arXiv:2602.17863v1 [math.GT] 19 Feb 2026

正辫闭包与紧叶层

聂自培

Abstract. 我们研究 S^3中非分裂正辫闭包补集上的紧叶层。若 L 是这样一个链环，其分支为 $L_1,..,L_n$，且至少有一个分支不是平凡结，则沿多斜率$(s_1,\ldots,s_n)\in\mathbb{Q}^n$（对 $i=1,2,\ldots,n$ 满足 $s_i<2g(L_i)-1$）进行德恩手术，得到一个容许余定向紧叶分叶的非 L 空间。

1. Introduction

三维流形拓扑的一个核心主题，是紧叶层、左序性与 Heegaard Floer 同调之间的关系。L-空间猜想[BGW13，Juh15] 预言，对于不可约有理同调三维球面 Y:

(a) Y 是非 L 空间；(b) $\pi_1(Y)$ 是左可序的；(c) Y 容许余定向紧叶分叶。

一般而言，仅蕴含关系 (c)⇒(a) [OS04，Bow16，KR17]是已知的。

在 S^3 中的结上施行德恩手术，为 L-空间与非 L-空间提供了自然来源。对于非平凡结 $K\subset S^3$，产生 L-空间的斜率集合[KMOS07，RR17] 已知为以下三种可能性之一:

(1) $[2g(K)-1,\ \infty)$，此时 K 称为正 L 空间结；(2) $(-\infty,\ -2g(K)+1]$，此时 K 称为负 L 空间结；(3) 空集，此时 K 称为非 L 空间结。

这里 $g(K)$ 表示 K的塞弗特亏格。因此，一旦知道 K 属于哪种情形，L-空间区间便完全确定。相比之下，关于紧叶层或左序性的相应区间则了解得少得多。

在本文中，我们研究对 S^3 中的 L-空间结进行 Dehn 手术所得到的非 L-空间上紧叶层的存在性。

已知的大多数正 L 空间结都 S^3 是正辫闭包。例如，在 SnapPycensus 中由至多 9 个四面体构成的 632 个正 L 空间结中，有 631 个是正辫闭包 [BK24]，而剩下的那个例子$o9$ 30634 是目前已知的唯一例外。此外，每个正 $(1,\ 1)$ L-空间结都-S^3 是正辫闭包 [Nie21]。

当一个链环表示为辫闭包时，要确定它是一个结还是多分支链环并非易事。因此，我们采用更一般的链环框架，而不局限于结。我们的

Date: 2026年2月23日。

主定理在 S^3 至少有一个非平凡分支的[1] 上构造了非分裂正辫闭包补集上的紧叶层。

主定理。设 L 是 S^3 中一条非分裂正辫的闭包，其分支为 L_1，……，L_n，并假设至少有一个分支不是平凡结。则沿多斜率 $(s_1$，……，$s_n) \in \mathbb{Q}^n$ 进行德恩手术，且该多斜率满足对所有 $i = 1$，……，n 均有 $s_i < 2g(L_i) - 1$，所得为一个容许余定向紧叶分叶的 3-流形。

作为直接推论，所得流形均为非 L-空间。

Lyu 证明了 $(1,\ 1)$ 非 L-空间结是持久叶状的 [Lyu25]。此外还知道，正 $(1,\ 1)$ L-空间结在 S^3 中是正辫闭包，并且由对 $(1,\ 1)$ 结进行 Dehn手术得到的 L-空间具有不可左序基本群 [Nie21，Li24]。将这些结果与我们的主定理相结合，可得如下推论。

推论 1.1。对于通过对 $(1, 1)$ 结在 S^3 上进行德恩手术得到的3-流形，以下蕴含关系

$$(a) \Leftrightarrow (c) \quad and \quad (a) \Leftarrow (b)$$

在 L-空间猜想中成立。

剩余的蕴含关系 $(a) \Rightarrow (b)$ 仍未解决，即使对于 $(-2$、3、$7)$-椒盐纽结 [Var21]也是如此。

我们的构造不同于以往的方法。大多数现有方法都从一个塞弗特曲面开始，然后应用缝合流形分解和分裂来构造层状分支曲面。这在过去二十多年中一直是标准方法 [Rob00，Rob01，Li03，Nak07，LR14，Kri20，San24，Kri25]。

相反，我们首先对塞弗特曲面进行捏缩，以得到一个更简单的分支曲面，然后进行分裂。根据层流分支曲面理论 [Li02]，这一步中间步骤在逻辑上并非必要。然而，对于显式构造和算法实现而言，简化分支曲面能够带来显著优势。

在 Li 的一般框架中，寻找合适的分裂可能需要搜索一个指数级庞大的可能性空间。相比之下，我们设计了一个线性复杂度的贪心分裂算法（算法1），它从简化模型产生一个层状分支曲面。

在 Krishna 的工作 [Kri20，Kri25] 关于辫闭包补集中的紧叶层中，分支曲面通过为 Gabai 的圆盘分解中的乘积圆盘指定共定向来构造。这等价于选择曲线 γ_1，γ_2，……，γ_k 于第 4 节中，并要求每个 γ_i 位于第 i 行与第 $(i + 1)$ 行之间的闭区域内。我们的构造取消了这一限制，从而允许更大的灵活性，并得到更一般的结果。

本文结构安排如下：第 2 节构造分支曲面 B。第 3 节将 B 分裂成一个层状分支曲面 B'，假设

[1]仅假设 L 非平凡是不够的。霍普夫链环提供了一个反例。

简单闭曲线 γ_1、γ_2、……、γ_k 满足性质 (G1)–(G8)。第 4 节介绍生成分裂所用曲线 γ_1、……、γ_k。第 5节分析边界火车轨道。第6 节结合这些要素证明主定理。

致谢。作者感谢 Qingfeng Lyu 多次富有启发性且持续进行的讨论，也感谢 Jacob Rasmussen 提供宝贵建议并参与富有见地的讨论。

2. Branched surface construction

设 L 是 S^3 中的一个非分裂正辫闭包。本节中，我们构造一个恰当嵌入于 $S^3\backslash\text{int}(\nu(L))$. 中的分支曲面

我们采用三维流形中分支曲面的标准术语。

分支曲面 B 的分支轨迹是其 B 非流形点的集合。分支轨迹的每个分支都带有定义良好的分支方向。在 B 中，分支轨迹的补集分支称为分支扇区。

分支曲面 $B \subset S^3\backslash\,\text{int}(\nu(L))$ 具有一个纤维化邻域 $N(B)$，其纤维为区间（I-纤维）。$N(B)$ 的边界分解为三个部分：水平边界 $\partial_h N(B)$（与 I-纤维横向相交）、垂直边界$\partial_v N(B)$（与 I-纤维相切），以及 $N(B) \cap \partial\nu(L)$。

我们也采用轨道的标准术语。

顶点称为开关，边称为分支，沿开关方向行进的浸入曲线称为火车路线。对于恰当嵌入的分支曲面 B，其边界 ∂B 是 $\partial\nu(L)$上的轨道。

首先，我们选取 L的链环图 D。接着，将由 D的局部修改得到的轨道 τ置于 D前方。最后，将环 S^1 置于 τ更前方。

分支曲面的构造 B 分两步进行。将τ 投影到 D 上，得到分支曲面的第一部分（见图1）。将τ 压缩至环 S^1 并附加一个圆盘，即得到分支曲面的其余部分（见图 2）。

2.1. 第一层。固定一个标准的正辫图 $D \subset S^1 \times I$，表示 L；其中辫以水平方向绘制，且所有交叉均为正。我们假设，在所有表示 L 的正辫图中，该图的辫股数最少。我们利用辫图 $D \subset S^1 \times I$，将链环 L 实现在标准乘积邻域 $S^1 \times I \times [0, 1] \subset S^3$ 中。

在 D 上选取有限多个点 p，避开交叉点，使 D 分解为有限条弧，且每条弧在其经过的每个交叉点处都完全位于上穿线（称为上弧）或下穿线（称为下弧）上。我们假设，所选点的数量 p 在所有此类选择中最少。在此假设下，每条上弧都至少在一个交叉点处与一条下弧相交，而每条下弧也都至少在一个交叉点处与一条上弧相交。

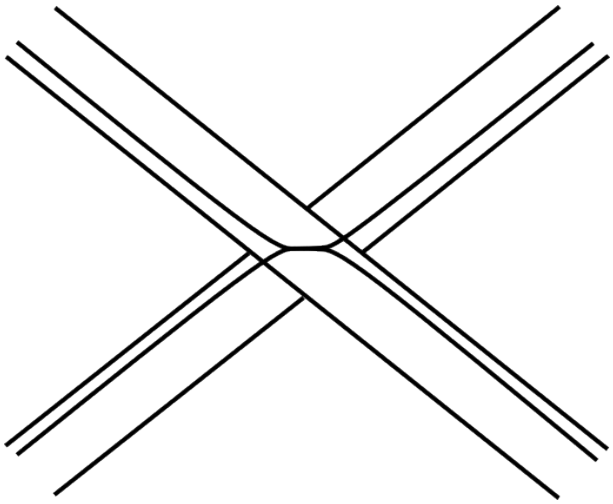


FIGURE 1. $\{(p,\ \ t) \in (\tau \times [0,\ \ 2]) \backslash \text{内部}(\nu(L)) :\ \ \ t \geqslant h(p)\}$

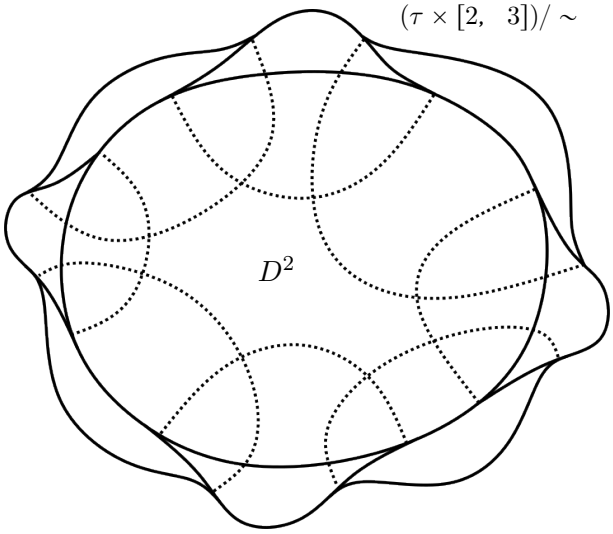


FIGURE 2. $((\tau \times [2,\ \ 3])/\sim) \cup D^2$。

上弧置于层 $S^1 \times I \times \{1\}$，下弧置于层 $S^1 \times I \times \{0\}$。在每个选定点 p 处，我们用区间弧 $\{p\} \times [0,1]$ 连接相邻弧的端点。

从现在开始，我们将 L视为这些弧的并集。

2.2. 第二层。 我们通过对正辫图 $D \subset S^1 \times I$进行局部修改，构造一条与每条竖直线都横截的轨道 $\tau \subset S^1 \times I$。

在 D 的每个交叉点附近，我们用一小段水平线段替换该交叉点，并使两条分支从左侧伸出、两条分支从右侧伸出，如同将其标准光滑化为一条轨道。除交叉点附近的小区域外，图示保持不变。

轨道 τ 可分解为三种类型的弧：上型，即由 D 的上弧形成的弧；下型，即由 D 的下弧形成的弧；以及混合型，即短水平线段。

定义函数 $h\colon\ \tau \to \{0,1\}$，使其满足

$$h(p) := \begin{cases} 1, & \text{if } p \text{ is on an over-type arc,} \\ 0, & \text{if } p \text{ is on an under-type arc,} \\ 0, & \text{if } p \text{ is on a mix-type arc.} \end{cases}$$

由于所得轨道 τ 仅在交叉点附近的一个小邻域内不同于 D，我们可以假设 $(p, h(p)) \in \nu(L)$。

2.3. 第三层。 我们将乘积邻域 $S^1 \times I \times [0,1] \subset S^3$ 视为一个更大积区域中的子流形

$$S^1 \times I \times [0,1] \subset S^1 \times I \times [0,3] \subset S^3.$$

假设补集 $(S^1 \times I)\backslash\tau$ 包含 N 个双边形。通过规定当且仅当 $(p,t) \sim (p',t')$ 时，定义 $\sim$ 在 $(S^1 \times I) \times [0,3]$ 上的等价关系

(1) $(p,t) = (p',t')$；或者 (2) 存在一个双边形 R_i，
使得 (a) $p, p' \in R_i$，且 (b) 从 p 到 p' 的线段是竖直
的，并且 (c) $t = t' \geqslant 2 + \overset{i}{{}_{N+1}}$。

——

在商映射下，分支曲面

$$\big\{(p,t) \in (\tau \times [0,3])\backslash \operatorname{int}(\nu(L)) : t \geqslant h(p)\big\} \subset S^1 \times I \times [0,3]$$

的像也是一个分支曲面。由于商空间 $S^1 \times I \times [0,\ 3]/\sim$ 同胚于 S^3 中 $S^1 \times I \times [0,\ 3]$ 的标准副本，我们可以将该像视为 $S^1 \times I \times [0,\ 3]$ 中的一个分支曲面。

由于 L 不可分，这个分支曲面与层 $S^1 \times I \times \{3\}$ 相交于单个环 S^1。我们沿着这个环将另一个圆盘 D^2 附着在 $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$ 中，并将由此得到的恰当嵌入于 $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$ 中的分支曲面记为 B。

2.4. 分支曲面的性质 B。 在本小节中，我们证明上述构造的分支曲面 B 的一些性质。

定理 2.1。 分支曲面 B 具有余定向。

证明。 根据构造，轨道 $\tau \subset S^1 \times I$ 与每条竖直线横截。我们规定向下的竖直方向为正侧。余定向通过商映射下降，并自然延拓至附着在层 $S^1 \times I \times \{3\}$处的圆盘$D^2$ 上。□

一个缝合流形 是一个有序对 $(M,\ \gamma)$，其中 M 是带边界的紧致三维流形，而 γ 是 ∂M 中的一组简单闭曲线，将 ∂M 分成两个子曲面 $R_+(\gamma)$和 $R_-(\gamma)$。

定理 2.2。 缝合流形

$$\big(S^3\backslash \operatorname{int}(\nu(L)\cup N(B)), \overline{\partial\nu(L)\backslash N(B)}\cup \partial_v N(B)\big)$$

与.....同胚

$$(D^2\times I,\ \partial D^2\times I).$$

证明。 首先，存在一个从.....出发的变形收缩

$$\nu(L)\cup N\left(\big\{(p,t)\in(\tau\times[0,3])\backslash\operatorname{int}(\nu(L)) : t\geqslant h(p)\big\}\right)$$

onto

$$\big\{(p,t)\in\tau\times[0,3] : t\geqslant h(p)\big\}.$$

接下来，定义一个同伦

$$f\colon \tau\times[0,3]\times[0,1]\longrightarrow \tau\times[0,3]\quad \text{by}\quad f(p,t,x):=\big(p,\max(t,3x)\big).$$

这个同伦给出了一个从.....出发的变形收缩

$$\big\{(p,t)\in\tau\times[0,3] : t\geqslant h(p)\big\}$$

到 $\tau\times\{3\}$ 上。

这两个变形收缩都可通过商映射下降。因此，先复合这两个变形收缩，再取商，最后收缩附着圆盘，我们得出 $\nu(L)\cup N(B)$ 是可缩的。因此，$S^3\backslash \operatorname{int}(\nu(L)\cup N(B))$ 同胚于 $D^2\times I$。

两者 $\overline{\partial\nu(L)\backslash N(B)}$ 和 $\partial_v N(B)$ 都是互不相交的矩形的并。因此，要证明所需结果，只需证明这些矩形拼接在一起形成一个单一的环带，而非若干个互不相交的环带。由于 B 是同向定向的（见定理 2.1），只需考虑这些环带的核心曲线。

核心曲线可由对轨道 $\tau\subset S^1\times I$ 的修改来描述。在 τ 的每个分岔点处，如果有两条分支从左侧进入，我们就将左上方的分支与分岔点断开；如果有两条分支从右侧进入，我们就将右下方的分支与分岔点断开。由此得到的弧代表 $\partial\nu(L)\backslash N(B)$ 中矩形的核心曲线。

对于 τ 的每个二边形补区域，我们将对应于该双边形两个顶点处开关的两条不相连分支连接起来。这些连接弧表示 $\partial_v N(B)$ 中矩形的核心曲线。令 γ 表示所得的 1维流形。我们将通过对辫股数使用归纳法来证明 γ 是连通的。

若 L 仅有一股辫，则相应的轨道 τ 没有开关，也没有二边形补区域。在这种情况下， τ 与所得曲线 γ 都是单个嵌入环。

现在假设 L 是一个至少有两股的非分裂正辫闭包。设 P_1、P_2、.....、P_c 为辫图中其正下方的补区域不是双边形的所有交叉点 P，按从左到右的顺序排列，并循环编号，使得 $P_{c+1}=P_1$。在每个交叉点 P_1、P_2、.....、P_c 处进行一次 0-分解。于是，链环 L 分解为一个分裂并 $L'\cup U$，其中 L' 是一个

少一股的非分裂正辫闭包，而 U 是一个穿过交叉点 P_1、.....、P_c 的平凡结。

设 γ' 表示由 L' 经上述构造得到的1维流形。根据归纳假设， γ' 是单个环。为恢复与L相关联的曲线 γ，我们如下在交叉点 $P_1,\dots,P_c$附近修改 γ'。对每个 $i=1,\dots,c$，我们在交叉 P_{i+1}的一个邻域内断开 γ'，然后穿过以 P_i 和 P_{i+1}为顶点的二边形补区域将其重新连接。具体地，我们将 γ' 在 P_{i+1} 附近的弧替换为一条在该双边形内部行进、连接 P_{i+1} 与P_i的弧，以及一条属于 U、连接 P_i 与 P_{i+1} 的弧。

对所有 $i=1,\dots,c$执行此操作后，环 γ'与 U被连接成单个环，它正是与 L 相关联的1维流形 γ。至此归纳法完成。

因此，

$$\big(S^3\backslash \operatorname{int}(\nu(L)\cup N(B)),\overline{\partial\nu(L)\backslash N(B)}\cup\partial_v N(B)\big)$$

同胚于

$$(D^2\times I,\ \partial D^2\times I)$$

作为缝合流形。 □

推论 2.1。 $S^3\backslash$内部$(\nu(L))$ 中存在一条闭曲线，正向横截于 B，并与 B 的每个分支扇区相交。

证明。 对于 B 的每个分支扇区，在其内部选取一点，并取一条穿过该点、正向横截于 B 的短弧，除此之外与 B 不相交。由于$(S^3\backslash$内部$(\nu(L)))\backslash B$ 是连通的（见定理 2.2），我们可以按顺序连接这些弧，同时遵循方向，从而得到一条闭曲线。按构造，这条曲线正向横截于 B，并与 B 的每个分支扇区相交。 □

3. Splitting the branched surface

在本节中，我们假设 L至少有一个分支不是平凡结。我们回顾层状分支曲面的定义。

定义 3.1 ([Li03，定义 2。3])。设 B 是恰当嵌入三维流形 M中的分支曲面。若消除平凡气泡后满足以下条件，我们称 B 为 层状分支曲面：

(a) 水平边界 $\partial_h N(B)$ 在$M\backslash\operatorname{int}(N(B))$中不可压缩且 ∂-不可压缩； $M\backslash\operatorname{int}(N(B))$中没有单边形； $\partial_h N(B)$ 的任何分支都不是球面，也不是恰当嵌入 M 中的圆盘；(b) 补集 $M\backslash\operatorname{int}(N(B))$不可约，且 $\partial M\backslash\operatorname{int}(N(B))$在 $M\backslash\operatorname{int}(N(B))$中不可压缩；(c) 分支曲面 B 不含 Reeb 分支曲面；(d) 分支曲面 B 没有汇圆盘或半汇圆盘。

关于平凡气泡、*Reeb* 分支曲面、汇圆盘和半汇圆盘的定义，参见 [Li03]。

我们将采用分裂技巧（参见 [Li02，第 5]节）从 B' 中得到一个层状分支曲面 B。

3.1. 分裂曲面构造。令 $F \subset N(B)$ 为与 I-纤维横截的紧嵌入曲面。令 $F \times I$ 为 F的一个乘积邻域，使得每个 $x \times I(x \in F)$ 都是 I- $N(B)$纤维的一条子弧。经过小扰动后，补集 $N(B)\backslash \operatorname{int}(F \times I)$ 是另一个分支曲面 B'的纤维化邻域。我们称 B' 由 B 沿 F分裂得到。

我们对分裂曲面 F 的构造取决于所选择的 k 条简单闭曲线 γ_1，γ_2，……，$\gamma_k \subset S^1 \times I$. 我们要求这些曲线满足以下八条性质：

(G1) 每条曲线 γ_i 都与每条竖直线横截，因此与每条竖直线 $\{x\} \times I$ 相交一次。(G2) 每条曲线 γ_i 由两条弧组成：其中一条弧连接补集 τ中一个双边形的两个顶点，另一条弧位于轨道τ上。(G3) 对于每条满足 $x \in S^1$的竖直线 $\{x\}\times I$，交点 $\gamma_i \cap (\{x\}\times I)$对于所有 $i = 1$，……，$k-1$都位于 $\gamma_{i+1} \cap (\{x\} \times I)$ 之上或与之重合。(G4) 与曲线 γ_1、γ_2……、γ_k 相关的双边形两两不同。(G5) 存在一点 $p \in \gamma_1$，使得 p 位于 τ的一条下型弧上，且其正上方没有双边形 p。(G6) 存在一点 $p \in \gamma_k$，使得 p 位于 τ的一条下型弧上，且其正下方没有双边形 p。(G7) 对于每个 $1 \leqslant i \leqslant k-1$，存在一条竖直线段，连接一点$p_1 \in \gamma_i$ 与一点 $p_2 \in \gamma_{i+1}$，其内部与 τ不相交，并且其中一点 p_1、p_2 位于 τ 的一条下型弧上，而另一点不位于 τ上。(G8) 对于 D的每条下弧，存在一点 $p \in \tau$ 位于由该下弧产生的 τ 的一条下型弧上，使得对于所有 $1 \leqslant i \leqslant k$，$p \notin \gamma_i$。

这些性质将在第 4 节中得到证明。

每个 γ_i 确定一个子曲面

$$D_i := \left(\left((\gamma_i \times [1,3])/\sim\right) \cap B\right) \cup D^2$$

在分支曲面中 B，其中商集是相对于等价关系 $\sim$ 在构造 B时所使用的，而圆盘 D^2 是在该构造过程中附加的。根据性质 (G1) 和性质(G2)，每个 D_i 都是一个圆盘。

根据性质(G3)，我们可以为每个 D_i 指定一个高度，使得在纤维化邻域 $N(B)$中，嵌入圆盘 D_1、D_2、……、D_k 两两不相交，并且与 I-纤维横截相交 $N(B)$。

Let

$$F := \bigcup_{i=1}^{k} \widetilde{D}_i$$

设其为 $N(B)$中的分裂曲面。令 B' 为由 B沿 F分裂得到的分支曲面。根据性质(G4)， ∂F与 I-纤维在 $\partial_v N(B)$ 中的交点至多为一个。因此， B' 恰当嵌入于 $S^3\backslash$内部$(\nu(L))$。

3.2. **分支曲面的性质** B'。 本小节将证明， B' 是恰当嵌入于 $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$中的层状分支曲面。

首先，我们证明第2.4小节中确立的 B 的性质对 B'同样成立。

定理 3.2。 分支曲面 B' 具有与 B相容的余定向。

证明。 由性质(G1)可知，分裂曲面 F 与每一条竖直线都横截。结论由定理2.1中的构造得出。 □

定理 3.3。 缝合流形

$$\left(S^3\backslash \operatorname{int}(\nu(L)\cup N(B')),\ \overline{\partial\nu(L)\backslash N(B')}\cup\partial_v N(B')\right)$$

同胚于

$$(D^2\times I,\ \partial D^2\times I).$$

证明。 流形 $S^3\backslash \operatorname{int}(\nu(L)\cup N(B'))$ 由 $S^3\backslash \operatorname{int}(\nu(L)\cup N(B))$粘合 $F\times I$ （也就是说， k 个 $D^2\times I$的副本）沿着 k 中的矩形 $\partial_v N(B)$. 结论由定理 2.2得出。 □

推论 3.1。 存在一条位于 $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$ 中的闭曲线，它正向横截 B'，并与 B' 的每个分支扇区相交。

证明。 由于推论 2.1 是定理 2.1和定理 2.2的推论，且定理 3.2 和定理 3.3 均成立，因此我们得出推论3.1也成立。 □

由于 L 是不可分且非平凡的， $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$ 是一个不可约、可定向的三维流形，其边界是不可压缩环面的并。现在，我们证明 $\partial\nu(L)\backslash B'$ 是双边形的并。

定理 3.4。 $\partial\nu(L)\backslash B'$ 是由双边形组成的并。

证明。 根据定理 3.3， $\partial\overline{\nu(L)\backslash N(B')}\cup\partial_v N(B')$ 同胚于一个环带$\partial D^2\times I$。若 $\partial\nu(L)\backslash B'$不是由双边形组成的并，则 $\partial\nu(L)\backslash\overline{N(B')}$必为一个环带，而 $\partial_v N(B')$ 必为空。在这种情况下， B' 的分支轨迹为空，且B' 同胚于 $\partial\nu(L)$的一个非平凡压缩圆盘，这就导出了矛盾。 □

现在，我们可以证明 B' 是一个层状分支曲面。

定理 3.5。 分支曲面 B' 是层状的。

证明。 我们逐一检验 B' 成为层状分支曲面的各项条件。

断言 1. B' 不含平凡气泡。

证明。 回顾，平凡气泡是一个 $D^2 \times I$区域，位于 $S^3 \backslash \operatorname{int}(\nu(L) \cup N(B'))$ 中，使得每个 I-纤维（为 $N(B')$ 的）与 $\operatorname{int}(D^2) \times \partial I$ 至多相交于一点。由定理3.3， $S^3 \backslash \operatorname{int}(\nu(L) \cup N(B'))$ 同胚于 $D^2 \times I$，其对应的$D^2 \times \partial I$为 $\partial_h N(B')$。因此，几乎所有 I-纤维（为 $N(B')$的）与 $\operatorname{int}(D^2) \times \partial I$相交于两点。这与平凡气泡的定义性质相矛盾。□

断言 2. $\partial_h N(B')$在 $S^3 \backslash$内部$(\nu(L) \cup N(B'))$中是不可压缩的，并且是 ∂-不可压缩的 .

证明。 这是定理3.3的直接推论。 □

断言 3. 在 $S^3 \backslash$内部$(\nu(L) \cup N(B'))$中不存在单边形。

证明。 这是定理3.2的直接推论。 □

断言 4. $\partial_h N(B')$ 的任何分支都不是$S^3 \backslash$ 内部$(\nu(L))$中的球面或真嵌入圆盘。

证明。 根据定理 3.3，水平边界 $\partial_h N(B')$ 同胚于两个圆盘的不交并，一个位于正侧，另一个位于负侧。特别地， $\partial_h N(B')$ 没有球面分支。

根据定理 3.4， $\partial \nu(L) \backslash B'$ 是由双边形组成的并。在双边形的任一顶点附近，$\partial_h N(B')$ 的两个分支并未恰当地嵌入 $S^3 \backslash$ 内部$(\nu(L))$。 □

断言 5。 $S^3 \backslash$ 内部$(\nu(L) \cup N(B'))$ 是不可约的，且 $\overline{\partial \nu(L) \backslash N(B')}$ 在 $S^3 \backslash$ 内部$(\nu(L) \cup N(B'))$中是不可压缩的。

证明。 这是定理 3.3 和定理 3.4的直接推论。 □

断言 6。 B' 不包含 [GO89]所定义的 ***Reeb*** 分支曲面。

证明。 根据 [GO89，注 1。3]， B' 在横向递归的条件下不含 Reeb 分支曲面；也就是说，存在一条与 B' 高效横向相交的闭曲线，它与 B'的每个分支扇区相交。由于任何正横向曲线都是高效横向的，根据推论3.1， B' 不含 Reeb 分支曲面。 □

断言 7。 B' 没有汇圆盘或半汇圆盘。

证明。 根据定义，汇圆盘或半汇圆盘是 B' 的一个分支扇区，满足

(a) 它与一个圆盘同胚；且 (b) 它的边界仅由 $B' \cap \partial \nu(L)$ 中的弧，以及分支方向朝内的分支轨迹上的弧组成。

对于每个点 $x' \in B'$，我们将构造一条曲线 $\gamma : [0, 1] \to B'$ 满足$\gamma(0) = x'$，使其至少与分支轨迹相交一次；并且每当 γ 与 B'的分支轨迹相交时，它都沿着分支方向前进。于是，根据定义， x'不可能位于汇圆盘或半汇圆盘的内部。

根据定义，如果分裂曲面 F 与 I-纤维 $\{x\} \times I$ $(x \in B)$ 相交于$N(B)$ 中的 k 个点，那么点 $x \in B$ 就分裂为 $k+1$ 个点 $x' \in B'$。因此，一个

点 $x' \in B'$ 由点 $x \in B$ 及其相对于 F 的相对高度所确定。

我们首先考虑对应点 $x \in B$ 位于 $S^1 \times I \times [0,1)$. 这里是不会进行商映射或分裂操作的区域。集合 $B' \cap (S^1 \times I \times [0,1))$ 是若干圆盘的并，每个圆盘都对应于D的一条下弧。根据性质 (G8)，存在一条曲线位于 B中，从 x延伸至 $S^1 \times I \times [1$中的某个点，$2]$且不与分裂曲面 F相交。这对应于 B'中的一条不与任何分支轨迹相交的曲线。因此，我们将问题归结为下一种情形：对应点 $x \in B$ 位于 $S^1 \times I \times [1, 3]/\sim$之中。

接下来，假设对应点 $x \in B$ 位于 $S^1 \times I \times [1,3]/\sim$。令 $(p,t) \in S^1 \times I \times [1, 3]$ 表示对应于 $x' \in B'$的点。曲线$\gamma_0(s) = (p, \max(t, 3s))$（其中 $s \in [0,1]$），连同相对于 F的不变相对高度，共同定义了一条曲线：从 x' 延伸至分裂构造 B中附着圆盘所得的某个 $k+1$ 圆盘内的一点。每当这条曲线与 B'的分支轨迹相交时，它便沿分支方向前进。因此，我们将问题归结为最后一种情形：对应点 $x \in B$ 位于分裂构造 B中的附着圆盘内。

最后，我们假设对应的点 $x \in B$ 位于构造 B 中的附着圆盘上。根据相对于 F 的相对高度，该点 $x' \in B'$ 位于分裂操作得到的某个 $k+1$ 圆盘中。

如果 $x' \in B'$ 位于最上方圆盘上，我们利用性质 选取一个点 (G5)。曲线 $((p \times [0,\ 3])/\sim) \cap B$ 在 B 中提升为一条曲线，该曲线与 B'的分支轨迹恰好相交一次，交点为 B'，且分支方向背离最上方圆盘。因此，存在一条曲线 $p \times \{1\}$，它位于 γ中并从 B' 出发，且至少与一条分支轨迹相交；每当 x' 与 γ 的一条分支轨迹相交时，B'它都沿分支方向前进。

如果 $x' \in B'$ 位于最下方圆盘上，那么我们同样利用性质 $p \in \gamma_k \subset S^1 \times I$ 选取一个点 (G6)。同样可得结论。

若 $x' \in B'$ 位于 D_i 与 D_{i+1} 之间（对某个 $1 \leqslant i \leqslant k-1$），我们利用性质 $p_1 \in \gamma_i \subset S^1 \times I$ 和 $p_2 \in \gamma_{i+1} \subset S^1 \times I$ 选取点 (G7)。令 $p \in \{p_1, p_2\}$ 为位于 τ的一条下弧上的点。可得相同的结论。

因此，B' 没有汇圆盘或半汇圆盘。 □

根据定义 3.1，B' 是一个层状分支曲面。 □

4. Curves for the splitting surface

本节中，我们将构造满足性质 γ_1、γ_2、……、$\gamma_k \subset S^1 \times I$ (G1)–(G8)的简单闭曲线。

4.1. 砖块图。 考虑与正辫图 $D \subset S^1 \times I$ 相关联、水平绘制的砖块图。这是一个位于 $S^1 \times I$ 中的图，其中每个交叉都被替换为一条连接相邻两行的竖直线段。

砖块图中的一行是 $S^1 \times I$中的一条水平圆。第 i行（从上到下计数）对应于辫图 D 中的点集 p，使得

在 p的正上方有 $i-1$ 股。τ 的每个二边形补区域由砖块图中的一个最内层矩形表示，我们称之为砖块。

D 中的每个交叉都对应砖块图中的一条竖直线段，而每条竖直线段又确定两个顶点。我们将线段的上端点称为上顶点，下端点称为下顶点。对于砖块图中的每个顶点 p，令 $\mathrm{opp}(p)$ 表示对应于同一交叉的另一个顶点。令 $[p,\ \mathrm{opp}(p)]$ 表示连接 p 与 $\mathrm{opp}(p)$ 的竖直线段。

对于砖块图中位于同一行上的两个点 p_1，p_2，我们考虑从左向右的定向行。令 $[p_1,\ p_2]$ 表示沿此方向从 p_1 到 p_2 所经过的水平线段；若 $p_1 = p_2$，则沿整行绕行一周。令 $d_{\mathrm{up}}(p_1,\ p_2)$ 表示 $[p_1,\ p_2]$上除端点外的上顶点数目。类似地，令 $d_{\mathrm{down}}(p_1,\ p_2)$ 表示 $[p_1,\ p_2]$上除端点外的下顶点数目。这些函数类似于 [Kri25，定义 3 中定义的函数。7]。

对于砖块图中行上的每个点 p，若 $d_{\mathrm{up}}(p,\ p) \geqslant 1$，令 $L_{\mathrm{up}}(p)$ 表示其所在行上 p 左侧最近的上顶点，并令 $R_{\mathrm{up}}(p)$ 表示其所在行上 p 右侧最近的上顶点。类似地，若 $d_{\mathrm{down}}(p,\ p) \geqslant 1$，令 $L_{\mathrm{down}}(p)$ 表示其所在行上 p 左侧最近的下顶点，并令 $R_{\mathrm{down}}(p)$ 表示其所在行上 p 右侧最近的下顶点。

砖块图按如下方式确定辫子字。从左到右扫描砖块图。每当遇到连接 i 行与 $(i+1)$ 行的垂直线段时，就记下生成元 σ_i。按照这些生成元出现的顺序列出它们，即得到与该图关联的辫子字。

4.2. **曲线的构造**。我们描述一种线性复杂度的贪心算 γ_1法，该算法生成简单闭曲线 γ_k，满足性质 (G1)–(G8)。具体构造见算法 1。构造中使用的局部移动总结于算法2。图 3 展示了在一个示例砖块图上的构造。

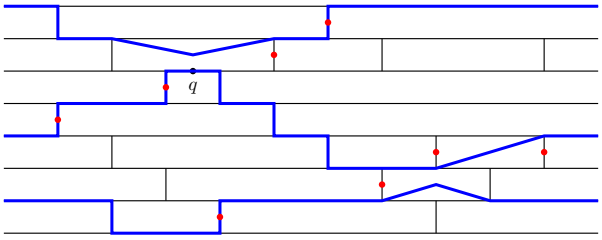


FIGURE 3. 蓝色曲线表示输出；红点表示 TypeX 交叉。

在构造过程中，我们在同一行上保留两个点 A 和 B，以及一条连接 A 和 B、位于 $S^1 \times I$中的路径 γ。路径 γ 已在该行上方或下方构造完成，而对 γ 的下一步修改取决于 [B中的上顶点数量（或，A] 中的下顶点数量（或 $[A, B]$）。

算法1 曲线的构造

要求： 正辫图 $D \subset S^1 \times I$ 及其对应的砖块图

确保： 满足性质的简单闭曲线 (G1)–(G8)

在第 i 行中选择一个非顶点点 q，它位于 L 的某个分支上，而该分支不是平凡结，且 i 极小。
$A \leftarrow q$, $B \leftarrow q$, $\gamma \leftarrow \{q\}$, $\Gamma \leftarrow \varnothing$
当 $d_{\mathrm{up}}(B, A) = 2$ **时执行**
    StepBelow(A, B, γ)
结束循环
CrossBrickStep（A, B, γ）
当 A 不在最后一行**时，执行**
    如果 $d_{\mathrm{up}}(B, A) \geqslant 2$ **那么**
        StepBelow(A, B, γ)
    else
        CloseAndStore(γ, Γ, $[B, A]$)
        RestartBelow(A, B, γ)
    如果结束
结束 while
CloseAndStore(γ, Γ, $[B, A]$)
如果 q 不在第一行 **则**
    $A \leftarrow q$, $B \leftarrow q$
    RestartAbove(A, B, γ)
    当 A 不在第一行 **执行**
        如果 $d_{\mathrm{up}}(A, B) \geqslant 2$ **那么**
            StepAbove(A, B, γ)
        else
            CloseAndStore(γ, Γ, $[A, B]$)
            RestartAbove(A, B, γ)
        结束如果
    结束循环
    CloseAndStore(γ, Γ, $[A, B]$)
结束条件判断
返回 Γ

构造分为三个阶段：(i) 确定要穿越的中间砖块，(ii) 向下扩展至最后一行，以及 (iii) 向上扩展至第一行。

4.2.1. 阶段（i）：定位要穿过的中间砖块。我们从 L的一个分支上的非顶点点 q 出发，该分支不是平凡结，并选择该分支所经过的最顶行上的点。我们令 $A = B = q$，并将 γ 初始化为 q处的常值路径。只要 $d_{\mathrm{up}}(B, A) = 2$，过程 StepBelow 就通过将 A移至左侧最近的上顶点，并将 B 移至

算法 2 局部过程，用于算法 1

过程 CrossBrickStep(A, B, γ)
  $A' \leftarrow L_{\text{up}}(A)$，$B' \leftarrow R_{\text{up}}(B)$
  $A'' \leftarrow L_{\text{up}}(A')$
  沿 $[A'、A]$、$[B、B']$ 和 $[B', \text{opp}(B')]$ 延伸 γ
  在 $[A''、A']$ 下方的砖块内，沿从 $\text{opp}(A'')$ 到 A' 的一条弧延伸 γ
  $(A, B) \leftarrow$ (反向(A'')，反向(B'))
结束过程
过程 StepBelow(A，B，γ)
  $A' \leftarrow L_{\text{up}}(A)$，$B' \leftarrow R_{\text{up}}(B)$
  沿 $[A'$ 延伸 γ，$A]$，$[B, B']$，$[A'$，反向$(A')]$，以及 $[B'$，反向$(B')]$
  $(A, B) \leftarrow$ (反向(A')，反向(B'))
结束过程
过程 StepAbove(A, B, γ)
  $A' \leftarrow R_{\text{down}}(A)$，$B' \leftarrow L_{\text{down}}(B)$
  沿 $[B', B]$, $[A, A']$, $[A'$,$\text{opp}(A')]$ 延伸 γ，以及 $[B'$,$\text{opp}(B')]$
  $(A, B) \leftarrow (\text{opp}(A'), \text{opp}(B'))$
结束过程
过程 CloseAndStore(γ，Γ，Seg)
  沿 Seg 延伸 γ，直至闭合 γ
  $\Gamma \leftarrow \Gamma \cup \{\gamma\}$
结束过程
过程 RestartBelow(A，B，γ)
  $R \leftarrow$ A正下方的砖块
  $A \leftarrow$ R的左下顶点
  $B \leftarrow$ R的右下顶点
  $\gamma \leftarrow$ R 内部从 A 到 B的一条弧
结束过程
过程 RestartAbove(A, B, γ)
  $R \leftarrow$ A正上方的砖块
  $A \leftarrow$ R的右上顶点
  $B \leftarrow$ R的左上顶点
  $\gamma \leftarrow$ 位于 R 内部、从 B 到 A的一条弧
结束过程

右侧最近的上顶点，然后沿相应的垂直线段下降至配对的下顶点，从而延伸 {v13}。

一旦 $d_{\text{up}}(B, A) \neq 2$，正如我们将在第 4.3 小节稍后证明的那样，我们必须有$d_{\text{up}}(B, A) \geqslant 3$。过程 CrossBrickStep 延伸 γ，通过将 A 移动到左侧最近的上顶点，然后穿过砖块内部朝向其左下角，同时将 B 移动到右侧最近的上顶点，并沿相应的竖直线段下降。

在此步骤之后， A和 B 均为下顶点，并且构造进入向下阶段。

4.2.2. 阶段 *(ii)*：向下扩展至最后一行。如果 $d_{\mathrm{up}}(B, A) \geqslant 2$，我们通过应用 StepBelow 将 γ 进一步向下延伸，并继续向下扩展。

反之，如果 $d_{\mathrm{up}}(B, A) \leqslant 1$，我们通过添加线段$[B, A]$ 来闭合当前路径 γ，并将其存入输出集合 Γ。如果这不是最后一行，我们就在 A 正下方的砖块内开始一条新路径（过程 RestartBelow），令(A, B) 分别为该砖块的左下顶点和右下顶点，并令 γ 为一条从 A 到 B的内部弧。否则，向下扩展终止。

4.2.3. 阶段 *(iii)*：向上扩展至第一行。这一阶段与向下阶段对称。如果 q 不在第一行上，我们就在 q 正上方的砖块内重新开始一条路径 γ （过程 RestartAbove），然后迭代向上进行。

4.3. **输出曲线是简单的。** 在本小节中，我们证明算法1 生成简单闭曲线。在构造过程中，每一步都在单独的一行上进行，先从初始点向下 q，再从 q向上进行。因此，只需证明在每一行上进行的构造都不会产生自交。

需要验证以下两个陈述：

- 每个砖块的两条垂直线段彼此不同。因此，在 Restart-Below （第12行）和 RestartAbove （第18 行和第24行）之后，顶点 A和B 彼此不同。• 在 CrossBrickStep （第6行）之前， $d_{\mathrm{up}}(B,\ A) \geqslant 3$。因此，在 CrossBrickStep期间添加的线段也不可能产生自交。

我们通过从砖块图中读取辫子字，利用辫群关系证明这两个陈述。对于第一个陈述，我们建立如下引理。该证明沿用了 [Kri25中的引理4的相同论证。1] 其过程可通过图4所示的同痕来直观理解。

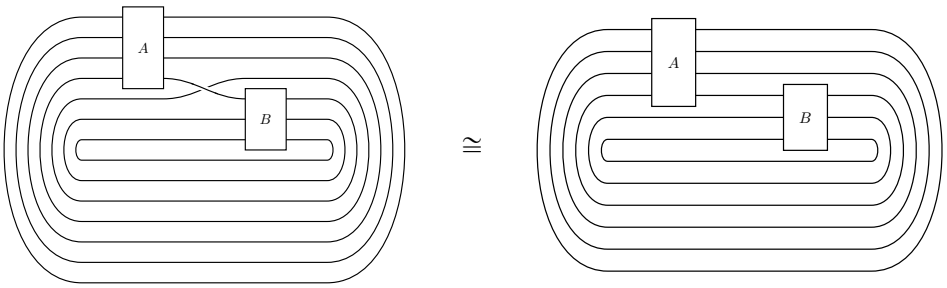


Figure 4. 引理中所用同痕的示意图 4.1。

引理4.1. 设 β 是一个由 m股组成的正辫词。假设存在一个指标 i，使得 σ_i 在 β中仅出现一次。那么存在一个由 $m-1$ 股组成的正辫词β'，使得闭合 $\widehat{\beta}$ 和 $\widehat{\beta'}$ 在 S^3 中表示同一个链环。

证明。 对于每个 k，令 π_k 表示辫 $\pi_k := \sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\cdots\sigma_k$. 由辫关系可得

$$\pi_k\sigma_j\pi_k^{-1} = \begin{cases}\sigma_{j-1}, & \text{if } j > k,\\ \sigma_j, & \text{if } j < k-1,\end{cases}$$

and

$$\pi_k\pi_{k+1}^{-1} = \pi_k^{-1}\sigma_{m-1}\pi_k.$$

根据辫关系， β 的一个共轭可以写成乘积 $W_0\sigma_i W_1$，其中 W_0 是生成元 σ_1, $\sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1}$ 中的一个正字，而 W_1 是生成元 $\sigma_{i+1}, \sigma_{i+2}, \ldots, \sigma_{m-1}$中的一个正字。于是我们有

$$\begin{aligned}\pi_i\beta\pi_i^{-1} =& \pi_i W_0\sigma_i W_1\pi_i^{-1}\\ =& (\pi_i\pi_{i+1}^{-1})(\pi_{i+1}W_0\pi_{i+1}^{-1})(\pi_i W_1\pi_i^{-1})\\ =& (\pi_i^{-1}\sigma_{m-1}\pi_i)W_0(\pi_i W_1\pi_i^{-1}).\end{aligned}$$

元素 $\pi_i W_1\pi_i^{-1}$可以写成生成元$\sigma_i, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{m-2}$中的一个正字。消去一对 $\sigma_{m-1}^{-1}\sigma_{m-1}$ 后， 字 $\pi_i^{-1}\sigma_{m-1}\pi_i$ 中恰好含有一个 σ_{m-1} ， 且不含 σ_{m-1}^{-1}。

因此， $\pi_i\beta\pi_i^{-1}$可以沿最后一股进行去稳定化，这会移除该σ_{m-1} 并得到由生成元 $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{m-2}$构成的辫子字 β'。闭包$\widehat{\beta}$ 和 $\widehat{\beta'}$ 在 S^3中表示同一个链环。□

对于第二个结论，注意到每次执行 StepBelow 时， 顶点 A 和 B 都会向下移动一行。由于行数有限， 一旦首次出现 $d_{\mathrm{up}}(B, A) \neq 2$ ， 算法便会进入第 6行。因此， 要证明 $d_{\mathrm{up}}(B, A) \geqslant 3$，只需排除以下情形： $d_{\mathrm{up}}(B, A) = 0$ 和$d_{\mathrm{up}}(B, A) = 1$。

假设初始点 q 位于第 i次抛掷处，并且在进入第 StepBelow 之前，执行了 j 次第 6行。由共轭可知，不妨设 β 股上的辫子字 m 为

$$\beta = \sigma_{i+j-1}\, w_{-j+1}\cdots\sigma_{i+1}\, w_{-1}\,\sigma_i\, w_0\,\sigma_i\, w_1\,\sigma_{i+1}\, w_2\cdots w_{j-1}\,\sigma_{i+j-1}\, w_j,$$

其中 $w_{-j+1}, \ldots, w_{-1}, w_0, w_1, \ldots, w_j$ 均为正字。

根据条件，在进入第 $d_{\mathrm{up}}(B$行之前，每次执行 $A) = 2$ 前均有 StepBelow。对于 ， 当 $k = 0,1, \ldots, j-1$ ，且对于每个满足 l的 $|l| \geqslant k$，字w_l 不含任何 σ_{i+k}。根据初始点 i的选取具有最小性这一条件 q，字 w_0 不含任何 σ_{i-1}。

对于 $l = 1$，2，……， $j-1$，词 w_{-l}和 w_l 是由生成元构成的正字

$$\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{i-1},\ \sigma_{i+l+1}, \sigma_{i+l+2}, \ldots, \sigma_{m-1}.$$

根据辫关系， w_{-l} 和 w_l 均可写成一个正字（称为上部）与一个由生成元 σ_1、 σ_2、……、 σ_{i-1}构成的正字，以及一个由生成元 σ_{i+l+1}、 σ_{i+l+2}、……、 σ_{m-1}构成的正字（称为下部）的乘积。

由于 w_0 不包含 σ_{i-1} 或 σ_i，因此也可以写成一个正字（称为上部）与一个由生成元 σ_1、σ_2、……、σ_{i-2}构成的正字，以及一个由生成元 σ_{i+1}、σ_{i+2}、……、σ_{m-1}构成的正字（称为下部）的乘积。

根据辫关系，w_l的上部与$\sigma_{i+|l|}$、……、σ_{i+j-1}可交换，w_l的下部与 σ_i、……、$\sigma_{i+|l|-1}$可交换，并且每个上部都与每个下部可交换。

因此，我们可以将每个下部推入中心字 w_0，并将每个上部推入末尾的字w_j，必要时先进行共轭。因此，β的一个共轭元可以写成

$$\beta' = \sigma_{i+j-1}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i\, W_0\, \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+j-1}\, W_1,$$

其中，W_0是生成元 σ_{i+1}、σ_{i+2}、……、σ_{m-1}中的一个正字，而 W_1是生成元 σ_1、σ_2、……、σ_{i-1}、σ_{i+j}、σ_{i+j+1}、……、σ_{m-1}中的一个正字。

当 $d_{\mathrm{up}}(B、A)$ 进入第 6 行时，其值等于字母 σ_{i+j} 在 w_j中出现的次数，也等于 σ_{i+j} 在W_1中出现的次数。

若 $d_{\mathrm{up}}(B,\ A) = 0$，则辫子字 β' 将第 $(i+j)$ 股映射到其自身。因此，闭合链环 L 含有一个经过初始点 q的平凡结分支，这与 q的选取相矛盾。

若 $d_{\mathrm{up}}(B,\ A) = 1$，我们分两种情况讨论。若 $j = 0$，则应用引理 4.1 构造一个股数少一股、表示同一链环的正辫。否则，应用以下引理构造一个股数少一股、表示同一链环的正辫。无论哪种情况，这都与辫图的选取相矛盾。引理 4.2 的证明可通过图 5所示的同痕来直观呈现。

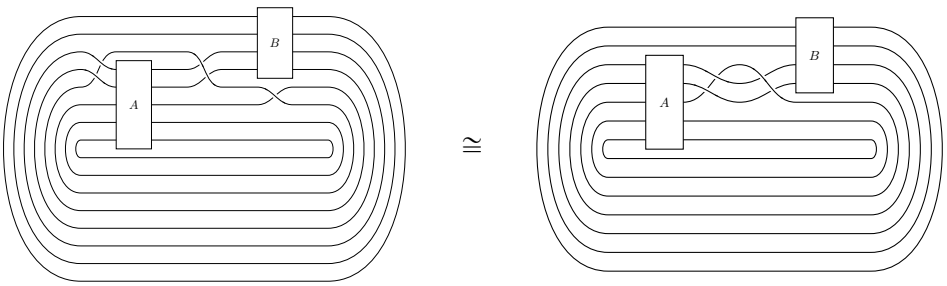


FIGURE 5. 引理4.2中所用同痕的示意图。

引理4.2。设

$$\beta = \sigma_{i+j-1}\cdots\sigma_{i+1}\sigma_i\, W_0\, \sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+j-1}\, W_1$$

是一个由 m 股组成的正辫词。假设 W_0 既不包含 σ_{i-1} 也不包含σ_i，且 W_1 不包含任何 σ_{i+j-1}，并且恰好出现一次 σ_{i+j}。那么存在$\widehat{\ \ \ \ }$一个由 $m-1$ 股组成的正辫词 β'，使得闭包 β 和 β'在 S^3中表示同一个链环。

证明。 对于每个 k，令 π_k 表示辫 $\pi_k := \sigma_{m-1}\sigma_{m-2}\cdots\sigma_k$. 根据辫关系，我们有

$$\pi_k\sigma_j\pi_k^{-1} = \begin{cases} \sigma_{j-1}, & \text{if } j > k, \\ \sigma_j, & \text{if } j < k-1, \end{cases}$$

and

$$\pi_k\pi_{k+1}^{-1} = \pi_k^{-1}\sigma_{m-1}\pi_k.$$

根据辫关系，元素 W_0 可写成乘积 V_0V_1，其中 V_0 是生成元 σ_1、σ_2、……、σ_{i-2} 中的一个正字，而 V_1 是生成元 σ_{i+1}、σ_{i+2}、……、σ_{m-1} 中的一个正字。类似地，元素 W_1 可写成乘积 $V_2V_3\sigma_{i+j}V_4V_5$，其中 V_2 和 V_4 是生成元 σ_1、σ_2、……、σ_{i+j-2} 中的正字，而 V_3 和 V_5 是生成元 σ_{i+j+1}、σ_{i+j+2}、……、σ_{m-1} 中的正字。于是我们有

$$\begin{aligned}
&\pi_{i+j}\beta\pi_{i+j}^{-1} \\
=&\pi_iV_0V_1\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+j-1}V_2V_3\sigma_{i+j}V_4V_5\pi_{i+j}^{-1} \\
=&\pi_iV_0V_1V_3\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+j-1}\sigma_{i+j}V_2V_4V_5\pi_{i+j}^{-1} \\
=&(\pi_iV_0\pi_i^{-1})(\pi_iV_1V_3\pi_i^{-1})(\pi_i\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+j}\pi_{i+j}^{-1})(\pi_{i+j}V_2V_4\pi_{i+j}^{-1})(\pi_{i+j}V_5\pi_{i+j}^{-1}) \\
=&V_0(\pi_iV_1V_3\pi_i^{-1})(\pi_i\sigma_i\sigma_{i+1}\cdots\sigma_{i+j-1}\pi_{i+j+1}^{-1})V_2V_4(\pi_{i+j}V_5\pi_{i+j}^{-1}) \\
=&V_0(\pi_iV_1V_3\pi_i^{-1})(\pi_{i+j}\pi_{i+j+1}^{-1})(\sigma_{i+j-1}\cdots\sigma_i\sigma_i\cdots\sigma_{i+j-1})V_2V_4(\pi_{i+j}V_5\pi_{i+j}^{-1}) \\
=&V_0(\pi_iV_1V_3\pi_i^{-1})(\pi_{i+j}^{-1}\sigma_{m-1}\pi_{i+j})(\sigma_{i+j-1}\cdots\sigma_i\sigma_i\cdots\sigma_{i+j-1})V_2V_4(\pi_{i+j}V_5\pi_{i+j}^{-1}).
\end{aligned}$$

元素 $\pi_iV_1V_3\pi_i^{-1}$ 可写成生成元 σ_i、σ_{i+1}、……、σ_{m-2} 中的一个正字，而元素 $\pi_{i+j}V_5\pi_{i+j}^{-1}$ 可写成生成元 σ_{i+j}、σ_{i+j+1}、……、σ_{m-2} 中的一个正字。消去一对 $\sigma_{m-1}^{-1}\sigma_{m-1}$ 后，词 $\pi_{i+j}^{-1}\sigma_{m-1}\pi_{i+j}$ 恰好包含一个 σ_{m-1}，且不含 σ_{m-1}^{-1}。

因此，$\pi_{i+j}\beta\pi_{i+j}^{-1}$ 可以沿最后一股进行去稳定化，从而移除这个 σ_{m-1} 并得到一个由生成元 σ_1、σ_2、……、σ_{m-2} 构成的辫子字 β'。闭包 $\widehat{\beta}$ 和 $\widehat{\beta'}$ 在 S^3 中表示同一个链环。□

因此，算法1 的输出曲线是简单的。

4.4. **性质 (G1)–(G8)的验证**。 设 γ_1、γ_2、……、γ_k 为算法1生成的简单闭曲线。假设 γ_s 是构造的第一条曲线（因此初始点 q 位于 γ_s 上）。此外，假设 γ_{s+1}、……、γ_k 是在向下扩展阶段剩余过程中构造的曲线，而 γ_{s-1}、……、γ_1 是在向上扩展阶段构造的曲线。我们将证明 γ_1、γ_2、……、γ_k 满足性质 (G1)–(G8)。

定理4.3。 简单闭曲线 γ_1、γ_2、……、γ_k 满足性质 *(G1)–(G8)*。

证明。 我们逐一验证这些性质。

性质 (G1)。 在构造 γ_s、γ_{s+1}、……、γ_k 的过程中，路径始终向左延伸至左端点 A 的左侧，并向右延伸至右端点 B。

在构造 γ_{s-1}、γ_{s-2}、……、γ_1 的过程中，路径始终向右延伸至右端点 A 的右侧，并向左延伸至左端点 B 的左侧。因此，输出曲线与每一条竖直线都横截。

性质 （G2）。曲线 γ_s 包含一条内部弧，它连接了在第 CrossBrickStep 行的过程6中构造的某个砖块的两个角。中的每条曲线γ_{s+1}，……，γ_k 都包含一条内部弧，它连接了在第 RestartBelow 行的过程12中构造的某个砖块的两个角。中的每条曲线 γ_{s-1}，……，γ_1 都包含一条内部弧，它连接了在第 RestartAbove行的过程18或第24行的过程中构造的某个砖块的两个角。其余部分沿着砖块的边。

性质（G3）。设初始点 q 位于第 r_s行。每当执行第11行或第15行的 Close-AndStore过程时，端点 A 和 B分别位于第 r_{s+1}行和第 r_{k+1}行。之后，每当执行第23行或第27行的 CloseAnd-Store 过程时，端点 A 和 B 分别位于第 r_{s-1}行和第 r_1行。因此，每个 γ_i 都位于第 r_i 行与第 r_{i+1}行之间。由于 $r_1 < r_2 < \cdots < r_{k+1}$，性质（G3）成立。

性质 (G4)。由于每个 γ_i 都位于第 r_i 行和第 r_{i+1}行之间，因此对应的砖块也各不相同。

性质 (G5)。如果初始点 q 不在第一行上，那么在执行第 A 行的 CloseAndStore 过程时，紧邻 27 右侧的点可作为性质 p中的点 (G5)。否则，紧邻$L_{\text{down}}(q)$ 右侧的点可作为性质 p中的点 (G5)。

性质 (G6)。执行第 A 行的 Close-AndStore过程时，紧邻其左侧的点可作为性质 15中的点 p (G6)。

性质 (G7)。对于每个 $s \leqslant i \leqslant k-1$，执行第 A行的 CloseAndStore 过程时，位于第 11行 r_{i+1} 上且紧邻其左侧的点可作为性质 $p_1 \in \gamma_i$ 中的点 (G7)。第 RestartBelow 行的 12过程会在 A正下方的砖块中开始下一条曲线。因此，在 p_1 正下方有一个点可作为性质 $p_2 \in \gamma_{i+1}$ 中的点 (G7)。

对于 $i = s-1$，初始点 q 充当性质 $p_2 \in \gamma_{i+1}$ 中的点 (G7)。根据 q的选取，我们可以假设 q 位于 τ的一条下型弧上。位于其正上方的RestartAbove 第 18 行的过程，会在正上方的砖块中启动下一条曲线 p_2。因此，紧挨着 p_2 正上方有一个点，充当性质 $p_1 \in \gamma_i$ 中的点 (G7)。

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant s-2$，执行 CloseAndStore第 23行的过程时，紧邻 A 右侧的点 r_{i+1} 充当性质 $p_2 \in \gamma_{i+1}$中的点 (G7)。因此，在 p_2 的正上方有一个点，充当性质 $p_1 \in \gamma_i$ 中的点 (G7)。

性质 (G8)。……的下弧 D 对应于 τ的一组下型弧。这些下型弧可在砖块图中表示如下。

Let

$$U_0, U_1, D_1, U_2, D_2, \ldots, U_t, D_t, D_{t+1}$$

是砖块图的顶点，使得

• 每个 U_i 都是上顶点；• 每个 D_i 都是下顶点；• 每个 $[U_i,\ D_i]$ 表示一条竖直线段；• $[U_1,\ U_0]$、$[D_{t+1},\ D_t]$以及每个 $[U_{i+1},\ D_i]$ 表示没有内部顶点的水平线段。$[U_1,\ U_0]$的左半部分、$[D_{t+1},\ D_t]$的右半部分，以及每条线段 $[U_{i+1},\ D_i]$ 都对应于由一条下弧产生的 $t+1$ 下型弧 τ。

如果 $[U_1,\ U_0]$，$[D_{t+1},\ D_t]$，或某个 $[U_{i+1},\ D_i]$ 中存在一个不在任何输出曲线上的内部点，则性质（G8）成立。我们考虑三种情形。

首先，设包含 $[U_1,\ U_0]$ 的行位于初始点 q 下方。在这种情况下，没有任何局部过程会沿着 $[U_1,\ U_0]$ 延伸路径。因此，$[U_1,\ U_0]$ 的内部不与任何输出曲线相交。

其次，假设包含 $[D_{t+1},\ D_t]$ 的行位于初始点q之上。类似地，没有任何局部过程沿 $[D_{t+1},\ D_t]$延伸路径。因此，$[D_{t+1},\ D_t]$ 的内部不与任何输出曲线相交。

最后，假设包含 $[U_1,\ U_0]$ 的行不在初始点q之下，且包含 $[D_{t+1},\ D_t]$ 的行不在 q 之上。则在 $[U_1,\ U_0]$、$[D_{t+1},\ D_t]$或某个 $[U_{i+1},\ D_i]$ 中，存在一条与 q位于同一行的线段 I。

由算法1，初始行与输出曲线相交于区间$[L_{\mathrm{up}}(q),\ R_{\mathrm{up}}(q)]$。根据 q的选取，其中不存在内部顶点于 $[L_{\mathrm{up}}(q),\ R_{\mathrm{up}}(q)]$。若 I 与某条输出曲线相交，则它必与 $[L_{\mathrm{up}}(q),\ R_{\mathrm{up}}(q)]$重合。由于两个端点均为上顶点，我们必有 $I=[U_1,\ U_0]$。

每次我们更新 A 之前 CrossBrickStep （第 6 行），更新后的值都是某个 D_i。在 CrossBrickStep期间，$\mathsf{opp}(A')$左侧紧邻的点是 $[D_{t+1}$ 的内点，$D_t]$ 或某个 $[U_{i+1}$ 的内点，$D_i]$并且它不位于任何输出曲线上。

至此，证明完成。 □

5. Slopes realized by the boundary train track

遵循 [Li03], ，我们研究分支曲面 B' 的边界火车轨道所实现的斜率。在这里，有理斜率 $s\in\mathbb{Q}\cup\{\infty\}$ 称为被轨道 实现，如果轨道 τ 完全承载一组斜率为 τ 的简单闭曲线 s。

5.1. 从承载斜率到完全承载斜率。 本小节的目的是从子轨道实现的斜率过渡到整个轨道实现的斜率。特别是，如果我们的边界火车轨道承载两种不同有理斜率 s_1 和 s_2 的曲线，那么它就实现了介于 s_1 和 s_2 之间开区间内的每个有理斜率。

定理 5.1。 设 τ 是环面 T 上的一个定向火车轨道，其中 $T\backslash\tau$ 是由双边形组成的并。设 $\tau'\subset\tau$ 是一个实现两个不同有理斜率的子列车轨道。那么，τ' 实现的每个有理斜率也由 τ 实现。

证明。设 τ' 实现的两个不同有理斜率为 s_1 和 s_2。我们证明 τ 也实现 s_1。设 τ' 承载的闭曲线 γ_1（分别为 γ_2）的斜率为 s_1（分别为 s_2）。设 ρ_1 和 ρ_2 为相应的轨道路径。由于 $s_1 \neq s_2$，它们相交；固定一个交点 $p_0 \in \rho_1 \cap \rho_2$。

任取一点 $p \in \tau$。从 p 出发，沿着 τ 的定向前进。由于 τ 是紧致的，这条路径最终必会与自身相交。第一次自交会产生一条闭合轨道路径 γ。

τ 的每个补区域都是一个双边形，因此其尖欧拉指数为 0。因此，任意补区域的并集也具有指数 0。由于圆盘的尖欧拉指数为 1，τ 不可能承载零伦闭曲线。因此，γ 表示 T 中的一个斜率。

由于 $s_1 \neq s_2$，曲线 γ 至少与 ρ_1 或 ρ_2 中的一条相交。沿着该曲线到达点 p_0，即可得到一条从 p 到 p_0 的轨道路径。反向重复这一论证，可得到一条从 p_0 返回 p 的轨道路径。因此，τ 上的每一点都位于一条闭合轨道路径上。故 τ 是递归的。特别地，τ 具有正有理横截测度 μ。

设 μ_1 和 μ_2 是定义斜率s_1 和 s_2的正有理横截测度，分别定义在 τ' 上。通过将 $\tau \backslash \tau'$中的分支赋权为 0，将 μ_1 和 μ_2 延拓为 τ 上的横截测度。

由于 $s_1 \neq s_2$，同调类 $[\mu_1]$ 和 $[\mu_2]$ 在$H_1(T$中线性无关；$\mathbb{Q}) \cong \mathbb{Q}^2$。因此，存在一个有理数 t，使得 $[\mu + t\mu_2]$是 $[\mu_1]$在 $H_1(T$中的一个倍数；$\mathbb{Q})$。

因此，对于充分小的正有理数 ε，$\mu_1 + \varepsilon(\mu + t\mu_2)$是定义斜率 s_1的正有理横截测度，定义在 τ 上。由于 τ 不承载零伦闭曲线，它完全承载了一组斜率为 s_1的简单闭曲线。□

5.2. 交叉附近的局部行为。 在本小节中，我们分析链环图中每个交叉附近 B' 的边界火车轨道的局部结构。

第一步是为每条被交叉点切开的弧，在 $B' \cap \partial\nu(L)$ 中选取一个对应的点 x'。这样的弧对应于砖块图中连接两个相邻顶点的一条水平线段。

回想一下，点 $x' \in B'$ 由点 $x \in B$ 及其相对于 F的相对高度确定。对于每条被交叉点切开的弧，在对应于该弧的轨道 τ 上选取一个点p，并令

$$(p,t) \in (\tau \times [0,3]) \backslash \operatorname{int}(\nu(L))$$

为满足 $t \geqslant h(p)$条件时具有最小 t 的点。根据 B的构造，$(p,\ t)$确定了一个点 $x \in B \cap \partial\nu(L)$。

要指定 $x' \in B' \cap \partial\nu(L)$ 相对于 F 的相对高度，只需指定它相对于经过 p（若存在）的输出曲线 γ_i 的相对高度。我们采用以下规则：

如果 p 位于算法1的初始行上或其下方，那么 $x' \in B' \cap \partial\nu(L)$ 位于经过 p的输出曲线 γ_i 上方；否则， $x' \in B' \cap \partial\nu(L)$ 位于经过 p的输出曲线 γ_i 下方。

接下来，我们研究点 $x' \in B' \cap \partial\nu(L)$ 在交叉附近的边界火车轨道中是如何连接的。如果相应的弧由下穿线连接，那么它们就会像黑板框架中那样直接相连，不设任何分岔点。如果相应的弧由上穿线连接，那么边界火车轨道的局部构形及点 $x' \in B'$的位置属于图 6所示的十二种情形之一。

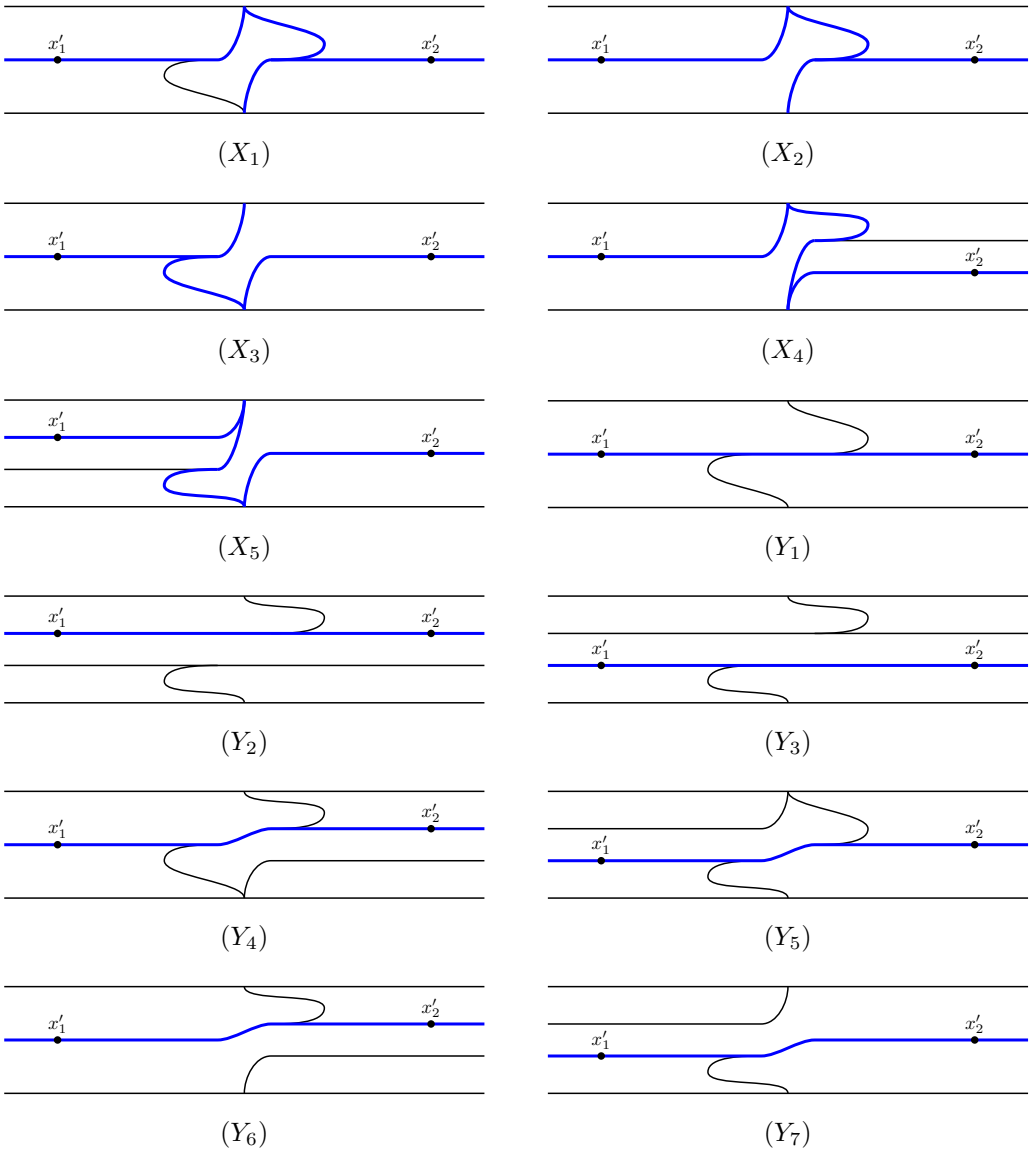


FIGURE 6. 边界火车轨道的局部行为。

如果输出曲线没有与对应于某个交叉点的竖直线段相交，那么边界火车轨道的局部构型如情况 (Y_1) 所示。

每个过程都可能产生一些交叉点，这些交叉点附近的边界火车轨道属于以下情况之一。

- CrossBrickStep: (X_2), (X_3), (Y_2), (Y_4); • StepBelow: (X_1), (Y_2), (Y_4);
- StepAbove: (X_1), (Y_3), (Y_5);
- CloseAndStore: (Y_2), (Y_3);
- RestartBelow: (X_3), (X_5), (Y_6);
- RestartAbove: (X_2), (X_4), (Y_7)。

如果在算法 1 的某一步中，从 γ 的 A侧（即，当构造位于包含初始点的 γ 行或其下方时，为 q 的左侧；当构造位于该行上方时，为 γ 的右侧）进行的构造满足以下任一条件，我们就称该交叉为X型：

（1）沿着整个对应的竖直线段延伸；或（2）通过该竖直线段的端点进入或离开一个砖块。

否则，该交叉称为 Y 型。每次应用任一操作 StepBelow、 StepAbove、 RestartBelow或 RestartAbove 都会产生一个 TypeX 交叉。应用 CrossBrickStep会产生两个 TypeX 交叉。TypeX 交叉的总数等于辫图中的股数。在图3中，红点标出了 X 型交叉。

在 X 型交叉附近，边界火车轨道的局部构型属于 (X_1)–(X_5)中的一种。对于每种情况，我们都能找到图6中以蓝色曲线表示的轨道路径，它们具有以下性质。

引理 5.2。对于每个 X 型交叉，边界火车轨道都包含一条轨道路径，它连接上穿线上的选定点 x_1' 和 x_2' ，且相对于黑板框架额外引入一个扭转。

引理 5.3。对于每个 X 型交叉，边界火车轨道都包含一条闭合轨道路径，它代表上穿线的子午线。

在 Y型交叉附近，边界火车轨道的局部构型属于以下情况之一 (Y_1)–(Y_7)。图 6 中的蓝色曲线再次实现了相应的轨道路径。

引理 5.4。 对于每个 Y型交叉，边界火车轨道都包含一条轨道路径，它连接上穿线上的选定点 x_1' 和 x_2' ，并与黑板框架一致。

5.3. **斜率实现**。 设 $L_1, \dots, L_n$ 表示 L的各个分支。为了确定每个边界环面上可实现的斜率区间，我们首先为每个 $x \in (S^1 \times I)\backslash\tau$关联一个向量。

对于点 $x \in (S^1 \times I)\backslash\tau$，选择一条竖直线段，使其起点位于第一行上方，终点为 x。定义

$$\mathbf{r}(x) = (r_1, \dots, r_n) \in \mathbb{Z}^n_{\geqslant 0},$$

其中， r_k 是这条线段与分支L_k的股相交的次数。$\mathbf{r}(x)$的值与所选竖直线段无关，并且$\mathbf{r}(x)$ 在 $(S^1 \times I)\backslash\tau$ 上局部恒定。特别地，向下越过L_k 的一股时，第 k 个坐标增加 1。

假设 CrossBrickStep （第 6 行）中的砖块位于第 t 行和第$t+1$ 行之间。假设该砖块的左右竖直边分别对应于 X 型交叉 c_{t+1} 和 c_t。对于 $1 \leqslant i \leqslant t$，令 c_i 表示第 i 行与第 $(i+1)$ 行之间的 X 型交叉。对于 $t+2 \leqslant i \leqslant m$ （其中 m是辫图中的股数），令 c_i 表示第 $(i-1)$ 行与第 i 行之间的 X 型交叉。

由于 c_{t+1} 和 c_t 分别对应于该砖块的左、右竖直边，因此 c_t 左侧的砖块与 c_{t+1}右侧的砖块相同。

对于每个 $t+1 \leqslant i \leqslant m-1$， c_{i+1} 都是在向下扩展阶段通过应用 StepBelow 或 RestartBelow确定的。无论是哪种情况， c_i 下方的砖块都与 c_{i+1}右侧的砖块相同。

对于每个 $1 \leqslant i \leqslant t-1$，要么 c_i 在向上扩展阶段通过应用 StepAbove 或 RestartAbove而被确定，要么 c_i 与 c_{i+1}都提前 StepBelow 步，于 CrossBrickStep （第6行）之前被确定。在第二种情形中，我们有 $d_{\mathrm{up}}(B, A) = 2$，且发生在应用 StepBelow 以确定 c_i之前。无论哪种情形， c_i 左侧的砖块与 c_{i+1}上方的砖块相同。

按如下方式选取点 x_0， x_1，……， $x_m \in (S^1 \times I)\backslash\tau$：

（1） x_0 位于砖块图中第一行的上方；（2）对于每个 $1 \leqslant i \leqslant t-1$， x_i 位于 c_i 左侧的砖块中；（3）对于每个 $t \leqslant i \leqslant m-1$， x_i 位于 c_i 右侧的砖块中；（4） x_m 位于砖块图中最后一行的下方。

那么，每个$\mathbf{r}(x_{i+1})$都可以通过将交叉点 c_i 处上穿线所在链环分支对应的坐标增加 1，从 $\mathbf{r}(x_i)$ 得到。

现在我们可以证明一个可实现斜率区间。

定理 5.5. 对于 L的每个链环分支 L_k， $(-\infty, 2g(L_k)-1) \cap \mathbb{Q}$ 中的每个斜率都由边界火车轨道 $B' \cap \partial\nu(L_k)$实现，其中 $g(L_k)$ 表示 L_k的亏格。

证明。 假设$\mathbf{r}(x_m)$ 的第 k 个坐标为 m_k。那么，上穿线位于 L_k 中的 TypeX 交叉数量等于 m_k。由于 L_k 是由 m_k 股正辫闭合而成，其亏格为 $g(L_k) = \frac{N_k - m_k + 1}{2}$，其中 N_k 表示图示 D 中上穿线和下穿线均位于L_k 中的交叉点数量。

上的黑板框架的斜率为 $\partial\nu(L_k)$ 为 N_k。因此，根据引理5.2和5.4，在 $B' \cap \partial\nu(L_k)$ 上存在一条斜率为

$$N_k - m_k = 2g(L_k) - 1.$$

根据引理 5.3，在 $B' \cap \partial\nu(L_k)$ 上还存在一条斜率为 ∞ 的简单闭合列车路线。这些轨道路径的并构成一个子列车轨道 $\tau' \subset B' \cap \partial\nu(L_k)$，它实现了 $(-\infty$ 中的每一个有理斜率 $2g(L_k)-1)$。

由于 B' 是余定向的（见定理 3.2），边界火车轨道 $B'\cap\partial\nu(L_k)$ 也是余定向的。由于环面 $\partial\nu(L_k)$ 是可定向的，这条边界火车轨道也可定向。根据定理 3.4，$B'\cap\partial\nu(L_k)$ 在 $\partial\nu(L_k)$ 中的补集是若干双边形的并。因此，根据定理 5.1，$(-\infty$ 中的每个斜率 $2g(L_k)-1)\cap\mathbb{Q}$，都由 $B'\cap\partial\nu(L_k)$ 实现。□

6. 结论

在本节中，我们使用 [Li03定理 2 的多环面边界版本2],，其明确表述见 [San24定理 312]和 [KR14定理 210]，来证明主定理。

定理 *6.1*（参见 [*Li*03], 定理 *2.2*）。设 M 是一个不可约且可定向的 *3*-流形，其边界是不可压缩环面 $T_1,T_2,\dots,T_n$ 的并。假设 B 是恰当嵌入于 M 中的层状分支曲面，且 $\partial M\backslash\partial B$ 是双边形的并。那么，对于任意可由轨道 ∂B 实现的多斜率 $(s_1,\dots,s_n)\in(\mathbb{Q}\cup\{\infty\})^n$，若沿 $(s_1,\dots,s_n)$ 进行德恩填充后，B 不携带流形中一个围成实心环面的环面，则存在一个由 B 完全承载的层状 $\mathcal{L}$，它位于 M 中，并与 ∂M 相交成斜率为多斜率 $(s_1,\dots,s_n)$ 的平行简单闭曲线。

现在我们证明主定理。

定理 6.2. 假设 L 是 S^3 中一个不可分正辫的闭合，具有分支 L_1、……、L_n，并且至少有一个分支不是平凡结。那么，沿满足条件 $s_i<2g(L_i)-1$ 的多斜率 $(s_1$、……、$s_n)\in\mathbb{Q}^n$ 进行德恩手术，其中 $i=1$、……、n，所得的三维流形承认余定向紧叶分叶。

证明。由于 L 是不可分且非平凡的，$S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$ 是一个不可约可定向三维流形，其边界是不可压缩环面的并。根据定理3.5，B' 是恰当嵌入于 $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$中的层状分支曲面。根据定理 3.4，$\partial\nu(L)\backslash B'$ 是双边形的并。根据定理 5.5，任何满足条件 $(s_1$、……、$s_n)\in\mathbb{Q}^n$的多斜率 $s_i<2g(L_i)-1$，对于所有 $i=1$、……、n，均由边界火车轨道$B'\cap\partial\nu(L)$实现。

根据推论 3.1，存在一条闭曲线 γ 位于 $S^3\backslash$内部$(\nu(L))$，并与 B' 正向横截，且与 B'的每个分支扇区相交。对于任意由 S 承载的 B'连通曲面 γ，该曲线会与 S 相交于非零个点，且所有交点符号均为正；因此 S 不可能是分离的。特别是，经过任意德恩填充后，由 B' 在$S^3\backslash$内部$(\nu(L))$ 承载的环面都不会成为实心环面的边界。

根据定理 6.1，存在一个层状结构 $\mathcal{L}$，位于 $S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L))$ 中，并被B'完全承载；它与 $\partial\nu(L)$ 相交于斜率为 $(s_1,..,s_n)$ 的平行简单闭曲线。由于 $\mathcal{L}$ 被 B'完全承载，我们可以将纤维化邻域 $N(B')$替换为一个更小的邻域，使其水平边界 ∂_hB' 包含在 $\mathcal{L}$中。补集 $(S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L)))\backslash\mathcal{L}$ 可分解为 $(S^3\backslash\mathrm{int}(\nu(L)))\backslash N(B')$与 $N(B')\backslash\mathcal{L}$ 的并，并沿着 $\partial_vN(B')\backslash\mathcal{L}$粘合。

根据定理 3.3，$(S^3\backslash \text{int}(\nu(L)))\backslash N(B')$ 是一个以圆盘为底的平凡开 I-丛。根据定理 3.2，$N(B')\backslash\mathcal{L}$ 是一个以带共定向曲面为底的平凡开 I-丛。此外，$\partial_v N(B')\backslash\mathcal{L}$ 的每个分支都是一个以区间为底的平凡开 I-丛。由于粘合保持余定向，$(S^3\backslash \text{int}(\nu(L)))\backslash\mathcal{L}$ 也具有以带共定向曲面为底的平凡开 I-丛结构。结合由水平曲面构成的乘积叶状结构，层状结构 $\mathcal{L}$构成了 $S^3\backslash \text{int}(\nu(L))$上的带共定向叶状结构 $\mathcal{F}$。它在 $\partial\nu(L)$ 上的限制是一个乘积叶状结构，其叶为斜率 $(s_1$、……、$s_n)$ 的平行简单闭曲线。该叶状结构还可延拓穿过斜率为 $(s_1$、……、$s_n)$ 的德恩填充，从而在填充流形上得到一个带共定向叶状结构。

由推论 3.1，存在一条闭曲线 γ，位于 $S^3\backslash$内部$(\nu(L))$，且与 B' 正向横截，并与其每个分支扇区相交 B'。根据一个标准论证可知，经过一次同痕后，γ 与 $\mathcal{F}$ 横截，且与每个叶相交。因此，该填充流形承认一个共定向紧叶状结构。□

References

[BGW13] Steven Boyer、Cameron McA Gordon 和 Liam Watson。关于 L-空间与左可序基本群。*Mathematische Annalen*，356(4):1213–1245，2013。[BK24] Kenneth L Baker 和 Marc Kegel。除一个并非辫正的结外，普查中的 L-空间结都是辫正的。*Algebraic & Geometric Topology*，24(1):569–586，2024。[Bow16] Jonathan Bowden。用接触结构逼近 C^0-叶状结构。*Geometric andFunctional Analysis*，26(5):1255–1296，2016。[GO89] David Gabai 和 Ulrich Oertel。三维流形中的本质层理。*Annals of Math-ematics*，130(1):41–73，1989。[Juh15] Andr´as Juh´asz。Heegaard Floer 同调综述。*New ideas in low dimensionaltopology*，56:237–296，2015。[KMOS07] Peter Kronheimer、Tomasz Mrowka、Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。单极子与透镜空间手术。*Annals of mathematics*，第457–546页，2007。[KR14] Tejas Kalelkar 和 Rachel Roberts。具有多个边界分支的曲面丛中的紧叶状结构。*Pacific Journal of Mathematics*，273(2):257–275，2014。[KR17] William Kazez 和 Rachel Roberts。C^0 叶状结构的逼近。*Geometry &Topology*，21(6):3601–3657，2017。[Kri20] Siddhi Krishna。紧叶状结构、正三股辫与 L-空间猜想。*Journalof Topology*，13(3):1003–1033，2020。[Kri25] Siddhi Krishna。紧叶状结构、辫正性与平凡结检测。*Advances inMathematics*，470:110233，2025。[Li02] Tao Li。三维流形中的层流分支曲面。*Geometry & Topology*，6(1):153–194，2002。[Li03] Tao Li。层流分支曲面的边界轨道图。在 *Proceedings of symposiain pure mathematics*，第71卷，第269–286页。罗得岛州普罗维登斯；美国数学学会；1998，2003。[Li24] Tao Li。Heegaard 属为二的三维流形上的紧叶状结构。*Duke MathematicalJournal*，173(8)，2024年6月。[LR14] Tao Li 和 Rachel Roberts。结补空间中的紧叶状结构。*Pacific Journal ofMathematics*，269(1):149–168，2014。[Lyu25] Qingfeng Lyu。(1，1) 非 L 空间结是持久叶状的。*arXiv preprintarXiv:2510.11533*，2025。[Nak07] Yasuharu Nakae。环面结补空间的紧叶状结构。*Journal of Mathematical Sciences-University of Tokyo*，14(1):31–68，2007。

[Nie21] Zipei Nie。 $(1,\ 1)$ L-空间结的显式描述，以及非左可序的手术。 *Communications of Huawei Research*，VOL-001:212–219，2021。[OS04] Peter Ozsv´ath 和 Zolt´an Szab´o。全纯圆盘与亏格界。 *Geometry &Topology*，8(1):311–334，2004。[Rob00] Rachel Roberts。穿孔曲面丛中的紧叶状结构，I。 *Proceedings of the London Mathematical Society*，82(3):747–768，2000。[Rob01] Rachel Roberts。穿孔曲面丛中的紧叶状结构，II。 *Proceedings of theLondon Mathematical Society*，83(2):443–471，2001。[RR17] Jacob Rasmussen 和 Sarah Dean Rasmussen。Floer简单流形与 L 空间区间。 *Advances in Mathematics*，322:738–805，2017。[San24] Diego Santoro。L-空间、紧叶状结构与怀特海德链环。 *Algebraic & Geomet-ric Topology*，24(6):3455–3502，2024。[Var21] Konstantinos Varvarezos。 $(-2,\ 3,\ 7)$-椒盐纽结的表示与 Dehn手术的可序性。 *Topology and its Applications*，294:107654，2021。

Department of Mathematics, University of Illinois at Urbana–Champaign, Urbana,IL 61801, USA*Email address*: znie@illinois.edu