arXiv:2602.17920v1 [math.SP] 20 Feb 2026

图的临界等分划分的稳定性

CONNOR MENZEL

摘要。我们研究有限简单加权图的划分，这些划分使谱能量泛函达到最小值；该泛函定义为各连通分量上第一特征值的最大值。这些划分是相对于一个参数取最小值的，我们将该参数视为对固定组合划分的小扰动。已有研究表明，在此框架下，当且仅当划分是二部的，能量泛函的临界点才对应于图拉普拉斯算子的非退化特征向量。本文通过构造一种称为划分拉普拉斯算子的修改版图拉普拉斯算子，将这一结果推广到不一定是二部图的划分。主要结果表明，谱能量泛函的临界点对应于划分拉普拉斯算子非退化特征向量的节点划分。此外，每个临界点的稳定性完全由相应特征向量的节点亏格决定。我们还考虑了更一般的符号拉普拉斯算子，并证明 Courant-锐利拉普拉斯特征向量会诱导出全局最小划分。

1. 引言

给定有界区域上的拉普拉斯矩阵特征函数，或有限离散图上的图拉普拉斯算子特征向量，研究其零点集（通常称为节点集）的性质是很自然的。Chladni 最早系统地研究了振动薄板上的节点图样 [Chl87]。随后，Courant 将 Sturm 的早期工作 [Stu09] 推广到高于一维的情形，证明了二阶自伴微分算子的第 n个特征函数会将区域划分为不超过 n 个连通分支，且特征函数在每个分支上符号恒定 [CH09]。这些分支称为节点域。

对特征函数的节点域进行计数，带来了许多令人振奋的结果。节点域计数与量子混沌有关 [BGS02; BS02] ，并且越来越多的研究提出猜想：节点域计数的信息或可用于区分等谱区域 [GKS06; GSS05; BKP07] 或图 [BOS08]。节点域计数还与谱能量泛函的极小性存在深刻联系[HHT06; BCCKM24; BCCM22; BKS12]。本文主要关注这种联系在离散情形下的表现。关于特征函数节点性质的更全面综述，请参阅 [JS17]。

本文关注有限图上的图拉普拉斯算子的特征向量。设$G = (V, E, w)$为一个有限连通加权图。我们定义邻接矩阵$A_{ij} = w_{ij}$，其中 $w_{ij} = 0$ 对所有 $(i, j) \notin E$ 均成立，并且 $A_{ii} = 0$ 对所有 $i \in V$均成立。度矩阵 D 是由 $D_{ii} = \sum_{j\sim i} w_{ij}$给出的对角矩阵，其中 $j \sim i$ 表示 $(i, j) \in E$。接着，我们将图拉普拉斯算子 L 定义为

$$L = D - A.$$

我们将 $\mathbb{R}^{|V|}$ 中的向量与函数 $u : V \to \mathbb{R}$ 对应起来，图拉普拉斯算子作用于 u 的方式为

$$(Lu)_i = \sum_{j\sim i} w_{ij}(u_i - u_j),$$

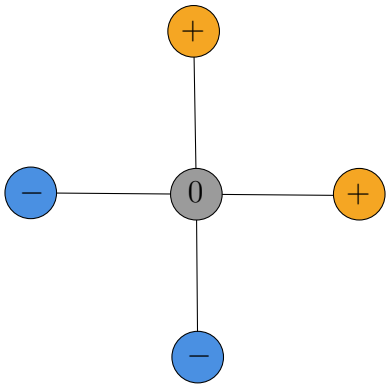

图1. 星形图（有5个顶点）上对应第二特征值的特征向量的节点图。该特征向量有4个强节点域，但只有两个弱节点域。

其中，我们采用简写 $u_i := u(i)$。或者，拉普拉斯矩阵由二次型生成

$$\langle u, Lu\rangle = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}(u_i - u_j)^2.$$

拉普拉斯矩阵是对称且半正定的，因此具有非负实特征值，我们按照重数重复列出这些特征值：$0 = \lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots \le \lambda_{|V|}$。

给定一个对应于特征值 λ_n的特征向量 $\psi^{(n)}$ ，强节点域 是 G 的一个极大连通子图，在该子图上 $\psi^{(n)}$ 具有恒定的（非零）符号。 $\psi^{(n)}$ 的弱节点域 是 G 的一个极大连通子图 H ，在该子图上，对于 H顶点集中的所有 i ， $\psi_i^{(n)} \ge 0$ （或$\psi_i^{(n)} \le 0$）成立。请参见图1，其中的示例展示了这两个定义之间的区别。

本文中，我们只考虑强节点域。令 $\nu(\psi^{(n)})$ 表示特征向量 $\psi^{(n)}$的强节点域数量。Davies、Gladwell、Leydold 和 Stadler [BGLS01] 证明了 Courant节点域定理的离散版本：若 $\psi^{(n)}$ 是对应于重数为 r的特征值 λ_n 的一个特征向量，则

$$\nu(\psi^{(n)}) \le n + r - 1. \tag{1}$$

在 λ_n 为单特征值的特殊情形下，我们得到更常见的节点域定理，即 $\nu(\psi^{(n)}) \le n$。我们只考虑单特征值，因此定义节点亏格 $\delta(\psi^{(n)}) = n - \nu(\psi^{(n)})$。由 (1) 可知，节点亏格始终非负。

图拉普拉斯特征向量的节点域与图划分相对于谱能量泛函的临界性之间存在深刻联系，该联系最早由 Berkolaiko、Raz 和 Smilansky [BRS12]确立。更准确地说，令 ν-划分 $P = \{G_k\}_{k=1}^{\nu}$ 为将 G分解为 ν 个互不相交、连通的诱导子图。我们考虑 P 的小扰动，它们以某种参数 α 为自变量并且光滑；具体定义将在第 3 节给出。接着，令 $\lambda_1(G_k, \alpha)$ 表示 G_k上的第一特征值，它通常是 α的光滑函数。定义作用于参数依赖划分的谱泛函 Λ 如下：

$$\Lambda(P, \alpha) = \max_k \lambda_1(G_k, \alpha).$$

在 [BRS12] 中，作者证明，一旦将 Λ限制在参数依赖划分的某个光滑子流形上，其关于 α 的临界点对应于

非退化图拉普拉斯特征向量的节点划分，当且仅当底层划分 P 是二部的。此外，任意临界点的莫尔斯指标等于对应特征向量的节点亏格。回顾一下，莫尔斯指标是临界点处 Λ 的海森矩阵的负特征值个数，因此决定了该临界点的稳定性。

上述工作关键依赖于划分 P 的二分结构，因为图拉普拉斯特征向量的每个节点划分都必须是二部的；二分结构由特征向量在其节点域上的符号决定。我们将这项工作推广，以研究当底层划分不一定是二部划分时， Λ相对于 α 的临界点。由于我们无法将非二分划分与图拉普拉斯特征向量的节点划分联系起来，因此我们考虑符号图拉普拉斯算子的特征向量，并将其称为划分拉普拉斯算子。

借助这一框架，我们可以给出主要结果的一个宽泛表述，尽管精确表述所需的术语要到第 3 节才会介绍:

定理 1.1。给定图 G的一个划分 P，将其划分为 ν 个连通子图$\{G_k\}_{k=1}^{\nu}$，考虑由 α参数化的 P 的局部扰动。定义

$$\Lambda(P,\alpha) = \max_{k=1,\dots,\nu} \lambda_1(G_k,\alpha).$$

在参数空间的一个光滑子流形上，映射 $\alpha \mapsto \Lambda$（P,α）的临界点与具有节点划分 P 的划分拉普拉斯算子 $L^{\partial P}$ 的特征向量一一对应。此外，任意临界点的莫尔斯指标等于对应特征向量的节点亏格。

这一结果为离散图上的局部最小划分提供了一种刻画，也提供了一种计算某些带符号拉普拉斯矩阵特征向量节点亏格的显式方法。图划分在数据科学的聚类中有应用 [OWO14; OR17]。这一结果也可视为 [BCCKM24 定理 15] 的离散类比。作为进一步的背景，我们现在概述一些关于有界区域极小划分的结果 $\mathbb{R}^2$。

1.1. 谱最小划分。这项关于离散图的工作与有界区域的谱最小划分密切相关 $\mathbb{R}^2$，而第 2.3 节中划分拉普拉斯算子的定义则受连续情形下划分拉普拉斯算子的启发。关于离散与连续划分拉普拉斯算子之间联系的更详细说明，请参见附录 A。这里我们概述谱最小划分理论中一些最重要的发展。

考虑有界区域 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$，并令 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \cdots$ 表示 Ω 上狄利克雷拉普拉斯算子的特征值，按重数重复计数。给定特征函数 ψ_k 及其对应的特征值 λ_k，我们将 ψ_k 的节点域 定义为集合$\{x \in \Omega : \psi_k(x) \neq 0\}$ 的一个连通分支，并用 $\nu(\psi_k)$表示 ψ_k 的节点域数量。

Courant节点域定理 [CH09; Cha84] 指出:

$$\nu(\psi_k) \le k.$$

也就是说，节点域的数量不超过相应特征值的指标。我们还可以定义节点亏格 $\delta(\psi_k) = k - \nu(\psi_k)$，它必然是非负的。如果 $\nu(\psi_k) = k$ （或者等价地， $\delta(\psi_k) = 0$），我们就称 ψ_k 为*Courant*-锐利。

已证明，对于 $n \geq 2$ ，任意区域至多有有限多个 Courant-锐利特征函数 [Ple56]。

Helffer、Hoffmann-Hostenhof 和 Terracini 首先对一个相关课题进行了系统研究，即谱最小划分。给定将 Ω 划分 P 为 ν 互不相交子区域$\{\Omega_j\}_{j=1}^{\nu}$的方式，令 $\lambda_1(\Omega_j)$ 表示 Ω_j上狄利克雷拉普拉斯算子的第一特征值。我们定义能量泛函

$$\Lambda(P) = \max_{j=1,\dots,\nu} \lambda_1(\Omega_j)$$

并将 Ω 的一个谱最小 N划分定义为所有 N-划分中使 Λ 最小的划分。谱最小划分自然地出现在反应扩散系统强竞争极限下空间分离的研究中 [CTV03; CTV05]，也出现在自由边界变分问题的研究中 [ACF84]。我们关注的主要问题是刻画给定区域 Ω 的所有极小划分。在 [HHT06], 中，作者证明，一个极小划分对应于某个 Courant-尖锐特征函数的节点划分，当且仅当该划分是二部的。

此后，这一结果得到了极大的推广。若将讨论限制在适当的划分流形上，映射 $P \mapsto \Lambda(P)$ 便成为光滑映射 [BKS12]。由此可知，二部划分 P 是 Λ 的临界点，当且仅当它是某个拉普拉斯矩阵特征函数的节点划分[BCCM22; BCCKM24]。此外， Λ在该临界点处的莫尔斯指标，恰好由相应特征函数的节点亏格给出。

上述分析也适用于非二分划分的情形，不过需要更加谨慎。给定一个划分 P，可定义一个修正后的拉普拉斯矩阵 $-\Delta^{\partial P}$，称为划分拉普拉斯算子，它作用于满足划分边界上反连续边界条件的函数。划分 P （不一定是二部的）是 Λ的临界点，当且仅当它是某个具有节点划分 P的 $-\Delta^{\partial P}$ 特征函数的节点划分。若 P 是二部的，则 $-\Delta^{\partial P}$ 与 $-\Delta$酉等价，因此，划分拉普拉斯算子使我们能够同时研究二部和非二部划分。关于这一方法的更多细节，参见 [BCCM22],[BCCKM24] 以及 [BCCM25] 。

本文旨在刻画离散图上的谱最小划分，但在理解度量图的划分方面也已取得实质性进展 [KKLM20；BBRS12] ，事实上， [BBRS12] 中的工作推动了上文所讨论的关于区域的部分结果。

1.2. 概述。 在第2节中，我们从图论的一些背景与记号入手，引入符号图和符号拉普拉斯算子的概念，它们是构造 $L^{\partial P}$ 并证明主定理最核心的工具。第3节进而发展参数依赖划分的概念，从而提供一种光滑扰动离散图划分的方法。第4节给出主定理的证明。在第5节中，我们作出推广，从而在不将划分限制于任何光滑子流形的情况下，得到划分能量的下界。作为直接推论，我们证明Courant 尖锐拉普拉斯特征向量诱导全局最小划分。

1.3. 致谢。 我们感谢其论文导师 Y. Canzani 和 J. Marzuola 提供的建议，同时也感谢 G. Berkolaiko；他热心建议，若引入符号拉普拉斯矩阵，研究结果将更加完善。作者感谢 NSF CAREER 项目资助 DMS-2045494、NSF FRG 项目资助 DMS-2152289、NSF 应用数学项目资助 DMS-2307384 以及 NSF RTG 项目资助 DMS-2135998 的支持。

2. 定义与背景

图 $G=(V,\ E)$ 是由顶点 V 以及连接这些顶点的一组边 E 组成的集合。如果 $i,\ j\in V$通过某条边 e相连，我们记作 $e=(i,\ j)\in E$，通常使用记号 $i\sim j$ 表示 $(i,\ j)\in E$。如果任意两个顶点之间至多有一条边，且不存在从某个顶点连接到其自身的边，则称图为简单图。如果图 G 不是简单图，则称 G 为多重图。除非另有说明，所有图均为有限、简单且连通的。若存在一个函数 $\chi:\ V\to\{-1,\ +1\}$，使得对所有 $(i,\ j)\in E$，则称图 G 为二部的。若图 G 中不存在圈，则称其为树。

我们将考虑加权图 $G=(V,E,w)$，其中 $w:\ E\to(0,\infty)$ 是边权函数。我们假设 w 严格为正，但在方便时，也可以转而考虑$w:\ V\times V\to[0,\infty)$，并附加约束：$w(i,j)\neq 0$ 当且仅当 $(i,j)\in E$。我们还将使用简写 $w_{ij}:=w(i,j)$。

2.1. 符号图。 我们在证明主定理时将使用的主要工具之一是符号图理论。符号图最早由 Harary [Har53] 引入并研究，此后推动了图论多个子领域的发展，例如拟阵理论 [Zas82]以及 Cheeger 常数的研究 [AL20]。符号拉普拉斯算子已被用于构造 Ramanujan 图 [BL06; MSS15a]，后来还为 Kadison-Singer 猜想的证明做出了贡献 [MSS15b]。关于符号图的更完整讨论，见 [Zas81]。

研究图划分时，自然会需要符号图；我们将看到，划分拉普拉斯算子 $L^{\partial P}$ 其实就是一个图上的符号拉普拉斯矩阵，其符号在划分边界上为负。图划分拉普拉斯算子也可以看作是连续分割拉普拉斯算子 $-\Delta^{\partial P}$ 的离散化。详细说明请参阅附录 A。

定义 2.1. 符号图 $G=(G,\sigma)$ 由一个图 $G=(V,E,w)$（称为底层图）和一个函数 $\sigma:\ E\to\{-1,+1\}$ 组成，该函数称为 G 的符号。

也可以将符号图定义为允许边权重为负的加权图，但在我们的应用中，始终假设权重为正会更方便。我们通常将符号图记作 (G,σ)，并沿用前面的假设，即 G 是有限、简单、连通且加权的。

定义 2.2。 函数 $\tau:\ V\to\{-1,+1\}$ 称为切换函数。给定一个符号图 (G,σ)，我们使用 τ 将符号从 σ 切换为由下式给出的 σ^{τ}

$$\sigma^{\tau}_{ij}=\tau_i\sigma_{ij}\tau_j.$$

若存在某个切换函数 τ 使得 $\sigma^{\tau}=\sigma'$，则称 G 上的两个符号 σ 和 σ' 切换等价。

通过 τ 对 σ 进行切换，其效果只是反转所有跨越τ 符号变化处的边 σ 上的符号。切换等价的示意图见图2。

我们为 (G,σ) 中的每条路径 $p=(e_1,\dots,e_n)$ 赋予一个量 $\sigma(p)$，称为 p 的符号，定义如下

$$\sigma(p)=\sigma_{e_1}\cdots\sigma_{e_n}.$$

定义 2.3。 符号图 (G,σ) 是平衡的，当且仅当每个圈的符号均为正。

Zaslavsky 指出，平衡的符号图与具有严格正符号的图之间存在联系 [Zas82]:

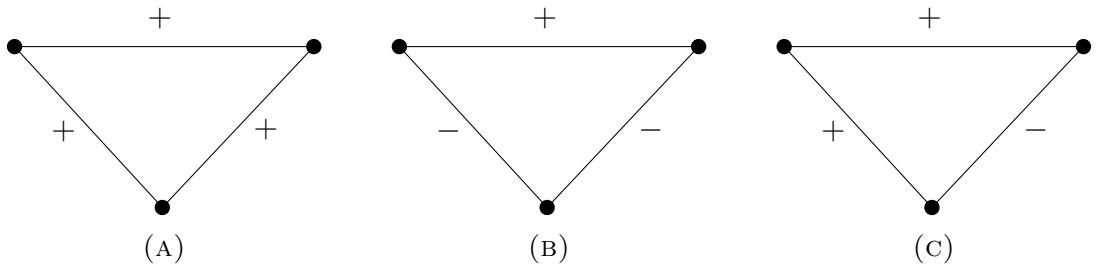

图2. 具有三种不同符号的三环图 C_3。（A）和（B）切换等价，但（C）与两者都不切换等价，因为（C）中圈的符号为负。

引理 2.1 ([Zas82, 推论 3。3])。 符号图(G, σ) 是平衡的，当且仅当 σ 与全正符号切换等价。

Harary [Har53] 还证明了平衡符号图的一种刻画，指出平衡图可以看作具有某种二分结构。

引理 2.2 ([Har53，定理 3])。 符号图(G, σ) 是平衡的，当且仅当存在对 V 的划分，将其分为两个互不相交的子集 V_1 和 V_2，使得连接 V_1和 V_2 的任意边都具有负符号，而其他边都具有正符号。

任意符号图（G， σ）都有一个与之对应的符号图拉普拉斯矩阵。若定义符号邻接矩阵$(A^\sigma)_{ij} = \sigma_{ij} w_{ij}$和对角度矩阵 $D_{ii} = \sum_{j\sim i} w_{ij}$，~则将 G 上的符号图拉普拉斯算子定义为

$$L^\sigma = D - A^\sigma.$$

我们也可以将 L^σ 视为由二次型生成

$$\langle u, L^\sigma u\rangle = \sum_{(i,j)\in E} w_{ij}(u_i - \sigma_{ij} u_j)^2. \tag{2}$$

显然， L^σ 是对称且半正定的。特别地，当$\sigma \equiv 1$时，我们得到 G上的图拉普拉斯算子，记作 L。我们将 L^σ 的特征值记为$\lambda_1(\sigma) \leq \cdots \leq \lambda_{|V|}(\sigma)$, 并按重数重复计数，其对应特征向量为$\{\psi^{(k)}\}_{k=1}^{|V|}$。

给定一个切换函数 τ，令 $(D^\tau)_{ii} = \tau_i$。直接计算可得 $L^{\sigma^\tau} = D^\tau L^\sigma D^\tau$，因此，若 σ 与 σ' 切换等价，则 $L^{\sigma'}$ 与 L^σ 酉等价。特别地，它们具有相同的谱；给定 L^σ 的一个特征向量 ψ，可知 $\tau\psi$ 是 $L^{\sigma'}$ 的一个特征向量，且具有相同的特征值。

备注 2.1。 符号拉普拉斯矩阵是更一般的磁拉普拉斯算子的一个特例，后者最早由 [LL92], 引入，其中切换等价被规范等价所取代。换言之，任意两个切换等价的符号拉普拉斯矩阵实际上都是规范等价的。磁拉普拉斯算子，以及更一般的离散磁薛定谔算子，也得到了深入研究；详细论述请参见 [ABG25] 。Berkolaiko 和 Colin de Verdi`ere 使用离散磁薛定谔算子证明了节点域数量的界 [Ber08；Ver13]。

2.2. **符号图上的节点域**。 设 $(G,\ \sigma)$ 是一个符号图，并假设$u:\ V\to\mathbb{R}$ 对所有 $i\in V$ 都满足 $u_i\neq 0$ 。

定义 2.4。 $\subseteq E$ 的节点集 N u 定义为

$$\mathcal{N}=\{(i,j)\in E: u_i\sigma_{ij}u_j<0\}.$$

定义 $G'=(V,E\setminus N)$。 G' 的每个连通分支称为 u的节点域， u 的节点域数量记作 $\nu(u)$。

在 $\sigma\equiv 1$的情况下， u 的节点域是 u具有恒定符号的连通诱导子图。这与无符号图中节点域的通常概念一致。注意， $u_i\neq 0$ 这一假设使我们只需考虑引言中定义的强节点域。从现在起，我们将把强节点域简称为节点域。

我们只关注 (G,σ) 上 L^σ 的特征向量的节点域。为了使定义 2.4 在此语境下有意义，我们仅考虑 L^σ的非退化特征向量。

定义 2.5。 如果对于所有 $i\in V$， ψ都对应于一个单特征值，则 L^σ 的特征向量 ψ 是非退化的。

本文其余部分所考虑的所有特征向量均假设为非退化的。相对于边权重的扰动，这一性质是一般性的。

需要注意的是，节点域在切换变换下保持不变。

引理 2.3 ([GLZ23，定理 3。10])。 设 ψ 是 L^σ 在(G,σ) 上的一个非退化特征向量，并设 τ 是一个切换函数。那么， G 的一个诱导子图是 ψ在 (G,σ)上的节点域，当且仅当它是 $\tau\psi$在 (G,σ^τ)上的节点域。

Mohammadian 还为对称矩阵 [Moh16]的特征向量证明了 Courant节点域定理的一个版本。我们仅将该结果应用于符号拉普拉斯矩阵。Ge 和 Liu [GLZ23], 也使用与本文相同的符号图框架证明了节点域定理。

定理 2.1 ([Moh16，推论 3])。 若 ψ 是 L^σ 的非退化特征向量，且对应的特征值为 $\lambda_n(\sigma)$，则

$$\nu(\psi)\leq n.$$

给定 L^σ 的非退化特征向量 ψ ，其特征值为 $\lambda_n(\sigma)$，我们将节点亏格 $\delta(\psi)$ 定义为 $\delta(\psi)=n-\nu(\psi)$。 定理 2.1 立即推出 $\delta(\psi)\geq 0$。

2.3. **图划分与划分拉普拉斯算子**。 给定一个图 G，我们关注 G的划分，并将其视为把 G 分解为互不相交的连通分支。子图 G' 是 G 的一个图，其顶点集为 $V'\subseteq V$ ，边集为$E'\subseteq E$。生成子图 G 是 G 的一个子图，且具有相同的顶点集。

定义 2.6。 ν-划分 $P of\ G=(V,E,w)$ 是 G 的生成子图，具有 ν个连通分支 $\{G_k=(V_k,E_k,w)\}_{k=1}^{\nu}$ ，并满足：对于任意 k，若 $i,j\in V_k$ 且 $(i,j)\in E$，则 $(i,j)\in E_k$。

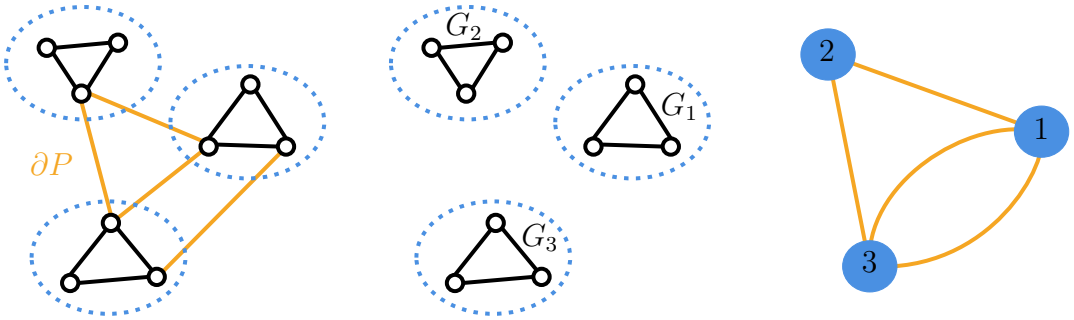

图 3. 一个简单图 G，其中所需的连通分支 G_k 以圆圈标出，属于 3-划分 P；其所得的 3-划分 P以及相应的多重图P^G。

换句话说，为了构造 P，我们从 G 中移除的边仅限于 P中目标连通分支之间的边。给定 G 的一个 ν-划分 P，我们用 ∂P 表示划分边界，即从 G 中移除以构造 P的所有边的集合。

对于每个划分 P，我们关联一个多重图 P^G，其顶点 ν 对应于 P的连通分支；当且仅当存在 P中不同的连通分支 G_k和 G_ℓ，使得 $i \in G_k$、 $j \in G_\ell$，且 $\in E$时，$(i,\ j) \in E(P^G)$。注意， P^G的边与划分边界 ∂P一一对应。若多重图 P^G 是二部图，我们就称划分 P为二部划分；若其关联的 P^G 是一棵树，则称 P为树划分。图 3 展示了划分 P及其关联多重图 P^G的示例。

符号拉普拉斯矩阵 L^σ 的每个特征向量都会诱导出一个称为节点划分的划分，其定义方式是令 $\partial P = \mathcal{N}$，其中 $\mathcal{N}$ 是 ψ 的节点集，如定义 2.4 所述。在本文余下部分，我们将频繁提及节点集。

给定一个划分 P，我们在 G 上定义一个符号 $\sigma^{\partial P}$，如下：

$$\sigma_{ij}^{\partial P} = \begin{cases} -1, & (i,j) \in \partial P \\ 1, & (i,j) \in E \setminus \partial P. \end{cases}$$

定义 2.7. $L^{\sigma^{\partial P}}$上的符号拉普拉斯矩阵称为划分拉普拉斯算子，为了记号简便，我们将其记作 $L^{\partial P}$。

由（2）可得

$$\langle u, L^{\partial P} u \rangle = \sum_{(i,j) \notin \partial P} w_{ij}(u_i - u_j)^2 + \sum_{(i,j) \in \partial P} w_{ij}(u_i + u_j)^2.$$

当 P 是二部图时，直接应用引理 2.2，再应用引理 2.1，可知 $\sigma^{\partial P}$ 与 $\sigma \equiv 1$切换等价，因此 $L^{\partial P}$ 与 G上的拉普拉斯矩阵 L酉等价。

假设 ψ 是 L 的一个特征向量，并令 P 为其对应的节点划分。注意， P 必然是二部的，因为 ψ 在每个节点域上都必须具有恒定符号。定义切换函数 $\tau\colon V \to \{-1, +1\}$为 $\tau_i = \operatorname{sgn}(\psi_i)$。根据构造， τ 恰好在 ∂P上发生符号变化，因此 τ将 $\sigma \equiv 1$ 切换为 $\sigma^\tau = \sigma^{\partial P}$。由此可知， $\tau\psi$是 $L^{\partial P}$ 的一个处处为正的特征向量。

同样，若给定一个非二分划分 P，注意到任意 $(i,\ j) \in \partial P$属于特征向量 ψ 的节点集，当且仅当 $\psi_i\psi_j > 0$。因此，若 ψ 处处为正，

它必定具有节点划分 P。这是将非二分划分与划分拉普拉斯特征向量的节点划分联系起来的关键事实。

3. 参数依赖划分

为了陈述并证明定理 1.1，我们需要发展一些技术，以便研究图划分的光滑扰动。这些方法由[BRS12]提出，但需要稍作调整，以适用于划分拉普拉斯算子。为求完整起见，我们在此完整给出论证。

设 P 是 ν的一个划分， $L^{\partial P}$ 是定义于第 2.3 节中的划分拉普拉斯算子。本文余下部分中，该划分 P 固定不变，我们只考虑 P 的小扰动，其含义将在本节中定义。

3.1. 单边移除。 假设 ψ 是 $L^{\partial P}$的一个非退化特征向量，对应特征值 λ_n，且$(i, j) \in \partial P$。我们将从图中移除(i, j)，但要探究如何适当地扰动划分拉普拉斯算子，使得 ψ 仍为特征向量。定义$q_{ij} = \psi_j/\psi_i$，并令 B_{ij} 为一个除以下位置外均为零的 $|V| \times |V|$ 矩阵

$$(B_{ij})_{ii} = q_{ij} \qquad (B_{ij})_{ij} = -1$$
$$(B_{ij})_{ji} = -1 \qquad (B_{ij})_{jj} = q_{ji}.$$

直接计算可得 $\psi \in \ker(B_{ij})$，因此 ψ 仍是 $L^{\partial P} + w_{ij}B_{ij}$ 的特征向量，且特征值不变。另请注意，用 $w_{ij}B_{ij}$ 扰动 $L^{\partial P}$，实际上会移除边（i，j），因为（$L^{\partial P} + w_{ij}B_{ij}$）$_{ij} = w_{ij} - w_{ij} = 0.$

我们可以将其推广为：允许 B_{ij} 平滑地依赖于某个参数 $\alpha \in \mathbb{R}\backslash$，以取代 q_{ij}。令 $\{0\}$

$$B_{ij}(\alpha) = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ -1 & 1/\alpha \end{pmatrix} \tag{3}$$

并定义

$$L^{\partial P}(G', \alpha) = L^{\partial P}(G) + w_{ij}B_{ij}(\alpha),$$

其中， $L^{\partial P}(G)$ 是基图 G 上的划分拉普拉斯算子， G' 则是从 G中移除（i，j）后得到的结果图。具体而言，当我们写作 $B_{ij}(\alpha)$ 时，总是取$j > i$，因此添加到顶点 j 上的势始终为 $1/\alpha$。

当 $\alpha = \psi_j/\psi_i$ 时，我们看到 $\psi \in \ker(B_{ij}(\alpha))$，因此 ψ 是 $L^{\partial P}$的特征向量。注意 $\langle u, B_{ij}(\alpha)u\rangle = \alpha(u_i - u_j/\alpha)^2,$，因此当 $\alpha > 0$ 时， $B_{ij}(\alpha)$ 为半正定；当 $\alpha < 0$时，则为负半定。无论哪种情况， $B_{ij}(\alpha)$ 都是秩一扰动。于是，我们可以利用韦尔特征值交错定理 [HJ12，推论 4.3.9]，将 $L^{\partial P}(G', \alpha)$ 的特征值界定在 $L^{\partial P}(G)$ 的相邻特征值之间。

定理 3.1 (外尔交错). 设 $\lambda_m(G', \alpha)$ 表示 $L^{\partial P}(G', \alpha)$的第 m^{th} 个特征值。若 $\alpha > 0$，则有

$$\lambda_m(G) \le \lambda_m(G', \alpha) \le \lambda_{m+1}(G).$$

若 $\alpha < 0$,

$$\lambda_{m-1}(G) \le \lambda_m(G', \alpha) \le \lambda_m(G).$$

现在我们将 $L^{\partial P}(G', \alpha)$ 的特征值曲线视为 α 的函数，即映射$\alpha \mapsto \lambda_m(G', \alpha)$。我们还用 $\psi(\alpha)$ 表示与 $\lambda_m(G', \alpha)$ 相关联的特征向量。标准的有限维扰动理论表明，每个 $\lambda_m(G', \alpha)$ 都是光滑的，但在某些孤立的代数奇点处可能除外；这些代数奇点产生于分支交叉时 [Kat95,

第 2 章。1]。换言之，如果 $\lambda_m(G',\ \alpha_0)$ 是 $L^{\partial P}(G',\ \alpha_0)$ 的单特征值，则存在一个包含 α_0 的邻域，在该邻域上 $\lambda_m(G',\ \alpha)$ 是光滑的。

以下定理表明，将 $L^{\partial P}(G',\ \alpha)$ 的特征值视为 α 的函数时，其临界点与 $L^{\partial P}$ 的非退化特征向量之间存在直接对应关系。

定理 3.2。 假设 $\lambda_m(G',\tilde{\alpha})$ 是 $L^{\partial P}(G',\tilde{\alpha})$ 的单特征值，其对应的特征向量为 $\psi(\tilde{\alpha})$。那么，在不包含零的 $\tilde{\alpha}$ 邻域内，映射 $\alpha \mapsto \lambda_m(G',\alpha)$ 的任意临界点 α^c 均满足以下条件之一：

$$\alpha^c = \frac{\psi_j(\alpha^c)}{\psi_i(\alpha^c)} \tag{4}$$

or

$$\alpha^c = -\frac{\psi_j(\alpha^c)}{\psi_i(\alpha^c)}. \tag{5}$$

若 α^c 满足(4)，则 $\psi(\alpha^c)$ 是 $L^{\partial P}(G)$ 的特征向量，其特征值为 $\lambda_m(G',\alpha^c)$，对应的指标为 n，且满足 $|m-n| \leq 1$。

反之，若 ψ 是 $L^{\partial P}(G)$ 的非退化特征向量，其特征值为 $\lambda_n(G)$，则 ψ 是 $L^{\partial P}(G',\alpha_0)$ 的特征向量，其特征值为 $\lambda_n(G)$，其中

$$\alpha_0 = \frac{\psi_j}{\psi_i},$$

对应的指标 m 满足 $|n-m| \leq 1$。如果 $\lambda_m(G',\alpha_0)$ 是$L^{\partial P}(G',\alpha_0)$的单特征值，那么 α_0 是 $\alpha \mapsto \lambda_m(G',\alpha)$的临界点。

证明。 根据标准的有限维扰动理论，若假设 $\psi(\alpha)$ 已归一化，则有

$$\lambda_m'(G',\alpha) = \langle \psi(\alpha), B_{ij}'(\alpha)\psi(\alpha)\rangle = |\psi_i(\alpha)|^2 - \frac{1}{\alpha^2}|\psi_j(\alpha)|^2,$$

因此，如果 $\lambda_m'(G',\alpha^c) = 0$，解出 α^c 可得 $(\alpha^c)^2 = |\psi_j(\alpha^c)|^2/|\psi_i(\alpha^c)|^2$。开平方后得到满足 (4) 和 (5) 的临界点。如果 α^c 满足 (4)，直接计算可知 $\psi(\alpha^c) \in \ker(B_{ij}(\alpha^c))$，因此 $\psi(\alpha^c)$ 是 $L^{\partial P}(G)$ 的特征向量，其特征值为$\lambda_m(G',\alpha^c)$。

另一方面，如果 ψ 是 $L^{\partial P}(G)$ 的非退化特征向量，同样的计算表明 ψ是 $L^{\partial P}(G',\alpha_0)$ 的特征向量，其中 $\alpha_0 = \psi_j/\psi_i$，并且只要 $\lambda_m(G',\alpha_0)$ 是单特征值，这个 α_0 就是 $\lambda_m(G',\alpha)$ 的临界点。

外尔交错表明，由 $B_{ij}(\alpha)$ 引起的扰动使 $L^{\partial P}(G)$ 与$L^{\partial P}(G',\alpha)$ 的谱相互交错，因此 $|n-m| \leq 1$其中 n是该特征值在$L^{\partial P}(G)$ 的谱中的指标。 □

暂且将 G' 视为我们的基图，并考察在加回边 (i,j) 并移除势之后， $L^{\partial P}(G',\alpha)$ 的谱如何变化。若 $\alpha > 0$，则有 $\lambda_m(G) \leq \lambda_m(G',\alpha) \leq \lambda_{m+1}(G)$。若 $\alpha^c > 0$ 是$\lambda_m(G',\alpha)$ 的临界点，定理 3.2 表明， $\lambda_m(G',\alpha^c)$ 必定是 $L^{\partial P}$ 的一个特征值。因此，我们必有 $\lambda_m(G',\alpha^c) = \lambda_m(G)$ 或 $\lambda_m(G',\alpha^c) = \lambda_{m+1}(G)$。这意味着，如果 $\lambda(G',\alpha^c)$ 是局部极小值，那么通过添加 (i,j) 从 G' 变为 G 时，特征值指标不会改变。另一方面，如果 $\lambda_m(G',\alpha^c)$ 是局部极大值，那么从 G' 变为 G 时，指标会移动 $+1$。当 $\alpha^c < 0$ 时，也可以作类似论证，此时

如果 $\lambda_m(G', \alpha^c)$ 是局部极小值，指标会移动 -1；如果 $\lambda_m(G', \alpha^c)$ 是局部极大值，指标则移动 0。至此，我们证明了以下结论。

推论 3.1. 设 $\alpha^c \neq 0$ 是 $\lambda_m(G', \alpha)$ 的临界点，并假设 $\lambda_m(G', \alpha^c)$ 是单重的，因此 $\lambda_m(G', \alpha^c)$ 是 $L^{\partial P}(G)$的特征值。令 Δm_{ij} 表示特征值在谱中的位置偏移，即从 G' 到 G，其方式是从 $L^{\partial P}(G', \alpha)$中减去 $w_{ij}B_{ij}(\alpha^c)$。若 $\alpha^c > 0$，我们有

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} +1, & \lambda_m(G', \alpha^c) \text{ is a local maximum}, \\ 0, & \lambda_m(G', \alpha^c) \text{ is a local minimum}. \end{cases} \tag{6}$$

若 $\alpha^c < 0$,

$$\Delta m_{ij} = \begin{cases} 0, & \lambda_m(G', \alpha^c) \text{ is a local maximum}, \\ -1, & \lambda_m(G', \alpha^c) \text{ is a local minimum}. \end{cases} \tag{7}$$

令 $M_{ij} = 1$，若 $\lambda_m(G', \alpha^c)$ 为局部极大值，否则令 $M_{ij} = 0$。于是，我们可以将(6)与 (7)合并，写成更简洁的

$$M_{ij} - \Delta m_{ij} = \begin{cases} 0, & \alpha^c > 0 \\ 1, & \alpha^c < 0. \end{cases} \tag{8}$$

3.2. **升级到划分**。到目前为止，我们只讨论了从 G中移除单条边的过程，但我们可以反复应用定理 3.2 中的扰动，对从 G中移除的每个 $(i, j) \in \partial P$引入一个新参数 α_{ij}。令 $\mathbb{R}^{|\partial P|}_{>0}$由 $\mathbb{R}^{|\partial P|}$中所有分量严格为正的向量组成，并令 $\alpha \in \mathbb{R}^{|\partial P|}_{>0}$对每个 $(i, j) \in \partial P$具有分量 α_{ij}。我们仅限于分量严格为正的 α，因为这些点将对应于 $L^{\partial P}$的特征向量。我们定义

$$L^{\partial P}(P, \alpha) = L^{\partial P}(G) + \sum_{(i,j)\in\partial P} w_{ij}B_{ij}(\alpha_{ij}),$$

其中 $L^{\partial P}(P, \alpha)$ 是从 G 中移除全部 ∂P 后所得的算子。我们将二元组 (P, α) 称为 G 的参数依赖划分。

由于我们已经移除了全部 ∂P，因此 $L^{\partial P}(P, \alpha)$ 具有块对角结构，每个块对应于 P 的一个连通分支。若 P 的连通分量标记为 $\{G_k\}_{k=1}^{\nu}$，则我们记

$$L^{\partial P}(P, \alpha) = \begin{pmatrix} L^{\partial P}(G_1, \alpha) & & \\ & \ddots & \\ & & L^{\partial P}(G_\nu, \alpha) \end{pmatrix}$$

其中 $L^{\partial P}(G_k, \alpha)$ 是对应于 G_k 的块。注意，$L^{\partial P}(G_k, \alpha)$ 不过是 G_k 上通常的拉普拉斯矩阵，并在 G_k 中与∂P相关联的顶点上附加了一个依赖于 α 的势。因此，每个 $L^{\partial P}(G_k, \alpha)$ 都是广义拉普拉斯算子 [BLS07，第 2] 章。

对于每个 $k = 1, \ldots, \nu$，令 $\lambda_1(G_k, \alpha)$ 表示 $L^{\partial P}(G_k, \alpha)$ 的第一特征值。根据[BLS07，推论 2.23]，，我们知道 $\lambda_1(G_k, \alpha)$ 是一个单特征值，且对应特征向量 $f(G_k, \alpha)$ 可选为在 G_k 上严格为正。我们将 $f(G_k, \alpha)$ 归一化，使得 $\sum_{i\in V_k} |f_i(G_k, \alpha)|^2 = 1$。必要时，我们将 $f(G_k, \alpha)$ 视为定义在整个 V 上的函数，并在 G的其余部分取零。

定义 3.1。 给定一个依赖于参数的 ν-划分(P, α)，我们将划分能量定义为

$$\Lambda(P, \alpha) = \max_{k=1,\dots,\nu} \lambda_1(G_k, \alpha).$$

我们称(P, α) 为等分割，当且仅当

$$\Lambda(P, \alpha) = \lambda_1(G_1, \alpha) = \cdots = \lambda_1(G_\nu, \alpha).$$

不难验证，任何局部极小的参数依赖划分（相对于 α的变化）(P, α)都必须是等分割。这意味着，为了找到极小划分，我们可以将搜索范围限制在等分割上。给定一个划分 P，定义$\mathcal{E}_P = \{\alpha \in \mathbb{R}^{|\partial P|}_{>0} : (P, \alpha)$是等分割$\}$。

我们发现， $L^{\partial P}$ 的非退化特征向量若具有节点划分 P，则必然生成等分割。

引理 3.1。 设 ψ 是 $L^{\partial P}$ 的一个非退化特征向量，其节点划分为 P，特征值为 λ_n。那么，通过设定， ψ 会诱导出一个等分割$(P, \widetilde{\alpha})$

$$\widetilde{\alpha}_{ij} = \frac{\psi_j}{\psi_i},$$

且等分能量为 $\Lambda(P, \widetilde{\alpha}) = \lambda_n$。

回顾第 2.3 节末尾讨论可知， ψ 具有节点划分 P意味着，对于所有 (i, j)， $\widetilde{\alpha}_{ij} > 0 \in \partial P$。

证明。 如此选择 $\widetilde{\alpha}$ 后，对于所有 (i, j)， ψ 都属于我们的扰动 $B_{ij}(\widetilde{\alpha}_{ij})$ 的核。因此， ψ是 $L^{\partial P}(P; \widetilde{\alpha})$ 的一个特征向量。由于 $L^{\partial P}(P; \widetilde{\alpha})$ 是块对角的，若将 $\psi^{(k)} = \psi|_{G_k}$ 以零延拓，我们便得到 $\psi^{(k)}$ 必定是 $L^{\partial P}(G_k; \widetilde{\alpha})$ 的一个特征值为 λ_n 的特征向量，如所需。此外，由于 ψ 在每个 G_k 上均为正，我们看到 $\psi^{(k)}$ 是 G_k上的基态特征向量，因此 λ_n 是第一特征值。□

4. 定理 1.1 的证明

我们的主要结果表明，对于某些划分，$\mathcal{E}_P$ 可以赋予一种光滑结构，使我们能够分析映射 $\Lambda : \mathcal{E}_P \to \mathbb{R}$ 映射 $\alpha \mapsto \Lambda(P, \alpha)$ 的临界点。在 [BRS12], 中，作者给出了 $\mathcal{E}_P$ 到 $\mathbb{R}^{|\partial P|}$ 的一个显式嵌入，而我们在此采用不同的方法，运用横截性，灵感来自 [BKS12]中的方法。

设 $\widetilde{\alpha} \in \mathcal{E}_P$。固定 $\varepsilon > 0$，使得 $B_\varepsilon(\widetilde{\alpha})$ 不与任何超平面 $\alpha_{ij} = 0$相交，并且 $\Lambda(P, \alpha)$ 在 $B_\varepsilon(\widetilde{\alpha})$ 上的变化小于 $L^{\partial P}(G)$ 的谱中不同特征值之间的最小间隔。第二个条件使我们能够将 $\alpha \mapsto \Lambda(P, \alpha)$ 限制在 $\mathcal{E}_P$ 上时视为一个光滑映射。

我们定义映射 $\Phi : B_\varepsilon(\widetilde{\alpha}) \to \mathbb{R}^\nu$ 如下：

$$\Phi(\alpha) = (\lambda_1(G_1, \alpha), \dots, \lambda_1(G_\nu, \alpha)). \tag{9}$$

显然， Φ 是光滑的，因为每个特征值 $\lambda_1(G_k, \alpha)$ 都是单重的。令 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^\nu$ 为对角线

$$\Delta = \{(\lambda, \lambda, \dots, \lambda) \in \mathbb{R}^\nu : \lambda \in \mathbb{R}\} = \operatorname{span}\{(1, 1, \dots, 1)\}.$$

我们用 $T_x\mathbb{R}^\nu$ 表示 $\mathbb{R}^\nu$ 在 x处的切空间，并用 $T_x\Delta$表示 Δ 在 x处的切空间。注意， $T_x\Delta$ 是一维的，且 $T_x\Delta = \Delta$。我们还令 $d\Phi_x : T_x\mathbb{R}^{|\partial P|} \to T_{\Phi(x)}\mathbb{R}^\nu$表示 Φ 在 x处的微分，并将其等同于一个 $\nu \times |\partial P|$ 矩阵。还要注意，$\Phi^{-1}(\Delta) = \mathcal{E}_P \cap B_\varepsilon(\widetilde{\alpha})$.

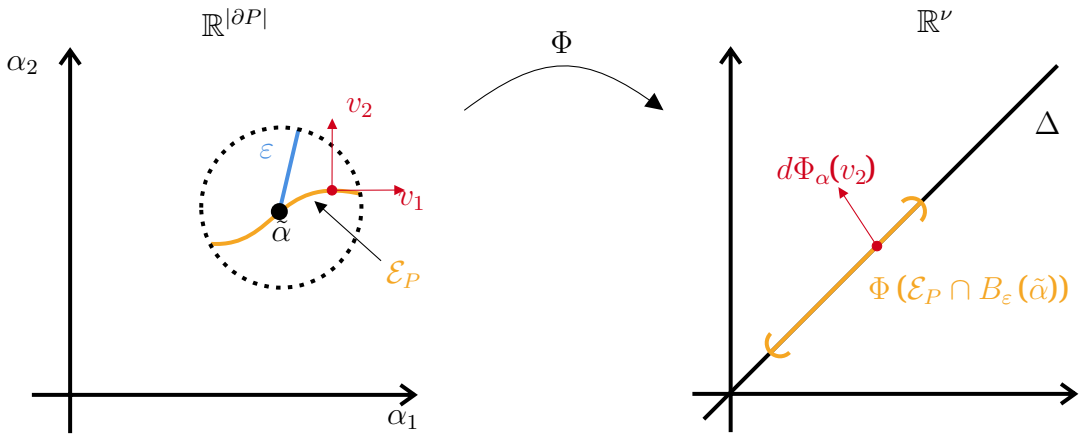

图 4. 关于 $|\partial P| = \nu = 2$ 的横截性论证示意图。矩阵 $d\Phi_\alpha$ 在每个 α 处未必都满秩，但关键在于， Δ 的切空间总是与 $d\Phi_\alpha$ 的像互补，从而张成整个 $\mathbb{R}^\nu$。

定义 4.1 ([Ben21，定义 8.1]). 我们称 Φ 横截于 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^\nu$，如果对任意$\alpha \in \Phi^{-1}(\Delta)$ 满足 $\Phi(\alpha) = \zeta \in \mathbb{R}^\nu$，则有

$$T_\zeta \mathbb{R}^\nu = T_\zeta \Delta + d\Phi_\alpha(T_\alpha \mathbb{R}^{|\partial P|}),$$

其中，加法表示向量加法。

当然，我们可以将 $\mathbb{R}^n$ 的切空间与其自身等同，因此一个等价条件是

$$\mathbb{R}^\nu = T_\zeta \Delta + d\Phi_\alpha(T_\alpha \mathbb{R}^{|\partial P|}) = \Delta + d\Phi_\alpha(\mathbb{R}^{|\partial P|}).$$

我们所使用的关键结果如下：

定理 4.1 ([Ben21，定理 8。2])。 若 $\Phi: B_\varepsilon(\tilde{\alpha}) \to \mathbb{R}^\nu$ 与 Δ横截，则 $\Phi^{-1}(\Delta)$是 $\mathbb{R}^{|\partial P|}$ 的光滑子流形，其余维为 $\nu - 1$。换言之，$E_P \cap B_\varepsilon(\tilde{\alpha})$ 是 $\mathbb{R}^{|\partial P|}$ 的光滑子流形，其维数为 $\eta = |\partial P| - (\nu - 1)$。

注意， $\eta = |\partial P| - (\nu - 1)$ 是多重图 P^G （定义于第 2.3 节）的第一贝蒂数（或圈秩），并且始终非负 [Hat02]。关键的是， η 也是 P^G中的独立回路数量，或者说，是从 P^G 中移除以形成树图所需的最少边数。

引理 4.1。 $\Phi: B_\varepsilon(\tilde{\alpha}) \to \mathbb{R}^\nu$ （如 (9) 中所定义）与 Δ横截。

证明。 假设 $\alpha \in \Phi^{-1}(\Delta)$。我们可以将 $d\Phi_\alpha$ 视为一个 $\nu \times |\partial P|$ 矩阵。回想$\mathbb{R}^\nu = d\Phi_\alpha(\mathbb{R}^{|\partial P|}) \oplus \ker(d\Phi_\alpha^T)$。$(d\Phi_\alpha)^T$的每一行具有如下形式

$$\left(\frac{\partial \lambda_1(G_1, \alpha)}{\partial \alpha_{ij}}, \ldots, \frac{\partial \lambda_1(G_\nu, \alpha)}{\partial \alpha_{ij}} \right) \in \mathbb{R}^\nu,$$

但这些分量中只有两个非零，因为每个 α_{ij} 只出现在包含顶点 i 和 j的分量中。像定理 3.2 的证明中那样显式计算导数，可得

$$\frac{\partial \lambda_1(G_k, \alpha)}{\partial \alpha_{ij}} = \begin{cases} |f_i(G_k, \alpha)|^2, & k = s(i) \\ -\frac{1}{\alpha_{ij}^2} |f_j(G_k, \alpha)|^2, & k = s(j) \\ 0, & \text{else}, \end{cases}$$

其中 $s\colon V \to \{1、2、\ldots\ldots、\nu\}$ 将一个顶点 i 映射到其所在子域的索引。因此，$u \in \mathbb{R}^\nu$ 属于 $(d\Phi_\alpha)^T$ 的核，当且仅当

$$|f_i(G_{s(i)},\alpha)|^2 u_{s(i)} - \frac{1}{\alpha_{ij}^2}|f_j(G_{s(j)},\alpha)|^2 u_{s(j)} = 0 \tag{10}$$

对所有 $(i,\ j) \in \partial P$。由于分割图 P^G 是连通的，核的维数至多为一。更明确地说，若 $u \in \ker(d\Phi_\alpha^T)$ 且 $u_k \neq 0$，则由 (10) 可知，对于所有满足 ∂P 中存在一条边连接 G_k 与 G_ℓ 的 ℓ，u_ℓ 都唯一确定。由于多重图 P^G 是连通的，迭代地继续这一过程即可唯一确定所有 u。

若 $\ker(d\Phi_\alpha^T) = 0$，则结论成立，因为这意味着 $d\Phi_\alpha$ 的列空间是整个 $\mathbb{R}^\nu$。现在假设 $\ker(d\Phi_\alpha^T)$ 由某个 $u \in \mathbb{R}^\nu$ 张成。那么根据 (10)，u 的所有分量必须具有相同的符号。但这样一来，u 就不可能与张成 Δ 的 $(1,\ 1,\ \ldots\ldots,\ 1) \in \mathbb{R}^\nu$ 正交。因此，Δ 不包含于 $d\Phi_\alpha(\mathbb{R}^{|\partial P|})$，所以得到 $\mathbb{R}^\nu = \Delta + d\Phi_\alpha(\mathbb{R}^{|\partial P|})$，如所求。□

我们现在终于可以陈述并证明我们的主要结果。需要考虑两种情形：$\eta = 0$ 与 $\eta > 0$。当 $\eta = 0$ 时，P 必然是一个树划分。Berkolaiko、Raz 和 Smilansky 证明，任一树等分划分都是唯一的，且必定对应于某个 Courant-锐拉普拉斯特征向量的节点划分 [BKS12，定理 4.3]。任一树划分都是二部的，因此它也必定是划分拉普拉斯算子的某个 Courant-尖锐特征向量的节点划分 $L^{\partial P}$（利用第 2.3 节所述的酉等价）。由此我们立即得到如下结论：

定理 4.2. 设 $(P,\tilde{\alpha})$ 为一个 ν-等分割，且满足 $\eta = |\partial P| - (\nu - 1) = 0$。则 $(P,\tilde{\alpha})$ 是关于 α 的唯一等分割，且 P 是 $L^{\partial P}$ 的一个 *Courant*-尖锐特征向量的节点划分，其特征值为 $\Lambda(P,\tilde{\alpha})$。

这里的主要新进展是，我们可以使用划分拉普拉斯算子，在 [BKS12 定理 4.4] 中去掉二部图假设。

定理 4.3。设 $(P,\tilde{\alpha})$ 是一个 ν-等分割，且对所有 $e \in \partial P$ 都有 $\tilde{\alpha}_e > 0$，并假设 $\eta = |\partial P| - (\nu - 1) > 0$。那么，在 $\tilde{\alpha}$ 的一个邻域内，$\boldsymbol{E}_P$ 构成 $\mathbb{R}^{|\partial P|}$ 中的一个光滑 η 维子流形。此外，当且仅当 α 对应于 $L^{\partial P}(G)$ 的一个非退化特征向量 ψ，且其节点划分为 P、特征值为 $\Lambda(P,\alpha)$ 时，α 才是 $\boldsymbol{E}_P$ 上的一个临界点。此外，

$$Mor(\Lambda(P,\alpha)) = \delta(\psi),$$

其中 $Mor(\Lambda(P,\alpha))$ 是该临界点的莫尔斯指标，而 $\delta(\psi)$ 是 ψ 作为 $L^{\partial P}(G)$ 的特征向量时的节点亏格。

换言之，Λ 的任意临界点的稳定性，完全由 $L^{\partial P}(G)$ 对应的非退化特征向量的节点亏格决定。特别地，这说明一个等分割是局部极小的，当且仅当它是 $L^{\partial P}(G)$ 的某个 Courant-锐利特征向量的节点划分。

证明。由于 $\Phi\colon B_\varepsilon(\tilde{\alpha}) \to \mathbb{R}^\nu$ 与对角线 Δ 横截，因此 $\Phi^{-1}(\Delta)$ 是 $B_\varepsilon(\tilde{\alpha})$ 的一个光滑子流形，其维数为 $|\partial P| - (\nu - 1)$，根据假设该维数严格为正。回想 $\Phi^{-1}(\Delta) = \mathcal{E}_P \cap B_\varepsilon(\tilde{\alpha})$，由此可知，$\mathcal{E}_P$ 在 $\tilde{\alpha}$ 的一个邻域内是 $\mathbb{R}^{|\partial P|}$ 的光滑子流形。

假设映射 $\alpha \mapsto \Lambda(P,\alpha)$ 在 $\tilde{\alpha}$ 的 $\mathcal{E}_P$ 邻域内定义，且有临界点 α^c。我们将使用拉格朗日乘子法，考察映射的临界点

$\alpha \mapsto \lambda_1(G_1, \alpha)$，并满足约束条件 $\nu - 1$

$$\lambda_1(G_1, \alpha) = \cdots = \lambda_1(G_\nu, \alpha).$$

令$\{\zeta_k\}_{k=2}^{\nu}$ 表示我们的拉格朗日乘子，并将我们的拉格朗日函数定义为

$$\mathcal{L}(\alpha, \zeta) = \lambda_1(G_1, \alpha) + \sum_{k=2}^{\nu} \zeta_k(\lambda_1(G_k, \alpha) - \lambda_1(G_1, \alpha)).$$

或者　　我们可以将对应于同一区域的所有特征值收集起来并写成

$$\mathcal{L}(\alpha, \zeta) = \sum_{k=1}^{\nu} c_k \lambda_1(G_k, \alpha) \tag{11}$$

其中每个 c_k是 ζ的某个线性函数。具体而言， $c_1 = 1 - \zeta_2 - \cdots - \zeta_\nu$，并且对 $k \geq 2$而言 $c_k = \zeta_k$。注意 $\sum_k c_k = 1$。

对于每个$(i, j) \in \partial P$，(11)中仅有的两个依赖于 α_{ij}的项，是对应于 P 中 i 与 j 各自所属子区域的特征值。因此，若我们对 α_{ij} 求导并令其等于零，则得到

$$c_{s(i)} \frac{\partial \lambda_1(G_{s(i)}, \alpha)}{\partial \alpha_{ij}} + c_{s(j)} \frac{\partial \lambda_1(G_{s(j)}, \alpha)}{\partial \alpha_{ij}} = 0,$$

其中， s将任意顶点 i映射到其所在子域的索引。如果 $f(G_k, \alpha)$是 G_k上的基态特征向量，运用与定理 3.2 的证明中相同的一阶微扰理论，我们发现临界点 α^c 必须满足

$$c_{s(i)} |f_i(G_{s(i)}, \alpha^c)|^2 - \frac{c_{s(j)}}{(\alpha_{ij}^c)^2} |f_j(G_{s(j)}, \alpha^c)|^2 = 0. \tag{12}$$

由于我们的图是连通的，这立即意味着对所有 k 都有 $c_k \neq 0$ ，因此对所有k都有 $c_k > 0$ 。

我们定义

$$\psi = \sum_{k=1}^{\nu} \sqrt{c_k} f(G_k, \alpha^c)$$

其中，我们将每个 G_k 上的基态延拓为零至G的其余部分。显然， ψ是 $L^{\partial P}(P, \alpha^c)$的一个特征向量，其特征值为 $\Lambda(P, \alpha^c)$，并注意到$\psi_i = \sqrt{c_{\chi(i)}} f_i(G_{s(i)}, \alpha^c)$。将 ψ 代入(12)得到

$$\psi_i^2 - \frac{1}{(\alpha_{ij}^c)^2} \psi_j^2 = 0, \tag{13}$$

或者，也可以写成$\alpha_{ij}^c = \frac{\psi_j}{\psi_i} > 0$。由于(13)意味着对于所有$(i, j) \in \partial P$， $\psi \in$ 属于$\ker(B_{ij}(\alpha_{ij}^c))$，因此 ψ也必定是 $L^{\partial P}(G)$的特征向量，其特征值为 $\Lambda(P, \alpha^c)$。此外， ψ 严格为正，因此其节点划分必为 P。

对于另一个方向，假设 ψ 是 $L^{\partial P}(G)$的一个非退化特征向量，其节点划分为 P。然后对每个$(i, j) \in \partial P$和$c_k = \sum_{i \in V_k} \psi_i^2$定义 $\alpha_{ij} = \psi_j / \psi_i$。设

$$f(G_k, \alpha) = \frac{\psi|_{G_k}}{\sqrt{c_k}}$$

通过简单计算可知， $f(G_k, \alpha)$ 是 $L^{\partial P}(G_k, \alpha)$ 的归一化特征向量。由于 $f(G_k, \alpha)$ 的符号恒定，它必定对应于第一特征向量。将 $f(G_k, \alpha)$ 代入 (12) 可知， α 是 $\mathcal{E}_P$ 上的一个临界点。

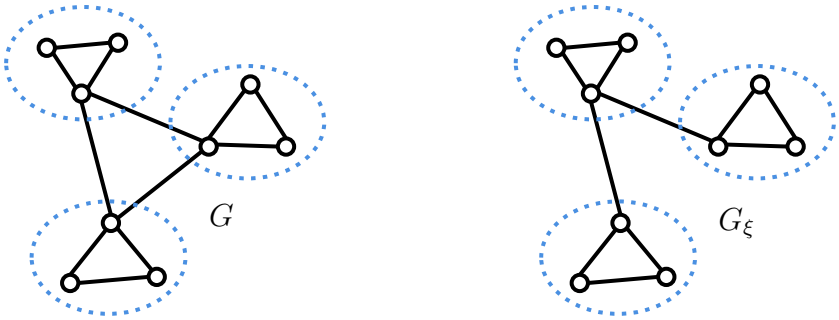

图 5. 左侧的基图 G 及其某个临界等分划分 $(P,\ \alpha^c)$。这是某个特征向量 ψ 的节点划分，其中 $L^{\partial P}$。移除一条边后，ψ 会在修改后的图 G_ξ 上诱导出一个临界等分划分。这是一个树划分，因此是唯一的，所以 ψ 必定是图 G_ξ 上的 Courant-锐利特征向量。

现在我们讨论这些临界点的稳定性。设 $(P,\ \alpha^c)$ 是一个临界等分划分。从基图 G 开始，我们从 ∂P 中移除 $\eta > 0$ 条边，并按照通常方式为每条移除的边引入一个新的势参数 ξ_{ij}。由于 η 是 P^G 的第一贝蒂数，我们可以选择要移除的边，使得此时 P 成为结果图 G_ξ 的一个树划分。用 $R \subseteq \partial P$ 表示这一构造中移除的边。

令 ψ 为与 $(P,\ \alpha^c)$ 对应的 $L^{\partial P}(G)$ 的特征向量，并对所有 $e \in R$ 设 $\xi_e = \alpha_e^c$。由于对于所有 $(i,\ j)$，$\psi \in \ker(B_{ij}(\xi_{ij}))$，$\psi$ 是 $L^{\partial P}(G_\xi)$ 的一个特征值为 $\Lambda(P,\ \alpha^c)$ 且节点划分为 P 的特征向量。因此，由引理 3.1，ψ 在 G_ξ 上诱导出一个树等分划分。根据定理 4.2，树等分划分是唯一的，所以 ψ 是 $L^{\partial P}(G_\xi)$ 的 Courant-锐利特征向量。

如果我们从 G_ξ 开始，逐步将 R 的边加回去，那么推论 3.1 表明，特征值 $\Lambda(P,\ \alpha^c)$ 的指标总变化量 Δm，等于满足以下条件的边的数量 $(i,\ j)$：沿着这些边，$\Lambda(P,\ \alpha^c)$ 是局部极大值。这里我们利用 (8) 得到

$$\Delta m = \sum_{(i,j)\in R} M_{ij}.$$

由于 $\psi(G_\xi)$ 是 Courant-锐利的，$\Lambda(P,\ \alpha^c)$ 起初的指标为 ν。因此，ψ 的最终指标 n 为

$$n = \nu + \sum_{(i,j)\in R} M_{ij}.$$

或者，ψ 的节点亏格 $n - \nu$ 等于使 $\Lambda(P,\ \alpha^c)$ 以局部极大值方式逼近的方向数，这恰好就是临界点 $\mathrm{Mor}(\Lambda(P,\ \alpha^c))$ 的莫尔斯指标。因此，$\mathrm{Mor}(\Lambda(P,\ \alpha^c)) = \delta(\psi)$，得证。□

5. 切换等价与划分能量

定理 4.3 给出了局部最小划分的一个刻画，但它要求我们固定一个底层组合划分 P。本节的主要结果定理 5.1 使我们能够比较不同的划分。作为直接推论，我们发现 Courant-sharp 拉普拉斯特征向量所诱导的划分是全局最小的。本节的方法受到 Berkolaiko、Canzani、Cox 和 Marzuola 在[BCCM25]中的结果的启发。

设 $G=(V,E,w)$ 为一个有限、简单、加权的连通图。设 $\Gamma \subseteq E$。在 G 上按如下方式定义符号 σ^{Γ}

$$\sigma_{ij}^{\Gamma}=\begin{cases}-1, & (i,j)\in\Gamma\\ 1, & (i,j)\in E\setminus\Gamma.\end{cases}$$

为便于记号，我们令 L^{Γ} 表示符号图 (G,σ^{Γ}) 上的符号拉普拉斯矩阵。由第 2 节我们已经知道，若 σ^{Γ_1} 与 σ^{Γ_2} 切换等价，则 L^{Γ_1} 与 L^{Γ_2}经由某个映射 $\Phi:\mathbb{R}^{|V|}\to\mathbb{R}^{|V|}$酉等价。

引理 5.1. 设 Γ_1、$\Gamma_2\subseteq E$。则 σ^{Γ_1} 与 σ^{Γ_2} 切换等价，当且仅当 $\Gamma_1\Delta\Gamma_2$是某个二部划分的边界集。

证明。 首先注意到 $\sigma^{\Gamma_1\Delta\Gamma_2}=\sigma^{\Gamma_1}\sigma^{\Gamma_2}$，因为

$$\begin{aligned}(\sigma^{\Gamma_1}\sigma^{\Gamma_2})_{ij}&=\begin{cases}-1, & (i,j)\in\Gamma_1\Delta\Gamma_2\\ 1, & \text{else}\end{cases}\\ &=\sigma_{ij}^{\Gamma_1\Delta\Gamma_2}.\end{aligned}$$

假设 $\Gamma_1\Delta\Gamma_2$ 是某个二部划分的边界集。由引理 2.2，我们知道 $\sigma^{\Gamma_1\Delta\Gamma_2}$ 是平衡的，而平衡集与全正符号切换等价。因此，存在某个 $\tau\colon V\to\{-1,+1\}$，使得对所有 $(i,j)\in E$都有 $1=\tau_i\sigma_{ij}^{\Gamma_1\Delta\Gamma_2}\tau_j$。展开得到$1=\tau_i\sigma_{ij}^{\Gamma_1\Delta\Gamma_2}\tau_j=\tau_i\sigma_{ij}^{\Gamma_1}\sigma_{ij}^{\Gamma_2}\tau_j$，两边同乘 $\sigma_{ij}^{\Gamma_2}$得到

$$\sigma_{ij}^{\Gamma_2}=\tau_i\sigma_{ij}^{\Gamma_1}\tau_j,$$

因此，σ^{Γ_1} 与σ^{Γ_2}切换等价。

反向采用相同的论证可得，σ^{Γ_1}与 σ^{Γ_2} 切换等价，意味着 $\Gamma_1\Delta\Gamma_2$ 是某个二部划分的边界集。□

现在我们证明，L^{Γ} 的任意特征向量的节点划分，其边界 ∂P 都与 Γ 本身切换等价。

引理 5.2. 设 ψ 是 L^{Γ} 的一个非退化特征向量，其节点划分为 P。那么 $\sigma^{\partial P}$与 σ^{Γ}切换等价。

证明。 根据引理 5.1，只需证明 $\partial P\Delta\Gamma$ 是某个二部划分的边界集。为此，我们证明 ψ 必定在 $\partial P\Delta\Gamma$中的每条边两端改变符号，因此可由 ψ的符号导出二分结构。

设$(i,j)\in\partial P\Delta\Gamma$，因此需考虑两种情况。如果$(i,j)\in\partial P\setminus\Gamma$，则$(i,j)$属于 ψ的节点划分，因此 $\psi_i\sigma_{ij}^{\Gamma}\psi_j<0$。由于$\sigma_{ij}^{\Gamma}=1$，我们有 $\psi_i\psi_j<0$。类似地，如果$(i,j)\in\Gamma\setminus\partial P$，则有 $\psi_i\sigma_{ij}^{\Gamma}\psi_j>0$。由于 $\sigma_{ij}^{\Gamma}=-1$，我们必有 $\psi_i\psi_j<0$，这正是所需。

这些是 ψ 改变符号的唯一几条边。若 $(i,j)\in E$ 满足 $\psi_i\psi_j<0$，则 $(i,j)\in\partial P\setminus\Gamma$ 或 $(i,j)\in\Gamma\setminus\partial P$。因此，$\partial P\Delta\Gamma$ 是一个二部划分的边界集。□

命题 5.1。 设 $\Gamma\subseteq E$，且令 ψ 为 L^{Γ} 的一个非退化特征向量，其对应特征值为 $\lambda_k(\Gamma)$。则 ψ 的节点划分 P 导出一个临界等分划分(P,α)，其能量为 $\lambda_k(\Gamma)$。

证明。 给定 $\Gamma\subseteq E$ 以及 L^{Γ} 的一个特征向量 ψ，其对应的特征值为 $\lambda_k(\Gamma)$，根据引理 5.2，存在某个酉映射 Φ，使得 $\Phi\psi$ 是 $L^{\partial P}$的一个特征向量。结合

引理 3.1，我们可以构造一个等分割 $(P,\ \alpha)$，其能量为 $\lambda_k(\Gamma)$；其中，我们根据 $\Phi\psi$ 在划分边界上的取值来选择 α。□

事实证明，要求 ∂P 与 Γ 切换等价，比我们需要假设的条件更强。对于 $\Gamma \subseteq E$，令 $\mathcal{P}_\nu(\Gamma)$ 表示所有满足下述条件的 ν-划分 P 的集合：存在某个子集 $\Gamma \subseteq \partial P$，使得 σ^Γ 与 σ^Γ 切换等价。

定理 5.1. 设 $\Gamma \subseteq E$。若 $\lambda_\nu(\Gamma)$ 是 L^Γ的特征值，则有

$$\lambda_\nu(\Gamma) \leq \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}^{|\partial P|}} \Lambda(P,\alpha)$$

对所有 $P \in \mathcal{P}_\nu(\Gamma)$均成立。由于这对任意这样的划分 P都成立，我们得到

$$\lambda_\nu(\Gamma) \leq \min_{P \in \mathcal{P}_\nu(\Gamma)} \inf_{\alpha \in \mathbb{R}_{>0}^{|\partial P|}} \Lambda(P,\alpha).$$

此外，当且仅当 P是 L^Γ 的某个特征值为 $\lambda_\nu(\Gamma)$的特征向量的节点划分时，等式 $\lambda_\nu(\Gamma) = \Lambda(P,\alpha)$ 成立；在这种情况下，(P,α) 是一个临界等分划分，并且 Λ 在 (P,α) 处的莫尔斯指标等于 $\lambda_\nu(\Gamma)$的节点亏格。

若 $\lambda_\nu(\Gamma)$ 对应于 L^Γ 的一个 Courant-锐利特征向量，其节点划分为 ˜tition P，则我们得到一个临界等分划分 $(P,\ \alpha^c)$，并发现对于所有 $\widetilde{P} \in \mathcal{P}_\nu(\Gamma)$ 和 $\alpha > 0$，$\Lambda(P,\ \alpha^c) \leq \Lambda(P,\ \alpha)$。换言之，$L^\Gamma$ 的一个 Courant-锐利特征向量诱导出一个在 $\mathcal{P}_\nu(\Gamma)$ 中最小的临界等分划分。

若 ψ 是 L 的一个 Courant-锐利特征向量，对应特征值 λ_ν，我们可以将 L 视为一个符号拉普拉斯矩阵 L^Γ，其中 $\Gamma = \emptyset$。于是，集合 $\mathcal{P}_\nu(\emptyset)$ 由所有 ν-划分构成，因为任意划分 P 都有 $\emptyset \subseteq \partial P$，这会诱导出全正符号。因此，我们证明了以下结论：

推论 5.1. 若 ψ 是 L 的一个非退化 *Courant*-锐利特征向量，对应特征值 λ_ν，则 ψ 的节点划分 P 是一个全局最小的 ν-划分，即

$$\lambda_\nu = \Lambda(P,\alpha^c) \leq \Lambda(\widetilde{P},\alpha)$$

对于所有的 ν 划分 $\widetilde{P}$和 $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}^{|\partial P|}$，其中 $(P,\ \alpha^c)$ 是与ψ相关联的临界等分划分。

~定理 *5.1* 的证明。 由于 σ^Γ 与 σ^Γ切换等价，我们知道，对于某个酉映射 Φ，有 $\langle u,\ L^\Gamma v\rangle = \sim\langle \Phi u,\ L^\Gamma \Phi v\rangle$。令 $g(G_k,\ \alpha)$ 为 G_k 上的基态特征向量，将其归一化并选取为满足 $g_i(G_k,\ \alpha) > 0$ 对所有 $i \in V_k$ 均成立。定义 $\tilde{g}(G_k,\ \alpha) = \Phi g(G_k,\ \alpha)$，并选取 $c_1,\ \ldots,\ c_\nu$ 使得

$$\psi = \sum_{k=1}^{\nu} c_k \tilde{g}(G_k,\alpha)$$

与 L^Γ 的前 $\nu - 1$ 个特征向量正交。我们知道这是可行的，因为$\tilde{g}(G_k,\ \alpha)$ 线性无关。

根据特征值的瑞利刻画，我们有

$$\lambda_\nu(\Gamma) \leq \frac{\langle u, L^\Gamma v\rangle}{\langle \psi,\psi\rangle} = \frac{\langle \Phi u, L^{\widetilde{\Gamma}} \Phi v\rangle}{c_1^2 + \cdots + c_\nu^2}. \tag{14}$$

~我们希望用 $L^{\partial P}(P,\alpha)$ 表示 L^Γ，以便利用这样一个事实：ψ只是正交基态函数的线性组合。

首先注意到

$$L^{\widetilde{\Gamma}} = L^{\partial P} - A, \tag{15}$$

其中

$$A_{ij} = \begin{cases} 2w_{ij}, & (i,j) \in \partial P \setminus \widetilde{\Gamma}, \\ 0, & \text{else.} \end{cases}$$

对 $\partial P \setminus \widetilde{\Gamma}$中的所有边， $L^{\partial P}$ 通过 $-A$ 的扰动都会反转其符号，因此得到 L^{Γ}。我们还有

$$L^{\partial P}(P,\alpha) = L^{\partial P} + B(\alpha) \tag{16}$$

其中， $B = \sum_{(i,\ j)\in\partial P} w_{ij}B_{ij}(\alpha_{ij})$是构造参数相关划分时所有扰动的总和，如式（3）所示。结合式（15）和（16），得到 $L^{\Gamma} = L^{\partial P}(P,\ \alpha)\ -A - B(\alpha)$。

现在我们证明 $A + B(\alpha)$是半正定的。根据它们的定义可知， $A + B(\alpha)$是一个对称矩阵，其形式为

$$(A + B(\alpha))_{ij} = \begin{cases} p_i(\alpha), & i = j, \text{ and } i \text{ incident to } \partial P \\ -w_{ij}, & (i,j) \in \widetilde{\Gamma} \\ w_{ij}, & (i,j) \in \partial P \setminus \widetilde{\Gamma}, \end{cases}$$

其中

$$p_i(\alpha) = \sum_{\substack{j>i \\ (i,j)\in\partial P}} w_{ij}\alpha_{ij} + \sum_{\substack{j<i \\ (i,j)\in\partial P}} \frac{w_{ij}}{\alpha_{ij}}$$

是由所有势构成的对角元素。为明确起见，我们再次约定，当 $i < j$ 时，将 α_{ij} 加到顶点 i，并将 $1/\alpha_{ij}$ 加到顶点 j。由此可得

$$\langle u, (A + B(\alpha))u\rangle = \sum_{i\in\partial V} p_i(\alpha)u_i^2 + \sum_{(i,j)\in\partial P\setminus\widetilde{\Gamma}} 2w_{ij}u_iu_j - \sum_{(i,j)\in\widetilde{\Gamma}} 2w_{ij}u_iu_j.$$

~根据边是否位于 Γ 中对各项重新分组，得

$$\langle u, (A + B(\alpha))u\rangle = \sum_{(i,j)\in\partial P\setminus\widetilde{\Gamma}} w_{ij}\alpha_{ij}(u_i + \tfrac{1}{\alpha_{ij}}u_j)^2 + \sum_{(i,j)\in\widetilde{\Gamma}} w_{ij}\alpha_{ij}(u_i - \tfrac{1}{\alpha_{ij}}u_j)^2 \geq 0.$$

回到式 (14)，我们计算得

$$\begin{aligned} \lambda_\nu(\Gamma) &\leq \frac{\langle \Phi\psi, L^{\partial P}(P,\alpha)\Phi\psi\rangle - \langle \Phi\psi, (A + B(\alpha))\Phi\psi\rangle}{c_1^2 + \cdots + c_\nu^2} \\ &\leq \frac{\langle \Phi\psi, L^{\partial P}(P,\alpha)\Phi\psi\rangle}{c_1^2 + \cdots + c_\nu^2} \\ &= \frac{c_1^2\lambda_1(G_1,\alpha) + \cdots + c_\nu^2\lambda_1(G_\nu,\alpha)}{c_1^2 + \cdots + c_\nu^2} \\ &\leq \max_{k=1,\ldots,\nu} \lambda_1(G_k,\alpha) \\ &= \Lambda(P,\alpha) \end{aligned}$$

如所愿。

如果我们有 $\lambda_\nu(\Gamma) = \Lambda(P, \alpha)$，那么瑞利定理 [HJ12，定理 4.2.2] 表明 ψ 是 L^Γ 的特征向量，其特征值为 $\lambda_\nu(\Gamma)$，因此 $\Phi\psi$ 是 L^Γ 的特征向量，且具有相同的特征值。此外，由于 $(A + B(\alpha))\Phi\psi = 0$，我们可得

$$(\Phi\psi)_i + \frac{1}{\alpha_{ij}}(\Phi\psi)_j = 0$$

对所有 $(i, j) \in \partial P \setminus \Gamma$ 且

$$(\Phi\psi)_i - \frac{1}{\alpha_{ij}}(\Phi\psi)_j = 0$$

对所有 $(i, j) \in \Gamma$。由于每个 $\alpha_{ij} > 0$，这意味着 $\Phi\psi$ 必须在每个 $(i, j) \in \partial P \setminus \Gamma$ 处改变符号，而在每个 $(i, j) \in \Gamma$ 处不改变符号。因此，P 是 $\Phi\psi$ 作为 L^Γ 的特征向量的节点划分，而 P 是 ψ 作为 L^Γ 的特征向量的节点划分。此外，根据命题 5.1，(P, α) 是一个临界等分划分。□

注 5.1。由于 σ^Γ 显然与自身切换等价，我们得到一个很好的结果：给定某个 ν-划分 P，

$$\lambda_\nu(\Gamma) \leq \inf_{\alpha>0} \Lambda(P, \alpha)$$

对任意 $\Gamma \subseteq \partial P$。因此，对于固定划分 P，能量的另一个下界为

$$\max_{\Gamma \subseteq \partial P} \lambda_\nu(\Gamma) \leq \inf_{\alpha>0} \Lambda(P, \alpha).$$

注 5.2。定理 5.1 可视为 [BCCM25，定理 1.6] 的离散类比。该结果利用同调来比较有界区域中不同的分段 C^1 割集。我们所有关于切换等价的结果，也都可以用同调的语言重新表述，与 [BCCM25] 中的结果完全对应。关于这种联系的更明确讨论，请参阅附录 B。

附录 A. 与曲面上的划分拉普拉斯算子的联系

将 $L^{\partial P}$ 定义为符号拉普拉斯矩阵很有用，因为我们可以借助符号图论中的方法；但这样一来，我们便失去了关于此 $L^{\partial P}$ 与引言中提到的连续 $-\Delta^{\partial P}$ 之间关系的直观理解。事实证明，我们可以将 $L^{\partial P}$ 视为 $-\Delta^{\partial P}$ 的离散化。下面简述主要思路。

A.1. 连续划分拉普拉斯算子。 设 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^2$ 是边界光滑的有界区域，$\partial\Omega$ 为其边界。Ω 的一个 ν 划分 P 是由 Ω 中一组 ν 互不相交的开连通子集 $\{\Omega_k\}_{k=1}^\nu$ 构成的集合，每个子集的边界均为分段光滑边界，且满足

$$\overline{\Omega} = \overline{\bigcup_k \Omega_k}.$$

我们用 ∂P 表示与 $\partial\Omega$ 不重合的子区域边界，即

$$\partial P = \bigcup_{k=1}^{\nu} \partial\Omega_k \setminus \partial\Omega.$$

给定一个特征函数 ψ，它是 $-\Delta$ 的特征值为 λ_k 的特征函数，并且在 $\partial\Omega$ 上满足狄利克雷边界条件，我们可以通过令每个 Ω_k 都是 ψ 的一个节点域，得到一个二部划分 P。粗略地说，划分拉普拉斯算子旨在使其特征函数具有

不一定是二部的节点划分，因此在研究非二部的极小划分时，它自然很有用。

对于函数 $u:\Omega \to \mathbb{R}$，令 $u_i = u|_{\Omega_i}$，并称 u 在 ∂P 上反连续，当

$$u_i\big|_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j} = -u_j\big|_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j}, \qquad \frac{\partial u_i}{\partial \nu_i}\Big|_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j} = \frac{\partial u_j}{\partial \nu_j}\Big|_{\partial\Omega_i\cap\partial\Omega_j}$$

只要 $\partial\Omega_i \cap \partial\Omega_j \neq \emptyset$，便有上述性质。此时，划分拉普拉斯算子 $-\Delta^{\partial P}$ 由双线性型生成：

$$\langle u, -\Delta^{\partial P} v\rangle = \sum_{k=1}^{\nu} \int_{\Omega_k} \nabla u_k \cdot \nabla v_k dV$$

它作用于满足以下条件的函数 u：对每个 i，$u_i \in H^1(\Omega_i)$，在 $\partial\Omega$ 上为零，并且在 ∂P 上反连续。如果我们的划分 P 是二部的，那么 $-\Delta^{\partial P}$ 与 to $-\Delta$ 酉等价。该酉映射利用二分结构，在某些区域上乘以 -1，在其他区域上乘以 1。有关划分拉普拉斯算子的更详细说明，请参见 [BCCM25] 。

A.2. 图上的反连续函数。 设 G 是一个有限简单连通图，且 $P = \{G_k\}_{k=1}^{\nu}$ 是 G 的一个 ν-划分。为了理解沿着 ∂P 的反连续边界条件，引入沿划分边界的幽灵点会很有帮助。

对于每个 $(i,\ j) \in \partial P$，添加两个顶点 $k_{ij},\ \ell_{ij}$ 以及边 $(i,\ k_{ij})$ 和 $(j,\ \ell_{ij})$。然后移除原边 $(i,\ j)$，并将两条新边的边权重均设为 $2w_{ij}$。对每个 $(i,\ j) \in \partial P$执行此过程后，将所得的图称为 $G' = (V', E',\ w')$。

我们称 $u:\ V' \to \mathbb{R}$ 在 ∂P 上是反连续的，当且仅当

$$u_{k_{ij}} = -u_{\ell_{ij}}, \qquad u_{k_{ij}} - u_i = u_{\ell_{ij}} - u_j \tag{17}$$

对于所有 $(i,\ j) \in \partial P$。第一个条件是关于 $u_i = -u_j$ 的类比，第二个条件则类比于关于法向导数的条件。如果 $L(G')$ 是 G' 上通常的图拉普拉斯算子，我们定义划分拉普拉斯算子 $L^{\partial P}(G')$ 如下：

$$(L^{\partial P}(G')u)_{i'} = \begin{cases} (L(G')u)_{i'}, & i' \in V \\ u_{k_{ij}} + u_{\ell_{ij}}, & i' = k_{ij} \text{ for some } (i,j) \in \partial P \\ u_{k_{ij}} - u_i + u_j - u_{\ell_{ij}}, & i' = \ell_{ij} \text{ for some } (i,j) \in \partial P. \end{cases}$$

换句话说，我们将边界条件编码在 $L^{\partial P}(G')$ 中与 $V' \setminus V$ 中顶点相对应的行里。我们所关注的 $L^{\partial P}(G')$ 的特征向量必须是反连续的，因此，当 u 是反连续的时，$L^{\partial P}(G')u$ 中与 $V' \setminus V$ 中顶点相对应的条目将为零。

令 B 为 $|V'| \times |V'|$ 对角矩阵，其中 $B_{ii} = 1$ 在 $i \in V$时成立，否则为 $B = 0$。接下来，我们需要求 $L^{\partial P}(G')$ 相对于 B的广义特征向量，也就是说，需要找到满足 $L^{\partial P}(G')u = \lambda Bu$的 u 和 λ。

这种划分拉普拉斯算子的构造完全可行，并且可以证明，给定一个二部划分 P，$L^{\partial P}(G')$ 关于 B 的特征值与 $L(G)$ 的特征值相同，因此它们之间存在酉等价的概念。

A.3. 划分拉普拉斯算子的构造。如果采用略有不同的框架，效果会好得多。给定任意函数 $u : V \to \mathbb{R}$，我们可以将其唯一延拓为定义在 V' 上的反连续函数。我们称 $u' : V' \to \mathbb{R}$ 是 u 的反连续延拓，当且仅当

$$u'_{k_{ij}} = \frac{u_i - u_j}{2}, \qquad u'_{\ell_{ij}} = \frac{u_j - u_i}{2}$$

对所有 $(i, j) \in \partial P$，以及其他所有位置的 $u' = u$。这是通过显式求解方程组 (17) 得到的。令 $T : \mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}^{|V'|}$ 为将 $u \mapsto u'$ 映射到的线性映射。那么，若考虑复合映射 $L^{\partial P}(G')T : \mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}^{|V'|}$，我们发现，与顶点属于 $V' \setminus V$ 对应的任何行都必须为零。接着，我们可以通过从 $L^{\partial P}(G')T$ 中移除底部 $|V'| - |V|$ 行，将 R 投影到 $\mathbb{R}^{|V'|} \to \mathbb{R}^{|V|}$。结果得到算子 $RL^{\partial P}(G')T : \mathbb{R}^{|V|} \to \mathbb{R}^{|V|}$。

一项显式但繁琐的计算表明，$RL^{\partial P}(G')T$ 是一个对称矩阵 $|V| \times |V|$，除对应于 $(i, j) \in \partial P$ 的元素外，其余每个元素都等于 L；而这些元素的符号则相反。这正是 (2.7) 中定义的划分拉普拉斯算子。

附录 B. 切换等价与同调

图 G 上的 0-链空间 $C_0(G, \mathbb{Z}_2)$ 由图 G 顶点的形式线性组合构成，而 1-链空间 $C_1(G, \mathbb{Z}_2)$ 由图 G 边的形式线性组合构成，两者的系数均取自 $\mathbb{Z}_2$。由于所有加法都是模 2 进行的，注意对于任意 $\Gamma_1, \Gamma_2 \in C_1(G, \mathbb{Z}_2)$，加法就是对称差 $\Gamma_1 + \Gamma_2 = \Gamma_1 \Delta \Gamma_1$。

我们将边界映射 $\partial : C_1(G, \mathbb{Z}_2) \to C_0(G, \mathbb{Z}_2)$ 定义为 $\partial(i, j) = (i) + (j)$，并通过线性性扩展。因此，第一同调群 $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ 为

$$H_1(G, \mathbb{Z}_2) = \ker(\partial),$$

因为图上不存在 2-链。注意，$\ker(\partial)$ 由 G 上的圈生成，因此 $\dim \ker(\partial) = \beta$，即 G 的第一贝蒂数。对于 $\Gamma \in C_1(G, \mathbb{Z}_2)$，我们用 $[\Gamma]$ 表示其在 $H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ 中的等价类。当且仅当 $[\Gamma_1 + \Gamma_2] = 0 \in H_1(G, \mathbb{Z}_2)$ 时，我们称 Γ_1 和 Γ_2 在 $C_1(G, \mathbb{Z}_2)$ 中是同调的。

定义 t 在 $C_1(G, \mathbb{Z}_2)$ 上的半正定双线性型 $t(e_i, e_j) = \delta_{ij}$，并将其按线性扩展。我们考虑相对于 t 的 $\ker(\partial)$ 的正交补：

$$\ker(\partial)^{\perp} = \{\Gamma \in C_1(G, \mathbb{Z}_2) : t(\Gamma, \widetilde{\Gamma}) = 0 \text{ for all } \widetilde{\Gamma} \in \ker(\partial)\}.$$

直接计算可知，$\ker(\partial)^{\perp}$ 由构成 G 的割集的边生成。若存在两个不相交的 $S, T \subseteq V$，满足 $S \cup T = V$，且每条 $e \in \Gamma$ 都连接 S 中的一个顶点与 T 中的一个顶点，则称 $\Gamma \subseteq E$ 构成 G 的一个割集。我们将割空间记为 $\mathcal{C}^*$。

有了上述结果，我们得到正交分解

$$C_1(G, \mathbb{Z}_2) = H_1(G, \mathbb{Z}_2) \oplus \mathcal{C}^*.$$

因此，Γ_1 与 Γ_2 同调，当且仅当 $\Gamma_1 + \Gamma_2 \in \mathcal{C}^*$。由于每个割都构成 G 的一个二部划分，且加法等价于对称差，我们发现，Γ_1 与 Γ_2 同调，当且仅当 $\Gamma_1 \Delta \Gamma_2$ 是某个二部划分的边界集。根据引理 5.1，这又等价于 σ^{Γ_1} 与 σ^{Γ_2} 切换等价。因此，σ^{Γ_1} 与 σ^{Γ_2} 切换等价，当且仅当 Γ_1 与 Γ_2 同调。

参考文献

[ABG25] Lior Alon、Gregory Berkolaiko 和 Mark Goresky。《图的磁扰动环面上的特征值光滑临界点》。版本号：1。2025 年。doi：10.48550/ARXIV.2505.17215。网址：https://arxiv.org/abs/2505.17215。[ACF84] Hans Wilhelm Alt、Luis A. Caffarelli 和 Avner Friedman。“具有两相及其自由边界的变分问题”。英文。载于：《美国数学学会汇刊》282.2（1984），第 431–461 页。ISSN：0002-9947，1088-6850。doi：10.1090/S0002-9947-1984-0732100-6。网址：https://www.ams.org/tran/1984-282-02/S0002-9947-1984-0732100-6/。[AL20] Fatihcan M. Atay 和 Shiping Liu。“符号图的 Cheeger 常数、结构平衡与谱聚类分析”。载于：《离散数学》343.1（2020 年 1 月），第 111616 页。ISSN：0012365X。doi：10.1016/j.disc.2019.111616。arXiv：1411.3530 [math]。[BBRS12] Ram Band、Gregory Berkolaiko、Hillel Raz 和 Uzy Smilansky。“量子图上节点域数量与图划分稳定性之间的联系”。载于：《数学物理通讯》311.3（2012 年 5 月），第 815–838 页。ISSN：0010-3616，1432-0916。doi：10.1007/s00220-011-1384-9。arXiv：1103.1423 [math-ph]。[BCCKM24] Gregory Berkolaiko、Yaiza Canzani、Graham Cox、Peter Kuchment 和 Jeremy L. Marzuola。《带角点的谱划分的稳定性》。2024 年 11 月。doi：10.48550/arXiv.2411.02378。arXiv：2411.02378 [math]。[BCCM22] Gregory Berkolaiko、Yaiza Canzani、Graham Cox 和 Jeremy L. Marzuola。“谱划分的稳定性与 Dirichlet-to-Neumann 映射”。载于：《变分与偏微分方程》61.6（2022 年 12 月），第 203 页。ISSN：0944-2669，1432-0835。doi：10.1007/s00526-022-02311-7。arXiv：2201.00773 [math]。[BCCM25] Gregory Berkolaiko、Yaiza Canzani、Graham Cox 和 Jeremy L. Marzuola。“谱极小划分的同调”。载于：《伦敦数学学会杂志》111.1（2025 年 1 月），e70065。ISSN：0024-6107，1469-7750。doi：10.1112/jlms.70065。网址：https://londmathsoc.onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1112/jlms.70065。[Ben21] Riccardo Benedetti。《微分拓扑讲义》。第 218 卷。数学研究生系列。罗德岛州普罗维登斯：美国数学学会，2021 年。ISBN：9781470466732。doi：10.1090/gsm/218。[Ber08] Gregory Berkolaiko。“离散图和度量图节点计数的下界”。载于：《数学物理通讯》278.3（2008 年 3 月），第 803–819 页。ISSN：0010-3616，1432-0916。doi：10.1007/s00220-007-0391-3。arXiv：math-ph/0611026。[BGLS01] E. Brian Davies、Graham M. L. Gladwell、Josef Leydold 和 Peter F. Stadler。“离散节点域定理”。英文。载于：《线性代数及其应用》336.1-3（2001 年 10 月），第 51–60 页。ISSN：00243795。doi：10.1016/S0024-3795(01)00313-5。网址：https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0024379501003135。[BGS02] Galya Blum、Sven Gnutzmann 和 Uzy Smilansky。“节点域统计：量子混沌的判据”。载于：《物理评论快报》88.11（2002 年 3 月），第 114101 页。ISSN：0031-9007，1079-7114。doi：10.1103/PhysRevLett.88.114101。[BKP07] Jochen Bruening、David Klawonn 和 Christof Puhle。“关于‘通过计算节点域破解等谱“鼓”之谜’的评论”。英文。载于：《物理学杂志 A：数学与理论》40.50（2007 年 12 月）。arXiv：0709.3745 [math]，第 15143–15147 页。ISSN：1751-8113，1751-8121。doi：10.1088/1751-8113/40/50/N01。网址：http://arxiv.org/abs/0709.3745。

[BKS12] Gregory Berkolaiko、Peter Kuchment 和 Uzy Smilansky。“台球特征函数的临界划分与节点亏格”。载于：《几何与泛函分析》22.6（2012年12月），第1517–1540页。ISSN：1016-443X，1420-8970。DOI：10.1007/s00039-012-0199-y。arXiv：1107.3489 [math-ph].

[BL06] Yonatan Bilu 和 Nathan Linial。“提升、差异与近乎最优的谱隙*”。载于：《组合数学》26.5（2006年10月），第495–519页。ISSN：0209-9683，1439-6912。DOI：10.1007/s00493-006-0029-7.

[BLS07] T¨urker Bıyıko˘glu、Josef Leydold 和 Peter F. Stadler。《图的拉普拉斯特征向量：Perron-Frobenius 与 Faber-Krahn 型定理》。数学讲义 1915。柏林；纽约：施普林格，2007。ISBN：978-3-540-73509-0。

[BOS08] Ram Band、Idan Oren 和 Uzy Smilansky。《图上的节点域——如何计数以及为何计数？》2008年2月。DOI：10.48550/arXiv.0711.3416。arXiv：0711.3416 [math-ph].

[BRS12] Gregory Berkolaiko、Hillel Raz 和 Uzy Smilansky。“图特征函数节点结构的稳定性及其与节点域计数的关系”。载于：《物理学杂志 A：数学与理论》45.16（2012年4月），第165203页。ISSN：1751-8113，1751-8121。DOI：10.1088/1751-8113/45/16/165203.

[BS02] E. Bogomolny 和 C. Schmit。“混沌波函数节点域的渗流模型”。载于：《物理评论快报》88.11（2002年3月），第114102页。ISSN：0031-9007，1079-7114。DOI：10.1103/PhysRevLett.88.114102.

[CH09] Richard Courant 和 David Hilbert。《数学物理方法》。第1卷。英文。页数：560。魏因海姆：Wiley-VCH，2009。ISBN：978-0-471-50447-4。

[Cha84] Isaac Chavel。《黎曼几何中的特征值》。纯粹与应用数学 115。奥兰多：学术出版社，1984。ISBN：978-0-12-170640-1。

[Chl87] Ernst Florens Friedrich Chladni。《关于声学理论的发现》。德文。介质：[2] 叶，78页，11幅铜版插图；23厘米（4°）。Weidmanns Erben und Reich 出版社，1787年。DOI：10.3931/E-RARA-4235。URL：https://www.e-rara.ch/zut/doi/10.3931/e-rara-4235.

[CTV03] Monica Conti、Susanna Terracini 和 Gianmaria Verzini。关于一类与 Fučík 谱及单调性公式相关的最优划分问题。2003年12月。DOI：10.48550/arXiv.math/0312207。arXiv：math/0312207.

[CTV05] Monica Conti、Susanna Terracini 和 G. Verzini。“竞争系统空间分离的渐近估计”。载于：《数学进展》195.2（2005年8月），第524–560页。ISSN：00018708。DOI：10.1016/j.aim.2004.08.006.

[GKS06] Sven Gnutzmann、Panos D. Karageorge 和 Uzy Smilansky。“能否数出鼓的形状？”载于：《物理评论快报》97.9（2006年8月），第090201页。ISSN：0031-9007，1079-7114。DOI：10.1103/PhysRevLett.97.090201.

[GLZ23] Chuanyuan Ge、Shiping Liu 和 Dong Zhang。符号图上 p-拉普拉斯算子的节点域定理。2023年5月。DOI：10.48550/arXiv.2209.09080。arXiv：2209.09080 [math].

[GSS05] Sven Gnutzmann、Uzy Smilansky 和 Niels Sondergaard。“通过计算节点域辨析等谱‘鼓’”。载于：《物理学杂志 A：数学与一般物理》38.41（2005年10月），第8921–8933页。ISSN：0305-4470，1361-6447。DOI：10.1088/0305-4470/38/41/006。arXiv：nlin/0504050.

[Har53] Frank Harary。“论符号图平衡性的概念”。载于：《密歇根数学杂志》2.2（1953年1月）。ISSN：0026-2285。DOI：10.1307/mmj/1028989917.

[Hat02] A. Hatcher。《代数拓扑》。代数拓扑。剑桥大学出版社，2002年。ISBN：978-0-521-79540-1。

[HHT06] B. Helffer、T. Hoffmann-Ostenhof 和 S. Terracini。《节点域与谱最小划分》。2006年10月。DOI：10.48550/arXiv.math/0610975。arXiv：math/0610975。[HJ12] Roger A. Horn 和 Charles R. Johnson。《矩阵分析》。第2版。剑桥；纽约：剑桥大学出版社，2012年。ISBN：978-0-521-83940-2。[JS17] Sudhir Ranjan Jain 和 Rhine Samajdar。“量子台球的节点图谱：区域、线与统计”。英文。载于：《现代物理评论》89.4（2017年12月），第045005页。ISSN：0034-6861，1539-0756。DOI：10.1103/RevModPhys.89.045005。URL：https://link.aps.org/doi/10.1103/RevModPhys.89.045005。[Kat95] Tosio Kato。《线性算子扰动理论》。1980年版重印本。数学经典丛书。柏林、海德堡：施普林格，1995年。ISBN：978-3-540-58661-6。[KKLM20] James B. Kennedy、Pavel Kurasov、Corentin L´ena 和 Delio Mugnolo。《度量图谱划分理论》。2020年5月。DOI：10.48550/arXiv.2005.01126。arXiv：2005.01126 [math].[LL92] Elliott Lieb 和 Michael Loss。《通量、拉普拉斯算子与 Kasteleyn 定理》。1992年9月。DOI：10.48550/arXiv.cond-mat/9209031。arXiv：cond-mat/9209031.[Moh16] A. Mohammadian。“图及其真实特征向量”。载于：《线性与多重线性代数》64.2（2016年2月），第136–142页。ISSN：0308-1087，1563-5139。DOI：10.1080/03081087.2015.1025687.[MSS15a] Adam Marcus、Daniel Spielman 和 Nikhil Srivastava。“交错族 I：任意度数的二部 Ramanujan 图”。英文。载于：《数学年刊》（2015年7月），第307–325页。ISSN：0003-486X。DOI：10.4007/annals.2015.182.1.7。URL：https://annals.math.princeton.edu/2015/182-1/p07。[MSS15b] Adam Marcus、Daniel Spielman 和 Nikhil Srivastava。“交错族 II：混合特征多项式与 Kadison–Singer 问题”。英文。载于：《数学年刊》（2015年7月），第327–350页。ISSN：0003-486X。DOI：10.4007/annals.2015.182.1.8。URL：https://annals.math.princeton.edu/2015/182-1/p08。[OR17] Braxton Osting 和 Todd Harry Reeb。《狄利克雷划分的一致性》。2017年8月。DOI：10.48550/arXiv.1708.05472。arXiv：1708.05472 [math].[OWO14] Braxton Osting、Chris D. White 和 Edouard Oudet。“图的最小狄利克雷能量划分”。载于：《SIAM科学计算杂志》36.4（2014年1月），A1635–A1651。ISSN：1064-8275，1095-7197。DOI：10.1137/130934568。arXiv：1308.4915 [math].[Ple56] Arke Pleijel。“关于 Courant 节点线定理的评注”。载于：《纯粹与应用数学通讯》9.3（1956年8月），第543–550页。ISSN：0010-3640，1097-0312。DOI：10.1002/cpa.3160090324.[Stu09] C. Sturm。“关于二阶线性微分方程的回忆录”。法文。载于：《Charles François Sturm 文集》。Jean-Claude Pont 编。巴塞尔：Birkhäuser Basel，2009年，第392–472页。ISBN：978-3-7643-7990-2。DOI：10.1007/978-3-7643-7990-2_30。URL：http://link.springer.com/10.1007/978-3-7643-7990-2_30。[Ver13] Yves Colin De Verdi`ere。“图上节点缺陷的磁学解释”。英文。载于：《分析与偏微分方程》6.5（2013年11月）。arXiv：1201.1110 [数学物理。第1235–1242页。ISSN：1948-206X，2157-5045。DOI：10.2140/apde.2013.6.1235。URL：http://arxiv.org/abs/1201.1110。[Zas81] Thomas Zaslavsky。“符号图的刻画”。载于：《图论杂志》5.4（1981年12月），第401–406页。ISSN：0364-9024，1097-0118。DOI：10.1002/jgt.3190050409.[Zas82] Thomas Zaslavsky。“符号图”。载于：《离散应用数学》4.1（1982年1月），第47–74页。ISSN：0166-218X。DOI：10.1016/0166-218X(82)90033-6。