 $\tau_n = (\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_{(m)n})$）也集中。显然，若 f满足以下条件，它就能保持这些序列的集中性质：

$$\frac{|f(\tau) - \mathbb{E}f(\tau)|}{\mathbb{E}f(\tau)} = O\left(\frac{\|\tau - \mathbb{E}\tau\|}{\|\mathbb{E}\tau\|}\right).$$

这启发我们给出相对 Lipschitz 函数的如下定义。

定义 4.1（相对 Lipschitz 函数）。若存在 $C > 0$ 使得下式成立，我们称 $f : \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 为相对 *Lipschitz*：

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{f(x) + f(y)} \le C \cdot \frac{\|x - y\|}{\|x + y\|} \quad \text{for all } x, y \in \mathbb{R}^m_{>0}. \tag{1}$$

由于我们将在参数可能取值为 0 的情形下使用这些函数，因此必须将定义扩展到所有非负的 x。对于 $f : \mathbb{R}^m_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 和大小为 $m' \in [m]$ 的 $I = \{j_1, \dots, j_{m'}\} \subseteq [m]$，我们将 f 的 I-特化定义为满足以下要求的函数 $f_I : \mathbb{R}^{m'}_{>0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$。对于每个 $y = (y_1, \dots, y_{m'}) \in \mathbb{R}^{m'}_{>0}$ 及其“扩张” $x = (x_1, \dots, x_m)$，其中对于 $i \in [m']$ 有 $x_{j_i} = y_i > 0$，对于 $j \notin I$ 有 $x_j = 0$，

$$f_I(y) = f(x).$$

函数 $f : \mathbb{R}^m_{\ge 0} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$ 若每个特化要么取正值且满足相对利普希茨条件，要么恒等于零，则称其为相对利普希茨。

注 4.2。对于一维情形 $f : \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，相对 Lipschitz 函数类与 $(\mathbb{R}_{>0}, \rho)$ 上的 Lipschitz 函数类重合，其中度量 ρ 是希尔伯特度量 $d(x, y) = |\ln(x/y)|$ 的次可加变换。事实上，$|x - y|/(x + y) = g(d(x, y))$，其中 $g(t) = \frac{e^t - 1}{e^t + 1}$ 是次可加函数。因此，ρ 确实是一个度量。然而，当维数 $m > 1$时，$\|x - y\|/\|x + y\|$ 不是度量。

设 $\mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 为相对 Lipschitz 函数族 $f\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$。在第 5.2 节中，我们证明，对于联结函数集合 $\mathcal{F}_{\text{rellip}}$，相应语言中的每一项 τ 在 $G(n,p)$ 上求值后，都集中在其平均值 $\mathbb{E}\tau$ 附近。我们将依赖如下定理，该定理表明 f 保持随机变量的集中性。

定理 4.3 (函数保持集中性)。设 $f\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0} \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$。存在常数 $a_f, b_f > 1$，使得下述结论成立。设 $\xi_1, \ldots, \xi_m \geq 0$ 为随机变量，$\varphi_1, \ldots, \varphi_m \geq 0$, $\delta, \delta' > 0$和 $K > 2$ 为常数，且对每个 $i \in [m]$,

- $\xi_i \in \{0\} \cup [K^{-1}, K]$ 几乎必然，
- 要么 $\varphi_i = 0$ 且 $\mathbb{P}(\xi_i = 0) \geq 1 - \delta$，要么 $\varphi_i \geq K^{-1}$

且 $\mathbb{P}(|\xi_i - \varphi_i| > \delta' \cdot \varphi_i) \leq \delta$。设 $\xi = f(\xi_1, \ldots, \xi_m)$ 和 $\varphi = f(\varphi_1, \ldots, \varphi_m)$。那么

- $\xi \in \{0\} \cup [K^{-b_f}, K^{b_f}]$ 几乎必然，
- 要么 $\varphi = 0$ 且 $\mathbb{P}(\xi = 0) \geq 1 - m\delta$，要么 $\varphi \geq K^{-b_f}$ 且 $\mathbb{P}(|\xi - \varphi| > a_f \delta' \cdot \varphi) \leq m\delta$。

*More*在 $\varphi = 0$ 上，当且仅当 $f_I \equiv 0$，其中 I 是所有满足 $\varphi_i \neq$ 的 $i \in [m]$ 的集合 $\quad 0.$

证明。由命题 4.12，存在 $b_f > 1$，它仅依赖于 f，使得 $\xi < K^{b_f}$ 几乎必然成立，正如所需。此外，只要 $f_I \neq 0$，就有 $1/f_I \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$。因此，由命题 4.12，只要 $\xi \neq 0$，就有 $1/\xi < K^{b_f}$，同样也适用于 φ。

令 $I = \{i_1, \ldots, i_{m'}\} \subset [m]$ 为满足 $\varphi_i \neq 0$ 的 $i \in [m]$ 的集合。特别地，对于 $i \notin I$，$\mathbb{P}(\xi_i = \varphi_i = 0) \geq 1 - \delta$；而对于 $i \in I$，$\varphi_i \geq 1/K$ 且 $\mathbb{P}(|\xi_i - \varphi_i| > \delta' \cdot \varphi_i) \leq \delta$。

若 $I = \varnothing$，我们便得到 $\varphi = f(0, \ldots, 0)$，并且 $\tau = \varphi$，其概率至少为 $1 - m\delta$，从而完成证明（对于任意选择的 $a_f > 0$）。

现在，令 $I \neq \varnothing$ 和 $1 \leq |I| =: m' \leq m$。若 $\varphi = 0$，则 $f_I \equiv 0$，这意味着 $\mathbb{P}(\xi = 0) \geq 1 - m\delta$。假设 $\varphi \neq 0$（因此，$\varphi \geq K^{-b_f}$）。接下来只需证明 $\mathbb{P}(|\xi - \varphi| > a_f \delta' \cdot \varphi) \leq m\delta$。

记 $\xi_I := (\xi_{i_1}, \ldots, \xi_{i_{m'}})$ 和 $\varphi_I := (\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_{m'}})$。令 C为满足相对 Lipschitz 条件（1）的常数，该条件针对 f_I。在事件

$$\{|\xi_i - \varphi_i| > \delta' \cdot \varphi_i \text{ for all } i \in I\} \subseteq \{\xi_i \neq 0 \text{ for all } i \in I\},$$

该事件发生的概率至少为 $1 - \delta m'$，因此我们有

$$|f_I(\xi_I) - f_I(\varphi_I)| \leq |f_I(\xi_I) + f_I(\varphi_I)| \cdot C \cdot \frac{\|\xi_I - \varphi_I\|}{\|\xi_I + \varphi_I\|}.$$

我们还有 $\varphi = f_I(\varphi_I)$，并且以至少 $1-(m-m')\delta$ 的概率有 $\xi = f_I(\xi_I)$。因此，以至少 $1-(m-m')\delta - m'\delta = 1 - m\delta$ 的概率，

$$\begin{aligned} |\xi - \varphi| \leq |\xi + \varphi| \cdot C \cdot \frac{\|\xi_I - \varphi_I\|}{\|\xi_I + \varphi_I\|} &\leq |\xi + \varphi| \cdot C \cdot \sqrt{\sum_{i \in I} (1 - \xi_i/\varphi_i)^2} \\ &\leq |\xi + \varphi| \cdot C \cdot \sqrt{\sum_{i \in I} (\delta')^2} = \delta' C \sqrt{m'} \cdot |\xi + \varphi|, \end{aligned}$$

这意味着 $|\xi - \varphi| \leq 2\delta' C\sqrt{m} \cdot \varphi$。由于因子 $2C\sqrt{m}$ 仅取决于 f，我们可以取 $a_f \geq 2C\sqrt{m}$，从而完成证明。 □

相对 Lipschitz 函数的性质。首先我们注意到，与 Lipschitz 函数的情形一样，当函数定义在

一个正定义域。

命题 4.4。如果 $f\colon \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是相对 *Lipschitz* 的，那么 f 是连续的。

证明。考虑 $\mathbb{R}^m_{>0}$中的序列 $x_n \to x$ 。若存在子序列 x_{n_i} ，使得 $f(x_{n_i}) \to \infty$，则 $|f(x) - f(x_{n_i})|/(f(x) + f(x_{n_i})) \to 1$，与(1)矛盾。因此对某个$C_0 > 0$，$\sup_n f(x_n) \le C_0$。我们得到

$$|f(x) - f(x_n)| \le \left(C \cdot \frac{f(x) + f(x_n)}{\|x + x_n\|} \right) \|x - x_n\| \le \frac{2CC_0\|x - x_n\|}{\|x + x_n\|} \to 0, \quad n \to \infty.$$

□

我们断言，相对 Lipschitz 函数族在加法、乘法以及幂运算下是封闭的。

命题 4.5. 设 f、g： $\mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 为相对 *Lipschitz*。则

- $f + g$ 是相对 *Lipschitz*;
- 若对某个常数 $\varepsilon > 0$， $f \ge (1 + \varepsilon)g$，则 $f - g$ 是相对 *Lipschitz*。

证明。设 $x \ne y \in \mathbb{R}^m_{>0}$。我们有 $f(x) > 0$, $f(y) > 0$, $g(x) > 0$，以及 $g(y) > 0$。于是 $(f + g)(x)$ 和 $(f + g)(y)$ 也为正。此外，若 $f \ge (1 + \varepsilon)g$，则 $(f - g)(x) \ge \varepsilon g(x) > 0$且 $(f - g)(y) \ge \varepsilon g(y) > 0$。于是

$$\begin{aligned}
|(f + g)(x) - (f + g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \le |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\
&\le \left(C_f \cdot \frac{f(x) + f(y)}{\|x + y\|} + C_g \cdot \frac{g(x) + g(y)}{\|x + y\|} \right) \|x - y\| \\
&\le \max\{C_f, C_g\} \cdot \frac{(f + g)(x) + (f + g)(y)}{\|x + y\|} \cdot \|x - y\|.
\end{aligned}$$

同理，由于 $f - g \ge \varepsilon g$，令 $C = \max\{C_f, C_g\}$，我们得到

$$\begin{aligned}
|(f - g)(x) - (f - g)(y)| &\le C \cdot \frac{(f + g)(x) + (f + g)(y)}{\|x + y\|} \cdot \|x - y\| \\
&\le C \cdot \frac{f(x) - g(x) + f(y) - g(y) + \frac{2}{\varepsilon}(f(x) - g(x) + f(y) - g(y))}{\|x + y\|} \cdot \|x - y\| \\
&= (1 + 2/\varepsilon)C \cdot \frac{(f - g)(x) + (f - g)(y)}{\|x + y\|} \cdot \|x - y\|,
\end{aligned}$$

证明完毕。 □

命题 4.6。 如果 f, g： $\mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是相对 *Lipschitz* 函数，那么 $f \cdot g$ 是相对 *Lipschitz*。特别地，若 $a > 0$，则 $a \cdot f$ 是相对 *Lipschitz*。

证明。 设 $x \ne y \in \mathbb{R}^m_{>0}$。我们得到 fg 取正值，且

$$\begin{aligned}
|(fg)(x) - (fg)(y)| &= |f(x)g(x) - f(x)g(y) + f(x)g(y) - f(y)g(y)| \\
&\le f(x)|g(x) - g(y)| + g(y)|f(x) - f(y)| \\
&\le \left(f(x) \cdot C_g \cdot \frac{g(x) + g(y)}{\|x + y\|} + g(y) \cdot C_f \cdot \frac{f(x) + f(y)}{\|x + y\|} \right) \|x - y\|. \qquad (2)
\end{aligned}$$

同理,

$$|(fg)(x)-(fg)(y)| \le \left(f(y)\cdot C_g \cdot \frac{g(x)+g(y)}{\|x+y\|} + g(x)\cdot C_f \cdot \frac{f(x)+f(y)}{\|x+y\|} \right) \|x-y\|. \tag{3}$$

如果 $g(y) \le g(x)$，那么 (2) 推出

$$|(fg)(x)-(fg)(y)| \le \frac{(2C_g+C_f)f(x)g(x)+C_f f(y)g(y)}{\|x+y\|}\|x-y\| \le C\frac{(fg)(x)+(fg)(y)}{\|x+y\|}\|x-y\|, \tag{4}$$

其中 $C = 2C_g + C_f$。如果 $g(y) > g(x)$，那么 (3) 推出 (4) 的结论，且 $C = 2C_f + C_g$ 也成立，从而完成证明。 □

命题 4.7。如果 $f: \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是相对利普希茨的，且 $b \in \mathbb{R}$ 是一个常数，那么 f^b 是相对利普希茨的。

证明。假设 $b \neq 0$ ——否则该命题显然成立。由于 $f > 0$，我们也有 $f^b > 0$。令 $x \neq y \in \mathbb{R}^m_{>0}$。不失一般性，假设 $f(x) \ge f(y)$。

令 $b > 0$。首先注意到

$$f^b(x) - f^b(y) \le \frac{2(f(x)-f(y))}{f^{1-b}(x)+f^{1-b}(y)}.$$

事实上，$(f^b(x) - f^b(y))(f^{1-b}(x) + f^{1-b}(y)) = f(x) - f(y) + f^b(x)f^{1-b}(y) - f^b(y)f^{1-b}(x)$，且函数

$$g(b) := f^b(x)f^{1-b}(y) - f^b(y)f^{1-b}(x) = f(y)(f(x)/f(y))^b - f(x)(f(y)/f(x))^b$$

has

$$g'(b) = f(y)\ln(f(x)/f(y))(f(x)/f(y))^b + f(x)\ln(f(x)/f(y))(f(x)/f(y))^b \ge 0,$$

这意味着 $\max^{b\in[0,1]} g(b) = g(1) = f(x) - f(y)$。

Then

$$f^b(x) - f^b(y) \le \frac{2(f(x)+f(y))}{f^{1-b}(x)+f^{1-b}(y)} \cdot C \cdot \frac{\|x-y\|}{\|x+y\|} \le 2C \cdot \frac{f^b(x)+f^b(y)}{\|x+y\|}\|x-y\|,$$

按需进行。

最后，设 $b < 0$。我们得到

$$\begin{aligned} |f^b(x) - f^b(y)| = f^b(y) - f^b(x) = \frac{f^{-b}(x)-f^{-b}(y)}{f^{-b}(x)f^{-b}(y)} &\le 2C \cdot \frac{f^{-b}(x)+f^{-b}(y)}{f^{-b}(x)f^{-b}(y)} \cdot \frac{\|x-y\|}{\|x+y\|} \\ &= 2C \cdot \frac{f^b(x)+f^b(y)}{\|x+y\|} \cdot \|x-y\|, \end{aligned}$$

证明得证。 □

断言 4.8. 设 $f, g: \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是相对 *Lipschitz* 函数。那么最大值$\{f, g\}$ 和最小值$\{f, g\}$是相对 *Lipschitz* 函数。

证明。我们有最大值$\{f, g\}$，最小值$\{f, g\}: \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$。设 $x \neq y \in \mathbb{R}^m_{>0}$。

如果最大值$\{f(x),\ g(x)\}$与最大值$\{f(y),\ g(y)\}$在同一函数（例如，f）处取得，则

$$|\max\{f(x),g(x)\}-\max\{f(y),g(y)\}| = |f(x)-f(y)| \le C_f(f(x)+f(y))\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}$$
$$= C_f(\max\{f(x),g(x)\}+\max\{f(y),g(y)\})\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}.$$

不失一般性，设最大值$\{f(x),\ g(x)\} = f(x)$以及最大值$\{f(y),\ g(y)\} = g(y)$。那么

$$\begin{aligned}|\max\{f(x),g(x)\}-\max\{f(y),g(y)\}| = |f(x)-g(y)| &\le \max\{|f(x)-f(y)|,|g(x)-g(y)|\}\\ &\le \max\{C_f(f(x)+f(y)),C_g(g(x)+g(y))\}\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}\\ &\le 2(C_f+C_g)\max\{f(x),f(y),g(x),g(y)\}\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}\\ &\le 2(C_f+C_g)(\max\{f(x),g(x)\}+\max\{f(y),g(y)\})\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|},\end{aligned}$$

如所需。

由于最小值$\{f,g\} = \frac{1}{\text{最大值}\{1/f,1/g\}}$，通过将命题 $\{f,g\}$ 应用于 4.7 两次，我们得到关于最小值的所需结论 $b=-1$。

□

上述所有命题也都可以由以下关于类 $\mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 保持复合性的普遍事实推出。

命题 4.9。若 $f\colon\ \mathbb{R}^k_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$是相对利普希茨的，且 f_1、……、$f_k\colon\ \mathbb{R}^m_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$都是相对利普希茨的，则 $g\colon = f(f_1$、……、$f_k)\colon\ \mathbb{R}^m_{>0}\to\mathbb{R}_{>0}$也是相对利普希茨的。

证明。设 $x\neq y\in\mathbb{R}^m_{>0}$. 则

$$\begin{aligned}|g(x)-g(y)| &\le C_f(g(x)+g(y))\cdot\frac{\|(f_1(x)-f_1(y),\dots,f_k(x)-f_k(y))\|}{\|(f_1(x)+f_1(y),\dots,f_k(x)+f_k(y))\|}\\ &\le C_f(g(x)+g(y))\cdot\frac{\|(C_1(f_1(x)+f_1(y)),\dots,C_k(f_k(x)+f_k(y)))\|\cdot\|x-y\|/\|x+y\|}{\|(f_1(x)+f_1(y),\dots,f_k(x)+f_k(y))\|}\\ &\le C_f(C_1+\ldots+C_k)(g(x)+g(y))\cdot\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|},\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

注意，若 $k=m=1$，则断言 4.9 由相对利普希茨与变换后希尔伯特度量中的 Lipschitz 之间的等价性立即得出，见注记4.2。

上述结果表明，相对 Lipschitz 函数类相当丰富：连同 $f(x_1,\ \dots\dots,\ x_m) = x_i$是相对利普希茨这一由定义直接得出的事实，它们蕴含

推论 4.10. 下列各项是相对利普希茨

- 多项式 $f\colon\ \mathbb{R}^m_{\ge 0}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ 具有非负系数；
- $f-g$，其中 f、$g\colon\ \mathbb{R}^m_{\ge 0}\to\mathbb{R}_{\ge 0}$ 是系数非负的多项式，使得对于某个 $\varepsilon>0$ 及所有 $x\in\mathbb{R}^m_{\ge 0}$，$f(x)\ \ge(1+\varepsilon)g(x)$；

- 任意函数 f，使得对于每个大小为 $m' \geq 1$ 的 I，我们都有

$$f_I(x_1, \ldots, x_{m'}) = x_1^{\alpha_1} \ldots x_{m'}^{\alpha_{m'}},$$

  其中 $\alpha_1, \ldots, \alpha_{m'} \in \mathbb{R}$ 是任意常数；
- 最大值$\{x_1, \ldots, x_m\}$和最小值$\{x_1, \ldots, x_m\}$。

相对 Lipschitz 的局限性。并非每个多项式 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都是相对 Lipschitz——推论 4.10 第二个要点中的假设至关重要。下面的断言给出一些非相对 Lipschitz 函数的示例。

断言 4.11。

- $2 + \sin(x)$ 在 $[0, \infty)$ 上是 *Lipschitz* 函数，但不是相对 *Lipschitz* 函数。此外，存在一些 *Lipschitz* 函数 $f\colon \mathbb{R}_{>0}^m \to \mathbb{R}_{>0}$，它们不是相对 *Lipschitz* 函数，并且满足 f 在$(\mathbb{R}_{\geq 0} \setminus [0, C))^m$ 上为常数，其中 C 是某个值。
- 存在一些多项式 $f\colon \mathbb{R}_{\geq 0}^m \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，它们不是相对 *Lipschitz* 函数。特别地，$(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 而$(x_1 - x_2)^2 \notin \mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 且$(x_1 - x_2)^2 + x_2 \notin \mathcal{F}_{\text{rellip}}$。

证明。显然，$2 + \sin(x)$不是相对利普希茨函数——例如，足够大的 $x = 2\pi n + \pi/2$ 和 $y = 2\pi n - \pi/2$ 就违反了条件（1）。

Let $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是任意一个 Lipschitz 函数，使得对任意正整数 n,

$$f(1/n) = n^{-2} \mathbb{1}_{n \text{ is even}} + 2n^{-2} \mathbb{1}_{n \text{ is odd}}.$$

事实上，这个定义在 $\{1/n, n \in \mathbb{Z}_{>0}\}$ 上的函数有一个 Lipschitz延拓，因为对于奇偶性不同的正整数 k_1, k_2,

$$|f(1/k_1) - f(1/k_2)| = |k_1^{-2} - 2k_2^{-2}| = \frac{|2k_2^2 - k_1^2|}{k_2^2 k_1^2} \overset{(*)}{\leq} 4\frac{|k_2 - k_1|}{k_1 k_2} = 4|k_1^{-1} - k_2^{-1}|.$$

不等式 **(*)** 很容易验证：若 $k_2 > k_1$，则

$$|2k_2^2 - k_1^2| = 2k_2^2 - k_1^2 \leq 2k_2^2 \leq 4k_2(k_2 - 1) \leq 4k_2 k_1 (k_2 - k_1) = 4k_1 k_2 |k_2 - k_1|.$$

若 $k_2 < k_1$，则

$$|2k_2^2 - k_1^2| \leq k_1^2 - 2 \leq 4k_1(k_1 - 1) \leq 4k_1 k_2 (k_1 - k_2) = 4k_1 k_2 |k_2 - k_1|.$$

然而，f 不是相对利普希茨函数，因为

$$\frac{|f(1/(2k)) - f(1/(2k+1))|}{f(1/(2k)) + f(1/(2k+1))} = \frac{|(2k)^{-2} - 2(2k+1)^{-2}|}{(2k)^{-2} + 2(2k+1)^{-2}} > \frac{1}{3}\left(2\left(\frac{2k}{2k+1}\right)^2 - 1\right) > 1/4,$$

而

$$\frac{|1/(2k) - 1/(2k+1)|}{1/(2k) + 1/(2k+1)} < \frac{|1/(2k) - 1/(2k+1)|}{1/(2k)} = 1 - \left(\frac{2k}{2k+1}\right) - 1 = \frac{1}{2k+1} \to 0, \quad k \to \infty,$$

这与相对 Lipschitz 函数的定义矛盾。

现在我们转而讨论多项式。$(x_1 - x_2)^2 + x_1^2 \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 这一事实由推论 4.10 的第二条推出，因为我们可以取 $f = 2x_1^2 + x_2^2$, $g = 2x_1x_2$，以及 $\varepsilon = 0.1$。为了证明 $f = (x_1 - x_2)^2 \notin \mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 和 $g = (x_1 - x_2)^2 + x_2 \notin \mathcal{F}_{\text{rellip}}$，令 k 足够大，$x_1 = k + 1$, $x_2 = k - 1$, $y_1 = k - \sqrt{k}$，并且 $y_2 = k + \sqrt{k}$。一方面，

$$\frac{\|x - y\|}{\|x + y\|} = \frac{\sqrt{k}(1 + o_k(1))}{2k(1 + o_k(1))} = o_k(1).$$

然而，

$$\frac{|f(x) - f(y)|}{f(x) + f(y)} = \frac{4k - 4}{4 + 4k} = \frac{k - 1}{k + 1} = 1 - o_k(1), \quad \text{and}$$

$$\frac{|g(x) - g(y)|}{g(x) + g(y)} = \frac{5k + \sqrt{k} - (k + 3)}{k + 3 + 4k + k + \sqrt{k}} = \frac{2}{3} - o_k(1),$$

这与（1）矛盾。

□

推论 4.10 中的所有函数，当 x 足够大时，都有一个多项式函数作为上界；当 x 接近 0 时，都有一个逆多项式作为上界。实际上，每个相对 Lipschitz 函数都被某个幂函数一致有界——下一个断言是证明主要结果的关键要素之一。

断言 4.12。*对于每个相对 Lipschitz 函数 $f\colon \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，都存在正数 k 和 C，使得对所有 $x \in \mathbb{R}^m_{>0}$，*

$$f(x) < C + x_1^k + x_1^{-k} + \ldots + x_m^k + x_m^{-k}.$$

证明。取足够大的 k，$C' \gg C$，其中 $C > 0$ 是用于证明 f 为相对 Lipschitz 的常数。令

$$g^+ = C' + x_1^k + \ldots + x_m^k, \quad g^- = C' + x_1^{-k} + \ldots + x_m^{-k}.$$

反设存在 $x^* \in \mathbb{R}^m_{>0}$，使得 $f(x^*) \geq$ 最大值$\{g^+(x^*)\ g^-(x^*)\}$。令 S 为 $\mathbb{R}^m_{>0}$ 中的单位球面，并令 $s = (1/\sqrt{m}, \ldots, 1/\sqrt{m}) \in S$。我们来证明 $x^* \notin S$（事实上，离 $\overline{S}$ 很远）。确实，反设不然，并令 $y \neq x \in S$。将 $\mathbb{R}^m$ 中连接 x^* 与 y 的测地线分成 $4C + 1$ 段，分点为 $y_1, \ldots, y_{4C}$。那么，任意两个相邻点之间的距离至多为 $1/2C$，这意味着 $|f(y_i) - f(y_{i-1})| \leq \frac{1}{2}(f(y_i) + f(y_{i-1}))$。因此，$f(y_i) \leq 3f(y_{i-1})$，从而得到普适上界 $f(x^*) \leq 3^{4C+1} f(y)$。

首先假设 $\|x^*\| > 1$。在这种情况下，我们还可以假设 $f(x^*) \geq g^+(x^*)$。设 $\alpha \in S$ 满足 $x^* = \alpha \cdot t^*$，其中 $t^* > 1$。令 $\mathcal{T} \subset (1, \infty)$ 为所有满足 $f(\alpha \cdot t) \geq g^+(\alpha \cdot t)$ 的 t 的集合。集合 $\mathcal{T}$ 是闭集，因为根据命题 4.4，$f - g^+$ 是连续的。因此，我们可以假设存在 $x = \alpha \cdot t \in \alpha \cdot \mathcal{T}$，使得 $f(x) = g^+(x)$，且对于 $y = x(1 - 1/k)$，$f(y) < g^+(y) < g^+(x)$（回想一下，我们可以根据需要选择足够大的 k）。于是，

$$f(x) - f(y) \geq g^+(x) - g^+(y) = \sum_{i=1}^m \left((\alpha_i t)^k - (\alpha_i t(1 - 1/k))^k \right) \geq (1 - 1/e) t^k \sum_{i=1}^m \alpha_i^k;$$

$$f(x) = g^+(x) = \sum_{i=1}^m (\alpha_i t)^k = t^k \sum_{i=1}^m \alpha_i^k; \quad \text{and} \quad \frac{\|x - y\|}{\|x + y\|} = \frac{\|x/k\|}{\|x(2 - 1/k)\|} = \frac{1}{2k - 1}.$$

我们得到

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{f(x)+f(y)} \geq \frac{f(x)-f(y)}{2f(x)} \geq \frac{1-1/e}{2} = (1-1/e)\cdot\frac{2k-1}{2}\cdot\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}$$

——矛盾，因为 k 可以任意大。特别地， $k > 3C$。

现在，设 $\|x^*\| < 1$ 和 $f(x^*) \geq g^-(x^*)$。与上文一样，令 $\alpha \in S$ 满足 $x^* = \alpha \cdot t^*$，其中$t^* < 1$。我们可以找到 $x = \alpha \cdot t$，使得 $f(x) = g^-(x)$ 且 $f(y) < g^-(y) < g^-(x)$，其中$y = x(1+1/k)$。于是，

$$f(x)-f(y) \geq g^-(x)-g^-(y) = \sum_{i=1}^{m}\left((\alpha_i t)^{-k} - (\alpha_i t(1+1/k))^{-k}\right) \geq (1-2/e)t^{-k}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{-k};$$

$$f(x) = g^-(x) = \sum_{i=1}^{m}(\alpha_i t)^{-k} = t^{-k}\sum_{i=1}^{m}\alpha_i^{-k}; \quad \text{and} \quad \frac{\|x-y\|}{\|x+y\|} = \frac{\|x/k\|}{\|x(2+1/k)\|} = \frac{1}{2k+1}.$$

与上文一样,

$$\frac{|f(x)-f(y)|}{f(x)+f(y)} \geq \frac{f(x)-f(y)}{2f(x)} \geq \frac{1-2/e}{2} = (1-2/e)\cdot\frac{2k+1}{2}\cdot\frac{\|x-y\|}{\|x+y\|}$$

——再次得出矛盾，证明完毕。 □

尽管相对 Lipschitz 函数在 $x \to 0$ 或 $x \to \infty$ 时的渐近行为受多项式约束，但它可能不同于任何幂函数的行为。例如，函数 $f(x) = \ln(1+x)$ 在 $(0,\infty)$ 上是相对 Lipschitz 的。此外，当 $f(x)$ 的极限不为 0 且∞时，相对 Lipschitz 函数的衰减速度可能显著更快。例如，Sigmoid 函数 $f(x) = (1+e^{-x})^{-1}$ 在 $[0,\infty)$ 上是相对 Lipschitz 的。更一般地，容易看出，每个可微函数 f: $\mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$，只要对于某个 $C > 0$ 和所有 $x > 0$，满足 $xf'(x) < Cf(x)$，就是相对 Lipschitz 函数（见附录 A）。

渐近多项式函数。 存在一项 $\tau \in \mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$ 使得 $\mathbb{E}\tau$ 有界，但当 $n \to \infty$时不收敛。这是由存在一个有界的 f 得出的： $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0} \in \mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$使得 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 不存在。例如， $f(x) = 2 + \sin(\ln(2+x))$ 就是这样一个函数——参见附录 B。为了将联结词的范围限制在“渐近一致”的函数之内，我们引入以下定义。

定义 4.13 （渐近多项式）。 函数 $f : \mathbb{R}^m_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 是渐近多项式，如果对于任意正常数 $c_1, \ldots, c_m$、实常数 $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$，以及数列

$$a_k = ((c_1 + o(1))k^{\gamma_1}, \ldots, (c_m + o(1))k^{\gamma_m}),$$

存在 $c > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$ 使得

$$f(a_k) = (c + o(1))k^{\gamma}.$$

函数 $f : \mathbb{R}^m_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是渐近多项式的，如果每个特化要么取正值且为渐近多项式，要么恒等于零。

令 $\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$ 为所有整数 $m \geq 1$上的渐近多项式相对 Lipschitz 函数 $f : \mathbb{R}^m_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$所构成的集合。

我们注意到，推论4.10 中的所有函数都是渐近多项式。Sigmoid 函数也是渐近多项式，且具有相对利普希茨性质。实际上，这些类中没有任何一个

$\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$、 $\mathcal{F}_{\text{rellip}}$、 $\mathcal{F}_{LP}$ 包含于其他任何一个类中。根据命题 4.11，我们知道，类 $\mathcal{F}_{\text{rellip}}$ 和 $\mathcal{F}_{LP}$ 的情况也是如此。其余的不包含关系可由以下示例明显看出：

- 渐近多项式函数不一定连续——因此，并非每个渐近多项式函数都是 Lipschitz。

- 另一方面，所有多项式函数都是渐近多项式函数，但并非每个多项式函数 $f\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0}^{m} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 都是相对利普希茨的，这可由命题4.11得出。
- $\ln(1+x)$ 是相对利普希茨的，但不是渐近多项式函数。

5 稠密 Erd˝os–R´enyi 图

令 $p =$常数 $\in (0,1)$，并令$\mathbf{G}_n \sim G(n,p)$。回顾一下，以下是关于具有基于平均值的聚合算子的语言的一个集中性结果，来自 [2]。

事实 5.1([2])。对于语言$\text{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \text{Avg}、\text{LAvg}、\text{Max}]$, 中的每个闭项 τ，其求值$[\![\tau]\!]_{\mathbf{G}_n}$ 都依概率收敛到一个常数。

5.1 主要结果

我们的第一个主要结果断言，Agg 中的每个闭项 τ 都集中在其均值附近。

定理 5.2。对于 *Agg* 中的每个闭项 τ，要么

- w.h.p. $\tau = 0$，并且对于每个 $p > 0$，$\tau \xrightarrow{L_p} 0$ （τ 通常为零），要么
- $\mathbb{E}\tau > 0$，w.h.p. $\tau > 0$，并且对于每个 $p > 0$，$\tau/\mathbb{E}\tau \xrightarrow{L_p} 1$ 如 $n \to \infty$。

我们的第二个主要结果表明，如果我们进一步将联结函数的集合限制为$\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$，那么 $\mathbb{E}\tau = (c + o(1))n^{\gamma}$。

定理 5.3。对于 $\text{Agg}^{\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}}$ 中的每个闭项 τ，要么

- w.h.p. $\tau = 0$，并且对于每个 $p > 0$ 都有 $\tau \xrightarrow{L_p} 0$，要么
- 存在 $c > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，使得 $\mathbb{E}\tau = (c + o(1))n^{\gamma}$。

特别地，如果 $\sup_n \mathbb{E}\tau < \infty$，那么存在 $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\tau =:$ 当 $n \to \infty$ 时，c 和 $\tau \xrightarrow{P} c$。更准确地说，如果 $\gamma = 0$，则有 $\tau \xrightarrow{P} c$；而如果 $\gamma > 0$，那么 τ 发散但集中。

注 5.4。类似于一阶逻辑中对存在量词的处理，Min 可以从语言中移除，而不会损失任何表达能力。事实上，设 $f \in \mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$ 是定义为 $f(0) = 1$ 且对所有 $x > 0$ 都有 $f(x) = 0$ 的一元函数。设 $g \in \mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$ 为反函数：当 $x > 0$ 时，$g(x) = 1/x$，且 $g(0) = 0$。最后，设 $P(x_1, x_2) = x_1 x_2 \in \mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$。于是，$\text{Min}_u \tau(u) = P\,(f(\text{Max}_u f(\tau(u)))\ g(\text{Max}_u g(\tau(u))))$。

注记 5.5。论文中的所有基于求和的语言，尤其是 $\text{Agg}^{\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}}$，都能表示项 $\sum_v 1$ ——顶点 n 的总数——而忽略图结构。然后，我们可以计算应用于 n 的联结函数的输出。

注记 5.6。 我们将联结函数限制为输出非负值且满足相对利普希茨条件。现在我们说明，这些限制对于定理 5.2成立是必要的。下面通过两个反例来佐证这一说法。

首先，令 τ_1 表示边数与 $\binom{n}{2}^2$ 之差。由于函数 $g(x) = \binom{x}{2}^2$ 是相对利普希茨的，因此该差可表示为 $\mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}} \cup \{f_1(x_1,\ x_2) = x_1 - x_2\}}$。于是，$\mathbb{E}|\tau_1| = \Theta(n)$ 和 τ_1/n 依分布收敛到一个正态随机变量，因此 τ_1 不会集中。

通过定义 $f_2(x_1,\ x_2) = (x_1 - x_2)^2$ 和 $\tau_2 = \tau_1^2 \in \mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}} \cup \{f_2\}}$，很容易使前面的例子变为非负。我们仍可得到，$\mathbb{E}\tau_2 = \Theta(n^2)$ 和 τ_2/n^2 具有非退化的渐近分布。因此，函数 f_2 不属于 $\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$，这一点也在断言 4.11 中得到了证明。[1]

应用。我们的结果意味着对例如 [24, 第 3], [9, 章 4], [45], [50]章中研究的子图计数和扩展计数具有集中性。特别地，对于一个固定图 H，令 X_H 表示 $\mathbf{G}_n$ 中与 H同构的子图数量。对于一个根集合为 $R = \{v_1, \ldots, v_r\}$、根之间没有边的 MRG $H[R]$，以及一个集合 $U = \{u_1, \ldots, u_r\} \subset [n]$，令 $X_{R,H}(U)$ 表示满足 $U \subset V(H')$，并且存在一个函数 $f\colon V(H) \to V(H')$，将每个 v_i映射到 u_i且保留 $E(H)$ 中所有边的子图 $H' \subset \mathbf{G}_n$ 的集合。换言之，$X_{R,H}(U)$ 是 $\mathbf{G}_n$中与 $H[R]$ 同构的 MRG $H'[U]$ 的数量，而且很容易用我们语言中的一个项来表示这个计数。特别地，当 H 由一条单边和一个根构成时，$X_{R,H}(u)$ 就是 u 在 $\mathbf{G}_n$中的度。

推论 5.7. 对每一个 H，

- X_H 集中在附近

$$\mathbb{E}X_H = \frac{1}{\mathrm{aut}(H)} (n)_{|V(H)|} \cdot p^{|E(H)|},$$

其中 $\mathrm{aut}(H)$ 是 H 的自同构个数，并且

- 对于根的每一个集合 $R \subset V(H)$，最大值$_U X_{R,\ H}(U)$ 集中在附近

$$\mathbb{E} \max_U X_{R,H}(U) = \left(\frac{1}{\mathrm{aut}(H[R])} + o(1) \right) n^{|V(H)|-r} \cdot p^{|E(H)|},$$

其中 $\mathrm{aut}(H[R])$ 是 *MRG* $H[R]$ 的自同构个数。

我们强调，对于 X_H以及对于最大值$_U X_{R,\ H}(U)$（尽管对于一类受限的 MRG $H[R]$），已知更紧的集中结果 [6, 21, 40, 41, 42, 49]。尽管如此，即使我们并未在定理 5.3中指明收敛速率，我们的证明技巧仍可建立最优界，至多相差一个常数因子。特别地，可以得出，对于每个 τ（在 $\mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$中），存在 $C > 0$使得 $|\tau - \mathbb{E}\tau| \le C\mathbb{E}\tau\sqrt{\ln n/n}$ w.h.p.，这给出了二阶项的正确数量级，例如对于最大度。

5.2 定理5.2 和定理5.3 的证明

我们将用它们的原子类型来抽象图中的具体元组。随后，我们将在随机图中为给定原子类型的扩张数量建立一个上界。这个扩张上界

[1]看起来，要保证 $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$ 对于多项式 f，只需排除非平凡根即可（对于单变量多项式，实际上确实如此——每个多项式 $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 都属于 $\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$实数集）。然而，断言4.11 给出了另一个反例 $f_3(x_1,\ x_2) = (x_1 - x_2)^2 + x_2$，它有唯一的根 (0，0)。特别地，项 $(|E(G)| - n^2/2)^2 + n^2/2$ 属于 $\mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}} \cup \{f_3\}}$，且不满足定理5.2的结论。

用于本节的主要归纳构造——引理 5.10，该引理是定量版本的定理5.2 和定理5.3，并且很容易看出它将推出这两个定理。

定义 5.8（原子类型）。原子类型是在顶点集 $[k]$ 上的带标号图，其中 k 是正整数。令 k 为正整数，令 G 为定义在 $[n]$ 上的图，令 $u=(u_1,\dots,u_k)\in([n])_k$，并令 H 为定义在 $[k]$ 上的图。我们称 u 在 G 中具有原子类型 H，如果 $H[(1,\dots,k)]$ 与 $(G\restriction u)[u]$[2] 同构。令 $\mathcal{A}$ 为所有原子类型构成的集合。对于定义在 $[n]$ 上的图 G，令 $\mathrm{Atype}^G\colon \cup_k([n])_k\to\mathcal{A}$ 将 G 中的顶点元组映射到它们的原子类型。在下文中，当我们省略上标时，表示 $G=\mathbf{G}_n$，此时相应对象是随机的：我们记为 $\mathrm{Atype}=\mathrm{Atype}^{\mathbf{G}_n}$。令 $\mathcal{A}_k$ 为所有 k-元组的原子类型构成的集合，也就是说，对于任意 k-元组 $u\in([n])_k$，都有 $\mathrm{Atype}(u)\in\mathcal{A}_k$。我们还令 $\varnothing\in\mathcal{A}$ 为定义在空顶点集上的图的一种原子类型。

引理 5.9 (原子类型扩张比例稳定)。令 k 为非负整数，k' 为正整数。令 $\mathbf{t}_0\in\mathcal{A}_k$ 为一种原子类型。令 $\mathcal{A}_{k'}[t_0]\subset\mathcal{A}_{k+k'}$ 为满足 $\mathbf{t}\restriction[k_0]=\mathbf{t}_0$ 的原子类型$\mathbf{t}$ 的集合。

存在一个映射 $\%\colon \mathcal{A}_{k'}[t_0]\to\mathbb{R}_{\ge0}$，使得以下结论对每个 k-元组 $u\in([n])_k$ 都成立；当 $k=0$ 时，该元组可以为空，且其概率为 $1-n^{-\omega(1)}$。若 $\mathrm{Atype}(u)=t_0$，，则对于每个 $\overline{t}\in\mathcal{A}_{k'}[t_0]$，，满足 $\mathrm{Atype}(u,v)=t$ 的元组 $v\in([n]\setminus u)_{k'}$ 的数量至多为 $\left(\%(t)\cdot n^{k'-1/2}(\ln n)^{0.9}\right)$，与 $\%(t)\cdot n^{k'}$ 相差甚远。若 $\%(t)=0$，则此类元组的数量几乎必然为 0。

证明。固定 $\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{k'}[\mathbf{t}_0]$ 以及 $\overline{u}\in([n])_{k_0}$。对于 $\overline{v}\in([n]\setminus u)_{\overline{k'}}$，令

$$\%(\mathbf{t}):=\mathbb{P}(\mathrm{Atype}(\overline{u},\overline{v})=\mathbf{t}\mid\mathrm{Atype}(\overline{u})=\mathbf{t}_0).$$

注意 $\%(\mathbf{t})$ 不依赖于 v 的选择。

如果 $\%(\mathbf{t})=0$，则使得 (u,v) 具有类型 $\mathbf{t}$ 的元组数目v 几乎必然等于 0。

假设 $\%(\mathbf{t})>0$。令 Y为 $([n]\setminus u)_{k'}$ 中满足 $\mathrm{Atype}(u,v)=\mathbf{t}$的 k'-元组v 的数目，且受限于 $\{\mathrm{Atype}(u)=\mathbf{t}_0\}$。

回顾：对于图特征 $\chi:2^{\binom{[n]}{2}}\to\mathbb{R}$，$\chi(\mathbf{G}_n)$ 的边鞅是 $\chi(\mathbf{G}_n)$ 关于由随机图过程[4]$(\mathbf{G}(i,j))_{1\le i<j\le n}$ 所诱导的滤过的 Doob鞅[3]，其中 $\mathbf{G}(i,j)$ 包含 $\mathbf{G}_n$ 中满足 $u\le i$ 且 $v\le j$ 的所有边 $\{u,v\}$。现在我们将有界差不等式 [24, 推论 2.27] 应用于 Y 的边鞅。首先，

$$\mathbb{E}Y=\%(\mathbf{t})\cdot(n-k)_{k'}.$$

此外，改变 u 之外两个顶点之间的一条邻接关系，会改变 $O(n^{k'-2})$ 个元组的类型（即同时包含该关系中两个顶点的元组）；改变 u 中一个顶点与 u 之外一个顶点之间的一条邻接关系，则会改变 $O(n^{k'-1})$ 个元组的类型。因此，

$$\mathbb{P}\left(|Y-\mathbb{E}Y|>n^{k'-1/2}\cdot(\ln n)^{0.9}/2\mid\mathrm{Atype}(\overline{u})=\mathbf{t}_0\right)\le 2\exp\left(-\frac{n^{2k'-1}(\ln n)^{1.8}}{8(kn\cdot(n^{k'-1})^2+n^2\cdot(n^{k'-2})^2)}\right)$$
$$=\exp(-\Omega((\ln n)^{1.8}))=n^{-\omega(1)}.$$

[2]换言之，将每个 $i\in[k]$ 映射到 u_i 的双射 $f\colon[k]\to u$ 是 H 与 $G\restriction u$的同构。[3]设随机变量 X定义在可测空间 $(\Omega,\mathcal{F})$ 上，满足 $\mathbb{E}|X|<\infty$，并给定一列 σ-代数 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\ldots\subset\mathcal{F}$（称为滤过），则离散时间随机过程 $(X_i=\mathbb{E}(X\mid\mathcal{F}_i))^{i\in\mathbb{Z}_{\ge0}}$ 称为相对于滤过 $\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\ldots$的 X 的 Doob鞅。[4]离散时间随机过程 $X_0,X_1,\ldots$ 诱导出一列 σ-代数 $\sigma(X_0)$ $\sigma(X_0,X_1)\ldots$，称为滤过。回顾一下，对于随机变量 $\xi\colon\Omega\to E$，其中 $(\Omega,\mathcal{F})$ 和 $(E,\mathcal{E})$ 是可测空间，$\sigma(\xi)=\{\xi^{-1}(A)\mid A\in\mathcal{E}\}$。

我们得到

$$\mathbb{P}\left(|Y - \%(\mathbf{t}) \cdot n^{k'}| > n^{k'-1/2}(\ln n)^{0.9} \mid \mathrm{Atype}(\overline{u}) = \mathbf{t}_0\right) = n^{-\omega(1)},$$

如所要求。 □

我们将类型的概念以及集合 $\mathcal{A}_k$ 从由互不相同元素组成的元组自然推广到来自 $[n]^k$ 的元组。

现在我们可以陈述主要引理了，它是定理 5.2 和 5.3关于开放项 在语言 Agg 中的$\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$的定量版本。

引理 5.10 (归纳项近似)。 对于每个具有 k 个自由变量的项 $\tau \in \mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$，都存在常数 $K > 0$ 和映射 $\varphi_n : \mathcal{A}_k \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，对每个 $n \in \mathbb{N}$ 均成立，使得对于每个 $u \in [n]^k$ 以及每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_k$，我们有[—]

$$\mathbb{P}(n^{-K} \leq \tau(\overline{u}) \leq n^K \mid \tau(\overline{u}) \neq 0) = 1$$

并且以下情况之一成立：

- $\varphi_n(\mathbf{t}) \equiv 0$，且对于类型为 $\mathbf{t}$ 的元组，τ 通常为零：

$$\mathbb{P}(\tau(\overline{u}) = \varphi_n(\mathbf{t}) = 0 \mid \mathrm{Atype}(\overline{u}) = \mathbf{t}) = 1 - n^{-\omega(1)},$$

- $\varphi_n(\mathbf{t}) > n^{-K}$，且对于类型为$\mathbf{t}$的元组，$\tau$ 集中在 $\varphi_n(\mathbf{t})$ 附近：

$$\mathbb{P}\left(|\tau(\overline{u}) - \varphi_n(\mathbf{t})| > \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_n(\mathbf{t}) \mid \mathrm{Atype}(\overline{u}) = \mathbf{t}\right) = n^{-\omega(1)}. \tag{5}$$

此外，如果 $\tau \in \mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$，且 $\varphi_n(\mathbf{t}) > 0$，那么，对于某个正的 $c = c(\mathbf{t})$ 和实数 $\gamma = \gamma(\mathbf{t})$，

$$\varphi_n(\mathbf{t}) = (c + o(1))n^{\gamma}.$$

我们首先由引理5.10推出定理5.2和定理5.3。

定理5.2 和定理5.3的证明。 固定 τ。由于将引理5.10应用于空类型，存在一个序列 $\varphi_n \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ 和常数 $K > 0$ 使得

- 或者 $\varphi_n \equiv 0$，$\mathbb{P}(\tau = 0) = 1 - n^{-\omega(1)}$，且 $\tau \leq n^K$ 几乎必然
- 或 $n^{-K} \leq \tau \leq n^K$ 几乎必然，$\varphi_n > n^{-K}$，并且以至少 $1 - n^{-\omega(1)}$ 的概率，

$$|\tau - \varphi_n| \leq \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \cdot \varphi_n. \tag{6}$$

若 $\varphi_n \equiv 0$，则

$$\mathbb{E}\tau^p = \mathbb{E}\left(\tau^p \cdot \mathbb{1}_{0<\tau\leq n^K}\right) \leq n^{pK} \cdot \mathbb{P}(\tau \neq 0) = n^{-\omega(1)}.$$

由此，我们得出了定理 5.2 和定理 5.3的结论中的第一条。

现在，令 $\varphi_n > n^{-K}$。那么

$$\begin{aligned}\varphi_n\left(1-\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)\left(1-n^{-\omega(1)}\right) &\le \mathbb{E}\tau = \mathbb{E}\tau\cdot\mathbb{1}_{0\le\tau\le n^K}\\ &\le \mathbb{E}\tau\cdot\mathbb{1}_{|\tau/\varphi_n-1|\le\ln n/\sqrt{n}} + n^{-\omega(1)}\\ &< \varphi_n\left(1+\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)+n^{-\omega(1)}. \end{aligned} \tag{7}$$

将此与（6）相结合，我们得到以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，

$$1-\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}} < \frac{1-\ln n/\sqrt{n}}{1+\ln n/\sqrt{n}+n^{-\omega(1)}} \le \frac{\tau}{\mathbb{E}\tau} \le \frac{1+\ln n/\sqrt{n}}{1-\ln n/\sqrt{n}-n^{-\omega(1)}} < 1+\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}$$

并且 $\tau/\mathbb{E}\tau = n^{O(1)}$ 几乎必然。我们得出

$$\mathbb{E}\left|\frac{\tau}{\mathbb{E}\tau}-1\right|^p \le \left(\frac{(\ln n)^2}{\sqrt{n}}\right)^p + n^{O(1)-\omega(1)} = o(1).$$

因此，我们已完成定理 5.2 的第二项。

只需再注意到，定理 5.3 的第二项可由引理 5.10 的最后一个结论直接推出：由于 $\varphi_n(t) = (c+o(1))n^\gamma$，则对 $\mathbb{E}\tau$ 同样成立，这是由于（7）。至此证明完成。

□

引理 *5.10* 的证明。我们证明引理 5.10 通过对项的语法进行归纳。此外，我们证明一个稍强的断言——即因子 $\ln \sqrt{n}^n$ 在界（5）中可替换为 $\lambda\cdot\ln\sqrt{n}^n$，对任意 $\lambda > 0$ 成立。我们给出原子情形以及函数、求和和最大值应用情形的证明。我们无需考虑情形 $\tau(u) =$ 最小值$_v\tau'(u,v)$，因为它可以表示为来自 $\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$ 的联结函数与最大值的组合——参见注 5.4。

固定 $\lambda > 0$。

原子情形。

- $\tau \equiv$ const。在此情形下，对 $\varphi_n = \tau$ 的断言显而易见。
- $\tau(u_1,u_2) = \mathbb{1}_{\mathsf{E}(u_1,u_2)}$ 是一个含有两个自由变量的项。我们令 $\varphi_n(\mathsf{t}) = 1$ 当 t 有一条边时成立，并令 $\varphi_n(\mathsf{t}) = 0$ 当 t 没有边时成立。于是，对于每一对顶点 $(u_1,u_2)\in[n]^2$，都有 $\tau(u_1,u_2) = \varphi_n(\mathsf{Atype}(u_1,u_2))$。引理 5.10 的断言显然成立。
- （$\tau(u_1,u_2) = \mathbb{1}_{u_1=u_2}$ 的情形与前一个边情形类似。

函数应用。$\tau = f(\tau_1,\dots,\tau_m)$，其中 $f\in\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$。设 τ 和 τ_i 分别有 k 和 k_i 个自由变量。将 $u\in([n])_k$ 代入 τ 作为输入，我们得出参数 $\tau_1,\dots,\tau_m$——我们将 u 的相应子元组记为 u_i。固定一个原子类型 $\mathbf{t}\in\mathcal{A}_k$。事件 $\mathsf{Atype}(u)=\mathbf{t}$ 定义了 u_i 的类型 t_i，下文假设此事件成立。

通过归纳可得，序列 $\varphi_n^i = \varphi_n^i(\mathbf{t}_i)$、$i\in[m]$ 已经定义，并且各项 $\tau_1,\dots,\tau_m$ 满足引理 5.10 的断言，其中误差项 $\ln n/\sqrt{n}$ 被替换为 $\lambda\ln n/\sqrt{n}$。

特别地，存在常数 $K_1, \ldots, K_m$ 使得几乎必然有 $\tau_i \le n^{K_i}$ 对每个 $i \in [m]$均成立。我们应用定理 4.3，其中

$$\xi_i := \tau_i,\ \varphi_i := \varphi_n^{(i)},\ \delta := n^{-\omega(1)},\ \delta' := \lambda \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}},$$

and

$$K := \max\{K_1, \ldots, K_m\}.$$

我们立即得到，对于某些常数 a，$b > 0$（它们仅依赖于 f），

$$\mathbb{P}(\tau \in [K^{-b}, K^b] \mid \tau \neq 0) = 1,$$

并且要么 $\varphi_n \equiv 0$ 且 $\mathbb{P}(\tau = 0) = 1 - n^{-\omega(1)}$，要么 $\varphi_n \ge K^{-b}$ 且

$$\mathbb{P}\left(|\tau - \varphi_n| > (a\lambda)\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\varphi_n\right) = 1 - n^{-\omega(1)}.$$

最后，我们假设 $\tau \in \mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$，并且特别地，$f \in \mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$。设 $I = \{i_1, \ldots, i_{m'}\} \subset [m]$为满足 $\varphi_n^i \not\equiv 0$的 $i \in [m]$ 的集合。我们还通过归纳假设，对每个 $i \in I$，$\varphi_n^i = (c_i + o(1))n^{\gamma_i}$ 对某个正的 c_i 和实数 γ_i成立。我们必须证明存在 $c > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，使得 $\varphi_n = (c + o(1))n^{\gamma}$。由于 $f \in \mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$，我们得到 f_I是渐近多项式。于是，要么$f_I \equiv 0$ 且 $\varphi_n = 0$，要么

$$\varphi_n = f(\varphi_n^1, \ldots, \varphi_n^m) = f_I(\varphi_n^I) = f_I\left((c_{i_1} + o(1))n^{\gamma_{i_1}}, \ldots, (c_{i_{m'}} + o(1))n^{\gamma_{i_{m'}}}\right) = (c + o(1))n^{\gamma},$$

根据渐近多项式函数的定义，对于某些 $c > 0$和 $\gamma \in \mathbb{R}$成立。证明至此完成。

求和近似。$\tau(u) = \sum_v \tau'(v, u)$，其中，根据归纳假设，存在常数 $K' > 0$ 和映射 φ'_n：$\mathcal{A}_{k+1} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得对于每个类型 t、每个元组 (u, v) 以及每个 $\lambda > 0$，

$$\mathbb{P}\left(|\tau'(\overline{u}, v) - \varphi'_n(\mathbf{t})| > \lambda\frac{\ln n}{\sqrt{n}}\varphi'_n(\mathbf{t}) \mid \mathrm{Atype}(\overline{u}, v) = \mathbf{t}\right) = n^{-\omega(1)}$$

以及 $\mathbb{P}(n^{K'} \le \tau'(\overline{u}, v) \le n^{K'} \mid \tau'(u, v) \neq 0) = 1$。此外，$\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$或 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \ge n^{-K'}$。

固定 $u \in ([n])_k$ 和类型 $\mathsf{t}_0 \in \mathcal{A}_k$。在下文中，我们假设事件 $\mathsf{Atype}(u) = \mathsf{t}_0$ 成立，并定义 $\varphi_n(\mathsf{t}_0)$ 的值。令 $\mathcal{A}[\mathsf{t}_0] \subset \mathcal{A}_{k+1}$为由 (u, v) 可实现的原子类型集合，且满足 $\mathsf{Atype}(u) = \mathsf{t}_0$。根据引理 5.9，存在一个映射 $\%: \mathcal{A}[\mathsf{t}_0] \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得对于每个 $\mathsf{t} \in \mathcal{A}[\mathsf{t}_0]$，，满足 $\mathsf{Atype}(v, u) = \mathsf{t}$ 的顶点数量等于 $\%(\mathsf{t}) \cdot n(1 \pm o(n^{-1/2}\ln n))$，其概率为 $1 - n^{-\omega(1)}$。我们还假设对所有 $\mathsf{t} \in \mathcal{A}[\mathsf{t}_0]$，$\%(\mathsf{t}) \neq 0$，因为满足 $\%(\mathsf{t}) = 0$ 的类型 t 不会以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$对 τ 产生贡献。

令 $\mathcal{A}_{\mathrm{in}}[\mathsf{t}_0] \subset \mathcal{A}[\mathsf{t}_0]$ 为满足 $v \in u$ 的元组 (u, v) 的原子类型集合，并令 $\mathcal{A}_{\mathrm{out}}[\mathsf{t}_0] = \mathcal{A}[\mathsf{t}_0] \setminus \mathcal{A}_{\mathrm{in}}[\mathsf{t}_0]$。对于每个满足 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$ 的 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathsf{t}_0]$，，我们有

$$\mathbb{P}(\tau'(\overline{u}, v) = 0 \mid \mathrm{Atype}(\overline{u}, v) = \mathbf{t}) = 1 - n^{-\omega(1)}.$$

因此，根据并集界，如果对于每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathsf{t}_0]$，，都有 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$，那么 $\tau(u) = 0$，其概率为 $1 - n^{-\omega(1)}$。

因此，我们可以假设存在 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathbf{t}_0]$，使得 $\varphi'_n(\mathbf{t}) > 0$。如果所有这样的 $\mathbf{t}$ 都来自$\mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]$,，那么根据并集界，以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，$\tau(u) = \sum_{v\in u}\tau'(v,\ u)$；这就归结为函数应用的情形，因为具有正系数的线性函数属于 $\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$。

因此，我们可以假设存在 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$，使得 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \geq n^{-K'} > 0$。现在我们可以定义

$$\varphi_n(\mathbf{t}_0) := n \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]} \varphi'_n(\mathbf{t})\%(\mathbf{t}) + \sum_{v\in\overline{u}} \varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u}, v)). \tag{8}$$

根据并集界，以概率 $1-n^{-\omega(1)}$,

$$\begin{aligned}
|\tau(\overline{u}) - \varphi_n(\mathbf{t}_0)| &= \left|\sum_{v\in\overline{u}} \tau'(v,\overline{u}) + \sum_{v\notin\overline{u}} \tau'(v,\overline{u}) - \varphi_n(\mathbf{t}_0)\right| \\
&\leq \sum_{v\in\overline{u}} |\tau'(v,\overline{u}) - \varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u},v))| \\
&\qquad + \left|\sum_{v\notin\overline{u}} \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]} \mathbb{1}_{\text{Atype}(\overline{u},v)=\mathbf{t}} \tau'(v,\overline{u}) - n \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]} \varphi'_n(\mathbf{t})\%(\mathbf{t})\right| \\
&\leq \sum_{v\in\overline{u}} \frac{\lambda \ln n}{\sqrt{n}} \varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u},v)) + \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]} \left| n\varphi'_n(\mathbf{t})\%(\mathbf{t}) - \sum_{v:\,\text{Atype}(\overline{u},v)=\mathbf{t}} \tau'(v,\overline{u})\right| \\
&\leq \sum_{v\in\overline{u}} \frac{\lambda \ln n}{\sqrt{n}} \varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u},v)) + \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]} \left(\frac{\lambda\ln n}{\sqrt{n}} + \frac{2(\ln n)^{0.9}}{\sqrt{n}}\right) n\varphi'_n(\mathbf{t})\%(\mathbf{t}) \\
&\leq \frac{2\lambda \ln n}{\sqrt{n}} \varphi_n(\mathbf{t}_0).
\end{aligned}$$

此外，以概率 $1-n^{-\omega(1)}$,

$$\tau(\overline{u}) = \sum_v \tau'(\overline{u},v) \geq \sum_{v:\,\varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u},v))\neq 0} \tau'(\overline{u},v) \geq n^{-K'}$$

and

$$\varphi_n(\mathbf{t}_0) = n \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]:\ \varphi'_n(\mathbf{t})\%(\mathbf{t})\neq 0} \varphi'_n(\mathbf{t})\%(\mathbf{t}) + \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]:\ \varphi'_n(\mathbf{t})\neq 0} \varphi'_n(\mathbf{t}) \geq n^{-K'},$$

如所需。

在所有考虑的情形下，几乎必然。

$$\tau(\overline{u}) = \sum_v \tau'(v,\overline{u}) \leq \sum_v n^{K'} = n^{K'+1}.$$

最后，令 $\tau \in \text{Agg}^{\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}}$。我们假设，对于每个满足 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \not\equiv 0$ 的 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathbf{t}_0]$，都有 $\varphi'_n(\mathbf{t}) = (c(\mathbf{t}) + o(1))n^{\gamma(\mathbf{t})}$，其中某个正的 $c(\mathbf{t})$ 和实数 $\gamma(\mathbf{t})$。对于所有 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathbf{t}_0]$ 都有 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$ 的情形，已在上文讨论。因此，剩下需要证明的是：若存在某个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathbf{t}_0]$，使得 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \not\equiv 0$，则存在常数 $c > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，使得 $\varphi_n(\mathbf{t}) = (c + o(1))n^{\gamma}$。同样，对于每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$，都有 $\%(\mathbf{t})\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$ 的情形，我们无需考虑，因为这会归结为函数应用。因此，我们可以假设，存在某个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$，使得 $\%(\mathbf{t})\varphi'_n(\mathbf{t}) > \%(\mathbf{t})n^{-K'} > 0$。在这种情况下，

$\varphi_n(\mathbf{t}_0)$ 在 (8) 中定义，由此可得

$$\begin{aligned}\varphi_n(\mathbf{t}_0) &= n \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]:\,\varphi'_n(\mathbf{t})>0} \%(\mathbf{t})(c(\mathbf{t})+o(1))n^{\gamma(\mathbf{t})} + \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]:\,\varphi'_n(\mathbf{t})>0} (c(\mathbf{t})+o(1))n^{\gamma(\mathbf{t})} \\ &= (c+o(1))n^{\gamma},\end{aligned}$$

其中 γ 是 $(\gamma(\mathbf{t})+1)$ 在满足 $\varphi'_n(\mathbf{t}) > 0$ 的 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$ 上的最大值，而 $\gamma(\mathbf{t})$ 是在满足 $\varphi'_n(\mathbf{t}) > 0$ 的 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]$ 上的最大值，并且

$$c = \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]:\,\varphi'_n(\mathbf{t})>0,\,\gamma(\mathbf{t})+1=\gamma} c(\mathbf{t})\%(\mathbf{t}) + \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]:\,\varphi'_n(\mathbf{t})>0,\,\gamma(\mathbf{t})=\gamma} c(\mathbf{t}).$$

最大值近似。$\tau(u) = \max_v \tau'(u,v)$。根据归纳假设，存在常数$K' > 0$ 和映射 $\varphi'_n : \mathcal{A}_{k+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，如求和近似的情形所述。我们立即得到

$$\tau(\overline{u}) = \max_v \tau'(\overline{u}, v) \leq n^{K'} \quad \text{a.s.}$$

此外，事件 $\tau(u) \neq 0$ 意味着存在 v，使得 $\tau'(u,v) \neq 0$，而这又意味着$\tau'(u,v) \geq n^{-K'}$；后一个事件意味着 $\tau(u) \geq n^{-K}$。因此，

$$\mathbb{P}(\tau(\overline{u}) \geq n^{-K'} \mid \tau(\overline{u}) \neq 0) = 1.$$

如上所述，我们固定 $\mathbf{t}_0 \in \mathcal{A}_k$，并假设 $\overline{\text{Atype}}(u) = \mathbf{t}_0$。令 $\mathcal{A}[\mathbf{t}_0]$为 (v,u) 可实现的原子类型集合，其中 $\overline{\text{type}}(u) = \mathbf{t}_0$, ,¯并令集合 $\mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]$ 和 $\mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$ 按前一种情形中的方式定义。对于 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$, , 回忆 $\%(\mathbf{t})$ 的存在性由引理 5.9 保证。若对每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]$, $\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$，且对每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$, $\%(\mathbf{t})\varphi'_n(\mathbf{t}) \equiv 0$，则 $\tau(u) = 0$ 的概率为 $1 - n^{-\omega(1)}$。在这种情况下，我们令 $\varphi_n(\mathbf{t}_0) \equiv 0$，这正是引理 5.10 所述的若干可能情形之一。

假设 $\varphi'_n(\mathbf{t}) \not\equiv 0$ 对某个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{in}}[\mathbf{t}_0]$ 或 $\%(\mathbf{t})\varphi'_n(\mathbf{t}) \not\equiv 0$ 对某个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$成立。我们进一步假设，对于每个类型 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}_{\text{out}}[\mathbf{t}_0]$, $\%(\mathbf{t}) \neq 0$。令

$$\varphi_n := \max_{\mathbf{t}\in\mathcal{A}[\mathbf{t}_0]} \varphi'_n(\mathbf{t}) > n^{-K'}.$$

根据归纳假设和并集界，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，对于每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{A}[\mathbf{t}_0]$以及每个 $v \in [n]$，项 $\tau'(u,v)$ 满足 $|\tau'(u,v) - \varphi'_n(\mathbf{t})| \leq {}^{\lambda}\ln_{\sqrt{n}}{}^{n} \cdot \varphi'_n(\mathbf{t})$，若 $\text{Atype}(\overline{u,v}) = \mathbf{t}$。因此，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，¯

$$\tau \geq \max_{v\in[n]} \varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u}, v)) \left(1 - \lambda \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_n \left(1 - \lambda \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right)$$

and

$$\tau \leq \max_{v\in[n]} \varphi'_n(\text{Atype}(\overline{u}, v)) \left(1 + \lambda \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right) = \varphi_n \left(1 + \lambda \cdot \frac{\ln n}{\sqrt{n}}\right).$$

最后，如果 $\tau \in \text{Agg}^{\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}}$，那么应用归纳假设和 φ_n 的定义，我们立即得到 $\varphi_n = (c + o(1))n^{\gamma}$，其中 $c > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，从而完成证明。

□

6 稀疏无理数情形

现在我们考虑具有以下性质的 Erd˝os–R´enyi 随机图

$$p = p(n) = n^{-\alpha}, \text{ where } 0 < \alpha < 1 \text{ is irrational.}$$

数值 α 将在本节中固定。令 $\mathbf{G}_n \sim G(n,p)$。本节中，我们证明稀疏区间内定理5.2 和5.3的一个类似结果。

定理 6.1 (稀疏随机图的集中性)。 定理 *5.2* 和定理 *5.3* 的结论对 $\mathbf{G}_n \sim G(n, n^{-\alpha})$ 同样成立。

同样，定理 6.1意味着子图数量和 MRG 最大数量具有集中性。

推论 6.2。 推论 *5.7* 的结论对 $\mathbf{G}_n \sim G(n, n^{-\alpha})$ 同样成立。

特别地，$\mathbf{G}_n$ 中的三角形数量集中在 $\frac{1}{6}n^{3-3\alpha}$ w.h.p. 与稠密情形类似,- 关于扩张一个根集合后子图数量和 MRG 最大数量的集中性结果早已为人所知，见 [41, 45, 50]。尽管如此，我们的证明技巧仍能导出关于扩张的更精细结果；这种一般性下的结果[5], 在其他地方并未陈述：令ξ:=最大值 $_U X_{R,H}(U)$，则存在 $\varepsilon > 0$使得， $|\xi/\mathbb{E}\xi - 1| \le n^{-\varepsilon}$w.h.p.

证明策略。我们按照定理 5.2、5.3 的证明策略来证明定理 6.1。不过，由于稀疏区间与稠密区间之间存在以下关键差异，证明要复杂得多：在稀疏区间，引理 5.9 不成立。换言之，并非任意顶点元组都能以任意给定的方式在 $\mathbf{G}_n$ 中扩张。例如，当 $\alpha > \frac{1}{2}$ 时，以高概率，大多数顶点对都没有公共邻点。为了解决这个问题，我们采用了为证明一阶逻辑 0-1 定律而开发的工具 [44] 。具体而言，我们区分稀疏扩张与稠密扩张（见下文定义 6.4），并证明 $\mathbf{G}_n$ 中的每个顶点元组都有任意固定的稀疏扩张，但以高概率，几乎所有顶点元组都没有固定的稠密扩张（见定理 6.12 和推论 6.14）。实际上，这些概念可以对所有可能的扩张进行分类，因为每个扩张都可以表示为一系列稀疏扩张和稠密扩张。此外，对于每个固定的顶点元组u，稠密扩张的数量有上界（见事实 6.9），这促使我们引入闭包 $\mathrm{cl}_s(u)$ 的概念，它包含给定大小为 s 的所有可能稠密扩张，见定义 6.6。给定一个元组及其闭包，我们知道它在闭包之外没有任何稠密扩张；而稀疏扩张的数量很大，并且像引理 5.9 中那样集中在其期望附近。这引出了对原子类型概念的如下细化，我们称之为闭包类型：元组 u 的闭包类型是 MRG $\mathrm{cl}_s(u)[u]$，见定义 6.15。

组织结构。 本节余下部分安排如下。在小节 6.1 中，我们将上述证明策略形式化：

- 首先，我们介绍稀疏、稠密扩张和闭包的定义，并证明它们所需的 d 性质。
- 接下来，我们将证明定理 6.12 ——稳定化引理 5.9 的一个类似结果。

[5]据我们所知，这一结果目前只针对所谓的“严格平衡”MRG [50]。

- 然后，我们定义闭包类型，并陈述和证明引理 6.19。该引理与稠密情形中的引理 5.10 起着相同的作用——它逼近项，并确立每个（不一定是闭合的）项都集中在 φ_n附近。

最后，在第6.2小节中，我们将 [1, 2]的结果加以推广，证明语言 Agg[$\mathcal{F}_{LP}$, 平均值、LAvg、最大值] 中的项满足收敛定律。

6.1 定理6.1的证明

定义 6.3（扩展边或顶点的数目、密度、最大密度）。对于图G 及其诱导子图 H，我们用 $e(V(H)$ $G)$或 $e(H,G)$表示 $|E(G)| - |E(H)|$。我们用 $v(V(H)$ $G)$或 $v(H,G)$表示 $|V(G)| - |V(H)|$。我们还用 $\rho(G) = {}^{|E}(_{|V\ G|}^{\ G\ |})$ ( )表示 G 的密度，并用 $\rho^{\max}(G) = \max_{H\subseteq G}\rho(H)$表示 G的最大密度。

定义 6.4 （扩张：稠密、 s-稠密与稀疏）。 设 F_1 为图 F_2的诱导子图。

- 图 F_2 是 F_1 的稠密扩张，如果对于每个集合 $V(F_1) \subseteq S \subset V(F_2)$,

$$e(S, F_2) > \frac{1}{\alpha} v(S, F_2).$$

  我们也称 (F_1, F_2) 为稠密对。如果稠密对 (F_1, F_2) 满足 $v(F_1, F_2) \leq s$，那么我们称该对 (F_1, F_2) 是 s-稠密的。
- 图 F_2 是 F_1 的稀疏扩张（且 (F_1, F_2) 是稀疏对），如果对于每个集合 $V(F_1) \subset S \subseteq V(F_2)$,

$$e(F_1, F_2 \restriction S) < \frac{1}{\alpha} v(F_1, F_2 \restriction S).$$

.

- 设 F_1 具有 $V(F_1) = [k]$，设 F_1' 是 F_2'的诱导子图，且 $V(F_1') = \{u_1, \ldots, u_k\}$，再设 $f\colon V(F_2) \to V($ $F_2')$ 是图 $F_2 \setminus E(F_1)$ 与 $F_2' \setminus E(F_1')$ 之间的图同构，并且满足对每个 $i \in [k]$ 都有 $f(i) = u_i$（也就是说， f 是 MRGs $(F_2 \setminus E(F_1))[(1, \ldots, k)]$ 与 $(F_2' \setminus E(F_1'))[(u_1, \ldots, u_k)]$ 之间的同构）。那么我们称 F_2'是 F_1'的一个 (F_1, F_2)-扩张（有时也称 F_2'是 $V(F_1')$ 的一个 (F_1, F_2)-扩张，或一个 $(V(F_1)$ $F_2)$-扩张）。

以下事实是稠密对定义的直接推论。

事实 6.5. 若对(F_1, F_2) 是稠密的，且 $F_1' \supset F_1$ 满足 $V(F_2) \setminus V(F_1') \neq \varnothing$，那么对$(F_1', F_1' \cup F_2)$ 也稠密。

定义 6.6 （闭包）。 设 G 是定义在 $[n]$ 上的图。设 k 为正整数，$u \in ([n])_k$，且 s^-为正整数。 u 在 G 中的 s-闭包 记作 $\mathrm{cl}_s^G(u)$，是一个诱导子图 H，满足 $^-$

- $\overline{u} \subseteq V(H)$;
- H 在 G 中没有 s-稠密扩张;
- 存在一个图序列 $G \restriction u = H_1 \subset \ldots \subset H_r = H$，其中每一对 (H_i, H_{i+1}) 都是 s-稠密的。

我们记闭包为 $\mathrm{cl}_0^G(u) \equiv G \restriction u$。注意，闭包是良定义的，参见 [47, 第4节。2]。我们将用到关于其他闭包的子图的闭包的两个事实。

事实 6.7。 设 $F' \subset F$ 是图 G 的子图。设 $s' \leq s$ 为正整数。那么 闭包$_{s'}^G(F') \subseteq$闭包$_s^G(F)$。

事实 6.7 根据闭包的定义可立即得出，因为 F' 的任意稠密扩张序列也是 F 的稠密扩张序列。

事实 6.8。设 F 是图 G 的子图，设 s、s' 为正整数，并令 $F \subset F' \subseteq \mathrm{cl}_s^G(F)$。如果 $\mathrm{cl}_{s'}^G(F')$ 至多有 s 个顶点，则 $\mathrm{cl}_{s'}^G(F') \subseteq \mathrm{cl}_s^G(F)$。

事实 6.8 源于这样一个观察："稠密扩张"的"子扩张"同样是稠密的。事实上，如果 $F' = H_1 \subset \ldots \subset H_r = \mathrm{cl}_{s'}^G(F')$ 是由 s'-稠密扩张构成的序列，并且该序列构成 $\mathrm{cl}_{s'}^G(F')$，而 H_i 是该序列中第一个不完全位于 $\mathrm{cl}_s^G(F)$ 内的图，那么图对 $(\mathrm{cl}_s^G(F),\ \mathrm{cl}_s^G(F) \cup H_i)$ 根据事实 6.5 是稠密的——矛盾。

我们还需要这样一个事实：随机图中的闭包在 w.h.p.意义下是有界的，详见 [47,定理 4.3。2]。

事实 6.9. 存在一个逐坐标递增函数 $\ell\colon \mathbb{Z}_{>0}^2 \to \mathbb{Z}_{>0}$，使得对于每个$k$、$s \in \mathbb{Z}_{>0}$，以概率 *1*，对每个 $\overline{u} \in ([n])_k$，

$$\left|V(\mathrm{cl}_s^{\mathbf{G}_n}(\overline{u}))\right| \le \ell(k,s).$$

最后，以下这个断言——以概率 1，$\mathbf{G}_n$ 没有稠密子图——是马尔可夫不等式的一个简单推论，见 [24, 定理3.4]。

事实 6.10. 设 F是一个图，满足 $\rho(F) > 1/\alpha$。那么，以概率 *1*，$\mathbf{G}_n$不包含 F的副本。

在下文中，当 $G = \mathbf{G}_n$时，我们省略上标 $\mathbf{G}_n$，并写作 $\mathrm{cl}_s(u) = \mathrm{cl}_s^{\mathbf{G}_n}(u)$。

定义 6.11（扩张数量）。固定一对图 $F_1 \subset F_2$，满足 $k := |V(F_1)|$，并取一个整数 $s > 0$。令 $\overline{u} \in ([n])_k$ 和 $\overline{U} \subseteq \overline{u}$。

令 $X_{(F_1,F_2;s)}(\overline{u};\overline{U})$ 表示满足以下条件的 (F_1,F_2)-扩张 F_2'的数量：$\overline{u}$在$\mathbf{G}_n$中，$F_2' \setminus \overline{U}$没有$\mathbf{G}_n$中的 s-稠密扩张 F_3'，且 $V(F_3') \setminus V(F_2') \neq \varnothing$，并且

$$E(F_3') \cap ((V(F_2') \setminus \overline{u}) \times (V(F_3') \setminus V(F_2'))) \neq \varnothing.$$

下面的关键结果是引理5.9 在稀疏随机图情形下的类似结果：

定理 6.12（扩展计数）。设 $0 \le k' \le k$ 为整数。对于任意稀疏(F_1,F_2) 以及任意 $s \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$（此处，$V(F_1)$ 可以为空），有

$$\mu(F_1,F_2;s) := \mathbb{E}X_{(F_1,F_2;s)}(\overline{u};\overline{U})$$

不依赖于 $\overline{u} \in ([n])_{|V(F_1)|}$ 和大小为 k' 的 $\overline{U} \subseteq \overline{u}$，且等于

$$(1+o(1)) \cdot \frac{(v(F_1,F_2))!}{\mathrm{aut}(F_1,F_2)} \cdot \binom{n-|V(F_1)|}{v(F_1,F_2)} p^{e(F_1,F_2)} = (1/\mathrm{aut}(F_1,F_2)+o(1)) \cdot n^{v(F_1,F_2)-\alpha \cdot e(F_1,F_2)} \quad (9)$$

其中 $\mathrm{aut}(F_1,F_2)$ 是保持 F_1 中每个顶点不变的 F_2 的自同构数量。此外，存在 $\varepsilon > 0$，使得以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，每个 $\overline{u} \in ([n])_{|V(F_1)|}$ 以及每个大小为 k' 的 $\overline{U} \subseteq \overline{u}$ 都满足

$$|X_{(F_1,F_2;s)}(\overline{u};\overline{U})/\mu(F_1,F_2;s) - 1| \le n^{-\varepsilon}.$$

证明。对于图对 $F_1 \subset F_2$，记

$$\rho(F_1,F_2) = \frac{e(F_1,F_2)}{v(F_1,F_2)}, \quad \text{and} \quad \rho^{\max}(F_1,F_2) = \max_{V(F_1) \subset S \subseteq V(F_2)} \rho(F_1, F_2 \restriction S).$$

我们称图对 $(F_1,\ F_2)$ 是严格平衡的，如果 $F_1 \subset F_2$，并且对每一个 $V(F_1) \subset S \subset V(F_2)$,

$$\rho(F_1, F_2 \restriction S) < \rho(F_1, F_2) = \rho^{\max}(F_1, F_2).$$

固定任意一对 $(F_1,\ F_2)$。注意，存在一个序列 $F_1 = H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_r = F_2$，使得每一对 $(H_{i-1},\ H_i)$ 都是严格平衡的，并且对每个 i，$\rho(H_{i-1},\ H_i) \geq \rho(H_i,\ H_{i+1})$。事实上，对每个 i，假设 H_{i-1} 已经定义，则令 H_i 为一个包含极小图，使其最大密度为 $\rho(H_{i-1},\ H_i)$，且满足 $H_{i-1} \subset H_i \subseteq F_2$。那么，显然所有的图对 $(H_{i-1},\ H_i)$ 都是严格平衡的。假设对某个 i，$\rho(H_{i-1},\ H_i) < \rho(H_i,\ H_{i+1})$。那么

$$\rho(H_{i+1}, H_{i-1}) = \frac{e(H_{i+1}, H_i) + e(H_i, H_{i-1})}{v(H_{i+1}, H_i) + v(H_i, H_{i-1})} > \min\{\rho(H_{i+1}, H_i), \rho(H_i, H_{i-1})\} = \rho(H_i, H_{i-1})$$

——这与 H_i的定义矛盾。

对于图对 $F_1 \subset F_2$ 和 $u \in ([n])^{V(F_1)}$，令 $X^{all}_{(F_1,F_2)}(u)$ 表示 u 在 $\mathbf{G}_n$ 中的 $(F_1,\ F_2)$-扩张数。显然，$\mathbb{E}X^{all}_{(F_1,F_2)}(u)$ 不依赖于 u，且等于

$$\frac{(v(F_1, F_2))!}{\mathrm{aut}(F_1, F_2)} \binom{n-k}{v(F_1, F_2)} p^{e(F_1,F_2)}$$

令 $\mu^{all}(F_1,\ F_2)$ 表示上述量。

我们将 依赖 [45, 定理 5], 的一个稍加改进的版本，如下所述 .[6]

事实 6.13。 设 (F_1, F_2) 是一个严格平衡对，且 $\rho(F_1, F_2) < 1/\alpha$。令 $k := |V(F_1)|$。存在 $\varepsilon > 0$，使得对于每个 $u \in ([n])_k$，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$,

$$(1 - n^{-\varepsilon})\mu^{all}(F_1, F_2) < X^{all}_{(F_1,F_2)}(u) < (1 + n^{-\varepsilon})\mu^{all}(F_1, F_2). \tag{10}$$

现在，设 $(F_1,\ F_2)$ 是稀疏的，$|V(F_1)| = k$，且令 $F_1 = H_1 \subset H_2 \subset \ldots \subset H_r = F_2$ 为如上所述的图序列。由于 $(F_1,\ F_2)$ 是稀疏的，因此对于每个 i,

$$\rho(H_{i-1}, H_i) \leq \rho(H_1, H_2) < \frac{1}{\alpha}.$$

根据事实 6.13 应用 $r - 1$ 次，我们得到 (10) 以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$成立，对每个$u \in ([n])_k$。

我们已经证明，所有 (F_1, F_2)-扩张的总数满足定理 6.12 的结论：$\mathbb{E}X^{all}_{(F_1,F_2)}(u)$ 不依赖于 u，等于 (9)，并且 $X^{all}_{(F_1,F_2)}(u)$ 具有所需的集中性质 (10)。为了完成证明，我们需要证明 $\mu(F_1, F_2; s) = (1 + o(1))\mu^{all}(F_1, F_2)$，并且具有 s-稠密扩张的 (F_1, F_2)-扩张数量至多为 $\mu^{all}(F_1, F_2) \cdot n^{-\Theta(1)}$，其概率为 $1 - n^{-\omega(1)}$。

设 F_3 是一个图，满足包含关系 $F_2 \subset F_3$ 是真包含，$(F_2,\ F_3)$ 是 s-稠密的，并且在 F_3 中，$V(F_3) \setminus V(F_2)$ 与 $V(F_2) \setminus V(F_1)$ 之间至少存在一条边。为了完成证明，只需证明：对于某个 $\varepsilon' > 0$，以及每个 $u \in ([n])_k$，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$,

$$X^{all}_{(F_1,F_3)}(u) < \mu^{all}(F_1, F_2)/n^{\varepsilon'}. \tag{11}$$

[6]在原始版本中，指出事件 $(1 - \varepsilon)\mu^{all}(F_1, F_2) < X_{(F_1,F_2)}(u) < (1 + \varepsilon)\mu^{all}(F_1, F_2)$ 对每个 $\varepsilon > 0$ 都以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$ 成立。对于 p，这个较弱的版本仍然成立，而它可以是与阈值概率 $n^{-1/\rho(F_1,F_2)}$ 相差一个多对数因子的量。在我们的情形中，p 与阈值相差 $n^{\Theta(1)}$，完全相同的证明即可得到精细化结果。或者，事实 6.13 可直接由 Kim-Vu 集中不等式 [26] 得出。

我们注意到

$$v(F_1,F_3)-\alpha\cdot e(F_1,F_3)=(v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2))+(v(F_2,F_3)-\alpha\cdot e(F_2,F_3))<v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2).$$

设 $F_1=H'_1\subset H'_2\subset\ldots\subset H'_{r'}=F_3$ 是一个严格平衡扩张序列，满足 $\rho(H'_{i-1},\ H'_i)\geq\rho(H'_i,\ H'_{i+1})$，对所有 i 均成立。若 $\rho(H'_1,\ H'_2)<1/\alpha$，则结论由事实 6.13 得出。

假设 $\rho(H'_1,H'_2)>1/\alpha$。令 H' 为一个包含极小图，使得 $F_1\subset H'\subseteq F_3$，且对 (H',F_3) 是稀疏的。注意，对 (F_1,H') 是稠密的；否则，对于一个包含极大的子图 $F_1\subseteq H''\subset H'$，使得 $\rho(H'',H')<1/\alpha$，对 (H'',H') 是稀疏的，这意味着对 (H'',F_3) 也稀疏——这与 H' 的极小性矛盾。于是

$$\begin{aligned}v(H',F_3)-\alpha e(H',F_3)&=(v(H',H'\cup F_2)-\alpha e(H',H'\cup F_2))+(v(H'\cup F_2,F_3)-\alpha e(H'\cup F_2,F_3))\\&\leq(v(H'\cap F_2,F_2)-\alpha e(H'\cap F_2,F_2))+(v(H'\cup F_2,F_3)-\alpha e(H'\cup F_2,F_3)).\end{aligned}$$

由于 (F_2,F_3) 是稠密的，我们得到 $v(H'\cup F_2,F_3)-\alpha\cdot e(H'\cup F_2,F_3)\leq 0$，且仅当 $H'\cup F_2=F_3$ 时等号成立。由于 (F_1,F_2) 是稀疏的，我们得到

$$\begin{aligned}v(H',F_3)-\alpha\cdot e(H',F_3)&\leq v(H'\cap F_2,F_2)-\alpha\cdot e(H'\cap F_2,F_2)\\&=(v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2))-(v(F_1,H'\cap F_2)-\alpha\cdot e(F_1,H'\cap F_2))\\&\leq v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2)\end{aligned}$$

其中，第二个等号仅当 $F_1=H'\cap F_2$ 时成立。因此，两个等号同时成立仅当 $H'=F_3\restriction(V(F_1)\cup V(F_3\setminus V(F_2))$。然而，根据 F_3 中 $F_3\setminus F_2$ 与 $F_2\setminus F_1$ 之间存在边这一假设，等式 $v(H',F_3)-\alpha\cdot e(H',F_3)=v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2)$ 不可能成立，因为 $v(F_1,F_2)=v(H',F_3)$。

我们由此得出

$$v(H',F_3)-\alpha\cdot e(H',F_3)<v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2).\tag{12}$$

设 $\varepsilon''>0$。回顾上文在定义 H' 之后的说明，对 (F_1,H') 是稠密的。若 u 至少有 $n^{\varepsilon''}$ (F_1,H') 个扩张，则当 $C>0$ 足够大时，我们可以找到至少 $n^{\varepsilon''/C}$ 个扩张 $G'_1,\ldots,G'_m$，它们都属于 u，且每个 G'_i 都不完全包含在 $G'_1\cup\ldots\cup G'_{i-1}$ 中。于是，对于一个足够小且不依赖于 ε'' 的常数 $\delta=\delta(F_1,H')>0$（因此，ε'' 可以选得显著小于 δ），图 $G'=G'_1\cup\ldots\cup G'_m$ 有 $v=\Theta(n^{\varepsilon''/C})$ 个顶点和至少 $(v-k)(1/\alpha+\delta)$ 条边。根据并集界，该事件发生的概率至多为

$$\begin{aligned}\sum_{v=\Theta(n^{\varepsilon''/C})}\binom{n}{v}\binom{v^2}{(v-k)(1/\alpha+\delta)}n^{-\alpha(v-k)(1/\alpha+\delta)}&\leq\sum_{v=\Theta(n^{\varepsilon''/C})}n^{v-(1-\varepsilon''/\alpha)((1+\delta\alpha)v-k(1+\delta\alpha))}\\&=n^{-\omega(1)}.\end{aligned}$$

这就完成了在 $H'=F_3$ 情形下对 (11) 的证明。若 $H'\subset F_3$ 是真包含，我们令 $\mathcal{E}$ 为所有 (F_1,H')-扩张的集合。我们可以假设 $|\mathcal{E}|<n^{\varepsilon''}$。由于 (H',F_3)-是稀疏的，根据事实 6.13，以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，对于每个 $G'\in\mathcal{E}$，G' 的 (H',F_3)-扩张数量为 $O(n^{v(H',F_3)-\alpha\cdot e(H',F_3)})$。由 (12) 可知，存在一个正的常数 $\delta'\gg\varepsilon''$，使得以

概率 $1-n^{-\omega(1)}$，u 的 (F_1,F_3)-扩张总数至多为

$$O\left(\sum_{H'\in\mathcal{E}'} n^{v(H',F_3)-\alpha\cdot e(H',F_3)}\right)=O\left(n^{\varepsilon''}\cdot n^{v(F_1,F_2)-\alpha\cdot e(F_1,F_2)-\delta'}\right)<\mu^{all}(F_1,F_2)\cdot n^{-\delta'/2},$$

完成证明。

□

在 $V(F_1)=\varnothing$的情况下，定理 6.12 表明，同构于 F 且最大密度小于 $1/\alpha$ 并且不具有 s-稠密扩张的图的数量满足相同的集中不等式。

推论 6.14。对于任意具有 $\rho^{\max}(F)<1/\alpha$ 的图 F 以及任意 $s\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$，同构于 F 且不具有 s-稠密扩张的图的数量集中在其期望值附近，其期望为

$$\frac{(|V(F)|)!}{\mathrm{aut}(F)}\cdot\binom{n}{|V(F)|}p^{|E(F)|}=(1/\mathrm{aut}(F)+o(1))\cdot n^{|V(F)|-\alpha\cdot|E(F)|},$$

其中，$\mathrm{aut}(F)$ 是 F 的自同构数量。

证明。只需证明对 $(\varnothing,F)$ 这一对而言，它是稀疏的；也就是说，对每个 $S\subseteq V(F)$，都有$|E(F\restriction S)|<\frac{1}{\alpha}|S|$。这可直接由下式得出：

$$\frac{1}{\alpha}>\rho^{\max}(F)\geq\rho(F\restriction S)=\frac{|E(F\restriction S)}{|S|}.$$

□

定义 6.15（闭包类型）。s-闭包类型 是一个 MRG $F[1,\ldots,k]$，其中k为某个正整数，且 $F=\mathrm{cl}_s^F([k])$。

令 k 为正整数，令 G 为定义在 $[n]$ 上的图，令 $u=(u_1,\ldots,u_k)\in([n])_k$，并令$F[1,\ldots,k]$ 为一种 s-闭包类型。若 MRGs$F[1,\ldots,k]$ 与 $\mathrm{cl}_s^G(u)[u]$ 同构，我们就称 u 具有 s-闭包类型 $F[1,\ldots,k]$ 于 G 中。

换言之，闭包类型是 MRG $F[1,\ldots,k]$ 的同构类].

定义 6.16 ($\mathcal{C}^{(s)}$ 和 $\mathcal{C}_k^{(s)}$)。令 $\mathcal{C}^{(s)}$ 为满足以下条件的所有 [7] s-闭包类型 $F[x]$ 的集合：

- F 的最大密度严格小于 $1/\alpha$，并且
- $|V(F)|\leq\ell(|V(F)|,\ s$，其中 ℓ 是事实 6.9 中的函数。

令 $\mathrm{Ctype}_s^G\colon\cup_k([n])_k\to\mathcal{C}^{(s)}$ 映射元组到其在 G 中的 s-闭包类型。我们令 $\mathcal{C}^{(s)}=\cup_{k=0}^{\infty}\mathcal{C}_k^{(s)}$，其中 $\mathcal{C}_k^{(s)}$ 是所有 s-闭包类型的集合 $F[1,\ldots,k]$。

例如，令 $\alpha\in(1/2,1)$，令 G 为一个顶点为 u_1,u_2,v 的图，使得 v 是 u_1,u_2的公共邻点，并且 $\{u_1,u_2,v\}$ 以外的任何顶点在该集合中至多有一个邻点。于是 $\mathrm{Ctype}_1^G(u_1,u_2)=F[1,2)],$，且图 F有 $V(F)=\{1,2,x\}$，其中 x 与 1 和 2 都相邻。

由推论 6.14 可知，对于每个 s 以及每个 $\mathbf{t}\in\mathcal{C}_k^{(s)}$，w.h.p. 都存在 $u\in([n])_k$，其 s闭包类型 $\mathbf{t}$ 属于 $\mathbf{G}_n$。另一方面，由事实 6.9 和事实 6.10可知，对于每个正

[7]每个同构类 $F[x]$ 在 $\mathcal{C}^{(s)}$ 中恰好出现一次。

整数 k 和 s，w.h.p. 每个 k-元组 $u \in ([n])_k$ 的 s-闭包类型都属于 $\mathcal{C}_k^{(s)}$。换言之，$\mathcal{C}_k^{(s)}$ 恰好是 k 元组在 $\mathbf{G}_n$ w.h.p. 中可实现的所有 s-闭包类型的集合。以下讨论中，当 $G = \mathbf{G}_n$ 时，我们省略上标 $\mathbf{G}_n$，并记作 $\mathrm{Ctype}_s = \mathrm{Ctype}_s^{\mathbf{G}_n}$。

我们以自然的方式将闭包类型的定义从不同顶点的元组推广到 $u \in [n]^k$。

与稠密情形不同，类型的概念取决于一个数 s，我们需要根据项的深度确定 s。下一个定义引入了 s 的一列取值，其中 s_i 对应于深度为 $D - i$ 的项；参数 D 是一个我们预先固定的大整数。

定义 6.17（充分快速的序列）。设 D 和 W 为正整数。一个 (D, W)-快速整数序列是满足下列条件的 $s_0 \geq s_1 \geq \ldots \geq s_D = 0$：

$$s_{i-1} \geq \ell(W, s_i)$$

对所有 $i \in [D]$ 均成立。

现在我们固定 任意正整数 D 和 W。设 $s_0 \ldots s_D$ 是一个 (D, W)-快速序列。

定义 6.18（$\mathcal{L}$）。令 $\mathcal{L}$ 为事实 6.9 中的事件：对于每个 $k \leq F$、每个 $s \leq s_0$ 以及每个 $u \in ([n])_k$，都有 $|V(\mathrm{cl}_s(u))| \leq \ell(k, s)$。由事实 6.9 可知，$\mathcal{L}$ 以高概率成立。

引理 6.19（稀疏情形下的归纳项近似 Σ：稀疏情形）。设 $\tau \in \mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$ 是一个深度为 $d \leq D$、含有 k 个自由变量且总共至多含有 W 个变量的项，并设 $s_0 \geq s_1 \geq \ldots \geq s_D = 0$ 是一个 (D, W)-快速序列。存在常数 ε、$K > 0$ 以及映射 φ_n：$\mathcal{C}^{(s_{D-d})_k} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$（对每个 $n \in \mathbb{N}$），使得对于每个 $u \in [n]^k$ 和每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}^{(s_{D-d})_k}$，都有

$$\mathbb{P}(n^{-K} \leq \tau(\overline{u}) \leq n^K \mid \tau(\overline{u}) \neq 0) = 1$$

以下两个断言之一成立：

- $\varphi_n(\mathbf{t}) \equiv 0$ 对于类型为 $\mathbf{t}$ 的元组，τ 通常为零：

$$\mathbb{P}(\tau(\overline{u}) = \varphi_n(\mathbf{t}) = 0 \mid \mathcal{L} \wedge \{\mathrm{Ctype}_{s_{D-d}}(\overline{u}) = \mathbf{t}\}) = 1 - n^{-\omega(1)},$$

- $\varphi_n(\mathbf{t}) > n^{-K}$ 对于类型为 $\mathbf{t}$ 的元组，τ 集中在 $\varphi_n(\mathbf{t})$ 附近：

$$\mathbb{P}\left(|\tau(\overline{u}) - \varphi_n(\mathbf{t})| > n^{-\varepsilon}\varphi_n(\mathbf{t}) \mid \mathcal{L} \wedge \{\mathrm{Ctype}_{s_{D-d}}(\overline{u}) = \mathbf{t}\}\right) = n^{-\omega(1)}. \tag{13}$$

此外，若 $\tau \in \mathrm{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$，且 $\varphi_n(\mathbf{t}) > 0$，则对于某个正的 $c = c(\mathbf{t})$ 和实数 $\gamma = \gamma(\mathbf{t})$，有

$$\varphi_n(\mathbf{t}) = (c + o(1))n^{\gamma}.$$

定理 6.1 由引理6.19 推出的过程与定理 5.2、5.3的证明完全相同，因此略去。

为了证明引理 6.19，我们需要以下断言；该断言也在 [44] 中使用过，但论文中未明确陈述。为完整起见，我们在下面证明这一事实。

事实 6.20. 设 s_1、s_2 为非负整数，设 G 是顶点集为 V 的图，并设 $U_1 \subset U_2 \subseteq V$ 满足

- $U_2 \not\subset \mathrm{cl}_{s_1}^G(U_1)$,

- 对 $(U_1, G \restriction U_2)$ 是稀疏的，
- $|\text{闭包}_{s_2}^G(U_2)| \le s_1$.

那么，数对$(\mathrm{cl}_{s_1}^G(U_1), \mathrm{cl}_{s_2}^G(U_2) \cup \mathrm{cl}_{s_1}^G(U_1))$ 是稀疏的。

证明。记 $F_1 := \mathrm{cl}_{s_1}^G(U_1)$，$F_2 := \mathrm{cl}_{s_2}^G(U_2) \cup \mathrm{cl}_{s_1}^G(U_1)$，并假设相反的情况成立——存在 S使得 $V(F_1) \subseteq S \subset V(F_2)$ 且 $e(F_1, F_2 \restriction S) > \frac{1}{\alpha} v(F_1, F_2 \restriction S)$。假设 S具有这一性质且是包含极小的。那么，对每个 $V(F_1) \subset S' \subset S$，都有 $e(F_1, F_2 \restriction S') < \frac{1}{\alpha} v(F_1, F_2 \restriction S')$，这意味着

$$e(S', F_2 \restriction S) = e(F_1, F_2 \restriction S) - e(F_1, F_2 \restriction S') > \frac{1}{\alpha}\Big(v(F_1, F_2 \restriction S) - v(F_1, F_2 \restriction S')\Big) = \frac{1}{\alpha} v(S', F_2 \restriction S).$$

因此，数对 $(F_1, F_2 \restriction S)$ 是稠密的。由于

$$|S \setminus V(F_1)| \le |V(F_2)| - |V(F_1)| \le |V(F_2)| \le s_1,$$

我们得到 t 帽 $F_2 \restriction S \subset \mathrm{cl}_{s_1}(U_1)$ —— 与假设 $U_2 \not\subset V(F_1)$ 矛盾 . □

引理的证明 *6.19*。我们通过对项的语法进行归纳来证明该引理。我们从原子情形开始。

原子情形。

1. $\tau \equiv$ 常量。在此情形下，关于 $\varphi = \tau$ 的断言显然成立。

2. $\tau(u_1, u_2) = \mathbb{1}_{\mathrm{E}(u_1, u_2)}$是一个有两个自由变量的项。对于 $\mathbf{t} = F[(1, 2)] \in \mathcal{C}_2^{s_D}$，我们令$\varphi(\mathbf{t}) = \mathbb{1}_{E(F \restriction [2]) \neq \varnothing}$。那么，对于每一对具有 s_D-闭包类型$\mathbf{t}$ 的顶点 (u_1, u_2)，$\tau(u_1, u_2) = \varphi(\mathbf{t})$。归纳断言显然成立。

3. $\tau(u_1, u_2) = \mathbb{1}_{u_1 = u_2}$ 的情形与前一个边情形类似。

函数应用。$\tau = f(\tau_1, \dots, \tau_m)$ 是深度为 d 的项，其中 $f \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$。我们有，每个项 τ_i 的深度为 $d_i \le d$。设 τ和 τ_i 分别具有 k 和 k_i 个自由变量。设 $u \in [n]^k$。将其作为 τ 的输入进行代入，可确定 $\tau_1, \dots, \tau_m$ 的参数——我们将 u 的相应子元组记为 u_i。为表述方便与清晰起见，在下文中我们假设 $u \in ([n])_k$。当对某个 $1 \le i < j \le k$ 有 $u_i = u_j$ 时，情形完全相同。

固定 k-元组 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}^{(s_{D-d})_k}$ 的一个 s_{D-d}-闭包类型。事件 $\mathrm{Ctype}^{s_{D-d}}(u) = \mathbf{t}$ 定义了 u_i 的 s_{D-d}-闭包类型 $\mathbf{t}_i$，因为对每个 $i \in [m]$，由事实 6.7，有 $\mathrm{cl}^{s_{D-d}}(u) \supseteq \mathrm{cl}^{s_{D-d}}(u_i) \supseteq \mathrm{cl}^{s_{D-d_i}}(u_i)$。

以下假设事件 $\mathcal{L} \wedge \{\mathrm{Ctype}^{s_{D-d}}(u) = \mathbf{t}\}$ 成立。由归纳可知，$\varphi^{(i)} := \varphi^{(i)}(\mathbf{t}_i)$，$i \in [m]$，已经定义，并且项 $\tau_1, \dots, \tau_m$ 满足归纳断言。特别地，存在常数 $K_1, \dots, K_m$ 和 $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m$，使得$\mathbb{P}(n^{-K_i} \le \tau_i \le n^{K_i} \mid \tau_i \neq 0) = 1$，并且以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，$|\tau_i - \varphi_n^{(i)}| \le n^{-\varepsilon_i} \cdot \varphi_n^{(i)}$对每个$i \in [m]$都成立。我们应用定理 4.3，得到

$$\xi_i := \tau_i,\ \varphi_i := \varphi_n^{(i)},\ \delta := n^{-\omega(1)},$$

$$\delta' := n^{-\min\{\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m\}},\ \text{and}\ K := \max\{K_1, \dots, K_m\}.$$

W我们立即得到，对于某些常数 $a,\ b>0$（它们仅依赖于 f），

$$\mathbb{P}(\tau\in[K^{-b},K^{b}]\mid\tau\neq 0)=1,$$

且要么 $\varphi_n\equiv 0$ 且 $\mathbb{P}(\tau=0)=1-n^{-\omega(1)}$，要么 $\varphi_n\geq K^{-b}$ 且

$$\mathbb{P}\left(|\tau-\varphi_n|>a\delta'\cdot\varphi_n\right)=1-n^{-\omega(1)}.$$

最后，我们假设 $\tau\in\mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$，特别是 $f\in\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$。设 $I=\{i_1,\dots,i_{m'}\}\subset[m]$为满足 $\varphi_n^i\not\equiv 0$的 $i\in[m]$ 的集合。我们还通过归纳假设，对于每个 $i\in I$，$\varphi_n^i=(c_i+o(1))n^{\gamma_i}$，其中某个正的 c_i 和实数 γ_i存在。由于 $f\in\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}$，我们得到 f_I 是渐近多项式。于是，要么 $f_I\equiv 0$ 且 $\varphi_n=0$，要么等式 $\tau=(c+o(1))n^{\gamma}$ 对某些 $c>0$ 和 $\gamma\in\mathbb{R}$ 成立，从而完成函数应用情形的证明。

由于注记 5.4，接下来只需处理两类聚合。固定一个闭包类型$F_0[(1,\dots,k)]=\mathfrak{t}_0\in\mathcal{C}^{(s_{D-d})\,k}$。下文假设事件 $\mathsf{Ctype}^{s_{D-d}}(u)=\mathfrak{t}_0$成立，并定义 $\varphi_n(\mathfrak{t}_0)$ 的值。令 $\mathcal{C}'_{F_0}\subset\mathcal{C}_{k+1}^{(s_{D-d+1})}$ 为所有满足以下条件的 s_{D-d+1}-闭包类型$F[(1,\dots,k+1)]$ 的集合

- $F\restriction[k]=F_0\restriction[k]$,
- $\mathsf{cl}^{F\cup F_0}_{s_{D-d+1}}([k+1])=F$,
- 对 $(F_0,\ F\cup F_0)$ 是稀疏的。

回想一下，集合 $\mathcal{C}'_{F_0}\subset\mathcal{C}_{k+1}^{(s_{D-d+1})}$ 是有限的。

根据事实 6.20，对于每个 $v\notin\mathsf{cl}^{s_{D-d}}(u)$，我们都有 $\mathsf{cl}^{s_{D-d+1}}(u,v)\cup\mathsf{cl}^{s_{D-d}}(u)$ 是 $\overline{\mathsf{cl}}^{s_{D-d}}(u)$ 的稀疏扩张。因此，存在 $\mathfrak{t}'\in\mathcal{C}'_{F_0}$，使得 $(u,\underline{v})$ 具有 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathfrak{t}'$。因此，元组 (u,v) 满足 $\mathsf{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u,v)\in\mathcal{C}'_{F_0}$。下面证明反向结论：$\mathcal{C}'_{F_0}$ 中的每种闭包类型都能由某个 (u,v) 以概率 $1-n^{-\omega(1)}$实现。固定 $F[(1,\dots,k+1)]\in\mathcal{C}'_{F_0}$。根据定理 6.12，以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，存在一个 $(F_0,F\cup F_0)$-扩张 $F'_2\cup F'_1\,\mathsf{of}\,F'_1:=\mathsf{cl}^{s_{D-d}}(u)$，使得

- F'_2是$[k]$，F的 u的一个扩张。回顾定义6.4最后一个项目，这意味着该扩张在 F 之外的所有边上都与 $[k]$一致。
- F'_2在$\mathbf{G}_n$中没有 s_{D-d+1}-稠密扩张 F'_3，满足 $V(F'_3)\setminus(V(F'_1)\cup V(F'_2))\neq\varnothing$以及$E(F'_3)\cap((V(F'_2)\setminus V(F'_1))\times(V(F'_3)\setminus(V(F'_1)\cup V(F'_2)))\neq\varnothing$。

令 v 为 $k+1$ 在相应的扩张同构 $F\to F'_2$下的像。我们来证明 $\mathsf{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u,v)=F[(1,\dots,k+1)]$。注意，根据 $\mathcal{C}'_{F_0}$的定义，$F'_3\setminus F'_2$不可能完全位于 F'_1内部。因此，只需证明 F'_2没有包含位于 $F'_2\cup F'_1$之外顶点的 s_{D-d+1}-扩张。反设 F'_3是 F'_2的这样一个扩张。我们还知道，$V(F'_3)\setminus(V(F'_1\cup F'_2))$与 $V(F'_2)\setminus V(F'_1)$之间没有边。由于对(F'_3,F'_2)是 s_{D-d+1}-稠密的，根据事实 6.5，我们得到 $F'_1\cup(F'_3\setminus(F'_1\cup F'_2))$是$F'_1$的一个 s_{D-d+1}-稠密扩张——这与 $F'_1=\mathsf{cl}^{s_{D-d}}(u)$的事实矛盾。

求和近似。$\tau:=\tau(u)=\sum_v\tau'(u,\ v)$，其中，根据归纳假设，存在常数 $\varepsilon'>0,\ K'>0$ 和一个映射 $\varphi'_n:\mathcal{C}_{k+1}\to\mathbb{R}_{\geq 0}$，使得对于每一种闭包类型

$\mathbf{t}$ 以及每个元组 $(u,\overline{v})$,

$$\mathbb{P}\left(|\tau'(\overline{u},v)-\varphi'_n(\mathbf{t})|>n^{-\varepsilon'}\varphi'_n(\mathbf{t})\mid \mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)=\mathbf{t}\right)=n^{-\omega(1)}$$

且 $\mathbb{P}(n^{K'}\le\tau'(u,\overline{v})\le n^{K'}\mid\tau'(u,\overline{v})\neq 0)=1$。此外，要么 $\varphi'_n(\mathbf{t})\equiv 0$，要么 $\varphi'_n(\mathbf{t})\ge n^{-K'}$。

我们立即得到 $\tau(u)\le n^{K'+1}$ 几乎必然。此外，若 $\tau(u)\neq 0$，则存在 v 使得$\tau'(u,v)\neq 0$，而这又由归纳假设推出 $\tau\ge\tau'(u,v)\ge n^{-K'}$。因此，$\mathbb{P}(\tau\ge n^{-K'}\mid\tau\neq 0)=1$。

然后我们固定 $v\in[n]$ 并证明 $\mathbf{t}_0$ 在以下三种情形的每一种中都定义了 (u,v) 的类型。

- $v\in\overline{u}$(例如 $v=u_i$)。在这种情况下，

  $$\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)=\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u})\subseteq\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}).$$

  因此，$\mathbf{t}_0$ 确定了（u,v）的 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t}_i$。
- $v\in\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u})\setminus\overline{u}$。于是，由于 $k+1\le W$，我们得到

  $$s_{D-d}\ge\ell(W,s_{D-d+1})\ge\ell(k+1,s_{D-d+1}).$$

  由于事件 $\mathcal{L}$ 成立，我们可以假设 $\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(u,v)$ 至多有 s_{D-d} 个顶点。根据事实 6.8，我们得到

  $$\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)\subseteq\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}).$$

  因此，$\mathbf{t}_0$ 确定了（u,v）的 s_{D-d+1}-闭包类型。我们将其记为 $\mathbf{t}(v')$，对应于 v 在 MRG $\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)[u]$ 与 $F_0[1,\dots,k]$ 的同构下的像v'。
- $v\notin\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u})$。我们知道存在 $\mathbf{t}'\in\mathcal{C}'_{F_0}$，使得（$u,v$）具有 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t}'$。

定义 6.21. 对于 $F[1,\dots,k+1]\in\mathcal{C}'_{F_0}$，令 η_F 为 $x\in V(F)$ 的个数，使得存在 MRG $(F\cup F_0)[V(F_0)]$ 的一个自同构，将 $k+1$ 映射到 x。

定义

$$\varphi_n:=\sum_{i\in[k]}\varphi'_n(\mathbf{t}_i)+\sum_{v'\in F_0\setminus R_0}\varphi'_n(\mathbf{t}(v'))+\sum_{F[R]=\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{F_0}}\varphi'_n(\mathbf{t})\cdot\mu(F_0,F\cup F_0;s_{D-d+1})\cdot\eta_F.\tag{14}$$

为简洁起见，我们记

$$\mu_F:=\mu(F_0,F\cup F_0;s_{D-d+1})\cdot\eta_F.$$

接下来，我们证明：以概率 $1-n^{-\omega(1)}$，对于每个 $F[1,\dots,k+1]=\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{F_0}$，满足条件 (u,v) 具有 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t}$ 的顶点 v 的数量等于 $(1\pm n^{-\varepsilon''})\mu_F$，其中某个$\varepsilon''>0$。这就完成了 $\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$ 情形下集中性的证明。事实上，如果 (14) 中所有加项都等于 0，那么 $\varphi_n=0$，并且根据归纳假设和并集界，以概率$1-n^{-\omega(1)}$，对于每个 v, $\tau'(u,v)=0$，从而推出 $\tau(u)=0$。如果 (14) 中至少有一个加项 $\varphi'_n(\mathbf{t})$ 不

等于 0，那么 $\varphi_n \geq \varphi'_n(\mathbf{t}) \geq n^{-K'}$。此外，

$$\begin{aligned}|\tau - \varphi_n| &\leq \sum_{v\in V(F'_1)} |\tau(\overline{u},v) - \varphi'_n(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v))| + \left|\sum_{v\notin V(F'_1)} \tau(\overline{u},v) - \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{F_0}} \varphi'_n(\mathbf{t})\cdot\mu_F\right| \\ &\leq n^{-\varepsilon'} \sum_{v\in V(F'_1)} \varphi'_n(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)) + \sum_{\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{F_0}} \left|(1\pm n^{-\varepsilon''}\pm n^{-\varepsilon'})\mu_F\varphi'_n(\mathbf{t}) - \varphi'_n(\mathbf{t})\mu_F\right| \\ &\leq (n^{-\varepsilon'} + n^{-\varepsilon''})\varphi_n,\end{aligned}$$

根据需要。

因此，为了完成集中性的证明，只需证明，对于每个 $\mathbf{t} = F[(1,\dots,k+1)] \in \mathcal{C}'_{F_0}$, μ_F都能很好地近似满足 $\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(u,v) = \mathbf{t}$ 的顶点 v 的数量。根据定理 6.12，满足以下条件的 $(F_0, F\cup F_0)$-扩张 $F' = F'_2 \cup F'_1$ 的数量为 $(1\pm n^{-\varepsilon''})\mu(F_0, F\cup F_0; s_{D-d+1})$：它是 $F'_1 := \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$ 的扩张，F'_2 是 u 的 $([k], F)$-扩张，并且 F' 没有 s_{D-d+1}-稠密扩张。一方面，每个 $v \notin V(F'_1)$ 都有 $\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(u,v) =: F'_2$，使得对于某个 $F[(1,\dots,k+1)] \in \mathcal{C}'_{F_0}$，$F'_2[(u,v)] \cong F[(1,\dots,k+1)]$。另一方面，对于每个 $F[(1,\dots,k+1)] \in \mathcal{C}'_{F_0}$ 以及 F'_1 的每个 $(F_0, F\cup F_0)$-扩张 F'，满足 $\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u) \cup \mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(u,v) = F'$ 的顶点$v \in V(F') \setminus V(F'_1)$ 的数量恰好为 η_F，证毕。

最后，令 $\tau \in \mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$。我们假设，对于每个 $v\in[n]$ 以及 $\mathbf{t} := \mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(u,v)$，

$$\varphi'_n(\mathbf{t}) = (c'(\mathbf{t}) + o(1))\cdot n^{\gamma'(\mathbf{t})}.$$

上文已讨论 $\varphi'_n(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)) \equiv 0$ 对所有 $v\in[n]$ 成立的情形。因此，我们假设 $\varphi'_n(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(u,v)) \not\equiv \overline{0}$，其中某个 $v\in[n]$ 存在。对于 $F[(1,\dots,k+1)] \in \mathcal{C}'_{F_0}$，令 $\beta_F :=$极限 $\lim_{n\to\infty} \ln \mu_F / \ln n$。注意，定理 6.12 表明，存在常数 a, b 使得 $\mu_F = (a+o(1))n^b$。因此，$\ln \mu_F = (b+o(1))\ln n$。于是极限存在。根据定义（14）和（9），我们得到

$$\varphi_n = (c+o(1))\cdot n^{\gamma},$$

其中

$$\gamma = \left\{\max_{v\in V(F'_1)} \gamma'(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)),\ \max_{F[R]=\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{F_0}} \beta_F\gamma'(\mathbf{t})\right\},$$

and

$$c = \sum_{v\in V(F'_1):\,\gamma'(c)=\gamma} c'(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)) + \sum_{F[(1,\dots,k+1)]=\mathbf{t}\in\mathcal{C}'_{F_0}:\,\gamma'(\mathbf{t})=\gamma} \frac{c'(\mathbf{t})\eta_F}{\mathrm{aut}(F_0, F\cup F_0)},$$

至此，求和近似情形的证明完成。

最大值**近似**。$\tau(u) = \max_v \tau'(u,\ v)$。根据归纳假设，存在常数$\varepsilon'$，$K'>0$ 以及映射 $\varphi'_n\colon \mathcal{C}_{k+1} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，如前一种情形所示。我们立即得到 $\tau(u) \leq n^{K'}$几乎必然成立，且 $\mathbb{P}(\tau(u) \geq n^{-K'} \mid \tau \neq 0) = 1$。事实上，如果 $\tau(u) \not\equiv 0$，那么存在 v使得$\tau'(u,\ v) \not\equiv 0$，进而推出 $\tau(u) \geq \tau'(u,\ v) \geq n^{-K'}$。

与前一个求和聚合的情形一样，我们固定 $v\in[n]$，并观察到 $\mathbf{t}_0$ 定义了 (u,v) 的类型，在以下三种情形中：1) $v\in u$、2) $v\in \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)\setminus u$，以及 3) $v\notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$。定义

φ_n 为.....的最大值

$$\max_{i\in[k]} \varphi'_n(\mathbf{t}_i),\ \max_{v\in \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u})\setminus\overline{u}} \varphi'_n(\mathbf{t}(v)),\ \max_{\mathbf{t}'\in\mathcal{C}'_{F_0}} \varphi'_n(\mathbf{t}')$$

我们有 $\varphi_n \equiv 0$ 当且仅当，对于每个 $v \in [n]$，$\varphi'_n(\mathrm{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u,\ v))^{-} \equiv 0$。

由于 $\mathcal{C}'_{F_0}$ 中的所有闭包类型都可以由 $(u,\ v)$ 实现，因此，$^{-}$对于某个 v，有 $\varphi_n = \varphi'_n(\mathrm{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u,\ v))$。因此，一方面，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，

$$\tau(\overline{u}) \geq \tau'(\overline{u}, v) \geq \varphi'_n(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u}, v))(1 - n^{-\varepsilon'}) = \varphi_n(1 - n^{-\varepsilon'}).$$

另一方面，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，

$$\tau(\overline{u}) \leq \max_{v} \varphi'_n(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u}, v))(1 + n^{\varepsilon'}) = \varphi_n(1 + n^{-\varepsilon'}),$$

由此完成集中性的证明。

最后，如果 $\tau \in \mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rlpoly}}}$，那么，应用归纳假设和 φ_n 的定义，我们立即得到，对于某个 $c > 0$ 和 $\gamma \in \mathbb{R}$，$\varphi_n = (c + o(1))n^{\gamma}$，由此完成证明。

□

6.2 平均值和 最大值的收敛定律

回顾第 3节， [1] 证明了稀疏情形下的收敛性，但仅适用于平均值，而不适用于最大值或最小值。利用为集中性结果开发的技术，我们可以证明，在平均算子中加入最大值后，收敛定律依然成立。

定理 6.22。 对于每个闭合的 $\tau \in \mathrm{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \text{平均值、LAvg、最大值}],$，其求值 $[\![\tau]\!]_{\mathbf{G}_n}$ 依概率收敛到一个常数。

由于定理 6.22 的证明与定理 6.1 的证明思路相同，而且事实上更简单，因此我们将其推迟到附录 C。

尽管这里的收敛结果相当强，但它有以下弱点：平均操作会丢失信息。这正是 [1, 3], 中的观点，该文将收敛现象与图神经网络中的“过平滑”联系起来。从理解图的渐近组合学这一角度来看，我们发现，许多渐近性质良好的稀疏随机图的重要性质并不收敛到常数，因此无法用定理6.22的项语言表达。例如，考虑稀疏随机图中的三角形数量，假设其 $\alpha > \frac{2}{3}$。典型顶点不属于任何三角形。因此，属于三角形的顶点平均数量收敛到 0。尽管如此，与稠密情形一样，当$\alpha < 1$时，$\mathbf{G}_n$ 中的三角形数量集中在 $n^{\Theta(1)}$附近。从这个意义上说，定理 6.1给出了更强的结果，能够捕捉重要的图特征，正如推论6.2所示。

7 与前人结果的比较

我们在第3节中声称，我们的结果蕴含了一些先前的收敛结果。我们在此详细说明。

7.1 一阶逻辑的零一律

我们证明，我们的结果推广了适用于一阶逻辑 [14, 15]的经典零一律。首先，对于一阶逻辑中的每个句子，都可以将其中的布尔联结词替换为来自$\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$的函数。具体而言，设 f: $\{0,1\}^m \to \{0,1\}$ 是一个布尔函数。其扩张 $f^* \in \mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$ 可以定义如下： $f^*(\mathbf{0}) = f(0)$，其中 $\mathbf{0} = (0,\ldots,0) \in \{0,1\}^m$。接着，对于每个满足 $f(x) = 0$的 $x \in \{0,1\}^m \setminus \{\mathbf{0}\}$，我们令 $I(x)$为满足 $x_i \neq 0$的 $i \in [m]$所构成的集合，并定义$f^*_{I(x)} \equiv 0$。对于其他所有非空的 $I \subseteq [m]$，我们令$f^*_I \equiv 1$。其次，可以分别用聚合算子最大值和最小值替换每个全称量词和存在量词。由于每个这样的项的取值都是0或1，定理 5.3立即意味着它依概率收敛到0或1，这与相应句子的有效概率收敛到0或1完全相同。类似地，定理 6.1蕴含了适用于无理数稀疏情形的Shelah 和 Spencer 零一律。

7.2 实值逻辑的收敛律

定理5.3 也将实值逻辑的收敛定律推广到了 [2], 联结词为相对利普希茨且渐近多项式的情形。特别地，由于推论4.10， $f(x) = \frac{1}{x}\mathbb{1}_{x>0} \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$和 $g(x_1, x_2) = x_1 x_2 \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$。因此，这两个函数也属于 $\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$。由此可得，全局平均可以表示为

$$\frac{1}{n}\sum_v \tau(\cdot, v) = \sum_v g\left(f\left(\sum_u 1\right), \tau(\cdot, v)\right)$$

局部平均可以表示为

$$\frac{1}{n}\sum_{\mathrm{E}(u_i,v)} \tau(\overline{u}, v) = \sum_v g\left(f\left(\sum_v \mathbb{1}_{\mathrm{E}(u_i,v)}\right), \tau(\overline{u}, v)\right),$$

其中 $u \coloneqq (u_1, \ldots\ldots, u_k)$。

由于 [2] 讨论的是 Lipschitz 联结词，人们可能会想，我们的集中性结果能否推广到 Lipschitz 函数。我们将说明答案是否定的，并在此过程中论证相对 Lipschitz 性质是必要的。

回想一下，对于在语言 [2] 中加入聚合算子 Σ 后的语言所表示的有界项，集中性结果并不成立——例如，Agg$^{\{\sin x\}}$ 就不满足该结果。在这个例子中，我们添加的联结函数并不收敛，因此看起来，有界项不收敛的唯一可能原因似乎就是这一点。然而，正如下文所示，即使处理的是收敛的 Lipschitz 函数，也不能保证获得集中性。

定义 $\mathcal{F}_0$ 为所有函数组成的集合 $f: \mathbb{R}^m_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 这些函数既是 Lipschitz 函数，又是相对利普希茨函数，并且每个特定项 f_I 在 $\mathbb{R}^{|I|}_{\geq 0} \setminus (0, C)^{|I|}$ 上为常数， $C \geq 0$其中 $\mathcal{F}_0$。即使所有联结函数都属于 f，具备相对利普希茨性质对于获得集中性仍然至关重要。更正式地说，存在一个 Lipschitz 函数 $\mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，使得 f 在 $[1, \infty)$ 上为常数，但定理 5.2 对 Agg$^{\mathcal{F}_0 \cup \{f\}}$ 的结论并不成立——见断言 4.11。

另一方面，有些不满足 Lipschitz 条件（甚至不连续）的函数属于 $\mathcal{F}_{\text{rlpoly}}$，因为 f 的规范不应当是一致的。因此，我们在稠密情形下的结果仍然适用，可以证明某些项收敛，而这些项并不在 [2]的收敛定律所涵盖的范围内。

最后，定理 6.22 将 [1, 2] 的结果扩展到 Agg$[\mathcal{F}_{LP}, \mathrm{LAvg}$、平均值、最大值] 在稀疏无理数区域中的情形。

8 讨论

本文关注 Erd˝os–R´enyi 随机图的逻辑极限定律中 p增长率的两种主要情形： $p = \text{const}$ 和 $p = n^{-\alpha}$。我们强调， p比 n 的任何幂都衰减得更慢的情形，与 $p = \text{const}$ 的情形完全相同；一阶逻辑 0-1 定律也是如此——见 [46] ——而定理 5.2、5.3 中，我们为使表述清晰，仅证明了 p 为常数的情形。此外，情形 $p = n^{-\alpha}$ 可以很容易地推广到 $p = \Theta(n^{-\alpha})$。正如我们在引言中指出的，当 $\alpha \in (0, 1)$ 为有理数时，随机图不满足一阶逻辑收敛律，因此定理 6.1 的结论不成立。 $\alpha > 1$的情形不那么有趣，因为在此区域中，随机图以高概率是森林，且每种同构类型的连通分量数量都已有充分研究。因此，在项的渐近行为这一背景下，未来值得研究的唯一缺失情形，是线性稀疏的 $G(n, p = c/n)$。我们注意到，定理 5.2、5.3、6.1 的类似结论在此区域并不成立，因为一阶逻辑 0-1 定律失效。尽管如此，Agg$[\mathcal{F}_{LP}$, LAvg、平均值、最大值]中的项仍然在分布上收敛 [2]。

本文的主要结果，无论是在稠密区间还是稀疏区间，都可以推广到具有任意签名 σ的关系结构。具体而言，设 $\sigma = \{=, R_1, \dots, R_k\}$，其中 R_i的元数为 i，并设 $G(n, p_1, \dots, p_k)$为 $\prod_{i=1}^{k} \binom{[n]}{i}$上的乘积测度，其中每个 i-子集以概率 p_i出现，且彼此独立。于是，同样的证明技巧可用于证明该分布下定理 5.2、5.3、6.1 的类似结果，其中每个 p_i 为常数或 $n^{-\alpha_i}$ （对某个无理数 $\alpha_i > 0$ ），并且该语言通过添加来自σ的关系而得到扩展。研究 $\prod_{i=1}^{k} \binom{[n]}{i}$上的其他分布以及加权随机图模型也会很有意义。特别地，论文 [1, 2] 还研究了其顶点上带有独立同分布随机权重（特征）的图，这类图自然出现在图神经网络的语境中。显然，当权重具有有限支撑 $X \subset [0, \infty)$ 且其分布不依赖于 n 时，我们的结果可以推广到加权的 $G(n, p)$。将我们的结果推广到权重上的其他分布——尤其是当分布依赖于 n时——将是有趣且自然的。

我们主要结果中的误差项可以用相同的证明方法加以优化，但要在我们语言中的项的渐近展开的二阶项中得到最优常数因子，似乎是一项艰巨的任务。特别是，我们猜想，排除最大值聚合并限制联结函数的类别后，或许可以证明 $\frac{\tau - \mathbb{E}\tau}{\sqrt{\mathrm{Var}(\tau)}}$ 的中心极限定理。若能为整个语言 Agg$_{\mathcal{F}}$ 证明此类更一般的结果，~~将会非~~常有意义；该结果涉及更广泛的极限分布类别，尤其是 Gumbel 分布，它是随机图 [6, 7, 22]中经重标度的最大度的极限分布。

有一些研究充分的图函数集中于 $G(n,\ p)$，但本文并未涵盖它们。高阶语言中的项便是这种情况。特别是，已知色数和独立数是良好集中的 [8, 10, 16, 36, 43]。然而，即使对于单子二阶逻辑中相当小的片段，收敛定律也不成立——特别是，带有两个一阶变量的存在单子二阶逻辑便是如此 [4, 39] (尽管涉及色数和独立数的图性质可以用这种逻辑表达)。虽然定理5.2、5.3 无法推广到这一单子二阶逻辑片段的实值类比，但一个尚待解决的问题是：对项语言施加适当的额外限制，能否确保集中性，并同时涵盖色数和独立数。

还有一些有趣的图参数会集中，而且可以用.....来表示

某些 $\mathcal{F} \neq \mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}$ 的“一级” $\mathsf{Agg}^{\mathcal{F}}$。特别是，如果 $\mathcal{F}$ 包含布尔联结词和 $\mathbb{1}_{x=y}$，那么就可以表示具有最大度 Δ 的顶点总数 $X^{\max}$。在 $G(n,p)$ 中，这个数量以高概率等于 1（并且会集中） [7]。然而，很明显，无法在 $\mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$ 中表示这一项。事实上，设 $\mathbf{G}^1 \sim G(n,1/2)$，并按以下方式生成 $\mathbf{G}^2$：生成 $G(n,1/2)$，并以概率 $1/2$ 保持其不变；否则，以概率 $1/2$ 找出最大度 Δ，然后随机均匀地选取一个顶点，删除与其相连的所有边，再改为随机均匀地向除最大度顶点以外的所有顶点连边 Δ。可以证明，$\mathbf{G}^1$ 和 $\mathbf{G}^2$ 以高概率不可区分，即，

$$\left| [\![\tau]\!]_{\mathbf{G}^1} - [\![\tau]\!]_{\mathbf{G}^2} \right| = o\Big(\min\big\{ [\![\tau]\!]_{\mathbf{G}^1}, [\![\tau]\!]_{\mathbf{G}^2} \big\} \Big)$$

w.h.p.，对于每个非零的 $\tau \in \mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$。然而，w.h.p. $\mathbf{G}^1$ 有一个最大度顶点，而$\mathbf{G}^2$ 有两个最大度顶点，这与 $X^{\max} \in \mathsf{Agg}^{\mathcal{F}_{\mathrm{rellip}}}$ 矛盾。

一方面，上述讨论引出了以下问题：语言 $\mathsf{Agg}^{\mathrm{Bool}\cup\{\mathbb{1}_{x=y}\}}$（其中 Bool 是所有布尔联结词组成的集合）是否满足集中律？如果答案是肯定的，能否定义一个相当广泛的类 $\mathcal{F}$，使其包含布尔联结词且 $\mathbb{1}_{x=y}$ 保持集中律？另一方面，上述例子表明，我们可以利用集中性结果证明实值逻辑的不可表达性结果。

最后，我们的结果带来了若干与随机图中项的行为相关的新计算挑战。例如，假设语言受到限制，使得项定义中涉及的所有组成部分都能有效定义，那么确定该项是否收敛，以及在收敛时求出或近似其极限，有多困难？值得注意的是，文献已对在稠密随机图上求值的一阶逻辑句子的渐近行为的计算方面进行了深入研究，参见例如 [13, 17, 32]。

参考文献

[1] Sam Adam-Day、Michael Benedikt、Ismail Ilkan Ceylan 和 Ben Finkelshtein。《图神经网络几乎必然渐近为常数》。载于*NeurIPS*，2024年。[2] Sam Adam-Day、Michael Benedikt 和 Alberto Laurrari。《带平均算子的一阶逻辑扩张的收敛律》。载于*LICS*，2025年。[3] Sam Adam-Day、Theodor Mihai Iliant 和 Ismail Ilkan Ceylan。《图神经网络的零一律》。载于*NeurIPS*，2023年。[4] Margarita Akhmejanova 和 Maksim Zhukovskii。《E MSO(FO^2) 零一律对所有稠密随机图均不成立》。*SIAM*离散数学期刊，36(3):1788–1799，2022年。[5] Pedro Ara´ujo 和 Let´ıcia Mattos。《稀疏随机图中三角形计数的局部中心极限定理》。载于《剑桥哲学学会数学学报》，第1–17页，2025年。[6] B´ela Bollob´as。《随机图最大度的分布》。*Dicrete Mathe-matics*，32(2):201–203，1980年。[7] B´ela Bollob´as。《随机图的度序列》。*Discrete Mathematics*，33(1):1–19，1981年。[8] B´ela Bollob´as。《随机图的色数》。*Combinatorica*，8:49–55，1988年。

[9] Béla Bollobás. *Rand*来自图 *hs*. Cambridge University Press, secon d editi 2011 on, .[10] B´ela Bollob´as 和 Paul Erd˝os。随机图中的团。剑桥哲学学会数学学报，80:419–427，1976年。[11] Sourav Chatterjee 和 Amir Dembo。非线性大偏差。数学进展，299:396–450，2016年。[12] Kevin J. Compton。逻辑与组合学中的定律，第353–383页。克卢维尔学术出版社，1989年。[13] Danila Demin 和 Maksim Zhukovskii。有限随机结构的一阶复杂度。载于第39届年度ACM/IEEE计算机科学逻辑研讨会论文集，LICS '24，美国纽约州纽约市，2024年。计算机协会。[14] Ronald Fagin。有限模型上的概率。符号逻辑杂志，41(1):50–58，1976年。[15] Yu. V Glebskii、D. I. Kogan、M.I. Liogon'kii 和 V.A. Talanov。受限谓词演算中公式可实现性的范围与程度。控制论，5:1573–8337，1969年。[16] G.R. Grimmett 和 C.J.H. McDiarmid。随机图着色。剑桥哲学学会数学学报，77:313–324，1975年。[17] A. J. Grove、J. Y. Halpern 和 D. Koller。渐近条件概率：非一元情形。符号逻辑杂志，61(1):250–276，1996年。[18] Simi Haber 和 Michael Krivelevich。随机正则图的逻辑。组合学杂志，1(3- 4):389–440，2010年。[19] Matan Harel、Frank Mousset 和 Wojciech Samotij。通过高阶矩和熵稳定性研究上尾。杜克数学杂志，171(10):2089–2192，2022年。[20] Peter Heinig、Tobias M¨uller、Mark Noy 和 Anusch Taraz。小闭图类的逻辑极限定律。组合理论杂志 B 辑，130:158–206，2018 年。[21] Mikhail Isaev、Igor Rodionov、Rui Zhang 和 Maksim Zhukovskii。离散随机系统中的极值独立性。Annales de l'Institut Henri Poincar´e (B)，60(4):2923–2944，2024年。[22] G.I. Ivchenko。随机图中顶点度的渐近行为。概率论及其应用，18(1):188–195，1973年。[23] Manfred Jaeger。关系贝叶斯网络的收敛结果。载于LICS，1998年。[24] Svante Janson、Tomasz ´Luczak 和 Andrzej Rucinski。随机图。威利父子出版公司，2000年。[25] Svante Janson 和 Andrzej Ruci´nski。著名的上尾。Random Structures and Algorithms，20(3):317–342，2002年。[26] Jeong Han Kim 和 Van H. Vu。多元多项式的集中性及其应用。Combinatorica，20:417–434，2000年。[27] R.D. Kleinberg 和 J.M. Kleinberg。无标度图无限极限的同构与嵌入问题。载于第16届ACM-SIAM离散算法研讨会论文集，第277–286页，2005年。

[28] Phokion G. Kolaitis 和 Moshe Y. Vardi。无穷逻辑与零一律。Information and Computation，98(2):258–294，1992年。[29] Vera Koponen 和 Felix Weitk¨amper。有向图模型中部分连续聚合函数的渐近消去。Information and Computation，293:105061，2023年。[30] Vera Koponen 和 Felix Weitk¨amper。推理框架相对渐近表达能力。Logical Methods in Computer Science，20，2024年。[31] Vera Koponen 和 Felix Weitk¨amper。渐近消去聚合函数和广义量词的一般方法。Arch. Math. Logic，2025年。[32] M. I. Liogon'kii。逻辑公式的条件可满足率。苏联科学院数学札记，6:856–861，1969年。[33] James F. Lynch。关于极稀疏随机图的语句概率。Random Structures and Algorithms，3(1):33–54，1992年。[34] Yury Malyshkin 和 Maksim Zhukovskii。通过随机近似和马尔可夫过程研究逻辑收敛律。Electron. J. Probab.，(164):1–23，2025年。[35] Yury A. Malyshkin 和 Maksim E. Zhukovskii。均匀附着随机图的 γ变量一阶逻辑。Discrete Mathematics，345(5):112802，2022年。[36] David Matula。员工聚会问题。Not. Amer. Math. Soc.，19(2):A–382，1972年。[37] Monica McArthur。l^k_∞、ω 在稀疏随机图上的渐近行为。Logic Random Structures，33:53–63，1997年。[38] G.L. McColm。圆上随机图的一阶零一律。Random Structures and Algorithms，14(3):239–266，1999年。[39] S.N. Popova 和 M.E. Zhukovskii。无向图的存在单子二阶逻辑：le bars 猜想是错误的。Annals of Pure and Applied Logic，170(4):505–514，2019年。[40] Igor Rodionov 和 Maksim Zhukovskii。随机图中最大公共邻居数的分布。European Journal of Combinatorics，107:103602，2023年。[41] Andzrej Ruci´nski。随机图的小子图何时服从正态分布？Probab. Th. Rel. Fields，78:1–10，1988年。[42] Ashwin Sah 和 Mehtaab Sawhney。子图计数的局部极限定理。Journal of the London Mathematical Society，105(2):950–1011，2022年。[43] Eli Shamir 和 Joel Spencer。随机图色数的尖锐集中性$g_{n,p}$。Combinatorica，7:121–129，1987年。[44] Saharon Shelah 和 Joel Spencer。稀疏随机图的零一律。Journal of the American Mathematical Society，1(1):97–115，1988年。[45] Joel Spencer。扩张计数。Journal Of Combinatorial Theory. Series A，55:247–255，1990年。

[46] Joel Spencer。通过 Ehrenfeucht博弈研究阈值谱。离散应用数学，30(2-3):235–252，1991年。[47] Joel Spencer。随机图的奇特逻辑。Springer，2001年。[48] Joel Spencer 和 Lubos Thoma。图的一阶性质概率的极限值。载于离散数学当代趋势：从 *DIMACS* 和 *DIMATIA* 走向未来，第 49 卷，第 317–336 页。DIMACS/AMS，1997年。[49] Stepan Vakhrushev 和 Maksim Zhukovskii。随机图中对称扩张的最大数量。*SIAM*离散数学期刊，38(3):2468–2488，2024年。[50] Matas ˇSileikis 和 Lutz Warnke。重新审视扩张计数。随机结构与算法，61:3–30，2022年。[51] Yury Yarovikov 和 Maksim Zhukovskii。量词深度为 4 的一阶逻辑的谱是有限的。*ACM*计算逻辑汇刊，25(2):9:1–9:24，2024年。[52] Maksim Zhukovskii。零一 k定律。*Discrete Mathematics*，312:1670–1688，2012年。

[53] Maksim Zhukovskii。《零一 k律的扩张》。*European Journal of Combinatorics*，60：66–81，2017。

A 一类相对利普希茨可微函数

这里我们陈述并证明一个命题，说明每个满足 $(\ln f(x))' = O((\ln x)')$ 的可微函数 f 都是相对利普希茨函数。特别地，Sigmoid 函数是相对利普希茨函数。

命题 A.1. 对某个 $C > 0$ 和所有 $x > 0$，任何满足 $xf'(x) < Cf(x)$ 的可微函数 $f\colon \mathbb{R}_{>0} \to \mathbb{R}_{>0}$ 都是相对利普希茨函数。

证明。设 $y = x + \delta > x > 0$。只需证明 $(2x+\delta)(f(x+\delta) - f(x)) < (2C+1)\delta(f(x+\delta) + f(x))$。注意，当 $\delta = 0$ 时，这个不等式的左边和右边相等。固定一个 $x > 0$，定义

$$g(\delta) = (2x+\delta)(f(x+\delta) - f(x)) - (2C+1)\delta(f(x+\delta) + f(x)).$$

我们得到

$$\begin{aligned} g' &= f(x+\delta) - f(x) + (2x+\delta)f'(x+\delta) - (2C+1)(f(x+\delta) + f(x)) - (2C+1)\delta f'(x+\delta) \\ &< 2(x+\delta)f'(x+\delta) - 2Cf(x+\delta) < 0 \end{aligned}$$

对所有的 $\delta > 0$ 和所有的 $x > 0$ 均成立，证明完毕。

□

B 有界非收敛相对 Lipschitz 函数

断言 B.1。 $2 + \sin(\ln(2+x))$ 是有界相对利普希茨函数，但 $\lim_{x\to\infty} f(x)$ 不存在。

证明。极限不存在且有界性显然，因此我们只需证明 $f \in \mathcal{F}_{\text{rellip}}$。令 $y > x > 0$。取足够小的 $\varepsilon > 0$。若 $y > (1+\varepsilon)x$，则

$$\frac{y-x}{y+x} = 1 - \frac{2x}{y+x} > 1 - \frac{2y/(1+\varepsilon)}{y+y/(1+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon}{2+\varepsilon}, \quad \text{while} \quad \frac{f(y)-f(x)}{f(y)+f(x)} < \frac{2}{f(y)+f(x)} \le \frac{1}{2},$$

这意味着

$$\frac{f(y)-f(x)}{f(y)+f(x)} < \frac{2+\varepsilon}{2\varepsilon} \cdot \frac{y-x}{y+x}.$$

最后，令 $(1+\varepsilon)x \ge y > x$。则

$$\sin\left(\frac{\ln(y/x)}{2}\right) = \sin\left(\frac{\ln(1+(y-x)/x)}{2}\right) \sim_{\varepsilon\to 0} \sin\frac{y-x}{2x} \sim_{\varepsilon\to 0} \frac{y-x}{2x}.$$

因此，

$$\frac{f(y)-f(x)}{f(y)+f(x)} = \frac{\sin(\ln(y/x)/2)\cos(\ln(yx)/2)}{4+\sin(\ln(yx)/2)\cos(\ln(y/x)/2)} < \frac{(y-x)/(2x)}{2} < \frac{y-x}{y+x},$$

证明完毕。 □

C 定理证明 6.22

回顾定理6.22:

对于每个闭合的 $\tau \in \mathsf{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \text{平均值、LAvg、最大值}],$，其求值依概率收敛到一个常数。

与我们的其他定理一样，我们需要开放项的一个归纳不变量:

引理 C.1（归纳项近似：稀疏情形）。设 $\tau \in \mathsf{Agg}[\mathcal{F}_{LP}, \text{平均值、LAvg、最大值}]$ 是一个深度为 $d \le D$、具有 k 个自由变量且总共至多有 W 个变量的项，并设 $s_0 \ge s_1 \ge \ldots \ge s_D = 0$ 是一个 (D,W)-快速序列。存在常数 $\varepsilon > 0$ 和一个映射 $\varphi : \mathcal{C}^{(s_{D-d})}{}_k \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得对于每个 $u \in [n]^k$ 以及每个 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}^{(s_{D-d})}{}_k$

$$\mathbb{P}\left(|\tau(\overline{u}) - \varphi(\mathbf{t})| > n^{-\varepsilon} \mid \mathcal{L} \wedge \{\mathrm{Ctype}(\overline{u}) = \mathbf{t}\}\right) = n^{-\omega(1)}.$$

特别地，对于由具有相同 s_{D-d}-闭包类型 $\mathbf{t}$ 的元组构成的等价类 $C(\mathbf{t})$，我们得到两个随机变量 $\max^{u\in C(\mathbf{t})} \tau(u)$ 和 $\min^{u\in C(\mathbf{t})} \tau(u)$ 都依概率收敛到 $\varphi(\mathbf{t})$。

定理 6.22 可由引理 C.1 直接推出，只需取 $k = 0$。

引理 *C.1*的证明。我们从原子情形开始。

原子情形。

1. $\tau \equiv$ 常数。在这种情况下，对于 $\varphi = \tau$，断言显然成立。

2. $\tau(u_1, u_2) = \mathbb{1}_{\mathrm{E}(u_1,\, u_2)}$是一个含有两个自由变量的项。对于 $\mathbf{t} = F[(1,\ 2)] \in \mathcal{C}_2^{s_D}$，我们令$\varphi(\mathbf{t}) = \mathbb{1}_{E(F\restriction[2])\neq\varnothing}$。于是，对于每一对具有 s_D-闭包类型$\mathbf{t}$的顶点 $(u_1,\ u_2)$，$\tau(u_1,\ u_2) = \varphi(\mathbf{t})$。归纳断言显然成立。

3. $\tau(u_1,\ u_2) = \mathbb{1}_{u_1=u_2}$与前一个边情形类似。

函数应用。$\tau = f(\tau_1, \ldots, \tau_m)$ 是一个深度为 d 的项，其中 f 是 Lipshitz 函数。我们有，每个项 τ_i 的深度均为 $d_i \le d$。设 τ 和 τ_i 分别具有 k 个和 k_i 个自由变量。设 $u \in [n]^k$。将其代入 τ 作为输入，可以确定 $\tau_1, \ldots, \tau_m$ 的参数 —— 我们用 u_i 表示 u 中相应的子元组。为便于理解和清晰呈现，我们假设 $u \in ([n])_k$。当某个 $1 \le i < j \le k$ 满足 $u_i = u_j$ 时，情形完全相同。

固定一个 s_{D-d}- k元组 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}^{(s_{D-d})}{}_k$ 的闭包类型。事件 $\mathrm{Ctype}_{s_{D-d}}(u) = \mathbf{t}$ 定义了 s_{D-d}- u_i的闭包类型 $\mathbf{t}_i$，因为对于每个 $i \in [m]$，根据事实 6.7，$\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u) \supseteq \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u_i) \supseteq \mathrm{cl}^{s_{D-d_i}}(u_i)$。

根据归纳可得，$\varphi^{(i)} := \varphi^{(i)}(\mathbf{t}_i)$、$i \in [m]$ 已经定义，且项 $\tau_1, \ldots, \tau_m$ 满足归纳断言。特别地，存在常数 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$，使得以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，$|\tau_i - \varphi^{(i)}| \le n^{-\varepsilon_i}$。定义 $\varphi = f(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(m)})$。由于 f 是 Lipschitz 的，对于某个常数 $C > 0$，

$$\begin{aligned}|\tau - \varphi| &= |f(\tau_1, \ldots, \tau_m) - f(\varphi^{(1)}, \ldots, \varphi^{(m)})| \\ &\le C\|(\tau_1 - \varphi^{(1)}, \ldots, \tau_m - \varphi^{(m)}\| \le C\sqrt{m} \cdot \max_i n^{-\varepsilon_i} \le n^{-\varepsilon}\end{aligned}$$

以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，其中 $\varepsilon =$ 最小值$\{\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m\}/2$。至此完成证明。

接下来还需处理三类聚合。

全局平均。$\tau(u) = \frac{1}{n}\sum_v \tau'(u, v)$ 是深度为 d 的项，其中，根据归纳假设，存在常数 $\varepsilon' > 0$ 以及映射 $\varphi' : \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})}{}_{k+1} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，使得对每个闭包类型 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})}{}_{k+1}$ 以及每个元组 (u, v)，

$$\mathbb{P}\left(|\tau'(\overline{u}, v) - \varphi'(\mathbf{t})| > n^{-\varepsilon'} \mid \mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u}, v) = \mathbf{t}\right) = n^{-\omega(1)}. \tag{15}$$

固定 $u \in ([n])_k$ 以及闭包类型 $\mathbf{t}_0 \in \mathcal{C}^{(s_{D-d})}{}_k$。在下文中，我们假设事件 $\mathrm{Ctype}_{s_{D-d}}(u) = \mathbf{t}_0$ 成立。

我们证明，对 $\tau(u)$ 的值给出不可忽略的贡献的唯一顶点，是在 u 中没有邻居、且使得 $u \cup v$ 在 $\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$ 之外不具有 s_{D-d+1}-稠密扩张的那些 $v \notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$。

对于 $v \notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$，对 $(u, \mathbf{G}_n[u \cup v])$ 根据闭包的定义是稀疏的。因此，根据定理 6.12，在概率为 $v \notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$ 的邻居中，有 u 个 $O(np) = O(n^{1-\alpha})$。$1 - n^{-\omega(1)}$

此外，由于事件 $\mathcal{L}$ 成立，我们可以假设

$$|\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u} \cup v)| \le s_{D-d}.$$

根据事实 6.20，对于每个 $v \notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$，对

$$(F_1', F_2') := (\mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}), \mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u} \cup v) \cup \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}))$$

是稀疏的。

为了证明具有非空集合 $V(F_2') \setminus V(F_1')$ 的顶点 v 在渐近意义下对 $\frac{1}{n}\sum \tau'(u, v)$ 没有贡献，我们来证明

$$v(F_1', F_2') - \alpha \cdot e(F_1', F_2') < 1. \tag{16}$$

设 $\mathbf{G}_n[u \cup v] = H_0 \subset H_1 \subset \ldots \subset H_t = \mathrm{cl}^{s_{D-d+1}}(u \cup v)$ 是一个 s_{D-d+1}-稠密扩张序列。根据事实 6.5，对 $(F_1' \cup H_{i-1},\ H_i)$ 也是 s_{D-d+1}- 稠密的。每个这样的稠密对都会在包含关系 $v(F_1' \cup H_{i-1},\ H_i) - \alpha \cdot e(F_1' \cup H_{i-1},\ H_i) < 0$ 为真包含时，对（16）的左侧作出贡献 $F_1' \cup H_{i-1} \subset H_i$。否则，贡献为零。因此，

$$v(F_1', F_2') - \alpha e(F_1', F_2') = 1 - \alpha e(F_1', \mathbf{G}_n \restriction (V(F_1') \cup v)) + \sum_{i=1}^{t} (v(F_1' \cup H_{i-1}, H_i) - \alpha e(F_1' \cup H_{i-1}, H_i)) < 1,$$

根据需要。

根据定理 6.12，对于每个稀疏的 (F_1, F_2)，只要 $V(F_1) = [V(\mathrm{cl}^{s_{D-d}}(u))]^{-}$ $v(F_1, F_2) \leq s_{D-d}$，且 $v(F_1, F_2) - \alpha \cdot e(F_1, F_2) < 1$，$\mathrm{cl}^{s_{D-d}}(u)$ 的 (F_1, F_2)-扩张数量集中在

$$\mu(F_1, F_2; 0) = \Theta\left(n^{v(F_1,F_2) - \alpha \cdot e(F_1,F_2)}\right) \overset{(16)}{<} \frac{1}{2} n^{1-\varepsilon''}$$

以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，其中某个常数为 $\varepsilon'' > 0$。

由此，根据并集界，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，满足以下条件的 $v \in [n]$ 数量为

- 要么是 $v \in \mathrm{cl}^{s_{D-d}}(\overline{u})$，
- 要么是 $v \notin \mathrm{cl}^{s_{D-d}}(u)$，且其 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t} = F[(1, \ldots, k+1)]$ 关于 $(u, \overline{v})$ 具有 $|V(F)| > k+1$，
- 或 $v \notin \mathrm{cl}^{s_{D-d}}(\overline{u})$ 与 u 中至少一个顶点相邻，

至多为 $n^{1-\varepsilon''}$。

设 $\mathbf{t}^* \in \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})}{}_{k+1}$ 有 $k+1$ 个顶点，其中 $k+1$ 是 $\mathbf{t}^*$ 中的一个孤立顶点。根据归纳假设，对于每个满足 $\mathrm{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u, v) = \mathbf{t}^*$ 的 $v \notin u$，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，有 $|\tau'(u, \overline{v}) - \varphi'(\mathbf{t}^*)| \leq n^{-\varepsilon'}$。

最后，我们得出结论，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，

$$\begin{aligned}
|\tau(\overline{u}) - \varphi'(\mathbf{t}^*)| &= \left| \frac{1}{n} \left(\sum_{v:\, \mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u}, v) = \mathbf{t}^*} \tau(\overline{u}) \right) - \varphi'(\mathbf{t}^*) + O(n^{-\varepsilon''}) \right| \\
&\leq \left| \frac{n - O(n^{1-\varepsilon''})}{n} \varphi'(t^*) - \varphi'(\mathbf{t}^*) + O(n^{-\varepsilon''}) \right| + n^{-\varepsilon'} \\
&\leq n^{-\varepsilon'} + O(n^{-\varepsilon''}).
\end{aligned}$$

令 $\varphi(\mathbf{t}) = \varphi'(\mathbf{t}^*)$，并令 $\varepsilon =$ 为最小值$\{\varepsilon', \varepsilon''\}/2$，即可完成证明。

局部平均值。$\tau(u) = |N(u_1)|^{-1} \sum_{v:\, \mathbf{E}(v, u_1)} \tau'(u, v)$ 是一个深度为 d 的项；与全局平均值的情形一样，存在 $\varepsilon' > 0$ 和 φ'，使得对于每个闭包类型 $\mathbf{t} \in \mathcal{C}^{(s_{R-d+1})}{}_{k+1}$ 以及每个元组 (u, v)，式 (15) 均成立。如上所述，我们固定 $u \in [n]_k$，并假设对于某个 $\mathbf{t}_0 \in \mathcal{C}^{(s_{D-d})}{}_k$，事件 $\mathrm{Ctype}^{s_{D-d}}(u) = \mathbf{t}_0$ 成立。

由于这里我们用一个通常为 $n^{1-\alpha}$ 的因子进行归一化，因此也应考虑一些非典型扩展，而不只是通过孤立顶点得到的扩张。另一方面，u_1 的非邻点不会对 τ 的表达式作出贡献；并且 $(u,\ v)$ 的闭包类型，

其中 v 与 u_1相邻，并且当 $(u,\ v)$ 的闭包非平凡时，有 $o(n^{1-\alpha})$ 个代表元。更正式地说，沿用全局平均情形中的相同论证，由于非平凡稠密对会像式 (16) 中那样对扩展计数作负贡献，因此，对于足够小的常数 $\varepsilon'' > 0$，根据定理 6.12 并利用并集界，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，邻居 $v \in [n]$ 中满足以下条件的 u_1 数量

- 或者 $v \in \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$，
- 或者 $v \notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$，且 $(u,\ v)$ 的 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t}$ 具有 $|V(\mathbf{t})| > k+1$，
- 或者 $v \notin \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(u)$ 与 u 中至少两个顶点相邻，

至多为$n^{1-\alpha-\varepsilon''}$。

设 $\mathbf{t}^* \in \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})}$ 有 $k+1$ 个 $k+1$ 顶点，其中顶点 $k+1$ 仅与 1 相邻。根据归纳假设，对于每个满足 $\mathrm{Ctype}_{s_{D-d}}(u,v) = \mathbf{t}^*$ 的 $v \notin u$，其概率为 $1-n^{-\omega(1)}$，我们有 $|\tau'(u,v) - \varphi'(\mathbf{t}^*)| \le n^{-\varepsilon'}$。此外，根据定理 6.12，顶点 u_1有 $n^{1-\alpha} \pm n^{1-\alpha-\varepsilon'''}$ 个邻居的概率为 $1 - n^{-\omega(1)}$，其中 $\varepsilon''' > 0$ 为某个值。

令 $\varphi(\mathbf{t}) = \varphi'(\mathbf{t}^*)$ 和 $\varepsilon = \text{最小值}\{\varepsilon', \varepsilon'', \varepsilon'''\}/2$。我们得到，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，

$$|\tau(\overline{u}) - \varphi(\mathbf{t})| = |\tau(\overline{u}) - \varphi'(\mathbf{t}^*)| \le n^{-\varepsilon'} + O\left(n^{-\varepsilon''} + n^{-\varepsilon'''}\right) < n^{-\varepsilon},$$

按需进行。

最大值 **消去**。$\tau(u) = \text{最大值}_v \tau'(u,\ \overline{v})$ 是一个深度为 d 的项。根据归纳假设，存在 $\varepsilon' > 0$ 和 $\varphi' : \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})}{}_{k+1} \to \mathbb{R}_{\ge 0}$，如前两种情况所示。固定 $u \in ([n])_k$，并假设对于某个值，事件 $\mathrm{Ctype}_{s_{D-d}}(u) = \mathbf{t}_0$ 成立

$$\mathbf{t}_0 =: F_0[(1,\dots,k)] \in \mathcal{C}_k^{(s_{D-d})}.$$

定义 C.2（可实现类型集合 $\mathcal{C}'$）。令 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})}{}_{k+1}$ 为所有 s_{D-d+1}-闭包类型 $F[\mathbf{1},\dots,k+1)]$ 构成的集合，使得

- $F \restriction [k] = F_0 \restriction [k]$ 且 $V(F_0) \cap V(F) = [k]$，
- $\mathrm{cl}^{F \cup F_0}_{s_{D-d+1}}([k+1]) = F$，
- 对 $(F_0,\ F \cup F_0)$ 是稀疏的。

接着，我们固定 $v \in [n]$，并证明在以下三种情形中，$\mathbf{t}_0$ 确定了 $(u,\ v)$ 的类型。

- $v \in u$（比如 $v = u_i$）。在这种情况下，

$$\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u}, v) = \mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u}) \subseteq \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}).$$

因此，$\mathbf{t}_0$ 确定了 $(u,\ v)$ 的 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t}_i$。根据归纳假设，我们知道 $\tau'(u,\ v)$ 与 $\varphi'(\mathbf{t}_i)$ 是 $n^{-\varepsilon'}$- 近的。

- $v \in \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}) \setminus \overline{u}$。那么，由于 $k+1 \le W$，我们得到

$$s_{D-d} \ge \ell(W, s_{D-d+1}) \ge \ell(k+1, s_{D-d+1}).$$

由于事件 $\mathcal{L}$ 成立，我们可以假设 $\mathbf{cl}^{s_{D-d+1}}(u,v)$ 至多有 $s_D - d$ 个顶点。根据事实 6.8，我们得到

$$\mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v) \subseteq \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}).$$

因此，$\mathbf{t}_0$ 标识了 (u,v) 的 s_{D-d+1}-闭包类型。我们将其记为 $\mathbf{t}(v)$。根据归纳假设，我们知道 $\tau'(u,v)$ 与 $\varphi'(\mathbf{t}(v))$ 是 $n^{-\varepsilon'}$-接近的。

- $v \notin \mathbf{cl}^{s_{D-d}}(u)$。与全局平均的情形一样，我们有

$$F_2' := \mathrm{cl}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v) \cup \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u})$$

是.....的稀疏扩张

$$F_1' := \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u}).$$

因此，存在 $\mathbf{t}' \in \mathcal{C}'$，使得 (u,v) 具有 s_{D-d+1}-闭包类型 $\mathbf{t}'$。根据归纳假设，$\tau'(u,v)$ 与 $\varphi'(\mathbf{t}')$ 以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$ 是 $n^{-\varepsilon'}$-接近的。

回想一下，集合 $\mathcal{C}' \subset \mathcal{C}^{(s_{D-d+1})\,k+1}$ 是有限的。定义 φ 为以下各项的最大值

$$\max_{i\in[k]} \varphi'(\mathbf{t}_i), \max_{v\in \mathrm{cl}_{s_{D-d}}(\overline{u})\setminus \overline{u}} \varphi'(\mathbf{t}(v)), \max_{\mathbf{t}'\in\mathcal{C}'} \varphi'(\mathbf{t}')$$

其中 $\mathbf{t}_i$、$\mathbf{t}(v)$ 和 $\mathbf{t}'$ 定义于上面的项目符号中。如果 $\mathcal{C}'$ 中的所有闭包类型都可以由 (u,v) 实现，那么对于某个 v，$\varphi = \varphi'(\mathbf{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u,v))$。在这种情况下，一方面，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，

$$\tau(\overline{u}) \geq \tau'(\overline{u},v) \geq \varphi'(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)) - n^{-\varepsilon'} = \varphi - n^{-\varepsilon'}.$$

另一方面，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$，

$$\tau(\overline{u}) \leq \max_v(\varphi'(\mathrm{Ctype}_{s_{D-d+1}}(\overline{u},v)) + n^{\varepsilon'}) = \varphi + n^{-\varepsilon'}.$$

因此，为了完成证明，我们需要证明w.h.p. 来自 $\mathcal{C}'$ 的所有闭包类型都可由(u,v)对 $v \notin \mathbf{cl}^{s_{D-d}}(u)$实现。

固定 $F[(1,\dots,k+1)] \in \mathcal{C}'$。根据定理 6.12，以概率 $1 - n^{-\omega(1)}$ 存在一个（$F_0, F \cup F_0$）-扩张 $F_2' \cup F_1'$，作为 $F_1' := \mathrm{cl}^{s_{D-d}}(u)$ 的扩张，使得

- F_2'是一个（$[k], F$）-扩张，其扩张对象为 u。回顾定义 6.4的最后一条，这意味着一个与 F 在 $[k]$ 之外的所有边上相一致的扩张。
- F_2'不具有 s_{D-d+1}-稠密扩张 F_3'，在$\mathbf{G}_n$中，并且 $V(F_3') \setminus (V(F_1') \cup V(F_2')) \neq \varnothing$且$E(F_3') \cap ((V(F_2') \setminus V(F_1')) \times (V(F_3') \setminus (V(F_1') \cup V(F_2'))) \neq \varnothing$。

由于 F_2'是 u的 $([k], F)$-扩张，因此存在一个扩张的同构 $F \to F_2'$。令 v为 $k+1$在此同构下的像。下面证明 $\mathbf{Ctype}^{s_{D-d+1}}(u,v) = F[(1,\dots,k+1)]$。注意，根据 $\mathcal{C}'$的定义，$F_3' \setminus F_2'$不可能完全包含在 F_1'中。因此，只需证明 F_2'不存在具有位于 $F_2' \cup F_1'$之外的顶点的 s_{D-d+1}-扩张。反设存在——令 F_3'为 F_2'的一个这样的扩张。我们还知道，$V(F_3') \setminus (V(F_1' \cup F_2'))$ 与 $V(F_2') \setminus V(F_1')$ 之间没有边。由于对 (F_3', F_2') 是 s_{D-d+1}-稠密的，根据事实 6.5，我们得到 $F_1' \cup (F_3' \setminus (F_1' \cup F_2'))$ 是 F_1'的一个 s_{D-d+1}-稠密扩张——这与 $F_1' = \mathbf{cl}^{s_{D-d}}(u)$ 的事实矛盾。引理得证。

□