arXiv:2602.18033v1 [math.CT] 20 Feb 2026

论意义、对象、名称与存在性的范畴论独立性

Takao Inoué*

日本大阪 Yamato University 信息学部

2026年2月20日

摘要

我们证明了一个关于四个基本概念——意义、对象、名称与存在性——的范畴论独立性定理。在 Lawvere 式范畴语义中，特别是在拓扑斯中，我们表明这些概念处于不同的结构层级（对象、态射、元素和内部逻辑层级），无法彼此统一地还原。

关键的区分在于内部存在与全局命名之间。通过拓扑斯 $\mathbf{Sh}(S^1)$ 中的一个具体例子——非平凡覆盖的局部截面层——我们展示了一个内部非空但不具有全局元素的对象。

这些结果为将几何宇宙视为信息网络的基础框架提供了精确的结构性依据。

关键词： 范畴论语义；拓扑斯理论；范畴独立性；存在性；内部逻辑；几何宇宙；层语义

MSC2020： 主要分类 18C05；次要分类 18B25、03G30、18F20

*通讯作者：inoue.takao@yamato-u.ac.jp（个人邮箱）
takaoapple@gmail.com（我更倾向使用个人邮箱）

目录

1 引言 2

2 四个基本概念（形式范畴定义） 32.1 环境范畴语义.3 2.2 四个概念的形式定义.4

3 主定理：范畴论独立性 5

4 独立性定理非正式指南 9

4.1 四个概念对应四个范畴层级.9 4.2 示意图.10 4.3 为什么存在性与命名相互独立.10 4.4 解读形式证明.11

5 结论 12

6 最终评注 12

1 引言

意义、对象、名称与存在性这些概念在逻辑与语言哲学中起着基础性作用。从弗雷格对涵义与指称的区分，到现代形式语义学，人们付出了大量努力，以澄清语言表达式如何与被解释为“对象”的结构相关联。

尽管有这些进展，意义、对象、名称与存在性之间的结构关系往往仍被非正式地处理。尤其是，存在性常常被等同于某个对象的在场，而名称则被默示地与其所指混为一谈。此类等同掩盖了这些概念运作于不同范畴层级这一事实。

本文的目的是使这一分离精确化。我们在Lawvere式范畴语义中，尤其是在拓扑斯中工作，证明了一条范畴论独立性定理，表明意义、对象、名称与存在性并不能以统一的方式彼此还原。

核心结构性现象出现在几何宇宙中：内部存在性通过内部逻辑中的存在量化来表达，

但并不等同于全局命名。通过拓扑斯$\mathbf{Sh}(S^1)$中的一个具体例子，我们展示了一个内部非空但不含全局元素的对象。

这些结果为常被哲学讨论的区分提供了精确的结构化阐释，并阐明了几何宇宙作为框架的作用：在其中，存在性受局部相干性而非全局命名支配。

最后，我们就未来研究的可能方向作一些评论。

本文对 [5], 中提出的概念分析作了数学上的发展。该分析从哲学视角，在 Lawvere 的范畴语义框架内考察了意义、对象、名称与存在性之间的区分。本文给出了精确的范畴论表述，并提出了一条支持这些区分的独立性定理。

2 四个基本概念（形式化范畴定义）

2.1 环境范畴语义

固定一个具有有限极限的范畴 $\mathcal{E}$ 。对于下文的大部分内容，只需假设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯（因此 Ω 和内量词存在）；不过，以下基本条款在任意有限完备范畴中都已有定义。

我们使用一种类型化语言 $\mathcal{L}$ （多排序、简单类型或高阶语言），其语法/上下文与项范畴记为$\mathbf{Syn}(\mathcal{L})$。$\mathbf{Syn}(\mathcal{L})$的对象是上下文 Γ（类型化变量列表），箭头是上下文中的项（按等价类计）。 $\mathcal{L}$ 在 $\mathcal{E}$ 中的一种（ Lawvere 风格）范畴语义由一个解释函子给出，

$$[\![-]\!] : \mathbf{Syn}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{E}$$

该函子保留相关结构（至少保留有限极限；在高阶情形下，通常还保留笛卡尔闭结构和子对象分类器）。

对于每个类型 A of $\mathcal{L}$，我们用 $[\![A]\!]$ 表示它在 $\mathcal{E}$中的解释对象；对于每个上下文 Γ ，我们用 $[\![\Gamma]\!]$ 表示其解释对象。如果 t 是上下文 Γ中类型 A 的一个项，则其解释是一个箭头

$$[\![t]\!] : [\![\Gamma]\!] \longrightarrow [\![A]\!].$$

如果 φ 是上下文 Γ中的一个公式，其解释是 $[\![\Gamma]\!]$的一个子对象；等价地说（在拓扑斯中），是一个特征态射

$$[\![\varphi]\!] : [\![\Gamma]\!] \longrightarrow \Omega.$$

2.2 四个概念的形式定义

定义 2.1 (对象**)**。（相对于语义 $[\![-]\!]$的）对象 是 $\mathcal{E}$ 中的一个对象，它解释了该语言中的一个类型。具体而言，对于 $\mathcal{L}$中的类型 A， A 所表示的对象 是 $[\![A]\!] \in \mathrm{Ob}(\mathcal{E})$。

定义 2.2 (名称**)**。 设 A 是一个类型，且 $\mathcal{E}$ 有一个终对象1。对象 $[\![A]\!]$ 中一个元素的名称 是一个全局元素

$$n : 1 \longrightarrow [\![A]\!].$$

更一般地，广义名称 （或上下文中的名称 X）是一个箭头$n : X \to [\![A]\!]$。在内语言中，广义名称对应于含有自由变量的项，而全局名称对应于闭项。

定义 2.3 (意义**)**。 表达式的意义 是它在 $[\![-]\!]$下的语义值。

1. 若 t 是在上下文 Γ中、类型为 A 的项，则 t 的意义是该态射

$$[\![t]\!] : [\![\Gamma]\!] \to [\![A]\!].$$

2. 若 φ 是在上下文 Γ 中的公式，且 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，则 φ 的意义（真值）是子对象

$$[\![\varphi]\!] \hookrightarrow [\![\Gamma]\!],$$

等价地，其特征态射为 $[\![\varphi]\!]$: $[\![\Gamma]\!] \to \Omega$。

因此，意义本质上是态射层级的数据：项表示箭，公式表示子对象（或指向 Ω的箭头）。

定义 2.4（存在性）。 存在性至少有两种不同的范畴论概念。

1. 外部（全局）存在 / 有居。 对象 $[\![A]\!]$ 是有居的 （或具有外部存在），如果它拥有一个全局元素，即存在一个箭头 $1 \to [\![A]\!]$。等价地，集合 $\mathcal{E}$（1、$[\![A]\!]$）非空。

2. 内部（逻辑）存在。 假设 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯。对于上下文 Γ和类型 A，令 $\pi\colon [\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!] \to [\![\Gamma]\!]$ 为投影。沿着 π 的存在量词是左伴随

$$\exists_\pi : \mathrm{Sub}([\![\Gamma]\!] \times [\![A]\!]) \longrightarrow \mathrm{Sub}([\![\Gamma]\!])$$

到拉回 π^*的左伴随。若 φ 是上下文 Γ中的公式，$x\colon A$，则内部存在陈述 $\exists x\colon A\,\varphi$表示子对象

$$[\![\exists x\colon A\,\varphi]\!] := \exists_\pi([\![\varphi]\!]) \hookrightarrow [\![\Gamma]\!].$$

我们强调：*(i)* 有居是关于全局元素的陈述，而 *(ii)* 内部存在是 $\mathcal{E}$的内部逻辑中的陈述。一般而言，两者未必一致。

注 2.1 (层次分离**)**。 在这种形式化表述中：

- 对象 处于 $\mathcal{E}$的对象层次。
- 名称 处于（全局或广义）元素的层次，即指向某个对象的箭头。
- 意义 存在于解释层面，即由 $[\![-]\!]$ 诱导的箭头。
- 存在性要么处于全局层面（有居），要么处于内部逻辑层面（存在量化）；这两者在范畴论上是截然不同的概念。

3 主定理：范畴论独立性

引理 3.1 (无全局名称的内部非空层**).** 设 $X = S^1$为圆，并设

$$p : E \longrightarrow S^1$$

为非平凡覆盖映射（例如，标准二重覆盖 $p{:}S^1 \to S^1$, $p(z) = z^2$）。设 A 为 p的局部截面层，即对每个开集 $U \subseteq S^1$,

$$A(U) = \{\, s : U \to E \mid p \circ s = \mathrm{id}_U \,\}.$$

于是， A 在$\mathbf{Sh}(S^1)$中是内部非空的，但没有全局截面。

证明。 我们分两步论证。

*(*内部非空性*)*。 根据覆盖映射的局部平凡性， S^1 中的每个点都存在一个开邻域 U ，使得 p在其上有一个连续的局部截面。等价地，限制映射族

$$A(U) \longrightarrow A(V)$$

在局部上非空。从范畴论角度看，这意味着典范态射

$$!_A : A \longrightarrow 1$$

是$\mathbf{Sh}(S^1)$中的一个满态射。因此，$\mathbf{Sh}(S^1) \models \exists a{:}\ A.\top$，所以 A 是内部非空的。

*(*全局截面的缺失*)*。 A 的一个全局截面恰好就是覆盖 $p : E \to S^1$的一个连续全局截面。由于假设 p是非平凡的，因此不存在这样的全局截面。因此，$\mathbf{Sh}(S^1)(\mathbf{1}, A) = \varnothing$。

结合这两部分， A 在内部非空，但不存在全局名称。

□

为了精确定义项独立性 ，我们采用以下最小判据。

定义 3.1 (不可恢复性**)**。 固定一个如上一节所述的语义环境$(\mathcal{E}, [\![-]\!])$。如果对于每个这样的环境，概念N 都能由概念D 统一地确定（在 $\mathcal{E}$ 中模典范同构/相等），即通过一种在语义环境等价下保持不变的构造确定，我们就称N 可由概念D 恢复。如果N 不能由D恢复，我们就称N 独立于D 。

下一引理记录了拓扑斯中内部与外部存在性概念之间的标准区分。

引理 3.2（内部非空性与全局元素）。设 $\mathcal{E}$ 为一个拓扑斯，且 $A \in \mathcal{E}$。记 $!_A : A \to 1$ 为到终对象的唯一映射。则：

1. A 有全局元素 当且仅当存在一个箭头 $1 \to A$。
2. A 是内部非空的（即 $\mathcal{E} \models \exists a : A.\top$）当且仅当$!_A : A \to 1$ 是满态射。

一般而言，*(2)* 并不蕴含 *(1)*。

证明。(1) 是全局元素的定义。

(2) 在拓扑斯的内语言中，陈述"$\exists a : A.\top$"表示 A 在局部上非空。标准的范畴论刻画是：局部非空性等价于 $!_A$ 为满态射。（完整起见：$!_A$ 为满态射意味着 A 的广义元素族在内部逻辑的意义下联合满射，这恰好对应于 $\exists a\colon A.\top$ 有效。）

对于不蕴含的情形，取 $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(X)$，其中空间 X 存在一个覆盖映射 $p : E \to X$，但没有全局截面（例如，连通空间的一个非平凡覆盖）。令 A 为 p 的局部截面层。那么 $!_A : A \to 1$ 是满态射（覆盖上局部存在截面），因此 A 是内部非空的；但 p 没有全局截面，因此没有全局元素 $1 \to A$。 □

现在我们可以陈述一个精确的独立性定理。直观地说：对象处于对象层面，意义处于态射／子对象层面，名称处于元素层面，而存在性处于逻辑（满态射／量词）层面。这些层面通常不会相互归并。

定理 3.1（范畴论独立性）。设 $(\mathcal{E}, [\![-]\!])$ 遍历语义环境，其中 $\mathcal{E}$ 是一个拓扑斯，$[\![-]\!]$ 是一种 *Lawvere* 风格的解释。那么，四个概念

$$\text{Meaning}, \quad \text{Object}, \quad \text{Name}, \quad \text{Existence}$$

在以下具体意义上两两独立且整体独立：

1. 意义无法从对象、名称和存在性中恢复。即使固定相同的已解释对象以及相同的可用名称／存在性事实，也可能出现不同的意义（不同的箭）。

2. 名称无法从意义、对象和存在性中恢复。即使固定已解释对象、意义和存在性事实，全局名称的集合仍可能不同（甚至可能为空）。 *3.* 存在性无法从意义、对象和名称中恢复。尤其是，内部存在（有居）通常并不等同于外部存在（全局命名）。 *4.* 对象无法从意义、名称和存在性中恢复。即使固定某个片段中所有可用的态射层级数据，以及其中可见的存在性／名称事实，非同构对象仍可能无法区分。

证明。 我们针对每一项可恢复性断言给出显式反例。
(1) 意义无法从其余各项中恢复。 在 $\mathcal{E} = \mathbf{Set}$中进行。设 $A = B = \{0, 1\}$。考虑两个不同的箭 f， g： $A \to B$，其中 f =为恒等，而g 为常值映射 $g(x) = 0$。两种情形下所解释的对象 A， B 相同； A 与 B 的可用名称（全局元素）只是其底层元素，因而也相同；而粗略的存在性 事实（有居、全局元素的存在）亦相同。然而该项（该箭头）的意义不同： $f \neq g$。因此，意义无法从对象层面、名称层面与存在性层面的数据中恢复。

(2) 名称无法从其余各项中恢复。 在几乎没有或完全没有全局点的拓扑斯中进行，例如连通空间 X上的 $\mathcal{E} = \mathbf{Sh}(X)$。存在许多互不同构的层 A，它们没有全局截面，即满足 $\mathcal{E}(1, A) = \varnothing$，因而没有名称 可言。固定任意这样的 A，并考虑 A 出现于其中的同一对象层面与态射层面片段（例如其恒等态射、投影等）。所有这些意义层面的箭都是固定的，而存在性层面的陈述也可以是固定的（例如， A 可以内部有居，也可以不有居，而这与是否具有全局截面无关）。尽管如此，全局名称是否可得并不由其余数据决定：可以将 A替换为 $A + 1$（与终对象的余积），而后者确实具有一个全局元素，同时保留同一态射层面行为片段的大部分。因此，名称不能一律从意义/对象/存在性中恢复。

(3) 无法从其他项恢复的存在性。根据引理3.1，在拓扑斯$\mathbf{Sh}(S^1)$中，存在一个对象 A（ S^1的一个非平凡覆盖的局部截面层），它是内部非空的，即$\mathbf{Sh}(S^1) \models \exists a : A.\top$，但

没有全局元素 $1 \to A$。因此，内部存在性不能由对象层级、意义层级或名称层级数据决定。
(4) 无法从其他项恢复的对象。 在一般的拓扑斯中，由于缺少全局点，许多不同的对象会具有相同的“名称概况”（通常为空），并且无法通过有限的态射层面信息片段加以区分。具体而言，对于连通的 X，$\mathbf{Sh}(X)$ 中存在非同构的层 $A \ncong B$，满足 $\mathbf{Sh}(X)(\mathbf{1}, A) = \mathbf{Sh}(X)(\mathbf{1}, B) = \varnothing$。如果只关注这样一个片段，其中仅能看到存在性／名称事实和少量态射（如典型的语义片段），那么仅凭这些数据无法恢复 A 和 B。因此，对象无法由意义／名称／存在性统一恢复。

□

注释 3.1 (这如何支持几何宇宙)。 定理 *3.1* 表明，在几何宇宙（拓扑斯）中，语义层次（对象／态射／元素／内部存在）确实彼此不同。这为如下主张提供了精确的结构基础：*Grothendieck* 式几何宇宙可以作为信息网络的基础；局部真理和内部存在不必归并为全局命名。

4 独立性定理非正式指南

主定理确立了意义、对象、名称和存在性这四个概念在精确的范畴论意义上彼此独立。由于形式化陈述和证明依赖范畴语义与拓扑斯理论，我们在此提供一份非正式指南，供高年级学生以及哲学或逻辑领域中可能不太熟悉这些工具的读者参考。

4.1 四个概念对应四个范畴层级

核心思想是，在范畴语义中，这四个概念处于不同的结构层级：

- 对象 被解释为某个范畴（通常是一个拓扑斯）的对象 A 。
- 意义项被解释为态射 $f : A \to B$。

- 名称对应全局元素 $1 \to A$，即从终对象出发的态射。

- 存在性 通过存在量化在内部得到表达，或者等价地，通过 $A \to 1$ 的满态射性得到表达。

尽管这些概念彼此相关，但主定理表明，它们中的任何一个都无法以统一的方式约化为其他概念，或从其他概念重构出来。

4.2 示意图

这一情形可以通过下面的图示直觉加以概括：

$$
\begin{array}{ccc}
\text{Meaning} & \longleftrightarrow & \text{Morphisms } (A \to B) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\text{Name} & \longleftrightarrow & \text{Global elements } (1 \to A) \\
\uparrow & & \uparrow \\
\text{Object} & \longleftrightarrow & \text{Objects } A \\
\uparrow & & \uparrow \\
\text{Existence} & \longleftrightarrow & \text{Internal logic } (\exists)
\end{array}
$$

不应将竖直箭头理解为定义性约化。主定理恰恰断言，一般而言，不存在沿此图向上移动、从位于其下方的概念重构出某一概念的方法。

4.3 为什么存在性与命名彼此分离

最能说明问题的例子是存在性与命名之间的区别。在普通的集合论语义中，存在往往意味着由某个元素命名。然而，在几何宇宙中，存在性是一个局部概念。

在拓扑斯 $\mathbf{Sh}(S^1)$ 中，非平凡覆盖的局部截面层是内部非空的：局部而言，截面确实存在。然而，不存在全局截面，因此也无法获得名称。这一单独的例子已经表明，存在性不能等同于命名，也不能还原为命名。

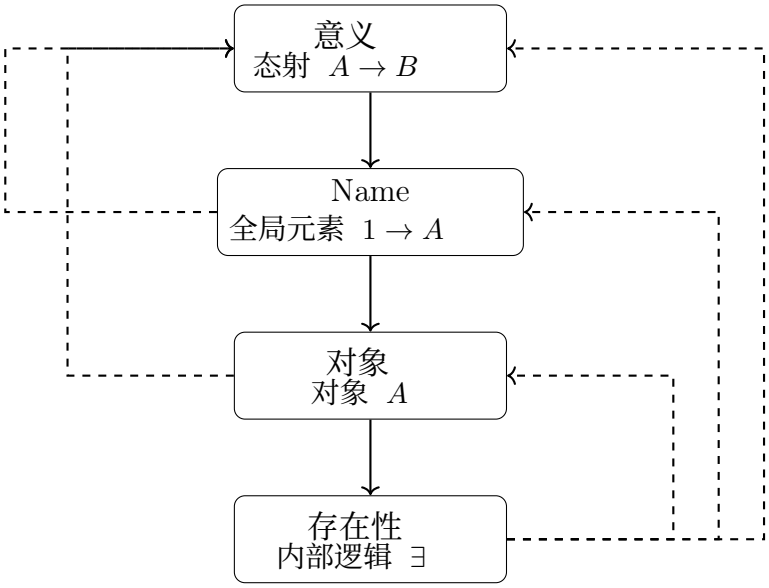


图1：四个范畴层级及其独立性。在范畴语义中，意义、名称、对象和存在性位于不同的结构层级。实线箭头表示结构关系，虚线箭头表示独立性定理所确立的不可恢复性。特别是，内部存在并不能决定全局命名。

4.4 阅读形式证明

主定理证明的每一部分，都对应于上述示意图中一种重构失败：

- 相同对象和名称对应不同的意义（在 **Set** 中）；
- 在不改变意义或存在性的情况下，名称可以不存在或存在；
- 没有全局名称的内部存在（在 $\mathbf{Sh}(S^1)$ 中）；
- 无法通过有限语义数据加以区分的非同构对象。

形式证明运用标准的范畴构造，精确地刻画了这些失效。不过从概念上说，它们反映了这样一个事实：几何语义将局部相干性与全局识别区分开来。

如图1所示，这四个概念构成分层结构：尽管彼此相关，独立性定理表明，一般而言，无法向上重构。

5 结论

本文为四个基本概念——意义、对象、名称和存在性——建立了一个范畴论独立性定理。在 Lawvere 式范畴语义中，尤其是在拓扑斯中，我们证明了这些概念处于不同的结构层级，且无法从彼此统一地恢复。

一个核心区分涉及存在性与命名。我们以拓扑斯 $\mathbf{Sh}(S^1)$ 中的一个具体例子表明，某个对象在内部是非空的，却没有全局元素。这说明，在几何宇宙的内部逻辑中表达的存在性，一般而言不能归约为对象性，也不能归约为名称的可用性。

这些结果为一些常常仅在概念层面讨论的区分提供了精确的范畴论基础，并阐明了几何宇宙如何支持这样一种语义：存在性由局部相干性而非全局识别所支配。

6 最后评论

应将本研究视为对早期哲学探究的数学发展。尤其是，[5] 中呈现的、在 Lawvere 的范畴语义框架内对意义、对象、名称与存在性的概念分析，在此通过一个明确的范畴论独立性定理得到了加强。

Lawvere 框架为范畴语义提供了强大而统一的基础。与此同时，本文的结果表明，当我们明确地在几何宇宙中开展研究时，便能看见进一步的结构性区分——尤其是内部存在与全局命名之间的区分。从这个意义上说，本研究可视为一个案例研究，展示了如何在 Lawvere 原有框架之内及之外，将这类区分精确地表述为数学命题。

这些观察结果提出了若干可进一步发展的方向，包括将名称视为模态对象；这一方向将在未来的工作中加以探讨。

注释 6.1。本文证明的独立性定理可视为对 *[5]* 中提出的哲学区分的范畴论强化，并为这些区分在几何宇宙中奠定结构性基础。

注释 6.2。 本文确立的这些区分，也有助于理解 *[6],* 中提出的信息网络的几何解释。在这种解释中，局部相干性而非全局命名发挥着核心的结构性作用。

参考文献

[1]G. Frege, 《论意义与意谓》, 《哲学与哲学批评论丛》100（1892）, 25–50。[2]P. T. Johnstone, 《大象素描：拓扑斯理论纲要》, 牛津大学出版社，2002。[3]F. W. Lawvere, 《基础中的伴随性》, 《辩证法》23（1969）, 281–296。[4] T. Inoué, 《论存在》。预印本，2024。https://www.researchgate.net/publication/393805134_On_Existence_The_first_version_version_10[5] T. Inoué, 《Lawvere 范畴语义中的意义、对象、名称与存在性》。预印本，2026。https://www.researchgate.net/publication/399474156_On_Meaning_Object_Name_and_Existence_in_Lawvere's_Categorical_Semantics[6] T. Inoué, 《Grothendieck 几何宇宙与信息网络的层论基础》, arXiv:2602.17160 [math.CT], 2026,康奈尔大学。[7] T.Inoué, 《论存在的定义》。预印本，PhilArchive，2026。此外, https://www.researchgate.net/publication/399467287_On_Definitions_of_Existence[8] S. Mac Lane 和 I. Moerdijk, 《几何与逻辑中的层》, 施普林格，1992。

Takao Inoué Yamato University 信息学部 日本大阪府吹田市片山町 2-5-1，邮编 564-0082
inoue.takao@yamato-u.ac.jp（个人邮箱）
takaoapple@gmail.com（我更喜欢使用个人邮箱）