arXiv:2602.17825v1 [math.GT] 19 Feb 2026

四维 skein 模、把手附着与缠结

GAGE MARTIN、MARY STELOW 和 MIRA WATTAL

ABSTRACT. skein 千层面模是近期发展起来的一种研究 4-流形的工具。我们给出了采用任意函子性链环理论定义的 skein 模在附着 1-柄、2-柄和 3-柄时的一般公式， $S^3 \times I$ 推广了 Chen、Manolescu-Neithalath、Manolescu-Walker-Wedrich 和 Ren-Willis 现有的公式。这些公式源自对 skein 模上粘合同态的完整描述。为此，我们引入了这些 skein 模的一种变体，以处理边界中存在指定三维流形的情形。Blackwell-Krushkal-Luo 最近独立提出了类似的构造。

1. INTRODUCTION

受三维流形研究中相关构造的启发，Morrison-Walker-Wedrich [6] 为带框架的定向链环引入了一种 4-流形 skein 模的版本 X，其中链环位于其边界中： L （X； L）的 skein 千层面模。这个不变量通常记作 $S^\star(X;\ L)$，其中星号表示为 $H^\star$ 中的链环选定的一种输入函子性链环同调理论 S^3。在本文中，若固定了这样一种理论，我们将用该理论代替星号。例如，Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_2$同调的输入将记作$S^2(X;\ L)$。若理论未明确指定，我们假定它满足若干附加条件，这些条件列于第2节。

自 skein 千层面模问世以来，它们已应用于 4-流形的研究， [7, 9, 10],最著名的例子是 Ren-Willis 对存在同胚但不微分同胚的 4-流形所作的无规范理论证明 [8]。许多此类应用都依赖于理解 skein 千层面模在各种把手附着下的行为。Manolescu-Neithalath [4] 首先描述了 Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_n$ 同调中 2-柄的情形。后来，人们也为采用其他链环理论的 2-柄，以及 $\mathfrak{gl}_n$ 同调中的 1-柄和 3-柄推导出了相应公式 [2, 5, 8]。

我们将这些结果加以推广并整合，针对一般的函子性链环理论，给出 1-柄、2-柄和 3-柄附着的公式。我们的结果可概括为以下定理。对这些结果更为细致的论述分别见例 5.1、5.2 和 5.3 。

定理 1.1. 若 X_1 由 X 沿 $S^0 \times B^3$ 添加一个*1*-柄而得到，且 T 是由 L 沿该*1*-柄的余核切割而得到的缠结，则 $S^\star(X_1; L)$ 是与三元组$(X;\ S^0 \times B^3;\ T)$相关联的双模的第*0*阶*Hochschild* 同调。该双模结构由与 $S^0 \times B^3$ 相关联的代数的作用导出。

定理1.2. 若 X_1 由 X 沿 $S^1 \times D^2$添加一个*2*-柄而得到，则 $S^\star(X_1;\ L)$ 可通过“缆接”与三元组$(X; S^1 \times D^2;\ \varnothing)$相关联的模而得到。缆接关系由与 $S^1 \times D^2$相关联的代数的作用导出。

定理1.3. 若 X_1 由 X 沿 $S^2 \times D^1$添加一个*3*-柄而得到，则 $S^\star(X_1; L)$ 是与三元组$(X; S^2 \times D^1;\ \varnothing)$相关联的模的商。这些关系由与 $S^2 \times D^1$相关联的代数的作用导出。

我们的所有手柄附着公式都是一般粘合公式的特例，该公式即定理4.1。如上所述，我们已在下文总结其技术内容。

定理 1.4。 设 *4*-流形与链环对$(X; T_1 \cup T_2)$ 是由沿 *3*-流形 Y 粘合 *4*-流形、*3*-流形和缠结三元组$(X_1;\ Y; T_1)$与$(X_2;\ Y;\ T_2)$ 所得。那么，$(X;\ T_1 \cup T_2)$ 的 ***skein*** 千层面模可以表示为与$(X_1;\ Y; T_1)$ 相关联的左模和与$(X_2;\ Y; T_2)$相关联的右模的双模张量积。

粘合公式涉及与参数化三元组相关的 skein 千层面模技术，我们将在第 3节介绍。这是对与

4-流形相关的现有绞结模不变量的一种变体，专为灵活描述 4-流形的切割与拼接而设计。
Blackwell-Krushkal-Luo 独立提出了类似的构造，用于研究三分解 [1]。

2. Notation

我们始终使用 skein 千层面模 $S^\star(X;L)$，其定义基于满足以下最小条件的函子性链环同调理论：

(1) 这些理论相对于不交并和张量积严格单幺；并且 (2) 这些理论可以扩展到抽象 S^3 中的带框架的定向链环，以及抽象$S^3 \times I$中的链环配边。

这些条件借鉴自 [6, 8]，并在此基础上作了简化。我们通常（但并非总是）将 Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_n$-同调记为 KhR$_n$，将 Khovanov 同调记为 Kh，并将任何含义不明确的函子性链环同调理论记为 $H^\star$。最后，我们默认将基环固定为一个域 k。

3. The skein lasagna module of a triple

为了正式陈述我们的粘合公式，我们需要将 skein 千层面模扩展到4-流形、3-流形和缠结三元组。我们的扩展带有一个由与该3-流形相关联的代数所施加的作用，并且在严格意义下特化为 Khovanov 缠结不变量。

具体而言，设 X 是一个带边界的定向4维流形； $\phi\colon\ Y \to \partial X$ 是一个紧致定向3维流形 Y 的保定向嵌入，并且该嵌入可延拓至某个固定框架； T 是 $\partial X \setminus \phi(\text{int}(Y))$中的带框架定向缠结，其边界与 $\phi(\partial Y)$相交于一个具有相容框架的定向集合P。我们还假设 T与 $\phi(Y)$的每个分支一般位置相交，且代数交数为零。这些数据确定了与参数化三元组相关联的一个模：$(X;\ (Y,\ \phi);\ T)$。

定义 3.1（三元组的 skein 千层面模）。设 $T_Y \subset Y$ 是任意边界为具有相容框架的定向集合 $-\phi^{-1}(P)$的嵌入的带框架缠结。对于 T_Y，我们关联一个 skein 千层面模 $S^\star(X; T \cup_P \phi(T_Y))$。这类 skein 千层面模组装成一个 k-模：

$$S^\star(X;Y;T) \coloneqq \bigoplus_{T_Y} S^\star(X; T \cup_P \phi(T_Y)),$$

我们将其定义为 $(X;\ Y;\ T)$ 的 skein 千层面模。

警告 3.2. 尽管3-流形 Y 在定义 3.1中由显式嵌入和框架指定到 ∂X，但为了优先做到更简洁，我们在记号中省略了参数化映射。我们将继续以这种方式缩写记号；不过，读者应始终敏锐地注意到 Y 并非抽象的。

我们可以将 $S^\star(X;\ Y;\ T)$ 提升为与 Y和 P 相关联的 k-代数上的右模，我们也将其视为 $(X;\ Y;\ T)$ 的 skein 千层面模。

定义3.3（与一个3-流形相关联的代数）.对于一对带框架的定向缠结 T_Y^0和 T_Y^1，它们嵌入于 Y中，并具有与定义 3.1 中相同的边界条件，我们关联一个 skein 千层面模$S^\star(Y \times I; -T_Y^0 \cup_{\phi^{-1}(P)} T_Y^1)$，其中 $T_Y^0 \subset Y \times 0$、 $T_Y^1 \subset Y \times 1$和 $-T_Y^0 \cup_{\phi^{-1}(P)} T_Y^1$是由粘合所指示的带框架的定向链环

$$-T_Y^0 \cup_{\phi^{-1}(P)\times 0} (-\phi^{-1}(P) \times I) \cup_{\phi(P)\times 1} T_Y^1.$$

诸如此类的 skein 千层面模组装成一个 k-代数：

$$S^\star(Y;P) \coloneqq \bigoplus_{T_Y^0,\, T_Y^1} S^\star(Y \times I; -T_Y^0 \cup_{\phi^{-1}(P)} T_Y^1),$$

其乘法在 $S^*(Y;\ P)$中的一对填充 S_1与 S_2上按如下规则定义：

$$S_1 \cdot S_2 \coloneqq \begin{cases} S_1 \cup_{S_1 \cap Y\times\{1\}} S_2 = S_1 \cup_{S_2\cap Y\times\{0\}} S_2 & \text{if } S_1 \cap Y \times \{1\} = -(S_2 \cap Y \times \{0\}) \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

该代数配备了局部单位元，这些局部单位元由有限个圆柱之和指定，圆柱所对应的缠结具有与之前相同的嵌入和边界条件。

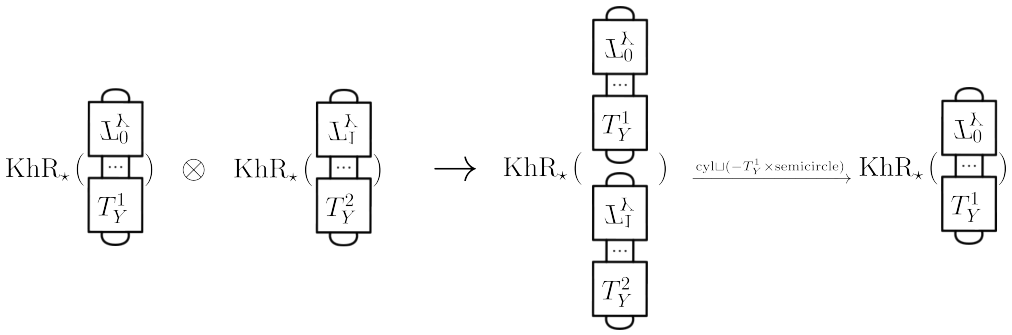

FIGURE 1. KhR⋆ 中的乘法。

定义 k-代数3.3 以显然的方式作用于 $S^\star(X;\ Y;\ T)$ 的右侧，遵循与 $S^\star(Y;\ P)$ 中乘法类似的规则。

注3.4。 反之，若给定一个保定向映射 $\phi : -Y \to \partial X$ ，它可延拓为一个可能不同的固定框架，以及一个与之相容地框架化的定向缠结 T，其边界为 $-P$，那么我们可以收集 skein 千层面模 $S^\star(X;\ -\phi(T_Y)\cup_P T)$，其中 T_Y遍历 Y 中所有带框架的定向缠结，且其边界 $-\phi^{-1}(P)$ 与之相容地框架化、定向。这些模将构成一个关于 $S^\star(Y;\ P)$ 的左 模。今后，我们将用相同的记号表示 $S^\star(X;\ Y;\ T)$ 的右侧和左侧对应形式。上下文会明确指出所采用的模结构。

例3.5 （测试案例）。 $(X;\ Y;\ T)$ 的 skein 千层面模的最简单例子之一出现在 $X = B^4$、 $Y = B^3$ 和 $\star = 2$ 的情形下。在这种情况下，与 $(B^4;\ B^3;\ T)$ 相关的模以及与 $(B^3;\ P)$ 相关的代数，都可以改写为 $\mathfrak{gl}_2$-同调的直和：

$$S^2(B^4;B^3;T) \cong \bigoplus_{T_Y} \mathrm{KhR}_2(T \cup_P T_Y), \quad \text{and} \quad S^2(B^3;P) \cong \bigoplus_{T_Y^0,\, T_Y^1} \mathrm{KhR}_2(-T_Y^0 \cup_P T_Y^1).$$

请注意，我们忽略了 B^3 在 S^3 中的参数化，因为它是明确无歧义的。

上述等价来自求值同构

$$\mathrm{ev}\colon S^2(B^4;L) \to \mathrm{KhR}_2(L),$$

该同构最初由 Morrison-Walker-Wedrich 在 [6]中定义。定义第二个等价右侧的乘法后，还可以进一步将它们增强为映射，使其交织两侧的 $S^2(B^3;\ P)$-作用[1] 。

具体而言，设 $v \in \mathrm{KhR}_2(-T_Y^0 \cup_P T_Y^1)$ 和 $w \in \mathrm{KhR}_2(-T_Y^2 \cup_P T_Y^3)$ 是 $S^\star(Y;\ P)$ 中的两个元素。若 $T_Y^1 \neq T_Y^2$，则将乘法 $v \cdot w$定义为零。否则，将 $v \cdot w$定义为 $v \otimes w$在“垂直复合”下的像；这一概念同样借鉴自 [6] ，并通过图 1中的图示加以说明。换言之，垂直复合由一个链环配边诱导，该配边的入射边界为 $-T_Y^0 \cup_P T_Y^1 \sqcup -T_Y^1 \cup_P T_Y^2$，出射边界为 $-T_Y^0 \cup T_Y^2$。其顶部和底部呈柱状，中间为 $T_Y^1 \times$半圆。

总而言之，上述讨论可由下面的引理概括，它将左侧填充的乘法与右侧 $\mathfrak{gl}_2$-同调的垂直复合联系起来。

引理 3.6. 求值同构指定了一个 k-代数同构：

$$S^2(B^3;P) \cong \bigoplus_{T_Y^0,T_Y^1} \mathrm{KhR}_2(-T_Y^0 \cup_P T_Y^1)$$

随后，得到一个 $S^2(B^3;\ P)$-模同构：

$$S^2(B^4;B^3;T) \cong \bigoplus_{T_Y} \mathrm{KhR}_2(T \cup_P T_Y).$$

[1]或乘法，在 $S^2(B^3;\ P)$ 的情况下

证明。引理 3.6 中的两个同构都可由类似的图示推出，因此我们只证明第一个。第一个同构表示一组交换图：

$$\begin{array}{ccc} S^2(B^3\times I;-T_Y^0\cup_P T_Y^1)\otimes S^2(B^3\times I;-T_Y^1\cup_P T_Y^2) & \xrightarrow{\mathrm{ev}\otimes\mathrm{ev}} & \mathrm{KhR}_2(-T_Y^0\cup_P T_Y^1)\otimes \mathrm{KhR}_2(-T_Y^1\cup_P T_Y^2) \\ \downarrow{\scriptstyle -\cdot-} & & \downarrow{\scriptstyle -\cdot-} \\ S^2(B^3\times I;-T_Y^0\cup_P T_Y^2) & \xrightarrow{\mathrm{ev}} & \mathrm{KhR}_2(-T_Y^0\cup_P T_Y^2), \end{array}$$

每个缠结三元组各一个 T_Y^0、 T_Y^1和 T_Y^2，嵌入于 B^3，满足与定义3.3中相同的边界条件。这些图示可交换这一事实源于一系列拓扑移动，这些移动要么表示粘合，要么表示千层面填充之间的等价。

具体而言，设 F为 $S^2(B^3\times I,\ -T_Y^0\cup_P T_Y^1)$中的一个填充， G为 $S^2(B^3\times I,\ -T_Y^1\cup_P T_Y^2)$中的一个填充。在图示中先向右再向下追踪 $F\otimes G$，相当于

（1）分别将 F 与 G 等同于填充 F' 和 G'，二者各自由单个大输入球、边界链环上的柱面以及输入标记所确定；以及（2）将对应于 F' 与 G' 的标记的张量积映射到其在链环配边映射下的像，见图1。

另一方面，先向下追踪、再向右追踪意味着

（1）将 $F\otimes G$替换为并集 $F\cup G$，它是 $S^2(B^3\times I,\ -T_Y^0\cup_P T_Y^2)$中的一个填充；（2）将 $F\cup G$ 等同于由单个大输入球、边界链环上的柱面以及输入标记所指定的第三个填充；以及（3）将此第三个填充求值为其在$\mathrm{KhR}_2(-T_Y^0\cup_P T_Y^2)$中的标记。

请注意，第二次追踪的第二步中由 $F\cup G$ 与大输入球的交所诱导的Khovanov-Rozansky映射，与第一次追踪的两个步骤所描述的两个Khovanov-Rozansky映射的复合相同。第一步表示两个映射的张量积：第一个由 F 与对应于 F' 的输入球的交所诱导，第二个由 G与对应于 G'的输入球的交所诱导。第二步随后对该张量积应用垂直复合。

备注 3.7。 求值和垂直复合都可以稍加努力推广到一般的 $H^\star$-同调，因为这两种运算都是由 $S^3\times I$ 中的链环配边诱导的。随后，可将上述例子改写为处处以 $H^\star$ 替换 KhR_2。

□

例3.8（测试案例还原了 Khovanov 缠结不变量）。 我们简要说明如何将定义 3.1与 Khovanov 论文中描述的 Khovanov 缠结不变量联系起来 [3]。我们大体省略相关定义的介绍，转而请读者参阅 Khovanov 的论文。

回顾一下，Khovanov 为每个 (m,n)-缠结的 n-交叉图示 D 赋予一个由 (H^m,H^n)-双模组成的链复形。将该复形记为 $\mathcal{F}(D)$，其同调记为 $H^\bullet(\mathcal{F}(D))$。该复形在 (H^m,H^n)-链同伦等价意义下是 T 的不变量，并且沿 $B^m\times B^n$ 分解。同样，该同调在 (H^m,H^n)-双模同构意义下是 T 的不变量，并且分解为

$$\bigoplus_{(a,b)\in B^m\times B^n}\mathrm{Kh}(W(a)Db).$$

这里， $W(a)Db$ 是由 D 得到的平面图：将其上边界（含 $2m$ 个点）与 a 的180度反射复合，并将其下边界（含 $2n$个点）与 b复合。

（H^m， H^n）双模结构 $H^\bullet$（$\mathcal{F}$（D）的定义方式与图1 中所示的垂直复合类似，但需注意 H^m 和 H^n 是Khovanov同调的直和。在此情形下，诱导 H^m 左作用以及 H^n 右作用的协边中，非柱状部分是平面缠结之间的协边（而不是 B^3中的缠结之间的协边）。

特化到定义 3.1，我们改为令 T 为一个带框架定向 $(0,n)$-缠结，并带有相容框架化定向边界 P。我们还假设 T 满足三元组 $(B^4;\ B^3;\ T)$ 在例 3.5 中所满足的相同嵌入与边界条件。

对每个 $b \in B^n$，我们关联一个 skein 千层面模 $S^2(B^4; T \cup_P T_b)$，其中 T_b 是 B^3 中一个嵌入的相容框架化定向缠结的选取，该缠结以 $-P$ 为边界，并由图示 b 表示。诸如此类的 skein 千层面模组装成一个 k-(子)模：

$$\bigoplus_{b \in H^n} S^2(B^4; T \cup_P T_b),$$

其具有如下 k（子）代数的右作用：

$$\bigoplus_{(a,b) \in B^n \times B^n} S^2(B^3 \times I; -T_a \cup_P T_b).$$

由上述表述可知，下面的引理顺理成章。

引理 3.9。除符号的不确定性外，存在一个 k（子）代数的同构：

$$\bigoplus_{(a,b) \in B^n \times B^n} S^2(B^3 \times I; -T_a \cup_P T_b) \cong H^n$$

进而，存在一个右 H^n-模的同构：

$$\bigoplus_{b \in H^n} S^2(B^4; T \cup_P T_b) \cong H^\bullet(\mathcal{F}(D)),$$

证明。证明很直接，可由对引理 3.6 的证明作适当修改得到。注意，引理 3.9 中的两个同构，是通过将求值与连接 Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_2$-同调和 Khovanov 同调的同构进行复合后指定的。该同构对于链环配边而言并非典范同构，这也解释了符号的不确定性。□

注记 3.10. 注意，若 T 是一个边界为 $-P$ 的（m,0）缠结，而我们改为将 skein 千层面模 $S^2(B^4; -T_a \cup_P T)$ 与每个 $a \in H^m$ 相关联，那么这些 skein 千层面模就会组装成一个左 H^m-模；作为左 H^m-模，它与 $H^\bullet(\mathcal{F}(D))$ 同构（存在符号上的不确定性）。

4. The gluing homomorphism

研究 skein 千层面模的拓扑学家往往会想到一个粘合同态。就作者所知，Manolescu-Neithalath 最早在边界连通和这一特例中讨论了这个同态，[4]；随后 Ren-Wilis 在 [8] 中更一般地加以阐述。该同态将与两个 4-流形相关联的 skein 千层面模联系起来：这两个 4-流形的边界共享一个光滑的零余维子流形；同时，它也将这些模与沿指定子流形粘合后所得流形所关联的 skein 千层面模联系起来。

更准确地说，设 $(X_1; (Y, \phi_1); T_1)$ 和 $(X_2; (-Y, \phi_2); T_2)$ 是两个三元组，且各自符合定义 3.1。我们还假设 ϕ_1 和 ϕ_2 可扩展为相容框架，并且 $\phi_1^{-1}(\partial T_1) = -\phi_2^{-1}(\partial T_2)$ 是 Y 中的带框架的定向点集。设 $X = X_1 \cup_Y X_2$ 表示沿着一个与 $Y \times I$微分同胚的领圈邻域对两个 4-流形进行光滑粘合所得的结果。文献 [8] 中给出的粘合公式是一个满射映射：

$$\bigoplus_{\substack{T_Y \subset Y \\ \partial T_Y = -\phi_1^{-1}(P)}} S^\star(X_1; T_1 \cup_P \phi_1(T_Y)) \otimes S^\star(X_2; -\phi_2(T_Y) \cup_P T_2) \to S^\star(X; T_1 \cup_P T_2), \tag{1}$$

其中我们同时将 P 与 ∂T_1 在 X_1 中以及 $-\partial T_2$ 在 X_2 中识别。[2]

本节将给出方程1所计算的商的新表示法；对于 skein 千层面拓扑学家而言，这或许不言自明，尤其是考虑到第 3节中的论述。方程1中的目标与一个熟知的双模张量积同构：

定理 4.1.

$$S^\star(X; T_1 \cup_P T_2) \cong S^\star(X_1; Y; T_1) \bigotimes_{S^\star(Y;P)} S^\star(X_2; Y; T_2).$$

[2]如果我们想继续吹毛求疵，那么粘合 $T_1 \cup_P T_2$ 同样应解释为：

$$T_1 \cup_{P \times 0} P \times I \cup_{P \times 1} T_2.$$

在下一小节中，我们将通过拓扑证明来论证定理4.1 。

4.1. **拓扑图景**。 存在一个显然的映射，将定理 4.1 中同构右侧与左侧联系起来。简写为“粘合”。更具体地说，我们有一个同态：

$$\Psi\colon S^\star(X_1;Y;T_1)\bigotimes_{S^\star(Y;P)} S^\star(X_2;Y;T_2)\to S^\star(X;T_1\cup_P T_2),$$

其定义方式类似于 $S^\star(Y;P)$ 中的乘法。如果 Σ_1 和 Σ_2 分别是 $S^\star(X_1;Y;T_1)$ 和 $S^\star(X_2;Y;T_2)$ 中填充的代表元，那么 $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$ 在 Ψ 下的像定义如下：

$$\Psi(\Sigma_1\otimes\Sigma_2):=\begin{cases}\Sigma_1\cup\Sigma_2 & \text{if } \partial\Sigma_1\cap Y=-\partial\Sigma_2\cap -Y\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

注意，上述对应关系中的底部条件略显多余。如果 Σ_1 和 Σ_2 的边界一开始就不相容，那么 $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$ 在双模中已经为零。

为了 убед убед ourselves that Ψ 是一个同构，我们构造一个逆映射，其操作简写为“切割”。明确地，定义

$$\Psi^{-1}\colon S^\star(X;T_1\cup_P T_2)\to S^\star(X_1;Y;T_1)\bigotimes_{S^\star(Y;P)} S^\star(X_2;Y;T_2)$$

是由以下关于填充的指定所确定的同态。对于 $S^\star(X;T_1\cup T_2)$ 中的每个填充 Σ，对其底层曲面施加同伦，使得

(1) Σ 的输入球避开 Y 的某个邻域，且 (2) Σ 与 $\phi_i(Y)$ 横截相交于某个缠结 $\phi_i(T_Y)$。

上述重新排列确保 Σ 可分解为

$$\Sigma=\Sigma_1\cup_{\phi_i(T_Y)}\Sigma_2,$$

其中，Σ_1 和 Σ_2 分别是 $S^\star(X_1;Y;T_1)$ 和 $S^\star(X_2;Y;T_2)$ 中的填充。显然，我们将 $\Psi^{-1}(\Sigma)$ 设为这些填充的张量积：$\Sigma_1\otimes\Sigma_2$。

乍看之下，$\Psi^{-1}(\Sigma)$ 的定义似乎取决于对 Σ进行排列以满足条件 1 和 2所选的同伦。证明定理4.1 的关键在于使这一选择明确无歧义。

证明 *4.1* (或者证明 Ψ^{-1} 是良定义的）。关于 Ψ^{-1} 与同伦的选择无关这一点，可由一个与 [4]中定理 1.4 的论证十分相似的论证得出。不过，我们仍将重述细节，并作少量与本文情形相关的技术性更新。

令 Σ' 为一个不同的 同痕代表 Σ，满足条件1 和2，其分解为

$$\Sigma'=\Sigma'_1\cup_{\phi_i(T'_Y)}\Sigma'_2.$$

存在一个曲面单参数族 $\{\Sigma(t)\}_{t\in[0,1]}$，将 $\Sigma=\Sigma(0)$ 与 $\Sigma'=\Sigma(1)$ 连接起来。为简便起见，我们假设该单参数族要么使 Σ 的一个输入球 B 穿过 $\phi_i(Y)$，并使此球外的 skein 保持不变；要么固定所有输入球。（任意单参数族都可表示为这两种操作的序列，至多相差一些同位；这些同位的支撑集避开 $\phi_i(Y)$ 的某个邻域。）

在第一种情况下，我们取 B 为一个点的邻域，并假设一般而言，B（或该点）从 ϕ_i（Y）的一侧移动到另一侧的次数有限。令 t_j 表示其中一次这样的时刻，$[t_j-\epsilon,t_j+\epsilon]$ 表示在同伦下该点仅在 t_j 时与 ϕ_i（Y）相交的子区间。根据构造，交 Σ_i（$t_j-\epsilon$）$\cap\phi_i$（Y）和 Σ_i（$t_j+\epsilon$）$\cap\phi_i$（Y）自动为横截的。

若取 ϵ 足够小，则 Σ（$t_j-\epsilon$）与 Y 的交，与Σ（$t_j+\epsilon$）和 Y 的交的区别在于将 ϕ_i（Y）替换为某个同位代表 ϕ'_i（Y）。具体而言，我们要求 ϕ_i（Y）与 ϕ'_i（Y）之间的区域与 $Y\times I$ 微分同胚，且 Σ（$t_j-\epsilon$）与 ϕ'_i（Y）在Σ（$t_j+\epsilon$）$\cap\phi_i$（Y）中横截相交，并且该交的边界（作为带框架的定向集合）与 $-P$ 微分同胚。

总而言之，我们可以通过沿着 $\phi_i(Y)$ 切割 $\Sigma(t_j-\epsilon)$，得到 $\Psi^{-1}(\Sigma(t_j-\epsilon))$；也可以通过沿着 $\phi'_i(Y)$ 切割同一个 skein，得到 $\Psi^{-1}(\Sigma(t_j+\epsilon))$。在双模中，这些切割在交织 $S^\star(Y;P)$ 中某个填充的作用后，进一步等价；该填充由沿着 $\phi_i(Y)$ 和 $\phi'_i(Y)$ 切割来指定。因此，通过归纳进行，我们证明了 $\Sigma_1\otimes\Sigma_2$ 和 $\Sigma'_1\otimes\Sigma'_2$ 在双模中等价。

在第二种情形中，我们考虑每个时刻 t， $\{\Sigma_t\}_{t\in[0,1]}$ 与 $\phi_i(Y)$ 的交：

$$J_t = \Sigma_t \cap Y,$$

并将这些交收集到一个带角曲面中：

$$J = \bigcup_{t\in[0,1]} J_t \times \{t\} \subset \phi_i(Y) \times I.$$

通过将角磨平，我们可以假设 J 是 $S^*(Y;\ P)$ 中的一个（素食）填充。

由 J 出发，我们先将 $\phi_i(Y)$ 加厚成一个“颈部”，即一个与 $Y \times I$ 微分同胚的子流形，然后将 J 插入这个颈部，从而构造出第二个带角曲面：

$$\Sigma_J = \Sigma(0)|_{X_1} \cup J \cup \Sigma(1)|_{X_2}.$$

通过类似的磨平处理，可以将该曲面平滑成 $S^*(X; T_1 \cup_P T_2)$ 中的一个填充。

通过这一过程，我们得到两个重要见解。第一， $\Sigma(0)$ 与 Σ_J 同痕，且该同痕支撑于 X_2；第二， $\Sigma(1)$ 也与 Σ_J 同痕，且该同痕支撑于 X_1。在给定时刻 t，连接 $\Sigma(0)$ 与 Σ_J 的同痕（如前所述）可通过磨平一个带角曲面得到：

$$\Sigma(0)|_{X_1} \cup \bigcup_{s\in[0,t]} J_s \times \{s\} \cup \Sigma(t)|_{X_2}.$$

类似的构造描述了 $\Sigma(1)$ 与 Σ_J 之间的同伦。总而言之，这些同伦转化为双模等价，将 $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$ 与 $\Sigma_1 \otimes J \cdot \Sigma_2'$ 联系起来，也将 $\Sigma_1' \otimes \Sigma_2'$ 与 $\Sigma_1 \cdot J \otimes \Sigma_2'$ 联系起来。双侧作用还确保了 $\Sigma_1 \otimes J \cdot \Sigma_2'$ 与 $\Sigma_1 \cdot J \otimes \Sigma_2'$ 之间第三个关键的等价——最终确立了所需的结论。□

备注 4.2。对于 skein 千层面拓扑学家而言，不妨想一想， Ψ 的任一侧都是某个特定 skein 千层面模图示的推出的恰当代表。在图2中，我们绘出了该图示的一个简单示意图。

5. 手柄附着公式

本节中，我们应用定理 4.1 ，为利用函子性链环同调理论 $H^\star$ 定义的、位于 $S^3 \times I$中的（可能带有装饰的）链环配边的 skein 模推导各种手柄附着公式。为使记号更简洁，有时我们会省略边界数据。

在关于非微分同胚四维流形的工作中，Ren-Willis [8] 证明了 Lee skein 理论满足一个与 Khovanov skein 理论的 Manolescu-Neithalath 类似结果 [4] 的 2-柄公式，而 Chen 证明了链 Floer 同调对于 2-柄附着也满足类似公式 [2]。我们为 2-柄附着给出的普遍公式，进一步阐明了为何此前已知的这三个 2-柄公式具有相似性。

为完整起见，我们简要讨论四手柄，尽管拓扑一般位置论证很容易表明，添加一个四手柄不会改变 skein 模 [4]。令 X 表示将一个四手柄附着到 X_1 所得的结果，并取 Y 为附着区域 S^3。在此处， $X_2 = B^4$ 以及 skein 模 $S^\star(X_1)$ 和 $S^\star(X_2)$ 也都成为 $S^\star(S^3 \times I)$-模。由于余维的原因，我们知道 L 以及任何填充都不会与四手柄相交，因此相关的 skein 模为 $S^\star(X_1, L)$ 和 $S^\star(B^4, \emptyset) \cong k$。此外，我们知道 $S^\star(S^3 \times I, \emptyset)$ 在 $S^\star(X_1, L)$ 上的作用正是 k-模 $S^\star(X_1, L)$ 结构。综合起来，将 $S^\star(X, L)$ 与 $S^\star(X_1, L) \otimes S^\star(B^4, \emptyset)$ 对模作用作上述识别所得的商相识别，便恢复了此前已知的同构$S^\star(X, L) \cong S^\star(X_1, L)$。

例 5.1 （1-手柄附着）。设 X 为将一个 1-手柄附着到 X_1 后的结果，并令 Y 为附着区域 $S^0 \times B^3 = -B^3 \sqcup B^3$。因此 $X_2 = B^1 \times B^3 \cong B^4$。我们将计算 $S^*(X; L)$。

通过一般位置论证，我们可以假设 L 与 X_1 相交于一个相容框架化定向缠结 T，而 X_2 位于 $P \times I$中；后者被解释为一组相容框架化、平行于核的弧。注意， $S^*(X_1;\ -B^3 \sqcup B^3;\ T)$ 和 $S^*(X_2;\ -B^3 \sqcup B^3;\ P \times I)$ 都成为 $S^\star(-B^3 \sqcup B^3;\ P)$ 上的模；作为一个 k-代数，它同构于 $S^*(B^3;\ P)^{\mathrm{op}} \times S^*(B^3;\ P)$。

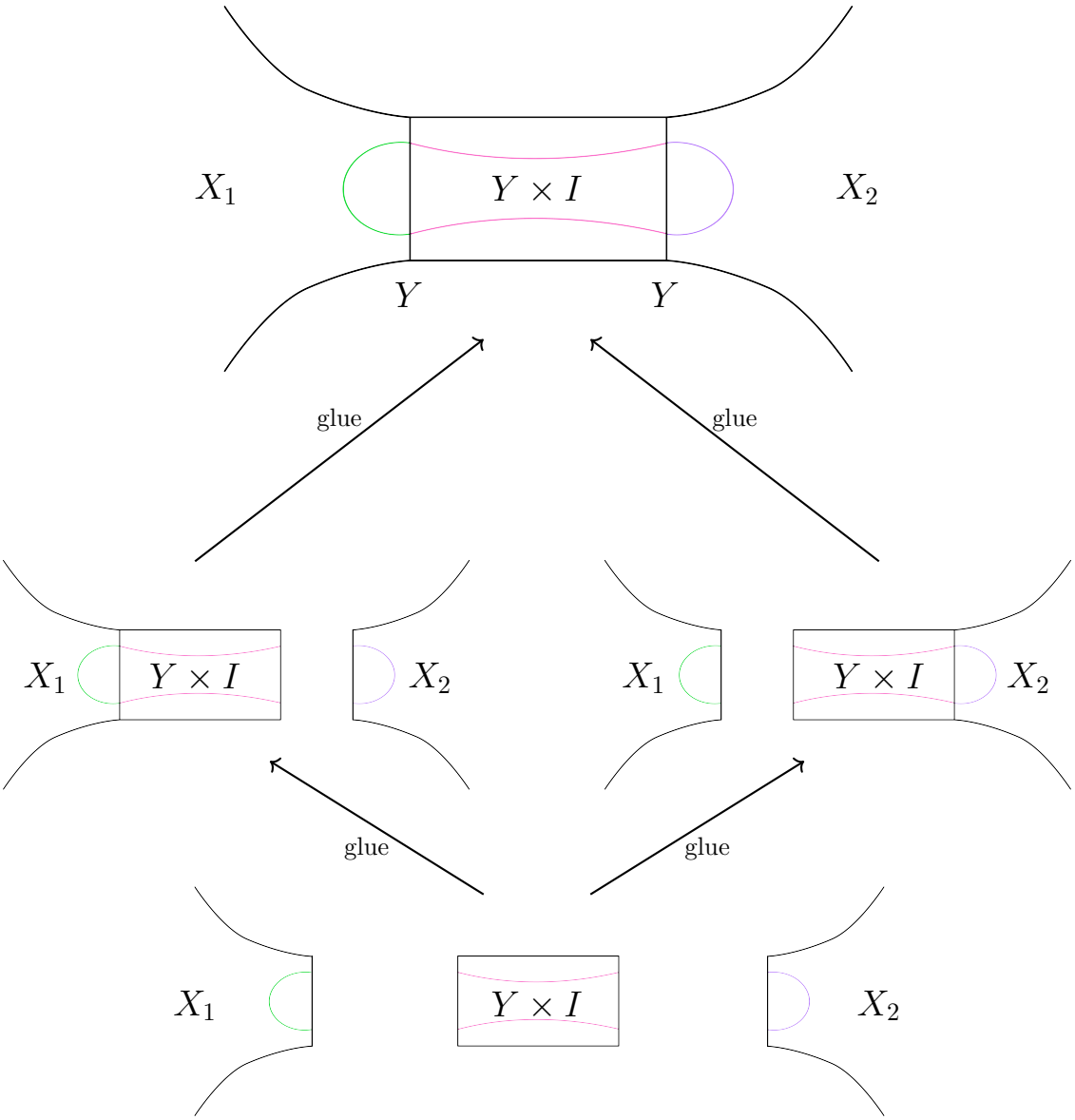

FIGURE 2. 粘合同态的推出图。

或者，也可以将其理解为：每个对象都具有 $S^\star(B^3)$ 上的两种不同模结构，附着的三维球区域各对应一种。因此，$S^\star(X_1)$ 同时成为一个 $S^\star(B^3)$-右模和左模， $S^\star(X_2)$ 也同样如此。左作用和右作用在 $S^\star(X_1)$ 和 $S^\star(X_2)$ 上彼此可交换。

定理 4.1 告诉我们， $S^\star(X;\, L)$ 是由 $S^*(X_1)\otimes_k S^*(X_2)$ 通过将 $S^*(X_1)$ 上的左作用设为等于 $S^*(X_2)$ 上的右作用，并将 $S^*(X_2)$ 上的右作用设为等于 $S^*(X_1)$ 上的左作用而得到的。通过回顾我们在 $S^*(X_2)$ 与 $S^*(B^4)$ 之间有一个等同，我们可以简化这一图景。

回顾这一等同，给定 $S^\star(X, L)$ 中的一个填充 $\Sigma_1 \otimes \Sigma_2$，我们可以改用 $S_1 \cdot \Sigma_1 \cdot S_2$ 来表示它，其中填充 S_1, S_2 为满足 $S_2 \cdot S_1 = \Sigma_2$ 的任意选取。这一认识告诉我们，事实上我们有一个满射

$$f : \oplus_{T_i} S^* \left(X_1, T \cup (T_i \sqcup -T_i)\right) \to S^\star(X, L),$$

并且，核由不同分解下各种填充的识别生成 $S_1 \cdot \Sigma_1 \cdot S_2 \;\; S_2 \cdot S_1 = \Sigma_2$。若将范围限制到 Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_n$-同调，这恰好恢复了 Manolescu-Walker-Wedrich 的 1-柄公式 [5, 定理 4.7]。

例 5.2（2-把手附着）。令 X 为附着一个 2-柄于 X_1 后所得的结果，并令 Y 为附着区域 $S^1 \times B^2$。这里同样有 $X_2 = B^2 \times B^2 \cong B^4$，且两个 skein 模 $S^\star(X_1)$ 和$S^\star(X_2)$ 都成为 $S^\star(S^1 \times B^2)$ 上的模。利用一般位置论证，我们可以假设 L 与附着区域 Y 不相交。我们的张量因子最初

$$\mathcal{X}_1 = S^\star(X_1, Y, L); \quad \mathcal{X}_2 = S^\star(X_2, \emptyset); \quad \mathcal{Y} = S^\star(Y, \emptyset).$$

然而，我们将首先着手理解一个较小的张量积，它显然存在一个映射到$\mathcal{X}_1 \otimes_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}_2$。我们先描述 $\mathcal{Y}$的一个子代数 $\mathcal{Y}'$：我们将考虑由填充 $S^1 \times T$生成的 $S^1 \times B^2 \times I$ 的填充，其中 T，而 T要么是一个无交叉的（n, $n+2$）缠结，在两侧之间有 n片，并且在 $n+2$ 侧的两个端点之间有一个半圆；要么是其反向，即一个（$n+2$, n）-缠结。此外，我们允许按照函子性链环理论 $H^\star$所确定的方式，在片 $S^1 \times T$ 上添加装饰。最后，我们允许为辫子 B进行填充 $S^1 \times B$。将此代数称为 $\mathcal{Y}'$。$\mathcal{X}_1$ 和 $\mathcal{X}_2$中分别存在右 $\mathcal{Y}'$ 子模和左 $\mathcal{Y}'$ 子模；

$$\mathcal{X}_1' = \bigoplus S^\star(X_1, L \cup K_{n_+,n}); \quad \mathcal{X}_2' = \bigoplus S^\star(X_2, U_{n_+,n_-}).$$

注意，存在一个映射 $\mathcal{X}_1' \otimes_{\mathcal{Y}'} \mathcal{X}_2' \to \mathcal{X}_1 \otimes_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}_2 \cong S^\star(X, L)$。

现在还有一个映射 $\mathcal{X}_1' \to \mathcal{X}_1' \otimes_{Y'} \mathcal{X}_2'$，它只需将 X_1 中的千层面填充 v 与方向正确的余核横截圆盘 $d(v)$ 进行张量积即可。取 $\mathcal{X}_1'$ 中的 v，并令 $a \in \mathcal{Y}'$ 为一个（可能带有装饰的）$(n, n+2)$-片。那么，在我们的双模张量积中，我们将简单张量 $v.a \otimes d(v.a)$ 与 $v \otimes a.d(v)$ 等同起来。不过，$a.d(v)$ 是 skein 元 $v \sqcup S$，其中 S 是一个可能带有装饰的球面；$H^\star$ 的具体内容决定了对这些可能带有装饰的球面的求值。类似地，如果 a 是一个编织片，那么 a 对 $d(v)$ 的作用是平凡的。这两个事实表明，我们的映射 $\mathcal{X}_1' \to \mathcal{X}_1' \otimes_Y' \mathcal{X}_2'$ 可下降为定义在 $\mathcal{X}_1'/\sim$ 上的映射，其中 $\sim$ 是由编织关系以及考虑（可能带有装饰的）球面所导出的关系取商所得。

综上，我们现在得到一个映射

$$\frac{\oplus S^\star(X_1, L \cup K_{n_+,n_-})}{\sim} \to S^\star(X, L).$$

证明该映射为同构的过程与 [4] 中类似论证的步骤相同，因此省略细节。要证明该映射是满射，可以通过一般位置论证，对 (X, L) 的填充相对于 2-柄的余核进行处理，从而描述沿 2-柄切割后 $(X_1, L \cup K_{n_+, n_-})$ 的一个填充。证明单射性则可考察：为了使填充与余核横截，对填充进行同伦的两种不同选择，在余核的邻域内可能有何差异。

若将范围限制在 Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_n$-同调的情形，我们便恰好重新得到 Manolescu-Neithalath [4] 的 2-柄公式。分别限制到链 Floer 同调和 Lee 同调，则分别得到 Chen 和 Ren-Willis 的 2-柄公式 [2, 8]。

例 5.3 (3-柄附着)。最后，我们考虑 3-手柄附着的情形。令 X 为将一个 3-柄附着到 X_1 上所得的结果，并令 Y 为附着区域 $S^2 \times B^1$。这里也有 $X_2 = B^3 \times B^1 \cong B^4$。定义 skein 千层面子模和子代数

$$\mathcal{X}_1 = S^\star(X_1, L); \quad \mathcal{X}_2 = S^\star(X_2, \emptyset); \quad \mathcal{Y} = S^\star(S^2 \times B^2, \emptyset).$$

一个标准的一般位置论证允许我们在此情形下将定理 4.1 细化为

$$S^\star(X) \cong \mathcal{X}_1 \otimes_{\mathcal{Y}} \mathcal{X}_2.$$

由于 $\mathcal{X}_2 \cong k$，我们得到

$$S^\star(X) \cong \frac{\mathcal{X}_1}{\sim}$$

其中，关系 $\sim$ 是由 $S^\star(S^2 \times B^2)$ 对 $\mathcal{X}_1'$ 的右作用与 $S^\star(B^4) = k$ 上的左作用相等而得出的。在将范围限制为 Khovanov-Rozansky $\mathfrak{gl}_n$-同调，并使用 $S^n(S^2 \times B^2)$ 的计算时，我们恰好得到了 Manolescu-Walker-Wedrich 的 3-柄公式 [5, 注 3.9]。

References

[1] Sarah Blackwell、Vyacheslav Krushkal 和 Yangxiao Luo。《带角 Skein Lasagna 理论》。2025年12月。arXiv:2512.05861 [math]。[2] Daren Chen。《基于链 Floer 同调的 Floer Lasagna 模》。2022年3月。arXiv:2203.07650 [math]。[3] Mikhail Khovanov。《缠结的函子值不变量》。《*Algebraic & Geometric Topology*》，2(2):665–741，2002年9月。出版方：Mathematical Sciences Publishers。

[4] Ciprian Manolescu 和 Ikshu Neithalath。《
2 *Journal für die reine und angewandte* -手柄体的 skein 千
Mathematik (Crelles Journal) 2022 788 37 76、 2022
层面模》。, ( ): – 年7月。出版方：De Gruyter；栏目：纯粹与应用数学杂志。[5] Ciprian Manolescu、Kevin Walker 和 Paul Wedrich。《
Skein 千层面模与手柄分解》。《 *Advances in*
Mathematics 425 109071, 2023 》, : 。出版方:

爱思唯尔。[6] Kim Morrison、Kevin Walker 和 Paul Wedrich。《由 Khovanov-Rozansky 链同调得到的4-流形不变量》。《*Geom. Topol*》, 26(8):3367–3420, 2022年。[7] Qiuyu Ren、Ian Sullivan、Paul Wedrich、Michael Willis 和 Melissa Zhang。《具有一维输入的 Khovanov Skein 千层面模》。2025年10月。arXiv:2510.05273 [math]。[8] Qiuyu Ren 和 Michael Willis。《Khovanov 同调与异性4-流形》。2025年12月。arXiv:2402.10452 [math]。[9] Ian A. Sullivan。《4-流形中的 Bar-Natan Skein千层面模与异性曲面》。2025年5月。arXiv:2504.03968 [math]。[10] Ian A. Sullivan 和 Melissa Zhang。《Kirby带、范畴化投影算子与 $S^2 \times S^2$的 Skein 千层面模》。2024年11月。arXiv:2402.01081 [math]。