arXiv:2602.18038v1 [cs.GT] 20 Feb 2026

隐藏样本定价

Zhihao Gavin Tang * Yixin Tao † Shixin Wang ‡

摘要

我们研究卖方仅观察到估值分布中的单个样本、而买方了解该分布时，如何以先验无关的方式向单一买家出售单一物品。经典的鲁棒定价方法要么依赖分布统计量，而这些统计量通常需要大量样本才能估计；要么直接利用公开样本来确定价格与分配。我们表明，借助买方的信息优势，可以打通这两种方法：在传统方法中需要卖方掌握均值、 L^η-范数或超分位数等统计量的定价策略，在我们的框架下仅凭单个隐藏样本即可实施。

我们引入隐藏定价机制：卖方事前承诺采用一项基于单个样本的定价规则，而该样本仅在买方作出参与决策后才会揭示。我们证明，每种凹定价策略都能以这种方式实现。为评估性能保证，我们针对 α 正则分布，构建了一种用于分析单调定价策略的一般归约方法，从而能够以可处理的方式刻画最坏情况实例。利用这一归约方法，我们刻画了最优单调隐藏定价机制并计算其近似比；特别是，对于单调风险率（MHR）分布，我们得到了约为 0.79 的近似比。我们还为一般凹定价策略以及所有先验无关机制证明了不可能性结果。最后，我们表明，该框架同样适用于基于统计量的稳健定价，从而统一了基于样本和基于统计量的方法。

*计算与经济学交叉研究重点实验室，上海财经大学tang.zhihao@mail.shufe.edu.cn

†计算与经济学交叉研究重点实验室，上海财经大学taoyixin@mail.shufe.edu.cn

‡H. Milton Stewart工业与系统工程学院，佐治亚理工学院 shixin.wang@isye.gatech.edu

1 引言

定价是众多行业中的一项基本管理决策。在完全市场信息下——即卖方知晓买方的估值分布时 $\mathbb{F}$，最优定价策略p^* 是将分布确定性地映射为一个价格 [Myerson， 1981]:

$$p^*(\mathbb{F}) := \arg\max_v v \cdot (1 - \mathbb{F}(v)).$$ [1]

然而在实践中，卖方很少掌握估值分布的完整信息。他们通常只能从历史交易数据、价格实验或市场调查中推断出部分信息，例如矩、分位数、细分市场层面的平均值，或少量数据样本。因此，定价决策是在有限统计知识下作出的。这一挑战催生了大量关于稳健机制设计的研究，旨在寻找能够在最坏情况场景下表现良好，并在所有与现有需求信息一致的分布下提供可靠保证的定价策略。给定此类汇总统计知识（如分布的均值、方差和分位数），稳健定价策略通常被表述为从可用统计量到标价的映射。这些基于统计量的稳健机制设计方法能够提供明确的最坏情况保证，并且往往能确定简单且易于解释的定价策略。另一个方向的研究探讨基于样本的稳健定价，即卖方直接利用少量观测样本来制定定价策略。这些方法对于小样本情形尤其有吸引力；这类情形在实践中十分常见，例如“冷启动”问题（新产品发布），或在积累大量数据之前分布便发生变化的高度动态环境。在这些情况下，卖方必须基于极其稀缺的数据作出决策，有时只有一两个观测值，因此，能够利用极少样本有效运作的稳健机制至关重要。然而，这两种研究范式之间存在一个根本性的脱节。基于统计量的稳健定价机制提供了强有力的理论保证，但前提是卖方已知这些统计量。实际上，要精确估计这些统计量需要大量数据。当卖方只能获取少量样本时，就无法可靠地估计这些统计量。

这种脱节促使我们不再局限于卖方掌握的统计量和样本信息，而是考虑许多市场中蕴含的另一种重要隐性信息来源：买方的知识。买方往往比卖方更了解估值分布，这源于他们的领域专业知识、反复参与市场，或对自身需求环境的直接了解。本文旨在评估买方信息对于设计有效定价策略的价值。我们核心的研究问题是：当卖方只能获得一个样本时，能否利用买方的信息优势来改进销售机制的设计?

为回答这个问题，我们提出了一个一般框架，从概念和操作层面连接基于统计量与基于样本的鲁棒定价范式。基于这一框架，我们证明，只需一个样本，就足以达到经典的基于统计量的机制所具有的精确性能保证；这类机制假设卖方知道均值或L^2-范数等量。一个关键洞见是，卖方可以通过我们所称的隐藏定价机制，利用买方的信息优势。在这种机制中，卖方私下观察一个样本s，事前承诺一条定价规则，将该样本（以及买方可能报告的信息）映射为支付，并且只有在买方决定是否参与之后才揭示该样本。由于买方了解底层分布，她的参与决策仅取决于其私人

[1]更形式化地说，正确的表达式是 $v \cdot \mathbb{P}[s \geq v] = v \cdot (1 - \mathbb{F}(v-))$，其中考虑了数值 v 处可能存在点质量的情况。为简化记号，本文通篇省略负号。

估值以及承诺规则所产生的期望价格；后者对应于估值分布的一个泛函。因此，通过恰当设计规则，卖方仅凭一个观测样本，就能有效实现估值分布的目标统计量。例如，尽管估计均值需要 $\Theta(1/\epsilon^2)$ 个样本，但仅拥有一个隐藏样本的卖方，也能达到与事先已知均值时相同的近似保证。我们将在下面的例子中说明这一思路。

均值定价。 卖方承诺采用一项定价规则

$$h(s) = s \ ,$$

其中， s 是一个隐藏样本。根据这项规则，如果买方接受报价，她就有义务支付 $h(s) = s$。由于买方无法观察到实际抽取的样本，她会将自己的估值 v 与期望价格进行比较

$$p(\mathbb{F}) = \mathbb{E}[h(s)] = \mathbb{E}[s] = \|\mathbb{F}\|_1 \ .$$

因此，当且仅当买方的估值 $v \geq \|\mathbb{F}\|_1$时，她才会接受报价，并在期望意义下支付 $\|\mathbb{F}\|_1$ ；否则，她会拒绝参与。因此，这种机制实际上等同于以分布的均值作为价格进行报价。

在这个例子中，买方的知识只是被隐式地使用。如果买方不知道分布的均值，那么没有自然的解概念能够决定她在我们的隐藏定价机制下会如何行动。另一方面，她不需要全面了解整个分布——只知道均值，就足以做出理性的参与决策。卖方也可以采用一种定价策略，将价格设为均值乘以一个折扣倍数；当均值已知时，这是在稳健定价机制下有效的定价策略。

此外，卖方还可以明确让买方参与定价过程，实际上让她“为自己定价”。我们用两个例子来说明这一想法： L^2-范数定价和超分位数定价。

L^2-范数定价。 卖方承诺采用一条定价规则

$$h(s, x) = 0.5\left(x + \frac{s^2}{x}\right) \ ,$$

其中 s 是隐藏样本， x 是向买方征询的报告。对于任意私人估值为 v 的买方，她通过报告 $x = \|\mathbb{F}\|_2 = \sqrt{\mathbb{E}[s^2]}$来最小化自己的期望支付 $\mathbb{E}[h(s, x)]$ 。在这一报告下，期望支付变为

$$p(\mathbb{F}) = \mathbb{E}[h(s, \|\mathbb{F}\|_2)] = \sqrt{\mathbb{E}[s^2]} = \|\mathbb{F}\|_2 \ .$$

因此，当且仅当买方的估值 $v \geq \|\mathbb{F}\|_2$时，她才接受报价，并在期望意义下支付 $\|\mathbb{F}\|_2$ ；否则她拒绝参与。因此，该机制实际上等同于发布一个价格，该价格等于分布的 L^2-范数。

我们指出，这种隐藏定价机制只要求买方知道分布的 L^2范数，从而可以决定报告什么以及是否参与。同样的构造可自然地推广到任意 $\eta \geq 1$的广义 L^η范数。以下示例

展示了超分位数在定价策略中的应用，其中 $\mathrm{VaR}_q = \mathbb{F}^{-1}(1-q)$ 表示购买概率为 q 时的分位数，而 $\mathrm{CVaR}_q = \mathbb{E}[v \mid v \geq \mathrm{VaR}_q]$ 表示 q的超分位数。[2]

超分位数定价。 卖方公开宣布一个 $q \in (0,1]$，并承诺采用一项定价规则

$$h(s,x) = x + \frac{1}{q} \cdot (s-x)^+ \ ,^a$$

其中 s 是一个隐藏样本，而 x是向买方征求的报告。具有任意私人估值的买方 v 通过报告 $x = \mathrm{VaR}_q = \mathbb{F}^{-1}(1-q)$，使其期望支付 $\mathbb{E}[h(s, x)]$ 最小。在此报告下，期望支付变为

$$p(\mathbb{F}) = \mathbb{E}[h(s, \mathrm{VaR}_q)] = \mathrm{VaR}_q + \frac{1}{q} \cdot \mathbb{E}[(s - \mathrm{VaR}_q)^+] = \mathbb{E}[s \mid s \geq \mathrm{VaR}_q] = \mathrm{CVaR}_q(\mathbb{F}) \ .$$

因此，当且仅当买方的估值 $v \geq \mathrm{CVaR}_q(\mathbb{F})$时，她才接受报价，并且期望支付 $\mathrm{CVaR}_q(\mathbb{F})$；否则她拒绝参与。因此，该机制实际上等价于设定一个价格，该价格等于该分布的 CVaR_q 。

[a]我们使用 x^+ 表示函数 $\max(x, 0)$。

在此例中，我们的机制要求买方了解 VaR_q ，以确定应报告什么，并了解 CVaR_q ，以决定是否参与。

正如我们所见，卖方可以通过将精心设计的隐藏定价规则 h 与单个隐藏样本结合使用，来实现丰富的定价策略 $p\colon \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 。当买方完全了解该分布时，隐藏定价规则 h充当一种适当评分规则：它将隐藏样本 s和买方报告的分布 $\mathbb{F}$ 映射为一笔支付。在我们的语境中，如果如实报告分布能够使期望支付最小，则称定价规则为适当的 。根据适当评分规则的萨维奇表示定理，任何凹的 定价策略p 都可以通过这种隐藏定价机制来实现。作为补充说明，我们注意到，最优标价泛函 p^* 并非凹函数；否则，单个隐藏样本结合买方的知识，就足以在所有分布上实现最优收益。

我们采用先验无关机制设计框架来评估不同定价策略的性能保证，并识别最优隐藏定价机制。具体而言，我们假设卖方可以获得单个样本，并且仅知道买方的价值分布属于“α-正则”分布构成的非参数歧义集，这一假设在文献中得到了广泛应用。 $\alpha = 1$ 对应于单调风险率（MHR）分布类，其中包括均匀分布、截断正态分布、指数分布、逻辑斯蒂分布和极值分布等广泛的分布类别。卖方旨在寻找最优定价策略，以防范自然界可能从“α-正则”分布中选择的最具对抗性的分布。我们采用最大最小比率目标，其中定价策略的表现是相对于信息完全的全知卖方所能获得的事后最优预期收益来衡量的，即：

$$\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) := \max_v v \cdot (1 - \mathbb{F}(v)) \ .$$

一个核心难题是，要评估任何定价策略的最坏情况近似比，都需要在一个通常非凸的集合上求解一个无限维优化问题，该集合由

[2]在金融和优化文献中，超分位数通常称为条件风险价值（CVaR），而分位数通常称为风险价值（VaR）。本文采用这一术语。不同于风险度量的解释，我们在此仅将 CVaR 视为一种分布统计量。

分布构成。

我们通过将关注范围限定为关于一阶随机占优单调的定价策略，克服了这一困难——此前考虑的所有示例都满足这一自然性质。我们的主要贡献是对自然的优化问题给出一个易于处理的归约。我们证明，对于任意确定性单调定价策略，自然的最优对抗性响应始终属于一个简单的二参数分布族。此外，对于依赖于分布某个特定统计量的定价策略（例如均值、 L^2-范数或超分位数），我们还能进一步收紧这一归约：最坏情况分布可以限定在一个单参数族内。

从技术上讲，我们的方法关键在于区分标价过高与标价过低这两种情况。如果卖方定价过高（相对于事后最优值），那么估值分布“越大”，性能比就越差；如果卖方定价过低，那么估值分布“越小”，性能比就越差。这一洞见使我们能够将无限维的歧义集归约为一个易于处理的参数化分布类别。

除了量化特定定价策略的近似比之外，我们的归约还使我们能够刻画每个 $\alpha \in [0,1]$ 下的最优隐藏定价机制——或者等价地，最优凹定价策略。借助计算机辅助，我们计算得出，对于单调风险率分布，最优单调隐藏定价机制可达到 ~ 0.79 的近似比。

表1 总结了若干具有代表性的定价规则在单调风险率分布下的最优折扣和性能比。值得注意的是，均值定价和超分位数定价等简单规则，其性能保证接近最优单调隐藏定价机制。

表1：单调风险率分布下不同定价策略的最优近似比

定价策略 p	隐藏定价规则 h	参数	折扣 ω	比率
Mean	$\omega \cdot s$	-	0.823	0.771
L^η-范数	$\omega \cdot \frac{1}{\eta}\left((\eta-1)\lVert\mathbb{F}\rVert_\eta + \frac{s^\eta}{\lVert\mathbb{F}\rVert_\eta^{\eta-1}}\right)$	$\eta = 1.37$	0.805	0.774
超分位数	$\omega \cdot \left(\text{风险价值}_q + \frac{1}{q}(s - \text{风险价值}_q)^+\right)$	$q = 0.92$	0.787	0.787
最优单调	定理 4.1	-	-	~ 0.79

我们的归约框架不仅使我们能够为一大类定价规则取得积极结果（下界），也为确立否定性结果（上界）奠定了基础。我们证明，在单调风险率分布下，任何凹定价规则的近似比都无法超过 0.801，这表明，将关注范围限制在单调定价规则上只会造成极小的性能损失。

此外，我们还为所有一般的先验无关机制获得了更强的不可能性结果。具体而言，对于单调风险率分布，我们证明了上界为 0。838，改进了此前由Feng 等人 [2021]报告的 0。934 上界。我们的下界 0。79 与上界 0。838 之间的微小差距，凸显了我们的隐藏定价机制在更广泛的所有先验无关机制类别中的有效性。此外，作为一个说明性的玩具示例，我们证明，在均匀分布下，隐藏定价机制可实现 0。875 的近似比，这在所有先验无关机制中是最优的。

最后，除了基于样本的情形，我们的框架还可自然地扩展到鲁棒定价问题：在这类问题中，卖方观察到任意单调统计量 $\Psi(\mathbb{F})$，例如均值、分位数或下尾

期望，即使相应的泛函并非凹函数。具体而言，表 1 中所列的最优机制和近似比可直接应用于分别受均值、 L^η-范数或超分位数信息约束的鲁棒定价问题。第 6 节详细讨论了基于统计量的实现与基于样本的实现之间的等价性，并由此确立了我们的方法所提供的统一框架，能够衔接基于统计量和基于样本的稳健定价机制。

内容安排。 在下一小节中，我们讨论相关工作。第2 节形式化了带有单个样本的先验无关机制设计问题，并引入隐藏定价机制。作为一个说明性例子，我们证明隐藏定价机制在均匀分布上达到了0.875的近似比。第2.3 节介绍了边界 α-正则分布，并强调了若干对我们的分析至关重要的性质。第3 节给出了针对一般单调定价策略的主要归约。我们在第4节刻画了最优单调隐藏定价机制。第5节建立了我们的否定性结果，而第6 节探讨了隐藏定价机制与带有统计量信息的鲁棒定价之间的联系。

1.1 相关工作

先验无关定价与机制设计沿着两条不同的路径展开，其区别在于卖方可获得的信息类型。

基于样本的定价。第一条研究路线，我们称之为“基于样本”的模型，利用从未知价值分布中抽取的样本来设计定价或拍卖机制。在单样本设定下，Huang等人 [2018]证明，正则分布下的最优确定性近似比为0.5，并进一步为单调风险率分布下的确定性机制建立了0.589的下界和0.68的上界。Allouah等人 [2022] 将单调风险率下界改进至0.644，并为随机化机制给出了0.648的上界。Fu等人[2015] 率先展示了随机化机制的优势。随后，Allouah等人[2022] 将正则分布下随机化机制的下界改进至0.502。在两个样本的情形下，Babaioff等人 [2018],以及Daskalakis和Zampetakis [2020] 推导了正则分布下确定性机制的下界。Allouah等人 [2022] 提供了一种针对一般样本数量建立下界的通用方法。另一条并行的文献研究了达到给定近似比所需的样本复杂度 [Cole和 Roughgarden，2014，Gonczarowski和Nisan，2017，Huang等人，2018，Guo等人，2019，Hu等人， 2021]。以往工作聚焦于基于公开样本的机制设计。相比之下，我们提出了隐藏样本框架，其中样本对买方是隐藏的，而非如以往工作那样公开，甚至可能直到分配时卖方仍未观察到该样本。

与我们最接近的工作是Feng 等人 [2021], ， 该工作同样研究带有单个样本的先验无关机制设计，并假设买方完全了解价值分布。其核心贡献是，在买方提交单个出价的标准范式中，识别真实机制与非真实机制之间的揭示差距。在我们的设定中，买方可以报告该分布，而在这一更丰富的消息空间下，揭示原理仍然适用。这一转变使我们能够分析更广泛的一类定价机制。例如，所提出的样本出价机制见于Feng 等人 [2021] ，该机制在单调风险率分布下与均值定价一致，而我们提出了一族易于处理的无限维定价规则，并给出了严格改进的近似保证。此外，我们通过在更一般的模型中提供加强的不可能性界，对其下界结果作了补充。

基于统计量的定价。我们称之为“基于统计量”模型的第二条研究路线，考虑卖方掌握价值分布的部分信息——例如矩、分位数或其他汇总统计量——的情形。卖方的目标是选择一个价格或机制，使其在与该信息一致的最悲观分布下最大化表现。针对基于矩信息的模糊集，人们在最大最小收益目标下研究稳健机制 [Pınar和Kızılkale，2017，Carrasco等人，2018，Chen等人，2022, 2023], 均值保持收缩 [Du，2018，Chen等人， 2023] 以及Wasserstein度量 [Li等人，2019，Chen等人， 2023]。Bergemann和Schlag [2008], Caldentey等人 [2017],Ko˛cyi˘git等人 [2022] 在最小最大遗憾目标下研究带有支撑集信息的稳健机制。对于最大最小比率目标，人们针对支撑集 [Eren和Maglaras， 2010], 矩 [Giannakopoulos等人，2023，Wang等人， 2024], 以及分位数 [Allouah等人，2023，Bahamou等人，2024，Wang，2025，Naby等人， 2025]模糊集推导了稳健机制。

在这些研究中，Allouah等人 [2023] 的研究与我们的设定最为接近，因为他们研究了针对 α-正则分布的基于分位数的歧义集。请注意，分位数信息是非凹的，因此无法通过隐藏定价机制实现分位数定价，所以他们的近似保证无法与我们的结果直接比较。另一方面，分位数是一种单调统计量。因此，我们在定理3.1中的归约适用于所有由一般单调统计量定义的歧义集，因而涵盖了分位数歧义集。我们通过构建一个全面的框架，为稳健定价文献作出贡献；该框架研究了 α-正则分布下基于一般单调统计量信息的稳健定价。

评分规则。 评分规则的研究可追溯至开创性工作 Brier [1950], ，其后Savage [1971]为评估概率预测奠定了全面的基础。关于更广泛的背景，读者可参阅Lambert等人 [2008b], 的综述，以及Frongillo和Waggoner [2024]近期发表的综述。大量研究探讨了统计性质的可诱导性 [Osband，1985，Gneiting和Raftery，2007，Lambert等人，2008a]。在这一框架中，代理人报告一个单一属性（例如均值或中位数）；若如实报告能够使期望得分最大化，则该评分规则是适当的。该领域的一项经典结果是，条件风险价值本身不可诱导，而（风险价值，条件风险价值）这一对统计量则可以联合诱导 [Fissler和Ziegel， 2016]。

然而，我们的工作采取了不同的视角：我们设计评分规则，使其贝叶斯风险（期望得分）实现我们所关注的量。这一区分对于理解我们的示例非常重要。例如，在我们的 L^η-范数示例中，评分规则既能诱导 L^η-范数，其贝叶斯风险也等于该范数——这是一种偶然的一致。在我们的 CVaR 定价示例中，评分规则则诱导风险价值，而其贝叶斯风险等于条件风险价值，这正是我们设计的目标。因此，我们使用评分规则旨在塑造贝叶斯风险，而不是确定某个性质（例如条件风险价值）是否可以被直接诱导。此外，第 4 节中的最优隐藏定价规则要求买方报告完整的分布，因此从概念上说，我们的设定不属于标准的性质可诱导框架。

Caillaud 和 Robert [2005] 研究了一种拍卖环境，在这种环境中，卖方并不知道买方的价值分布。 Azar 等人 [2012] 研究了一个相关情境，其中“买方比卖方更了解彼此”。这两项研究与我们关于买方比卖方更了解市场的假设有着相似的思路。具体而言，Azar 等人 [2012]将评分规则纳入多智能体机制设计。然而，一个关键区别在于，在他们的框架中，引出的信息只会影响卖方针对其他买方采取的策略，因此信息引出与机制设计问题彼此独立。相比之下，在我们的设定中，定价机制本身就是一项评分规则，我们会直接对其进行优化。

2 问题表述

我们研究稳健垄断定价问题，其中卖方旨在向一位买方出售一件产品。买方对该产品有一个私人估值 v，该估值取自分布 $\mathbb{F}$。卖方不知道买方的估值 v 或先验分布 $\mathbb{F}$，但拥有一个隐藏的样本 $s \sim \mathbb{F}$；与之相对，买方知道分布 $\mathbb{F}$，但不知道卖方观察到的样本 s。

我们研究允许买方同时报告其估值 v和她对先验分布 $\mathbb{F}$的了解程度的收益最大化机制。一个机制包括分配函数 x:$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Delta(\mathbb{R}) \to [0,1]$ 和支付函数 t：$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$。根据揭示原理，我们可以将注意力限制在满足激励相容（IC）和个体理性（IR）的机制上。也就是说，诚实报告可以使她自身的效用最大化：

$$\begin{aligned} \text{IC:} \quad & \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[v\cdot x(s,v,\mathbb{F}) - t(s,v,\mathbb{F})\right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[v\cdot x(s,v',\mathbb{F}') - t(s,v',\mathbb{F}')\right], && \forall v,\mathbb{F},v',\mathbb{F}'\ ; \\ \text{IR:} \quad & \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[v\cdot x(s,v,\mathbb{F}) - t(s,v,\mathbb{F})\right] \geq 0, && \forall v,\mathbb{F}\ . \end{aligned}$$

对于任意机制 (x,t)，我们通过其在感兴趣的分布类 $\mathcal{F}$上的先验无关近似比来评估其表现：

$$\inf_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F},v\sim\mathbb{F}}[t(s,v,\mathbb{F})]}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})}\ ,$$

其中 $\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) = \max_v v(1-\mathbb{F}(v))$ 是在分布 $\mathbb{F}$下获得的最优收益。对于一个分布类 $\mathcal{F}$，最优的先验无关机制可由以下优化问题刻画：

$$\begin{aligned} \max_{\Gamma,x,t}: \quad & \Gamma && && (\star) \\ \text{subject to}: \quad & \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[v\cdot x(s,v,\mathbb{F}) - t(s,v,\mathbb{F})\right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[v\cdot x(s,v',\mathbb{F}') - t(s,v',\mathbb{F}')\right] && \forall v,v',\mathbb{F},\mathbb{F}' \\ & \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[v\cdot x(s,v,\mathbb{F}) - t(s,v,\mathbb{F})\right] \geq 0 && \forall v,\mathbb{F} \\ & \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F},v\sim\mathbb{F}}[t(s,v,\mathbb{F})] \geq \Gamma\cdot\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) && \forall \mathbb{F}\in\mathcal{F} \\ & 0 \leq x(s,v,\mathbb{F}) \leq 1 && \forall s,v,\mathbb{F} \end{aligned}$$

这里，Γ 表示近似比；前两个约束确保激励相容和个体理性；第三个约束保证对于每个分布 $\mathbb{F}\in\mathcal{F}$，我们的机制都是 Γ-近似的；最后一个约束限制分配函数。

2.1 动机示例：均匀分布

由于在分布空间上的激励相容约束十分复杂，优化问题（$\star$）通常难以求解。在介绍一般框架之前，我们先分析典型均匀分布族中的问题：$\mathcal{F} = \{U[a,b] \quad 0 \leq a \leq b\}$。这一特例的解为我们随后重点研究隐藏定价机制框架提供了主要动机，该框架将在下一小节中正式定义。

对于均匀分布族，考虑如下机制（x，t）：

$$x(s,v,U[a,b]) = \mathbf{1}\left[v \geq \frac{7}{16}(a+b)\right] \quad \text{and} \quad t(s,v,U[a,b]) = x(s,v,U[a,b])\cdot\frac{7}{8}s.$$

在该机制中，分配规则是基于报告的支持集 $[a,b]$的阈值策略，而在以分配为条件时，支付与卖方的样本 s成比例。

不难验证，该机制满足优化问题的约束（$\star$）。条件于发生分配时的期望支付为 $\mathbb{E}_{s\sim U[a,b]}[\frac{7}{8}s] = \frac{7}{16}(a+b)$，且与买方的报告无关。由于分配阈值恰好设为该期望成本，买方当且仅当其估值超过期望价格时才会购买，因此同时满足个人理性和激励相容条件。机制的可行性已得到确立，下面的定理将证明其最优性。

定理 2.1。对于均匀分布这一类，上文定义的机制 (x,t) 是 $(\star)$的最优解。它达到的先验无关近似比为 $\Gamma = \frac{7}{8}$。

现在我们证明该近似比，从而确立这一正面结果；相匹配的不可能性结果将在第5节中给出。

证明。我们验证，对于每个均匀分布 $U[a,b]$，我们的机制都能达到 $\frac{7}{8}$的近似比。注意，对于 $U[a,b]$，最优挂牌价格为 $\max\left(a, \frac{b}{2}\right)$，由此得到的期望收益为 $\mathrm{OPT} = \max\left(a, \frac{-b^2}{4(b-a)}\right)$。另一方面，我们的机制所对应的有效确定性价格为 $\mathbb{E}_{s\sim U[a,b]}[\frac{7}{8}s] = \frac{7}{16}(a+b)$。下面进行分类讨论。

- 如果 $a < \frac{7}{9}b$，则有 $\frac{7}{16}(a+b) > a$。那么，我们的机制的期望收益为

$$\mathrm{Rev} = \underbrace{\frac{7}{16}(a+b)}_{\text{price}} \cdot \underbrace{\frac{b-\frac{7}{16}(a+b)}{b-a}}_{\text{probability of selling}} = \frac{7}{256}\cdot\frac{(a+b)(9b-7a)}{b-a}\ .$$

  我们进一步将其分为两个子情况。

  - 如果 $a < \frac{1}{2}b$, 我们有

$$\mathrm{Rev} \geq \frac{7}{8}\cdot\mathrm{OPT} \iff \frac{7}{256}\cdot\frac{(a+b)(9b-7a)}{b-a} \geq \frac{7}{8}\cdot\frac{b^2}{4(b-a)} \iff b^2+2ba-7a^2 \geq 0\ ,$$

    只要 $a < b/2$，该不等式就严格成立。

  - 如果 $a \in [\frac{1}{2}b, \frac{7}{9}b)$,

$$\mathrm{Rev} \geq \frac{7}{8}\cdot\mathrm{OPT} \iff \frac{7}{256}\cdot\frac{(a+b)(9b-7a)}{b-a} \geq \frac{7}{8}\cdot a \iff (3b-5a)^2 \geq 0\ ,$$

    这始终成立，且当 $a = 0.6b$ 时取等号。

- 如果 $a \in \left[\frac{7}{9}b, b\right]$，我们有 $\frac{7}{16}(a+b) \leq a$。那么，我们机制的期望收益为 $\mathrm{Rev} = \frac{7}{16}(a+b)$。因此，

$$\mathrm{Rev} \geq \frac{7}{8}\cdot\mathrm{OPT} \iff \frac{7}{16}\cdot(a+b) \geq \frac{7}{8}\cdot a \iff b \geq a\ ,$$

  这始终成立，且当 $a = b$ 时取等号。

这就完成了定理正向部分的证明。 □

作为隐藏定价规则的解读。 这一最优机制的结构提供了一个关键洞见，启发了我们的通用方法。支付函数 $t(s, v, \mathbb{F}) = x(s, v, \mathbb{F}) \cdot \frac{7}{8}s$ 自然可以解读为一条隐藏定价规则。具体而言，我们可以将 $h(s) = \frac{7}{8}s$ 视为卖方承诺采用的一条定价规则。买方的决策完全由期望价格决定：她计算出 $\mathbb{E}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s)]$，并在其估值 v 满足 $v \geq \mathbb{E}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s)]$时购买该物品。

2.2 隐藏定价机制

受均匀情形下隐藏定价最优性的启发，在本文中，我们研究一类我们称之为隐藏定价机制的一般机制。

虽然第2.1 节中的机制使用了价格 $h(s)$，该价格与买方的报告无关；在一般设定中，卖方可以采用定价规则 $h(s, \mathbb{F}')$，该规则依赖于报告分布 $\mathbb{F}'$，正如 L^2-范数与引言中讨论的超分位数定价机制所示。博弈的时序如下：

- 卖方事前承诺一个定价规则 $h: \mathbb{R} \times \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，该规则将已实现的样本$s$ 与报告分布 $\mathbb{F}'$ 映射为一项支付，其中 $\Delta(\mathbb{R})$表示 $\mathbb{R}$上的分布集合。
- 买方观察到其私人估值 v 以及先验分布 $\mathbb{F}$，并在看到样本之前决定是否参与（即是否购买该物品）。
- 若其参与，则报告一个分布 $\mathbb{F}'$。随后样本 s被揭示，并向买方收取 $h(s, \mathbb{F}')$。

理性且风险中性的买方会使其期望支付最小化 $\min_{\mathbb{F}'} \mathbb{E}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s, \mathbb{F}')]$, , 并在其估值 v 超过这一期望收费时购买该商品。因此，只需考虑满足以下条件的适当定价规则。

定义 2.1（适当定价规则）。 如果定价规则 $h: \mathbb{R} \times \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为适当定价规则：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s, \mathbb{F})] \leq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[h(s, \mathbb{F}')\right], \quad \forall \mathbb{F}, \mathbb{F}' .$$

每个适当定价规则都会诱导出一个相应的隐藏定价机制：

定义 2.2（隐藏定价机制）。 给定适当定价规则 $h: \mathbb{R} \times \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$，相应的隐藏定价机制定义如下：

$$x(s, v, \mathbb{F}) = \mathbf{1}[v \geq \mathbb{E}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s, \mathbb{F})]], \quad t(s, v, \mathbb{F}) = x(s, v, \mathbb{F}) \cdot h(s, \mathbb{F}) .$$

Savage的经典结果，以及 Gneiting和Raftery [2007] 刻画了所有适当评分规则。

定理 2.2 (Savage [1971], Gneiting和Raftery [2007])。 定价/评分规则 $h(s, \mathbb{F})$ 是恰当的 当且仅当存在一个凹泛函 $p: \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 使得

$$h(s, \mathbb{F}) = p(\mathbb{F}) + \left\langle p'(\mathbb{F}), \delta_s - \mathbb{F} \right\rangle,$$

其中， $p'(\mathbb{F})$ 是 p在 $\mathbb{F}$处的任意次梯度，而 δ_s 表示 s处的狄拉克测度。在这种情况下，期望价格满足

$$p(\mathbb{F}) = \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s, \mathbb{F})] .$$

因此，每种隐藏定价机制都对应一个凹泛函 $p:\Delta(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$。

推论 2.1。 如果且仅如果 $p:\Delta(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 是凹函数，那么明示定价策略 $p(\mathbb{F})$ 可由隐藏定价机制实现。也就是说，对所有 $\mathbb{F}_1,\mathbb{F}_2\in\Delta(\mathbb{R})$ 以及所有 $\lambda\in[0,1]$,

$$p(\lambda\mathbb{F}_1+(1-\lambda)\mathbb{F}_2)\geq\lambda\,p(\mathbb{F}_1)+(1-\lambda)\,p(\mathbb{F}_2),$$

其中 $\lambda\mathbb{F}_1+(1-\lambda)\mathbb{F}_2$ 表示混合分布。

最后，我们聚焦于单调定价策略。我们用 $\mathbb{F}_1\succeq_1\mathbb{F}_2$ 表示 $\mathbb{F}_1$ 在一阶随机意义上支配 $\mathbb{F}_2$，即对于所有 $v\in\mathbb{R}$，$\mathbb{F}_1(v)\leq\mathbb{F}_2(v)$。

定义 2.3 (单调定价策略)。 泛函 $p:\Delta(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ 称为单调的，如果当 $\mathbb{F}_1\succeq_1\mathbb{F}_2$ 时，$p(\mathbb{F}_1)\geq p(\mathbb{F}_2)$。

在本文中，我们旨在刻画不同单调隐藏定价机制的性能，并设计最优单调隐藏定价机制。

2.3 预备知识：α-正则分布

在本文中，除均匀分布这一特殊情形外，我们假设先验分布 $\mathbb{F}$ 属于 α-正则分布的集合 $\mathcal{F}_\alpha$，这是定价与机制设计文献中被广泛研究的一类分布子类。对于任意累积分布函数$\mathbb{F}$，我们用 f 表示其概率密度函数。

定义 2.4. α-正则分布的集合定义如下:

$$\mathcal{F}_\alpha:=\left\{\mathbb{F}\mid\varphi_{\alpha,\mathbb{F}}(v):=(1-\alpha)v-\frac{1-\mathbb{F}(v)}{f(v)}\ \textit{is non-decreasing}\right\}\ . \tag{1}$$

W我们将$\varphi_{\alpha,\ \mathbb{F}}:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 称为分布 $\mathbb{F}$的 α-虚拟价值函数。

当 $\alpha=1$时，集合 $\mathcal{F}_1$ 表示单调风险率分布类；当 $\alpha=0$时，集合$\mathcal{F}_0$ 表示正则分布类。接下来，我们引入一个与 α-正则分布的定义密切相关的重要辅助函数。

定义 2.5. 对每一个 $\alpha\in[0,1]$，将函数 $\mathcal{E}_\alpha:\ \mathbb{R}\to[0,1]$ 定义为

$$\forall v,\quad \mathcal{E}_\alpha(v):=\begin{cases}(1+(1-\alpha)v)^{-1/(1-\alpha)}, & \textit{if } \alpha\in[0,1)\ ;\\ e^{-v}, & \textit{if } \alpha=1\ .\end{cases}$$

函数 $\mathcal{E}_\alpha$ 是广义帕累托分布的生存函数，它对应于极端的 α-正则分布，因为其 α-虚拟价值是常数：对于生存函数为 $\mathcal{E}_\alpha$ 的分布 $\mathbb{F}$ （即 $\mathbb{F}(v)=1-\mathcal{E}_\alpha(v),\ \forall v$），我们有$\varphi_{\alpha,\mathbb{F}}(v)=-1$ 对所有v。

我们总结 α-正则分布的两个标准性质，这些性质将贯穿我们的分析。第一个引理给出了 α-正则性的另一种刻画。第二个引理建立了 α-正则分布的最优销售概率的下界。

引理 2.1 (Schweizer 和 Szech [2015])。 分布 $\mathbb{F}$ 是 α-正则的，当且仅当函数$v\to\mathcal{E}_\alpha^{-1}(1-\mathbb{F}(v))$ 在 v 上是凸函数。

引理 2.2 (Schweizer 和 Szech [2015])。 对于每个 $\alpha \in (0,1]$ 以及每个 $\mathbb{F} \in \mathcal{F}_\alpha$,

$$1 - \mathbb{F}(p^*(\mathbb{F})) \geq \alpha^{1/(1-\alpha)} .$$

当 $\alpha = 1$ 时，右侧表达式按极限意义解释为 $1/e$。

从现在起，在全文中，我们固定一个 $\alpha \in [0,1]$ ，为简化记号，省略下标 α 。我们进一步定义以下最小和最大 α-正则分布，它们对我们的分析至关重要:

$$\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(v) := \begin{cases} 1 - \mathcal{E}(\lambda v) & v \in [0,a) \\ 1 & v \in [a,\infty) \end{cases} \quad \text{and} \quad \hat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(v) := \begin{cases} 0 & v \in [0,b) \\ 1 - \mathcal{E}(\lambda(v-b)), & v \in [b,\infty) \end{cases} . \tag{2}$$

注意到，$\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}$ 是通过将上述广义帕累托分布按因子 λ 缩放，再在 a处截断得到的。类似地，$\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b}$ 是先将广义帕累托分布平移 b，再按 λ缩放得到的。我们计算了分布$\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}$ 和 $\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b}$下的最优挂牌价格。

引理 2.3。 $\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}$ 和 $\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b}$ 的最优价格如下:

- *For* $\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}$*: if* $\alpha\lambda a \leq 1$*, then* $p^*(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}) = a$*; otherwise* $p^*(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}) = \frac{1}{\alpha\lambda}$ *;*
- *For* $\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}$*: if* $\lambda b \geq 1$*, then* $p^*(\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = b$*; otherwise* $p^*(\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \frac{1-(1-\alpha)\lambda b}{\alpha\lambda}$ *.*

根据上述引理，我们将 $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}$ 分别记为最小和最大 α-正则分布的集合，其最优挂牌价格分别为 a 和 b :

$$\check{\mathcal{F}} := \left\{ \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a} \mid a, \lambda \geq 0,\ \alpha\lambda a \leq 1 \right\} \quad \text{and} \quad \hat{\mathcal{F}} := \left\{ \hat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \mid b, \lambda \geq 0,\ \lambda b \geq 1 \right\} . \tag{3}$$

回顾一下，对于每个正则分布 $\mathbb{F}$，收益函数 $\mathsf{Rev}(v,\ \mathbb{F})$ 都是单峰的。因此，我们将临界价格区间定义为所有 Γ-近似价格的集合。

定义 2.6。 对于每个 $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ 和 $\Gamma \in [0,1]$，我们定义以下两个量:

$$\mathsf{LB}(\mathbb{F},\Gamma) := \inf\{p \mid \mathrm{Rev}(p,\mathbb{F}) \geq \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\mathbb{F})\} \ \textit{and}\ \mathsf{UB}(\mathbb{F},\Gamma) := \sup\{p \mid \mathrm{Rev}(p,\mathbb{F}) \geq \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\mathbb{F})\} .$$

引理 2.4。 对于每个 $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ 和 $p \in \mathbb{R}$,

$$\mathrm{Rev}(p,\mathbb{F}) \geq \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\mathbb{F}) \iff p \in [\mathsf{LB}(\mathbb{F},\Gamma), \mathsf{UB}(\mathbb{F},\Gamma)] .$$

最后，我们证明，对于任意固定的 Γ，LB 关于 a 在 $\mathcal{F}$ 中的分布上是利普希茨连续的。

引理 2.5。 对于每个 $\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}, \check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a'} \in \check{\mathcal{F}}$和 $\Gamma \in [0,1]$, $|\mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a},\Gamma) - \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a'},\Gamma)| \leq |a - a'|$。

基于最小和最大 α-正则分布的定义及其结构性质，下一节将把自然界的内层最小化问题——一个原本无限维且难以处理的问题——归约为一个简单得多的优化问题。

单调定价策略的 3 个最坏情况分布

确定定价策略 p 的性能，需要找出使其性能比最小的最坏情况分布

$$\min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(p,\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} .$$

评估这一近似比通常颇具挑战：它涉及无限维非凸优化。我们的主要贡献是将这一问题化简为更易处理的形式。具体而言，我们证明，对于定义 2.3 中所定义的单调定价策略，在广泛的 α-正则分布类中搜索最坏情况分布，可以缩小到一个双参数族$\check{\ }$ $\hat{\ }$， $\mathcal{F}\cup\mathcal{F}$其定义见（3）。

定理 3.1。 对于任意单调定价策略 p： $\Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$,

$$\min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(p,\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}\cup\hat{\mathcal{F}}} \frac{\mathrm{Rev}(p,\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} .$$

该定理的证明分为两部分。在引理 3.1 中，我们证明，对于任意分布$\check{\ }$ $\check{\mathbb{F}}$，若其 $p(\mathbb{F})$ 低于其最优价格 $p^*(\mathbb{F})$，则存在一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda,\ a}\in\mathcal{F}$ 使定价策略 p在该分布上的近似比更差。类似地，在引理 3.2 中，我们证明，对于任意$\hat{\ }$ $\hat{\mathbb{F}}$分布，若其 $p(\mathbb{F})$ 高于其最优价格 $p^*(\mathbb{F})$，则存在一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda,\ b}\in\mathcal{F}$ 使 p 的近似比更小。结合这两个引理即可证明该定理。

引理 3.1. 设 p $\check{\ }$ $\Delta\ \mathbb{R}$ $\check{\ }$ $\to\mathbb{R}$ $\mathbb{F}\in\mathcal{F}$ $p\ \mathbb{F}\ \leq:()$ 是任意单调定价策略。对于每个满足 $()\ p^*(\mathbb{F})$的$\check{\ }$，都存在 $\mathbb{F}_{\lambda,a}\in\mathcal{F}$ 使得 $p(\mathbb{F}_{\lambda,a})\ \leq p^*(\mathbb{F}_{\lambda,a})$ 并且

$$\frac{\mathrm{Rev}(p(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}),\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a})}{\mathrm{OPT}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a})} \leq \frac{\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} .$$

$\check{\ }$证明。 证明。设对所有 $v\in\mathbb{R}$， $q(v)\ =1-\mathbb{F}(v)$，且 $v_0=p^*(\mathbb{F})$。考虑分布 $\mathbb{F}_{\lambda,a}$，其参数为

$$\lambda=\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))/v_0 \quad \text{and} \quad a=v_0 .$$

这是与不动点 $(v_0,\mathbb{P}[v\geq v_0])$ 相一致的最小 α-正则分布。图 1 展示了我们构造和证明的几何示意图，其中 $\mathbb{F}$下的收益曲线（收益关于购买概率的函数）以黑色实线表示，而 $\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 下的$\check{\ }$收益曲线以蓝色虚线表示。从几何上看，$\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 的收益曲线 $R(q)\check{\ }$ 在 $q\in[0,q(v_0)]$ 时是一条线性射线。

$\check{\ }$ $\check{\ }$我们首先验证$\mathbb{F}_{\lambda,\ a}\in\mathcal{F}$，即 $\alpha\lambda a\leq 1$。回顾一下，根据引理2.2， α-正则分布的最优售出概率至少为 $\alpha^{1/(1-\alpha)}$。因此， $\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\leq\mathcal{E}^{-1}(\alpha^{1/(1-\alpha)})=1/\alpha$。于是， $\alpha\lambda a=\alpha\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\ \leq 1$。

$\check{\ }$ $\check{\ }$接下来，我们证明 $\mathbb{F}_{\lambda,\ a}\preceq_1\mathbb{F}$。注意，对于每个 $v>v_0$，都有 $1-\mathbb{F}_{\lambda,\ a}(v)\ =0\leq 1-\mathbb{F}(v)$。因此，只需研究 $v\leq v_0$:

$$\begin{aligned} 1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(v)=\mathcal{E}(\lambda v)&=\mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\cdot\frac{v}{v_0}\right)=\mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\cdot\frac{v}{v_0}+\mathcal{E}^{-1}(q(0))\cdot\frac{v_0-v}{v_0}\right)\\ &\leq\mathcal{E}\left(\mathcal{E}^{-1}(q(v))\right)=q(v)=1-\mathbb{F}(v) . \end{aligned}$$

这里，第三个等号用到了 $q(0) = 1$ 和 $\mathcal{E}^{-1}(q(0)) = 0$；不等式则由 $\mathcal{E}^{-1}(q(v))$ 的凸性以及引理2.1得出，此外还用到了 $\mathcal{E}$ 是非递增的这一事实。因此，收益曲线 $\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 始终位于 $\mathbb{F}$ 下方，如图 1所示，即

$$\mathrm{Rev}(v, \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}) = v \cdot (1 - \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(v)) \le v \cdot (1 - \mathbb{F}(v)) = \mathrm{Rev}(v, \mathbb{F}) \ , \quad \forall v \ .$$

另一方面，

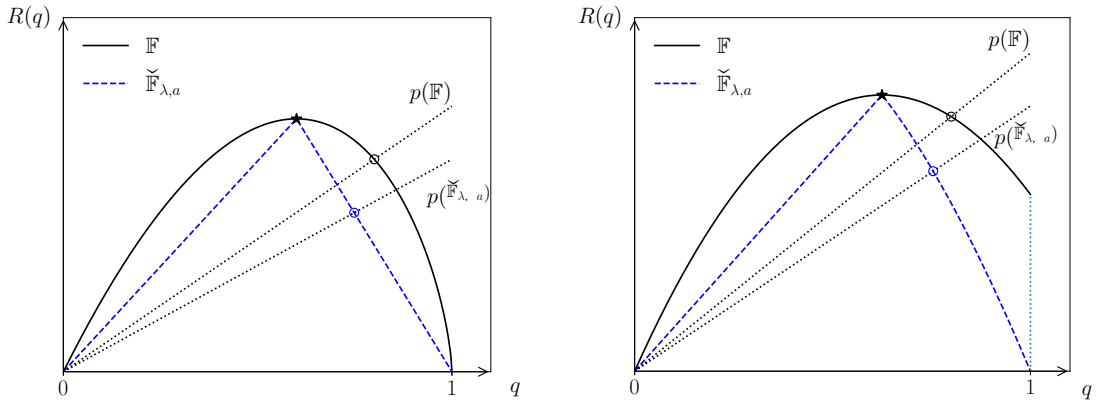
$$\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) = \mathrm{Rev}(v_0, \mathbb{F}) = \mathrm{Rev}(v_0, \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}) = \mathrm{OPT}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}) \ .$$

我们通过观察以下事实完成证明：

$$\frac{\mathrm{Rev}(p(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}), \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a})}{\mathrm{OPT}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a})} = \frac{\mathrm{Rev}(p(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}), \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \ ,$$

其中，最后一个不等式源于以下两个事实：1） p 的单调性意味着 $p(\mathbb{F}_{\lambda,a}) \le p(\{v7)$；2） $\mathbb{F}$ 的收益曲线的单峰性意味着 $\mathrm{Rev}(v, \mathbb{F})$ 对于 $v \in [0, v_0]$ 递增。 图 1 提供了该比较的几何示意图：$\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}_{\lambda,a})\mathbb{F}_{\lambda,a})$ $\mathrm{OPT}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}) =$ 蓝色。黑色$^\star \le$ 黑色。黑色$^\star =$~~$\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F})\,\mathbb{F})$ $\mathrm{OPT}(\mathbb{F})$~~。 □

图 1：引理 3.1 的示意图，其中 $R(q) = q \cdot \mathbb{F}^{-1}(1-q)$ 表示收益关于购买概率 $q \in [0,1]$ 的函数。我们构造一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda,a} \preceq_1 \mathbb{F}$ 使其在最优价格 $p^*(\mathbb{F})$ 处与 $\mathbb{F}$ 重合。根据定价策略 p 的单调性，在 $\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 下得到的收益不大于在 $\mathbb{F}$ 下得到的收益，因此近似比严格更小。

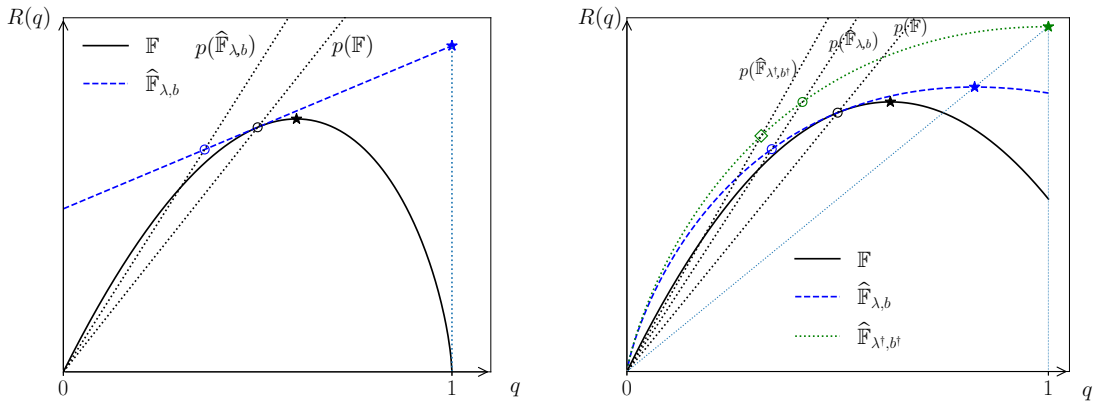


(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 1$

引理 3.2. 令 $p \quad \Delta\, \mathbb{R} \ \to \mathbb{R}$ $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$ $p\ \mathbb{F} \ \ge : ()$ 为任意单调定价策略。对于每个满足 $()\ p^*(\mathbb{F})$ 的，有一个 $\mathbb{F}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$ 使得 $p(\mathbb{F}_{\lambda,b}) \ge p^*(\mathbb{F}_{\lambda,b})$ 并且

$$\frac{\mathrm{Rev}(p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})}{\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \ .$$

图 2：引理 3.2 的示意图。我们首先构造一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda,\, b} \succeq_1 \mathbb{F}$，使其在价格 $p(\mathbb{F})$ 处与 $\mathbb{F}$ 一致。根据定价策略 p 的单调性，在 $\mathbb{F}_{\lambda,\, b}$ 下得到的收益不大于在 $\mathbb{F}$ 下得到的收益，因此近似比严格更小。然而，$\mathbb{F}_{\lambda,\, b}$ 可能不属于 $\mathcal{F}$，因为其最优售出概率未必等于 1。只有在 $\alpha > 0$ 时才会出现这一问题。为了解决这一问题，我们进一步构造一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda\dagger,\, b\dagger}$：截去低于最优垄断价格的取值，并对剩余概率质量重新缩放。



(a) $\alpha = 0$ (b) $\alpha = 1$

证明。 证明。对每个 $v \in \mathbb{R}$，令 $q(v) = 1 - \mathbb{F}(v)$，且 $v_0 = p(\mathbb{F})$。考虑分布 $\mathbb{F}_{\lambda,\, b}$，其参数为

$$\lambda = \left(\mathcal{E}^{-1}(q(v))\right)'\Big|_{v_0} = f(v_0) \cdot q(v_0)^{\alpha-2} \quad \text{and} \quad b = v_0 - \mathcal{E}^{-1}(q(v_0))/\lambda \,.$$

这是与 $\mathbb{F}$ 在 v_0处相切的分布，即$\mathbb{F}_{\lambda,\, b}(v_0) = \mathbb{F}(v_0)$，其 α-虚拟价值函数$\varphi_{\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,\, b}}$ 是一个常数 $\varphi_{\mathbb{F}}(v_0)$。参见图2，其中以几何示意图展示了 $\mathbb{F}$ （黑色实线）和$\mathbb{F}_{\lambda,\, b}$ （蓝色虚线）。

我们首先证明$\mathbb{F}_{\lambda,\, b} \succeq_1 \mathbb{F}$。注意，对每个 $v < b$，都有$1 - \mathbb{F}_{\lambda,\, b}(v) = 1 \geq 1 - \mathbb{F}(v)$。因此，只需考察 $v \geq b$:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^{-1}\left(1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(v)\right) &= \lambda(v-b) = \lambda(v-v_0) + \lambda(v_0-b) \\ &= \left(\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\right)' \cdot (v - v_0) + \mathcal{E}^{-1}(q(v_0)) \leq \mathcal{E}^{-1}(q(v)) = \mathcal{E}^{-1}(1-\mathbb{F}(v)) \,,\end{aligned}$$

其中前三个等式根据我们构造的定义得出。不等式由 $\mathcal{E}^{-1}(q(v))$的凸性成立，正如引理2.1所证明的。由 $\mathcal{E}^{-1}$的单调性可知，对于每个 v，都有使得$1 - \mathbb{F}_{\lambda,\, b}(v) \geq 1 - \mathbb{F}(v)$。因此，$\mathrm{OPT}(\mathbb{F}_{\lambda,\, b}) \geq \mathrm{OPT}(\mathbb{F})$。

接下来，我们希望证明 $\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}_{\lambda,\, b})\mathbb{F}_{\lambda,\, b}) \leq \mathrm{Rev}(p(\mathbb{F})\, \mathbb{F})$。我们首先验证 $p(\mathbb{F}) \geq p^*(\mathbb{F}_{\lambda,\, b})$。由于 $v_0 = p(\mathbb{F}) \geq p^*(\mathbb{F})$，因此 $\mathbb{F}$ 的收益曲线在 v_0处递减。由此，$v \cdot q(v)$ 的导数在 v_0处非正:

$$(v \cdot q(v))'|_{v_0} = q(v_0) - v_0 f(v_0) \leq 0 \,. \tag{4}$$

若 $\alpha = 0$，我们验证 $\lambda b \geq 1$:

$$\begin{aligned}\lambda b &= \left(\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\right)' \cdot v_0 - \left(\mathcal{E}^{-1}(q(v_0))\right) \\ &= \left(1/q(v_0) - 1\right)' \cdot v_0 - \left(1/q(v_0) - 1\right) = \left(f(v_0) \cdot v_0 - q(v_0)\right)/q^2(v_0) + 1 \geq 1 \,.\end{aligned}$$

因此，根据引理 2.3，$p^*(\mathbb{F}_{\lambda,\, b}) = b \le v_0 = p(\mathbb{F})$。对于 $\alpha \in (0,1]$, 根据引理 2.3,

$$p^*(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \max\left(\frac{1-(1-\alpha)\lambda b}{\alpha\lambda}, b\right) \ , \quad \text{and} \quad p(\mathbb{F}) = v_0 \ .$$

注意到，根据 b的定义， $v_0 \ge b$ 。只需验证 $v_0 \ge {}^{1-}{}_{(1-\alpha\ \lambda b\ )}{}_{\alpha\lambda}$:

$$v_0 \ge \frac{1-(1-\alpha)\lambda b}{\alpha\lambda} \iff \alpha\lambda v_0 + (1-\alpha)\lambda b \ge 1 \iff \lambda v_0 - (1-\alpha)\mathcal{E}^{-1}(q(v_0)) \ge 1$$
$$\iff \lambda v_0 - (q(v_0)^{\alpha-1} - 1) \ge 1 \iff f(v_0)\cdot q(v_0)^{\alpha-2}\cdot v_0 - q(v_0)^{\alpha-1} \ge 0 \ ,$$

其中最后一 个不等式由 (4) 得出。由定价策略的单调性 p，可得

$$p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \ge p(\mathbb{F}) \ge p^*(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \ .$$

因此，由$\mathbb{F}_{\lambda,b}$的收益曲线的单峰性可知，

$$\mathrm{Rev}(p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \le \mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F}).$$

因此，我们有

$$\frac{\mathrm{Rev}(p, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})}{\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p, \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})}.$$

证明尚未完成，因为当 $\alpha \in (0,1]$, 时，我们不一定有$\mathbb{F}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$，即$\lambda b \ge 1$。考虑 $\lambda b < 1$的情况。令

$$v_1 = p^*(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \frac{1-(1-\alpha)\lambda b}{\alpha\lambda} \quad \text{and} \quad q_1 = 1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(v_1) = \mathcal{E}(\lambda(v_1 - b)) \ .$$

考虑分布 $\mathbb{F}_{\lambda^\dagger,\ b^\dagger}$ 其参数为:

$$\lambda^\dagger = \lambda \cdot q_1^{1-\alpha} \quad \text{and} \quad b^\dagger = v_1 \ .$$

于是我们有 $\lambda^\dagger b^\dagger = 1$，因此 $\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,\ b^\dagger} \in \widehat{\mathcal{F}}$。该分布由 $\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b}$ 通过移除 v_1 以下的所有概率质量，再按比例对上尾部进行归一化而构造得到。我们在图中用绿色虚线展示了 $\mathbb{F}_{\lambda^\dagger,\ b^\dagger}$ 的构造，并在以下断言中正式阐述这一性质。2b 该断言的证明见附录 A。

断言 3.2. </style}对于每个，都有，$b(v) = q_1 \cdot (1 - \mathbb{F}_{\lambda^\dagger,\ b^\dagger}(v))$。

最后，由于 $\mathbb{F}_{\lambda^\dagger,\ b^\dagger} \in \mathcal{F}$ 满足引理中所述的条件，因此该引理立即成立:

$$\frac{\mathrm{Rev}(p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger})}{\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger})}{\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger})} = \frac{\mathrm{Rev}(p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})}{\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \ .$$

这里，第一个不等式成立，是因为 $\mathrm{Rev}(v, \mathbb{F}_{\lambda^\dagger,b^\dagger})$ 随 v 递减，而 $p(\mathbb{F}_{\lambda^\dagger,b^\dagger}) \ge p(\mathbb{F}_{\lambda,b})$ 根据 p的单调性；等式则由上述结论得出。图 2b 对这一比较给出了几何示意图: 绿色◇ 绿色⋆ ≤ 绿色○ 绿色⋆ = 蓝色○ 蓝色⋆ ≤ 黑色○ 黑色⋆. □

最后，我们陈述定理 3.1的一个易于验证的推论，稍后将用它来确定不同单调定价策略所达到的近似比。

推论 3.1。 单调定价策略 $p:\ \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 是 Γ-近似的，当且仅当

- 对所有 $\mathbb{F}_{\lambda,a} \in \check{\mathcal{F}},\ p(\mathbb{F}_{\lambda,a}) \geq \mathsf{LB}(\mathbb{F}_{\lambda,a}, \Gamma)$;
- 对所有 $\hat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \hat{\mathcal{F}},\ p(\mathbb{F}_{\lambda,b}) \leq \mathsf{UB}(\mathbb{F}_{\lambda,b}, \Gamma)$。

其中 $\mathsf{LB}(\mathbb{F}_{\lambda,a}, \Gamma)$ 和 $\mathsf{UB}(\mathbb{F}_{\lambda,b}, \Gamma)$ 定义见定义 2.6。

定理 3.1具有若干重要推论。首先，它将对无限维非凸模糊集进行的棘手优化，转化为低维参数化优化。它揭示了最坏情况分布的一种结构性质：尽管该α-正则类十分丰富，最具对抗性的分布总是位于其边界上，并且仅需两个参数即可刻画。这一洞见使理论分析和数值计算都成为可能。其次，这种归约提供了统一的视角，使得包括均值定价、 L^η-范数定价、基于超分位数的定价以及其他单调定价策略在内的多种定价策略，都能在同一框架下进行分析。因此，它能够系统地推导紧确的近似保证，并确定不同定价策略的最优参数。具体而言，将泛函 $p(\mathbb{F})$ 分别取为均值 $\|\mathbb{F}\|_1$、L^η-范数 $\|\mathbb{F}\|_\eta$ 或超分位数条件风险价值$q(\mathbb{F})$，即可分别刻画以下问题中的最优均值定价、 L^η-范数定价和超分位数定价。在每种情况下，最优策略均通过选择最优折扣因子获得 ω。

$$\max_{\omega} \min_{\mathbb{F} \in \mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}\left(\omega \cdot p(\mathbb{F}), \mathbb{F}\right)}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \tag{5}$$

通过求解（5），我们得出了每个簇内的最优定价策略及其近似比，如下所示；证明与第 6 节中的结果相同。

命题 3.1。 对于单调风险率分布，

(i) 均值定价 $p(\mathbb{F}) = 0.823 \cdot \|\mathbb{F}\|_1$ 的近似比为 *0.771*。(ii) $L^{1.37}$-范数定价 $p(\mathbb{F}) = 0.805 \cdot \|\mathbb{F}\|_{1.37}$ 的近似比为 *0.774*。(iii) 超分位数定价 $p(\mathbb{F}) = 0.787 \cdot$条件风险价值$_{0.92}$ 的近似比为 *0.78*

7.

我们在定理 3.1中的归约不仅使得评估特定定价策略成为可能，还能让我们刻画最优单调隐藏定价机制（等价地，最优单调凹定价策略）及其性能，相关内容见第 4 节。

除了这些主要应用之外，我们还强调另外两点见解。

- 在单调统计量的鲁棒定价场景中，这一定理还有另一种解读。例如，若卖方只知道估值分布的均值，并假设真实分布属于 MHR族，那么最优价格就是均值乘以 0.823。均值可以替换为任何单调统计量，而我们的结果确定了相应的最坏情况分布。我们将在第 6 节讨论这一观点。

- 该定理适用于所有单调定价策略，包括不一定是凹函数的基于分位数的策略。我们的分析可以直接调整，以恢复现有的折扣分位数定价近似保证。为简洁起见，我们省略详细计算，因为这些计算与我们在第 L^η6 节中对-范数和超分位数定价的推导类似，并可直接由定理3.1得出。我们的归约为Allouah等人 [2023]提出的基于分位数的鲁棒定价结果提供了另一种推导方式。

4 最优隐藏定价

我们在定理3.1 中建立的归约，使我们能够评估特定类型的定价策略：在每一类中，都可以通过优化式（5）中的单个标量参数，得到最优策略。这个统一框架让我们能够在共同的分析结构下，比较向买方获取不同类型信息（如均值、 L^η-范数或超分位数）的效果。然而，如果允许买方报告完整的分布 $\mathbb{F}$，设计最优定价就会困难得多，因为这需要确定一个将分布h 映射到定价函数的算子 $\mathbb{F}$ ，从而形成一个无限维优化问题。本节针对每个 α-正则分布 $\mathcal{F}_\alpha$ 族刻画最优隐藏定价机制，其中 $\alpha \in [0,1]$。

回顾一下，设计最优单调隐藏定价机制，等价于设计最优单调凹定价策略。我们首先说明定价策略 p 的构造，然后给出相应隐藏规则 h 的显式构造。

根据定理 3.1，一旦施加 p 的单调性，只需验证分布属于 $\mathcal{F} \cup \mathcal{F}$ 时的近似比 。考虑如下构造。首先，对所有 $\mathbb{F}_{\lambda,a} \in \mathcal{F}$，令 $p(\mathbb{F}_{\lambda,a}) =$ $\mathsf{LB}(\mathbb{F}_{\lambda,a}, \Gamma)$，然后将 p 扩展到所有分布，使其同时满足凹性和单调性。等价地， p 定义为 $\mathsf{LB}(\cdot,\Gamma)|_{\breve{\mathcal{F}}}$ 的凹单调包络。该构造保证 p 同时满足凹性和单调性。此外，该构造给出了满足推论 3.1 第一条件 的最小凹单调泛函 p。因此，如果这一扩展还满足对于所有 $\mathbb{F}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$， $p(\mathbb{F}_{\lambda,b}) \le \mathsf{UB}(\mathbb{F}_{\lambda,b}, \Gamma)$，我们便可得出结论： p 达到了所需的近似保证。这正是我们的构造，并且 Γ 被选为满足上述条件的最大常数。

尽管定理 2.2 刻画了相应的隐藏定价规则 h 如何由 p推导得到，但我们将在下文给出一种更直观的构造。此外，这一显式构造使我们能够使用数值方法确定最优近似比的值。

我们首先将定价规则 h 限制在以下可行定价函数族中。

定义 4.1（可行定价函数）。 对于每个 $\Gamma \in [0,1]$，定义 H^Γ 为以下可行函数空间：

$$H^\Gamma := \left\{ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{E}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[h(s)] \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma), \quad \forall (\lambda,a) \in K := \{(\lambda,a) \mid \alpha\lambda a \le 1\} \subseteq \mathbb{R}^2 \\ h \text{ is non-decreasing} \end{array} \right\}.$$

直观地说，卖方将定价规则的选择委托给买方，但将其选择限制在允许函数族 H^Γ内。由于买方知道潜在的 $\mathbb{F}$，她会选择使期望挂牌价格最小的函数 $h \in H^\Gamma$ 。这与前面示例中的直觉相一致，例如 L^2-范数或超分位数定价规则，在这些情况下，买方的最优响应确定了所关注的统计量。形式上，我们将适当定价函数定义如下。

定义 4.2（最优单调定价函数）。 对于每个 $\Gamma \in [0,1]$，定义 h^Γ： $\mathbb{R}\times\Delta(\mathbb{R}) \to\mathbb{R}$为以下定价函数：

$$\forall \mathbb{F} \in \Delta(\mathbb{R}), \quad h^\Gamma(\cdot, \mathbb{F}) = \operatorname*{arg\,min}_{h\in H^\Gamma} \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s)] \ .$$

对于给定的参数 Γ，卖方事前承诺采用定价规则 h^Γ。随后，了解 $\mathbb{F}$ 的买方会如实报告 $\mathbb{F}$，因为在 H^Γ中的所有可行定价函数里， $h^\Gamma(\cdot,\ \mathbb{F})$使她的期望支付最小。根据 H^Γ的定义，较大的 Γ 会对

所有分布 $\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\,a} \in \check{\mathcal{F}}$施加更大的 LB(H^Γ)，这会缩小可行集 H^Γ ，并导致更高的期望支付 $\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[h^\Gamma(s,\ \mathbb{F})\right]$。直观地说，增大 Γ 会带来“更大”的 h^Γ。另一方面，较高的$\hat{}$ $\hat{}$价格可能会降低对 $\mathcal{F}$中的分布 $\mathbb{F}_{\lambda,\,b}$ 的表现，因为定价过高会导致近似比降低。因此， Γ的选择涉及一项根本性的权衡：增大 $\check{\Gamma}$会改善对 $\mathcal{F}$ 中分布的保证，但可能降低对 $\mathcal{F}$中分布$\hat{}$的表现。最优定价规则必须平衡这两类分布上的表现。因此，我们定义 Γ的最大值，使得由此得到的定价规则对 $\mathcal{F}$ 中的所有分布都能达到相同的近似比$\hat{}$，并证明该值就是紧近似比。

定义 4.3 （紧近似比）。 对于每个 $\alpha \in [0,1]$，定义

$$\Gamma^* := \max_{\Gamma\in[0,1]} \left\{ \Gamma \;\middle|\; \mathbb{E}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}\left[h^\Gamma(s,\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})\right] \le \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b},\Gamma), \quad \forall \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \widehat{\mathcal{F}} \right\}.$$

定理 4.1确立了最优单调隐藏定价机制，以及 Γ^* 的最优性。

定理 4.1。 对于 α-正则分布 $\mathcal{F}_\alpha$ 这一族，由 h^{Γ^*} 导出的隐藏定价机制可达到 Γ^*-近似比；此外，没有任何单调隐藏定价机制能够达到严格大于 Γ^* 的近似比。

定理的证明分为两部分。在引理 4.1 中，我们给出一个充分条件，以证明 h^Γ 是 Γ-近似的。在引理 4.2 中，我们证明，对于存在一个 Γ-近似单调隐藏定价机制而言，同一条件也是必要的。

根据 H^Γ 的定义， H^Γ 的第一个约束规定了我们构造的起点$\check{}$ $\check{}$（即 $p(\mathbb{F}_{\lambda,\,a})$ = 下界($\mathbb{F}_{\lambda,\,a}$，Γ)），而第二个约束则施加了 p 的单调性。我们强调，对于每个分布，隐藏规则 h 都必须是单调的，这一点远非显而易见 $\mathbb{F}$。不难验证，该条件足以确保p 的单调性，因此引理 4.1 的证明相对直接。相比之下，要证明其必要性则微妙得多。这一问题构成了引理 4.2 分析的核心，也是证明中技术性最强的部分。

因此，我们的主要定理可由这两个引理以及 Γ^* 的定义推得。

引理 4.1. 如果满足以下条件，则采用 h^Γ 的隐藏定价机制是 Γ-近似的

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}\left[h^\Gamma(s,\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})\right] \le \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b},\Gamma), \quad \forall \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \widehat{\mathcal{F}}\ .$$

证明. 证明。我们首先验证定价函数 h^Γ 是适当的:

$$\forall \mathbb{F},\mathbb{F}', \quad \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[h^\Gamma(s,\mathbb{F})\right] = \min_{h\in H^\Gamma} \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s)] \le \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[h^\Gamma(s,\mathbb{F}')\right]\ ,$$

其中，该不等式成立是因为 $h^\Gamma(\cdot,\mathbb{F}') \in H^\Gamma$。

接下来，我们验证 h^Γ 是单调的:

$$\forall \mathbb{F} \succeq_1 \mathbb{F}', \quad \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}\left[h^\Gamma(s,\mathbb{F})\right] \ge \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}'}\left[h^\Gamma(s,\mathbb{F})\right] \ge \min_{h\in H^\Gamma} \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}'}[h(s)] = \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}'}\left[h^\Gamma(s,\mathbb{F}')\right]\ ,$$

其中，第一个不等式由标准的耦合论证以及 $h^\Gamma(\cdot,\ \mathbb{F})$非递减这一事实成立。因此，根据推论 3.1，由 h^Γ 诱导的隐藏定价机制 Γ是近似的，当且仅当:

- $\forall \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a} \in \check{\mathcal{F}}$, $\mathbb{E}_{s\sim\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[h^\Gamma(s,\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a})] \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma)$;
- $\forall \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \widehat{\mathcal{F}}$, $\mathbb{E}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}[h^\Gamma(s,\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})] \leq \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b},\Gamma)$.

注意，第一组条件根据 H^Γ 的定义成立。事实上，我们有 $h^\Gamma(\cdot,\ \check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}) \in H^\Gamma$，且每个 $h \in H^\Gamma$ 都满足 $\mathbb{E}_{s\sim\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}}[h(s)] \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a},\ \Gamma)\ \forall \check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a} \in \check{\mathcal{F}}$. 请注意，第二组条件正是引理中陈述的假设。证明至此结束。 □

引理 4.2. 如果存在一个 Γ-近似单调隐藏定价机制，那么我们有

$$\mathbb{E}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}\left[h^\Gamma(s,\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})\right] \leq \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b},\Gamma), \quad \forall \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \widehat{\mathcal{F}} .$$

证明. 证明。对于任意分布 $\mathbb{F} \in \Delta(\mathbb{R})$，考虑以下优化问题。我们用 $\mathrm{P}(\mathbb{F})$ 同时表示该规划及其值。

$$\begin{aligned} \max_{\mathbb{G}\in\Delta(K)}: \quad & \mathbb{E}_{(\lambda,a)\sim\mathbb{G}}\left[\mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma)\right] = \int_K \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma)\,\mathrm{d}\mathbb{G} && (\mathrm{P}(\mathbb{F})) \\ \text{subject to}: \quad & \int_K \left(1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right)\,\mathrm{d}\mathbb{G} \leq 1-\mathbb{F}(s) && \forall s\in\mathbb{R} \end{aligned}$$

回顾一下，$h^\Gamma(\cdot,\mathbb{F})$ 是以下规划的最优解:

$$\begin{aligned} \min_{h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}}: \quad & \mathbb{E}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s)] && (\mathrm{D}(\mathbb{F})) \\ \text{subject to}: \quad & \mathbb{E}_{s\sim\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[h(s)] \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma) && \forall(\lambda,a)\in K \\ & h(\cdot) \text{ is non-decreasing} \end{aligned}$$

我们验证这两个规划构成一个原始-对偶对。设拉格朗日乘子为一个非负有限博雷尔测度 $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$。拉格朗日函数为

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\mathbb{G},\mu) &= \int_K \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma)\,\mathrm{d}\mathbb{G} - \int_{\mathbb{R}}\int_K \left(1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right)\,\mathrm{d}\mathbb{G}\,\mathrm{d}\mu + \int_{\mathbb{R}}(1-\mathbb{F}(s))\,\mathrm{d}\mu \\ &= \int_K \left(\mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma) - \int_{\mathbb{R}}\left(1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right)\,\mathrm{d}\mu\right)\,\mathrm{d}\mathbb{G} + \int_{\mathbb{R}}(1-\mathbb{F}(s))\,\mathrm{d}\mu . \end{aligned}$$

由于 $\mathbb{G}$ 遍历 K上的概率测度,

$$\sup_{\mathbb{G}} \mathcal{L}(\mathbb{G},\mu) = \int_{\mathbb{R}}(1-\mathbb{F}(s))\,\mathrm{d}\mu + \sup_{(\lambda,a)\in K}\left(\mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma) - \int_{\mathbb{R}_+}\left(1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right)\,\mathrm{d}\mu\right) .$$

因此，对偶问题为

$$\begin{aligned} \min_{\mu}: \quad & \int_{\mathbb{R}}(1-\mathbb{F}(s))\,\mathrm{d}\mu \\ \text{subject to}: \quad & \int_{\mathbb{R}}\left(1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right)\,\mathrm{d}\mu \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma) && \forall(\lambda,a)\in K \end{aligned}$$

定义累积分布函数 $h(s) = \mu([0,s])$。通过分部积分，我们有

$$\int_{\mathbb{R}}(1-\mathbb{F}(s))\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} h(s)\,\mathrm{d}\mathbb{F}(s) \quad \text{and} \quad \int_{\mathbb{R}}(1-\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s))\,\mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} h(s)\,\mathrm{d}\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s) .$$

此外， $\mu \geq 0$ 意味着 h是非负且非递减的。因此，该规划等价于（$\mathrm{D}(\mathbb{F})$）。

因此，我们得到弱对偶性，即$\mathrm{P}(\mathbb{F}) \leq \mathrm{D}(\mathbb{F})$。然而，尽管 $\mathcal{L}(\mathbb{G}, \mu)$关于 $\mathbb{G}$ 与 μ是双线性的，我们仍不能直接援引Sion极小极大定理来断言强对偶性。困难在于，定义域 $K = \{(\lambda, a) : \alpha\lambda a \leq 1\}$ 是无界的。因此，支撑在 K 上的分布的可行集在弱拓扑下并不紧致，从而Sion的紧致性要求无法成立。在下一个引理中，我们证明：通过对 K引入一个精心选取的截断，强对偶性对每一个 $\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$ 均成立；该截断恢复了紧致性，从而使极小极大论证得以进行。

引理 4.3. 对每一个$\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$，我们有

$$\mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \ . \tag{6}$$

证明。 证明。固定任意的 $\bar{a} \geq b$，并定义截断定义域 $K = K \cap \{(\lambda, a) : a \in [b, \bar{a}]\}$。由于 $\alpha\lambda a \leq 1$ 和 $a \geq b$，变量 λ 自动被 $1/\alpha b$所界定；因此 K 是紧致的。

令$\mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})$为将 $\mathbb{G}$ 限制为支撑在 K上的分布所得到的原始规划，并且令$\mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})$为相应的对偶规划。于是，我们有

$$\mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \geq \bar{\mathrm{P}}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \bar{\mathrm{D}}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \ .$$

该不等式成立是因为 $K \subseteq K$，因此截断原问题的可行集是 $(\mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}))$ 可行集的子集。等式则由 Sion极小极大定理得出：在截断定义域K上，紧性得以恢复，且拉格朗日函数关于 $\mathbb{G}$ 和 μ仍为凸–凹双线性函数，从而保证强对偶性。

设 $\bar{h}$ 为 $(\mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}))$ 的最优解。那么， $\bar{h}$是非递减的，并且满足

$$\mathop{\mathbb{E}}_{x \sim \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} \left[\bar{h}(x)\right] \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma), \qquad \forall (\lambda, a) \in \bar{K} \ .$$

我们将 $\bar{h}$ 扩展为 $(\mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}))$ 的一个可行解。定义 h 如下：[3]

$$h(s) = \begin{cases} \bar{h}(b) & s \in [0, b] \\ \bar{h}(s) & s \in [b, \bar{a}] \\ \bar{h}(\bar{a}) + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot (s - \bar{a}) & s \in [\bar{a}, \infty) \end{cases}$$

最 由定义可直接得出 h的单调性。接下来，我们验证

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} [h(s)] \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma), \qquad \forall (\lambda, a) \in K \ .$$

- 对于 $a \leq b$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} [h(s)] = \bar{h}(b) = \mathop{\mathbb{E}}_{x \sim \check{\mathbb{F}}_{0,b}} \left[\bar{h}(s)\right] \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{0,b}, \Gamma) \geq \mathsf{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma) \ .$$

这里，$\mathbb{F}_{0,\,b}$ 是位于 b 的点质量分布。最后一个不等式是由 $\mathbb{F}_{0,\,b} \succeq_1 \mathbb{F}_{\lambda,\,a}$ 得出的。

[3]我们将讨论范围限定为 $\alpha \in (0, 1]$, 因为表达式 $\alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}}$ 在 $\alpha = 0$处未定义。在第 5 节中，我们证明，当 $\alpha = 0$时，对于正则分布这一类分布，隐藏定价机制——等价地，凹定价策略——无法达到任何非平凡（即严格为正）的近似比。

- 对于 $a \in [b, \bar{a}]$，我们有

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[h(s)] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}\left[\bar{h}(s)\right] \geq \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma)\ ,$$

其中第一个不等式成立，是因为对所有 s，均有 $h(s) \geq h(s)$。

- 对于 $a \geq \bar{a}$，我们有

$$\begin{aligned}
\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[h(s)] &\geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\bar{a}}}\left[\bar{h}(s)\right] + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \int_{\bar{a}}^{a} (s-\bar{a})\, \mathrm{d}\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\bar{a}}}\left[\bar{h}(s)\right] + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \int_{\bar{a}}^{a} \mathcal{E}(\lambda s)\, \mathrm{d}s && \text{(integration by parts)} \\
&\geq \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\bar{a}}, \Gamma) + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \mathcal{E}(\lambda a) \cdot (a-\bar{a}) && \text{(by the monotonicity of } \mathcal{E}) \\
&\geq \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\bar{a}}, \Gamma) + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \mathcal{E}(\alpha^{-1}) \cdot (a-\bar{a}) && \text{(by } \alpha\lambda a \leq 1) \\
&= \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\bar{a}}, \Gamma) + (a-\bar{a}) \\
&\geq \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma)\ . && \text{(by Lemma 2.5)}
\end{aligned}$$

因此，$h \in H^{\Gamma}$ 并且我们有

$$\begin{aligned}
\mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \leq \mathop{\mathbb{E}}_{\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}[h(s)] &= \mathop{\mathbb{E}}_{\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}\left[\bar{h}(s)\right] + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \int_{\bar{a}}^{\infty} (s-\bar{a})\, \mathrm{d}\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(s) \\
&= \bar{\mathrm{D}}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \int_{\bar{a}}^{\infty} \mathcal{E}(\lambda(s-b))\, \mathrm{d}s \\
&\leq \mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) + \alpha^{-\frac{1}{1-\alpha}} \cdot \int_{\bar{a}}^{\infty} \mathcal{E}(\lambda(s-b))\, \mathrm{d}s\ .
\end{aligned}$$

由于 $\bar{a} \to \infty$，尾积分趋于 0，因此 $\mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \leq \mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})$。结合弱对偶性，由此可得 $\mathrm{D}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = \mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})$，从而完成证明。 □

最后，我们证明引理 4.2。假设存在一个定价规则 h，其达到的近似比率为 Γ。令 $p(\mathbb{F}) = \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}}[h(s,\mathbb{F})]$ 表示相应的期望挂牌价格，$\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}$ 它是单调且凹的。对任意给定的 $\mathbb{F}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$，令 $\mathbb{G}(\lambda, a)$ 为原始规划 $(\mathrm{P}(\mathbb{F}_{\lambda,b}))$ 的最优解 $\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}$。考虑随机分布混合 $\{\mathbb{F}_{\lambda,a}\}$，其中 (λ, a) 从 $\mathbb{G}$ 中抽取；我们将所得分布记为 $\tilde{\mathbb{F}}$。该规划的可行性约束 $1 - \tilde{\mathbb{F}}(s) = \int_K \left(1 - \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right) \mathrm{d}\mathbb{G} \leq 1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(s)$ 保证分布 $\tilde{\mathbb{F}}$ 被 $\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}$ 随机占优。因此，

$$\begin{aligned}
\mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}, \Gamma) &\geq p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) && \text{(by Lemma 2.4)} \\
&\geq p(\tilde{\mathbb{F}}) \geq \mathop{\mathbb{E}}_{(\lambda,a)\sim\mathbb{G}}\left[p(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a})\right] && \text{（根据 } p \text{的单调性和凹性）} \\
&\geq \mathop{\mathbb{E}}_{(\lambda,a)\sim\mathbb{G}}\left[\mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma)\right] && \text{(by Lemma 2.4)} \\
&= \mathrm{P}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) && \text{(by the definition of } \mathbb{G}) \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}\left[h^{\Gamma}(s, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})\right]\ , && \text{(by strong duality (6))}
\end{aligned}$$

从而证明完毕。 □

由于下界和上界的表达式 LB 和 UB 涉及在 $\alpha = 1$时含有 Lambert W 函数的方程的解，因此近似比 Γ^* 是通过隐式方式刻画的。虽然这些表达式并非初等表达式，但它们支持高效的数值计算。在附录 B中，我们使用计算机辅助实验确定了 Γ^* 对于单调风险率分布的取值范围，表明其介于 0.79 和 0.796 之间。同样的方法还可用于计算 $\Gamma^*(\alpha)$，其中任意 $\alpha \in [0,1]$。

命题 4.1. 在单调风险率分布族上，最优单调隐藏定价机制所达到的近似比介于0.79与0.796之间。

5 否定性结果

尽管单调性是一项标准且在实践中可取的假设，但人们自然会问：若去掉这一约束，是否能取得更好的性能。为补充我们的正面结果，我们推导了隐藏定价机制（等价地，凹定价策略）以及任意先验无关机制所能达到的近似比上界。我们的第一个上界适用于所有凹定价策略。它表明，将注意力限制在单调策略上只会在近似性能上造成可忽略的损失，从而为实践中对单调性的关注提供了依据。

定理 5.1. 对于单调风险率分布（相应地，正则分布），任何凹定价策略都无法达到优于0.801（相应地，0）的近似比。

证明. 证明。假设一个凹定价策略 $p : \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 达到 Γ 近似比。$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$则对每个 $v \in \mathbb{R}_+$，我们有 $p(\delta_v) \geq \Gamma v$。因此，由 p 的凹性，对每个 $\mathbb{F}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$，

$$\mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}, \Gamma) \geq p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}[p(\delta_s)] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}[\Gamma \cdot s] \ .$$

注意到，左侧随 Γ 递减，而右侧随 Γ递增。因此，每一对（λ，b）都会给可实现的近似比 Γ提供一个上界。

具体而言，对于 $\alpha = 1$，令 $\lambda = 1$ 和 $b = 1.7$。于是，我们有

$$\mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{1,1.7}, \Gamma) \geq \Gamma \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,1.7}}[s] = 2.7 \cdot \Gamma \ .$$

利用计算机辅助计算，我们得到上界 0.801。

我们进一步指出，对于任意 $\alpha \in [0,1]$，通过优化 λ 和 b的取值，可以用数值方法$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$导出近似比的一个上界。然而，当 $\alpha = 0$、 $\mathbb{F}_{\lambda,\ b} \in \mathcal{F}$ 的均值为无穷大时，在正则分布这一类中只能达到平凡的近似比 $\Gamma = 0$ 。

□

我们的第二个上界针对任意先验分布独立机制。也就是说，我们为规划（⋆）提供上界。正如第 2.1 节所讨论的，对于均匀分布，隐藏定价已经是所有可行机制中的最优机制，这多少有些出人意料。

受定理正向部分的启发2.1，我们考虑歧义集 $\mathcal{F}$，其中包含以下分布：

- $U[0.6, 1]$， $[0.6, 1]$上的均匀分布；
- $\{\delta_v \mid v \in [0.6, 1]\}$，取值为 v 的点质量集合。

定理 2.1 表明，我们的隐藏定价机制对该集合中的所有分布都实现了精确的$\frac{7}{8}$-近似。作为比较，Feng 等人 [2021] 证明了一个不可能性结果：0。934；他们使用了类似的歧义集（将常数 0。6 替换为 0。5）。这一歧义集带来的障碍在于，需要阻止买方在真实分布为点质量 $U[0.6,1]$ 时报告分布 δ_v。反向操纵则不可能：当真实分布为 $U[0.6,1]$时，卖方以概率 1 检测出任何点质量 $\delta_{v'}$ 报告。因此，确保机制能够抵御这一类虚报的激励相容性，便完全刻画了获取买方分布信息所面临的挑战。

此外，我们的技术对所有 α-正则分布给出了更强的不可能性结果。具体而言，我们通过用精心选取的 α-正则分布替换均匀分布 $U[0.6,1]$，并考虑同样包含所有点质量分布的歧义集，得到了统一分析。

定理 5.2. 任何先验无关机制对均匀分布（相应地，单调风险率分布和正则分布）所能达到的近似比都不能优于$\frac{7}{8}$（相应地，0.838 和0.822）。

证明。 证明。考虑如下分布集合：

$$\mathcal{F} = \{\mathbb{F}_0\} \cup \{\delta_u \mid u \in \mathrm{supp}(\mathbb{F}_0)\} .$$

我们的分析对这三类分布是统一的。 $\mathbb{F}_0$ 的选取在证明末尾给出，以便分别对均匀分布、单调风险率分布和正则分布达到不同的比率 $\frac{7}{8} = 0.875$、0.838和0.822。我们将选取具有有界支撑、因而具有有限均值的 $\mathbb{F}_0$ ，这隐含地保证了以下分析的有效性。

对于这个特定的歧义集，相应的优化问题（$\star$）可以大幅简化。注意，当底层分布为 $\mathbb{F}_0$ 时，买方只能将其私人价值从 v 虚报为 v'，而不能将底层分布虚报为 $\delta_{v'}$；否则，卖方就能以概率 $\mathbb{P}_s[s \neq v'] = 1$ 检测到虚报，并通过设置 $t(s, v, \delta_{v'}) = \infty$ 来惩罚买方。类似地，当底层分布为 δ_v 时，出于同样的原因，买方只能将底层分布虚报为 $\mathbb{F}_0$ ，而不能虚报为 $\delta_{v'}$ 。

这使 我们能够删去大量激励相容约束，只保留以下 :

$$(v, \mathbb{F}_0) \to (v', \mathbb{F}_0): \quad \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[v \cdot x(s, v, \mathbb{F}_0) - t(s, v, \mathbb{F}_0)\right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[v \cdot x(s, v', \mathbb{F}_0) - t(s, v', \mathbb{F}_0)\right]$$
$$(v, \delta_v) \to (v', \mathbb{F}_0): \quad v \cdot x(v, v, \delta_v) - t(v, v, \delta_v) \geq v \cdot x(v, v', \mathbb{F}_0) - t(v, v', \mathbb{F}_0)$$

为求得（$\star$）的上界，删去约束只会使目标值弱增。上述讨论表明，这样做不会造成任何损失。接下来请注意，变量 $x(v, v, \delta_v)$ 和 $t(v, v, \delta_v)$ 只出现在以下约束中：

$$\begin{aligned} \text{IC } (v, \delta_v) \to (v', \mathbb{F}_0): &\quad v \cdot x(v, v, \delta_v) - t(v, v, \delta_v) \geq v \cdot x(v, v', \mathbb{F}_0) - t(v, v', \mathbb{F}_0) \\ \text{Approximation:} &\quad t(v, v, \delta_v) \geq \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\delta_v) = \Gamma \cdot v \\ \text{Allocation:} &\quad x(v, v, \delta_v) \leq 1 \end{aligned}$$

Comb结合近似约束和分配约束，我们得到

$$(1 - \Gamma) \cdot v \geq v \cdot x(v, v, \delta_v) - t(v, v, \delta_v) \geq v \cdot x(v, v', \mathbb{F}_0) - t(v, v', \mathbb{F}_0) .$$

注意到，通过设置 $x(v, v, \delta_v) = 1$以及 $t(v, v, \delta_v) = \Gamma \cdot v$，对激励相容约束的这一放松不会损失最优性，因为变量 $x(v, v, \delta_v)$ 和 $t(v, v, \delta_v)$ 未涉及其他约束。经过上述推导，我们得到以下优化问题，其中为简化记号，我们使用 $x_0(s, v)$ $t_0(s, v)$

表示 $x(s,\ v,\ \mathbb{F}_0)$ $t(s,\ v,\ \mathbb{F}_0)$。

$$\begin{aligned}
\max_{\Gamma, x_0, t_0} :\ & \Gamma \\
\text{subject to} :\ & \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[v\cdot x_0(s,v)-t_0(s,v)\right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[v\cdot x_0(s,v')-t_0(s,v')\right] && \forall v, v' \\
& \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[v\cdot x_0(s,v)-t_0(s,v)\right] \geq 0 && \forall v \\
& \mathop{\mathbb{E}}_{s,v\sim\mathbb{F}_0}\left[t_0(s,v)\right] \geq \Gamma\cdot \mathrm{OPT}(\mathbb{F}_0) \\
& (1-\Gamma)\cdot s \geq s\cdot x_0(s,v)-t_0(s,v) && \forall s, v \\
& 0\leq x_0(s,v)\leq 1 && \forall s, v
\end{aligned}$$

回想一下，我们假设 $\mathbb{F}_0$ 具有有限均值。我们进一步对约束的第四组中的 $s\sim\mathbb{F}_0$ 取期望:

$$(1-\Gamma)\cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}[s] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[s\cdot x_0(s,v)-t_0(s,v)\right]\ ,\quad \forall v\ . \tag{7}$$

接着，我们滥用记号，将 $x_0(v) := \mathbb{E}_s[x_0(s,\ v)]$ 和 $t_0(v) := \mathbb{E}_s[t_0(s,\ v)]$ 分别表示期望分配和支付。前两个激励相容（IC）和个人理性（IR）约束可以改写为

$$v\cdot x_0(v)-t_0(v)\geq v\cdot x_0(v')-t_0(v') \quad \text{and} \quad v\cdot x_0(v)-t_0(v)\geq 0\ .$$

作为推　　论的结果，利用包络定理米尔格罗姆和塞加尔 [2002], Myerson [1981], 我们有

$$t_0(v)=v\cdot x_0(v)-\int_0^v x_0(u)\ \mathrm{d}u + t_0(0) \leq v\cdot x_0(v)-\int_0^v x_0(u)\ \mathrm{d}u\ . \tag{8}$$

现在，我们将约束 (7) 应用于 $\bar{v}$: =最大值$\{v\in$ 支撑集$(\mathbb{F}_0)\}$:

$$\begin{aligned}
(1-\Gamma)\cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}[s] &\geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[s\cdot x_0(s,\bar{v})-t_0(s,\bar{v})\right] \\
&= \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}\left[(s-\bar{v})\cdot x_0(s,\bar{v})\right]+\bar{v}\cdot x_0(\bar{v})-t_0(\bar{v}) \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}[s]-\bar{v}+\int_0^{\bar{v}} x_0(u)\ \mathrm{d}u\ ,
\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由 (8) 以及 $x_0(s,\ \bar{v})\ \leq 1$成立。整理该方程可得

$$\bar{v}-\int_0^{\bar{v}} x_0(u)\ \mathrm{d}u \geq \Gamma\cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}[s]\ .$$

根据迈尔森引理，近似约束表明

$$\Gamma\cdot\mathrm{OPT}(\mathbb{F}_0)\leq \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathbb{F}_0}[t_0(v)] = \mathop{\mathbb{E}}_{v\sim\mathbb{F}_0}[\varphi_0(v)\cdot x_0(v)] = \int_0^{\bar{v}}\left(v-\frac{1-\mathbb{F}_0(v)}{f_0(v)}\right)\cdot x_0(v) f_0(v)\ \mathrm{d}v\ ,$$

其中，$f_0(\cdot)$ 是 $\mathbb{F}_0$ 的概率密度分布，$\varphi_0(\cdot)$ 是$\mathbb{F}_0$的虚拟价值函数。选择适当的常数 c，将上述两个不等式相加，可得

$$\begin{aligned}
\left(c\cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\mathbb{F}_0}[s]+\mathrm{OPT}(\mathbb{F}_0)\right)\cdot\Gamma &\leq c\cdot\bar{v}+\int_0^{\bar{v}}\left(f_0(v)\cdot v-(1-\mathbb{F}_0(v))-c\right)\cdot x_0(v)\ \mathrm{d}v \\
&\leq c\cdot\bar{v}+\int_0^{\bar{v}}\left(f_0(v)\cdot v-(1-\mathbb{F}_0(v))-c\right)^+\ \mathrm{d}v\ .
\end{aligned}$$

均匀分布。考虑 $\mathbb{F}_0 = U[0.6, 1]$，可得 $\mathbb{E}[s] = 0.8$、$\mathsf{OPT}(\mathbb{F}_0) = 0.6$，以及

$$f_0(v) = \frac{1}{0.4}, \quad \mathbb{F}_0(v) = \frac{v - 0.6}{0.4}, \quad \forall v \in [0.6, 1] \ .$$

通过使用 $c = 1$，我们得到

$$1.4 \cdot \Gamma_{\text{uni}} \leq 1 + \int_{0.6}^{1} (5v - 3.5)^+ \, \mathrm{d}v = 1.225 \ \Rightarrow \Gamma_{\text{uni}} \leq \frac{7}{8} \ .$$

α-正则分布。受我们推导出的不等式启发，我们考虑 $\mathbb{F}_0$，其中

$$f_0(v) \cdot v - (1 - \mathbb{F}_0(v)) - c = 0, \quad \forall v \in \operatorname{supp}(\mathbb{F}_0) \ .$$

该微分方程得到如下分布：

$$f_0(v) = \frac{c+1}{v^2}, \quad \mathbb{F}_0(v) = (c+1) \cdot \left(1 - \frac{1}{v}\right), \quad \forall v \in \left[1, \frac{c+1}{c}\right] \ .$$

简单计算可得 $\mathbb{E}[s] = (c+1) \ln\left(\frac{c+1}{c}\right)$，且 $\mathsf{OPT}(\mathbb{F}_0) = 1$。由此得到近似比的上界

$$\Gamma \leq \frac{c+1}{c(c+1)\ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + 1} \ .$$

最后一步是验证 $\mathbb{F}_0$的 α-正则性。也就是说，对于 $v \in [1, \frac{c+1}{c}]$，以下量需要是非递减的：

$$(1 - \alpha) \cdot v - \frac{1 - \mathbb{F}_0(v)}{f_0(v)} = \frac{c}{c+1} v^2 - \alpha \cdot v \ .$$

对 v 求导可得，对于所有 $v \in [1, \frac{c+1}{c}]$，$\frac{2c}{c+1} v - \alpha \geq 0$，这等价于 $c \geq \frac{\alpha}{2-\alpha}$。总之，对于 α-正则分布，近似比 Γ_α 不大于

$$\Gamma_\alpha \leq \min_{c \geq \frac{\alpha}{2-\alpha}} \frac{c+1}{c(c+1)\ln\left(\frac{c+1}{c}\right) + 1} \ .$$

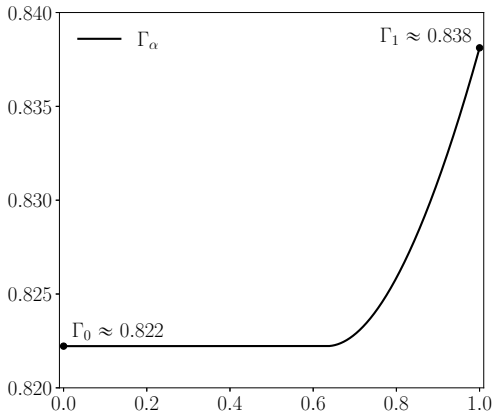
我们给出了该函数的图示。请参见图 3。具体而言，对于满足$\alpha = 1$的单调风险率分布，比率为 ~ 0.838；对于满足 $\alpha = 0$的正则分布，比率为 ~ 0.822。至此，定理证明完毕。

□

6 基于单调统计量的鲁棒定价

在第3节中，我们为单调定价策略提供了一般性归约。本节将此归约应用于刻画由特定统计量确定的各个簇内的最优定价策略。我们首先形式化基于特定统计量的单调定价策略与具有相同统计量的鲁棒定价问题之间的等价关系，并进一步针对齐次单调定价规则，将候选最坏情况分布从二维空间缩减至一维参数族。随后，我们计算具有 L^η-范数和超分位数信息的鲁棒定价的最优近似比，或者等价地，具有L^η-范数的最优定价规则和超分位数定价规则的最优近似比。

图 3：近似比上界 Γ_α



考虑一种鲁棒定价情形：卖方观察到价值分布的单调统计量 $\Psi(\mathbb{F}) = \theta$。换言之，卖方不知道真实分布 $\mathbb{F}$，只知道它属于歧义集

$$\mathcal{F}(\theta) = \{\mathbb{F} \in \mathcal{F} \mid \Psi(\mathbb{F}) = \theta\}. \tag{9}$$

卖方的目标是设计一种定价策略，使其在该歧义集上的最坏情况近似比最大化。我们进一步假设统计量 Ψ 是齐次的。

定义 6.1。若泛函/统计量 $\Psi : \Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 满足以下条件，则称其为齐次的：对于任意满足 $\mathbb{F}_1(\beta v) = \mathbb{F}_2(v)$ 对所有 v均成立的分布 $\mathbb{F}_1$和 $\mathbb{F}_2$，有 $\Psi(\mathbb{F}_1) = \beta\Psi(\mathbb{F}_2)$。

我们用于说明问题的各个统计量——均值、 L^η-范数、超分位数、分位数——确实都满足齐次性。本节中，我们求解基于齐次统计量的鲁棒定价问题，并计算最优近似比。具体而言，我们要解决以下问题：

$$\max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\theta} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(\theta)} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(\theta), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})}. \tag{10}$$

例如，当 $\Psi(\mathbb{F}) = \|\mathbb{F}\|_1$时，问题 (10) 就成为具有均值信息的鲁棒定价问题。我们将证明，该具有均值信息的鲁棒定价问题等价于求解问题 (5) 中的最优均值定价策略，具体表述如下定理。

定理6.1。对于任意齐次统计量 Ψ，在 Ψ信息下的稳健定价问题(10) 等价于 Ψ定价问题(5)：

$$\max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\theta} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(\theta)} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(\theta), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega \cdot \Psi(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})}.$$

此外，最优近似比由线性定价策略 $\tilde{p}^*(\theta) = \omega^* \cdot \theta$ 实现，其中ω^* 是右侧的最优解。

定理 6.1 确立了基于统计量的信息下的鲁棒定价问题与相应的基于统计量的定价策略优化问题之间的等价性。此外，该定理还表明，当统计量 Ψ 是齐次的时，在鲁棒定价问题中，只需考虑齐次（关于 Ψ呈线性）的定价策略即可，不失一般性。关键的

观察是，最优收益函数 OPT： $\Delta(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ 本身关于估值分布是齐次的。因此，鲁棒定价问题可简化为优化折扣因子 ω 与统计量 $\Psi(\mathbb{F})$ 的乘积。基于对卖方问题的这一简化，我们进一步将自然的决策简化为（11）和（12）中的单参数分布族。

定理 6.2。对于任意单调齐次统计量 Ψ，鲁棒定价问题与 Ψ-定价问题 (5) 等价于 (11) 和 (12)所示的以下两个问题。

$$\max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega \cdot \Psi(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}|_{a=1}\cup\widehat{\mathcal{F}}|_{b=1}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega \cdot \Psi(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \tag{11}$$

其中，$\check{\mathcal{F}}|_{a=1}$、$\widehat{\mathcal{F}}|_{b=1}$分别是满足 $a = 1$或$b = 1$ 的 α-正则分布的边界分布：

$$\check{\mathcal{F}}|_{a=1} := \left\{\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1} \mid \lambda \geq 0,\, \alpha\lambda \leq 1\right\} \quad and \quad \widehat{\mathcal{F}}|_{b=1} := \left\{\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1} \mid \lambda \geq 1\right\} .$$

与此同时，

$$\max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega \cdot \Psi(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}(1)\cup\widehat{\mathcal{F}}(1)} \frac{\mathrm{Rev}(\omega \cdot \Psi(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \tag{12}$$

where $\check{\mathcal{F}}(1) = \left\{\mathbb{F} \in \check{\mathcal{F}} \mid \Psi(\mathbb{F}) = 1\right\}, \widehat{\mathcal{F}}(1) = \left\{\mathbb{F} \in \widehat{\mathcal{F}} \mid \Psi(\mathbb{F}) = 1\right\}.$

定理 6.2表明，在鲁棒定价问题中，寻找最坏情况分布可以简化为对单个参数进行优化，从而大幅提高问题的可处理性。该定理还给出了两种等价但在计算上各有便利的替代缩放表述。对于不同形式的统计信息，可以应用（11）或（12）来推导最优定价策略及其相应的近似比。在接下来的小节中，我们将重点讨论 MHR（$\alpha = 1$）分布。我们将刻画不同代表性信息条件下的最优定价策略及其近似比，包括 L^η-范数信息和超分位数信息。根据哪种方法更清晰或符号表达更简洁，我们分别基于（11）或（12）给出证明。两种方法各有不同的分析优势，我们特意采用两者来展示不同的证明技巧。

6.1 L^η-范数信息

在本小节中，我们研究这样一个鲁棒定价问题：卖方观察到估值分布的 L^η-范数信息 $\|\mathbb{F}\|_\eta = \mathbb{E}[v^\eta]^{1/\eta} = \theta$，其中 $\eta \geq 1$。卖方寻求一个标价，使其在所有与该信息一致的分布中实现最大的最坏情况近似比。命题6.1借助定理6.2，对相应的鲁棒定价问题进行了重新表述。由于 $p(\mathbb{F}) = \mathbb{E}[v^\eta]^{1/\eta}$ 可以通过上述隐藏定价机制 $h(s,\ \mathbb{F}) = 1/\eta \cdot \left((\eta-1)\|\mathbb{F}\|_\eta + s^\eta/\|\mathbb{F}\|_\eta^{\eta-1}\right)$实现，命题 6.1 刻画了 L^η-范数信息下的最优鲁棒价格及其近似比，以及上述隐藏定价机制的性能保证。

我们指出，当 $\eta < 1$ 时，量 $\mathbb{E}[v^\eta]^{1/\eta}$ 称为 $\mathbb{F}$ 的拟范数。尽管它是单调的，但拟范数是严格凸而非凹的泛函。因此，它无法通过隐藏定价机制实现。尽管如此，拟范数仍是鲁棒定价中有意义的分布信息，而命题 6.1 仍可在给定拟范数信息 $\eta < 1$ 的情况下，刻画鲁棒定价方案下的最优近似和价格。

命题 6.1。 当卖方知道分布的 L^η-范数，即 $\Psi(\mathbb{F}) = \|\mathbb{F}\|_\eta$ 在问题 (10)中时，最优折扣因子 ω 和相应的近似比 Γ 可通过以下规划求得。

$$\max_{\omega,\Gamma}: \quad \Gamma \tag{13}$$

$$\textit{subject to}: \quad \Gamma \cdot e^{-\lambda} \le \omega \cdot \|\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta \cdot e^{-\lambda\omega\|\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta} \qquad \forall \lambda \in [0,1] \tag{13a}$$

$$\Gamma \cdot 1 \le \omega \cdot \|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta \cdot \min\left\{e^{-\lambda(\omega\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta - 1)}, 1\right\} \qquad \forall \lambda \in [1,\infty) \tag{13b}$$

在此，$\|\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\ 1}\|_\eta = (\lambda^{-\eta} \cdot \int_0^\lambda t^\eta e^{-t} dt + e^{-\lambda})^{1/\eta}$ 以及 $\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ 1}\|_\eta = (e^\lambda \cdot \lambda^{-\eta} \cdot \int_\lambda^\infty t^\eta e^{-t} dt)^{1/\eta}$.

均值信息。 L^η-范数信息框架将均值信息作为一个特例涵盖在内，条件是 $\eta = 1$。在这种情况下，我们简化$\|\mathbb{F}_{\lambda,\ 1}\|_\eta$ 和$\|\mathbb{F}_{\lambda,\ 1}\|_\eta$的公式：

$$\|\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_1 = \frac{1}{\lambda} \cdot \int_0^\lambda t e^{-t} dt + e^{-\lambda} = \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda}; \quad \|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_1 = e^\lambda \cdot \frac{1}{\lambda} \int_\lambda^\infty t e^{-t} dt = 1 + \frac{1}{\lambda}.$$

因此，优化问题（13）可简化为以下形式。

$$\begin{aligned} \max_{\omega,\Gamma}: \quad & \Gamma \\ \text{subject to}: \quad & \Gamma \le \omega \cdot \frac{1 - e^{-\lambda}}{\lambda} \cdot e^{-\omega(1-e^{-\lambda})+\lambda} && \forall \lambda \in [0,1] \\ & \Gamma \le \omega \cdot \left(1 + \frac{1}{\lambda}\right) \cdot \min\left\{e^{\lambda - \omega(\lambda+1)}, 1\right\} && \forall \lambda \in [1,\infty) \end{aligned}$$

通过数值求解该问题，我们刻画了卖方知道分布均值时的最优价格及其近似比。

命题 6.2。当卖方知道 $\|\mathbb{F}\|_1 = \theta$时，最优价格为 $\sim 0.823 \cdot \theta$，其近似比为 *0.771*。

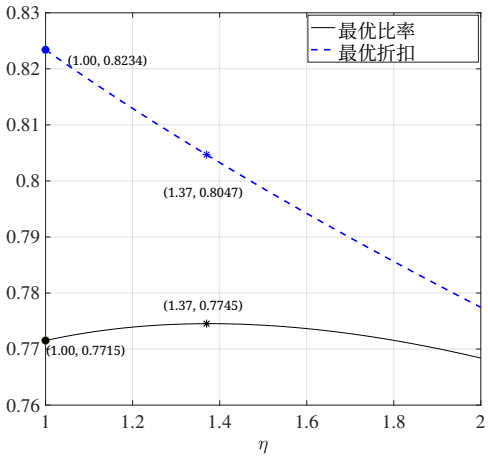
超越均值，通过数值求解问题（13的最优解，我们得到不同 η下的最优价格及相应的近似比。在图4a中，我们绘制了最优折扣因子及其对应的近似比随 η变化的曲线。我们发现，$\eta \approx 1.37$ 在所有 L^η-范数定价策略中实现了最大的近似比。

命题 6.3。 当卖方知道 $\|\mathbb{F}\|_{1.37} = \theta$ 时，最优价格为 $\sim 0.805 \cdot \theta$，其近似比为 *0.774*。

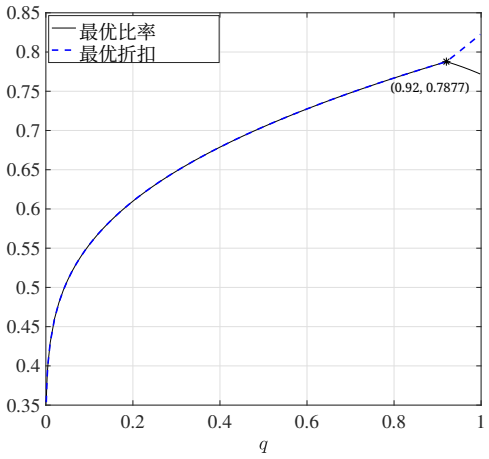
6.2 超分位数信息

假设卖方只能收集部分消费者的聚合信息。例如，隐私保护平台仪表盘或 A/B测试可能会报告部分市场的平均值。也就是说，卖方可能会获知超分位数（条件风险价值 CVaR$_q$）： $\mathbb{E}[v \mid v \ge \text{VaR}_q]$，即估值高于整个市场某一特定比例的顾客的期望值。为简化记号，我们在此将 $\text{VaR}_q = \mathbb{F}^{-1}(1-q)$ 记作。接下来，我们研究获知条件均值的价值如何随 q 变化。这为量化收集全面的聚合市场信息相对于更具针对性的细分市场信息所带来的边际效益提供了一种清晰的方法。值得注意的是，当 $q = 1$ 时，超分位数信息还将均值信息作为一种特殊情况包含在内。

图4：使用 L^{η}-范数和超分位数信息的性能比与最优折扣



(a) $p(\mathbb{F}) = \omega \cdot \|\mathbb{F}\|_{\eta} = \omega \cdot \mathbb{E}[v^{\eta}]^{1/\eta}$



(b) $p(\mathbb{F}) = \omega \cdot$条件风险价值$_q = \omega \cdot \mathbb{E}[v \mid v \geq$风险价值$_q]$

命题 6.4。 当卖方知道 条件风险价值$_q$，即 $\Psi(\mathbb{F}) = \mathbb{E}[v \mid v \geq$ 风险价值$_q]$ 在问题 (10)中，最优折扣因子 ω 以及相应的近似比 Γ可通过以下方式求得：

$$\max_{\omega,\Gamma}: \quad \Gamma \tag{14}$$

$$\textit{subject to}: \quad \Gamma \leq \omega \tag{14a}$$

$$\Gamma \leq \frac{\omega \cdot e^{-\lambda\omega}}{q \cdot (1-\lambda-\ln q) \cdot -\frac{\ln(-q\cdot(\lambda+\ln q-1))}{\lambda}} \qquad \forall \lambda \in (-\ln q, 1-\ln q) \tag{14b}$$

$$\Gamma \leq \frac{\omega \cdot \min\left\{1, qe^{-\lambda(\omega-1+1/\lambda)}\right\}}{1-\frac{1}{\lambda}(1-\ln q)} \qquad \forall \lambda \in [1-\ln q, \infty). \tag{14c}$$

通过数值求解上述优化问题，我们计算出最优近似比及其对应的最优折扣因子 ω 作为 CVaR 的函数$_q$。不同 q 取值下的结果如图 4b所示，这表明近似比在约 $q \approx 0.92$ 处达到最大值。

命题 6.5。 当卖方知道 条件风险价值$_{0.92} = \theta$ 时，最优价格为 $\sim 0.787 \cdot \theta$，可达到 0.787 的近似比。

命题 6.5 表明，有选择地排除低价值细分群体，比依赖总体均值更能提供稳健的收入保证，这对市场调研和数据收集具有实际意义。与其估计整个总体的均值，不如着重估计强调中等和高估值的基于尾部的统计量，这可能更有效。

7 结论

本文研究数据受限环境下的稳健定价：卖方只能观察到估值分布中的单个样本，而买方则掌握完全信息。我们利用买方的信息优势，构建了一个统一框架，将稳健定价文献中的两种主要范式——基于统计量的定价和基于样本的定价——衔接起来。我们提出

隐藏定价机制，使卖方仅凭单个样本，就能实施传统上需要了解分布统计量（例如均值、 L^η-范数和超分位数）才能采用的定价规则。在这一单样本情形下，可以恢复以往只有在统计量已知时才能实现的性能保证。为求解由此产生的无限维问题，我们对自然的优化问题进行了易于处理的归约。对于单调定价策略，我们证明，自然的最坏情况响应属于一个简单的二参数分布族。该归约使我们能够对不同信息情形下的最优定价策略和近似比进行精确刻画。我们还以不可能性结果补充这些正面结果，证明简单的单调和凹定价策略在所有凹定价策略中几乎是最优的，其表现也接近一般先验无关机制所能达到的最佳水平。总体而言，我们的结果为稀缺数据下的稳健定价提供了统一视角，并凸显买卖双方之间的信息不对称如何能够被系统性地利用，以克服小样本情形的根本局限。

参考资料

A. Allouah、A. Bahamou 和 O. Besbes。《样本定价》。《运筹学》，70(2):1088–1104，2022 年。A. Allouah、A. Bahamou 和 O. Besbes。《单点最优定价》。《管理科学》，69(10): 5866–5882，2023 年。P. Azar、J. Chen 和 S. Micali。《众包贝叶斯拍卖》。载于*ITCS*，第 236–248 页。ACM，2012 年。M. Babaioff、Y. A. Gonczarowski、Y. Mansour 和 S. Moran。两个（样本）真的比一个好吗？载于 *EC*，第 175 页。ACM，2018 年。A. Bahamou、O. Besbes 和 O. Mouchtaki。《快速收益最大化》。*arXiv* 预印本 *arXiv:2407.07316*，2024 年。D. Bergemann 和 K. H. Schlag。《无先验定价》。《欧洲经济协会期刊》，6(2-3):560–569，2008 年。G. W. Brier。大气湍流统计理论与扩散问题。《大气科学杂志》，7(4):283–290，1950 年。B. Caillaud 和 J. Robert。无知卖方对收益最大化拍卖的实施。《经济设计评论》，9(2):127–143，2005 年。R. Caldentey、Y. Liu 和 I. Lobel。极小极大遗憾下的跨期定价。《运筹学》，65(1):104–129，2017 年。V. Carrasco、V. F. Luz、N. Kos、M. Messner、P. Monteiro 和 H. Moreira。矩条件下的最优销售机制。《经济理论杂志》，177:245–279，2018 年。H. Chen、M. Hu 和 G. Perakis。无分布定价。《制造与服务运营管理》，24(4):1939–1958，2022 年。Z. Chen、Z. Hu 和 R. Wang。有限信息下的筛选：对偶视角。《运筹学》，2023 年。

R. Cole 和 T. Roughgarden。收益最大化的样本复杂度。载于*STOC*，第 243–252 页。ACM，2014 年。C. Daskalakis 和 M. Zampetakis。通过因子揭示半定规划，利用两个样本获得更多收益。载于*EC*，第 257–272 页。ACM，2020 年。S. Du。共同估值下的稳健机制。*Econometrica*，86(5):1569–1588，2018 年。S. S. Eren 和 C. Maglaras。需求信息有限时的垄断定价。《收益与定价管理杂志》，9(1-2):23–48，2010 年。Y. Feng、J. D. Hartline 和 Y. Li。基于样本定价的揭示差距。载于 *STOC*，第 1438–1451 页。ACM，2021 年。T. Fissler 和 J. F. Ziegel。高阶可诱导性与 Osband 原理。《统计年鉴》，第 1680–1707 页，2016 年。R. M. Frongillo 和 B. Waggoner。信息引出的近期趋势。*SIGecom Exch.*，22(1): 122–134，2024 年。H. Fu、N. Immorlica、B. Lucier 和 P. Strack。随机化胜过作为先验无关拍卖的第二价格拍卖。载于 *EC*，第 323 页。ACM，2015 年。Y. Giannakopoulos、D. Poٍcas 和 A. Tsigonias-Dimitriadis。统计信息极少时的稳健收益最大化。《*ACM*经济学与计算汇刊》，10(3):1–34，2023 年。T. Gneiting 和 A. E. Raftery。严格适当评分规则、预测与估计。《美国统计协会杂志》，102(477):359–378，2007 年。Y. A. Gonczarowski 和 N. Nisan。单参数拍卖环境中的高效经验收益最大化。载于 *STOC*，第 856–868 页。ACM，2017 年。C. Guo、Z. Huang 和 X. Zhang。确定单参数收益最大化的样本复杂度。载于 *STOC*，第 662–673 页。ACM，2019 年。Y. Hu、Z. Huang、Y. Shen 和 X. Wang。定向提升拍卖设计中的样本效率。载于*EC*，第 610–629 页。ACM，2021 年。Z. Huang、Y. Mansour 和 T. Roughgarden。《充分利用样本》。*SIAM J. Comput.*，47(3):651–674，2018 年。C.̤ Koٍcyiˇgit、N. Rujeerapaiboon 和 D. Kuhn。稳健多维定价：无遗憾分离。《数学规划》，第 1–34 页，2022 年。N. S. Lambert、D. M. Pennock 和 Y. Shoham。引出概率分布的性质。载于*EC*，第 129–138 页。ACM，2008a。N. S. Lambert、D. M. Pennock 和 Y. Shoham。引出概率分布的性质：概要。*SIGecom Exch.*，7(3)，2008b。Y. Li、P. Lu 和 H. Ye。不精确分布下的收益最大化。载于 *AAMAS*，第 1582–1590 页。国际自主智能体与多智能体系统基金会，2019 年。

P. Milgrom 和 I. Segal。《任意选择集的包络定理》。*Econometrica*，70(2)：583–601，2002。R. B. Myerson。《最优拍卖设计》。《运筹学数学》，6(1)：58–73，1981。A. D. Naby、S. Farajollahzadeh 和 M. Hu。《稳健单次价格实验》。载于*EC*，第 1211 页。ACM，2025。K. H. Osband。《为改善成本预测提供激励（预测、不确定性引出）》。加州大学伯克利分校，1985。M. Cₛ. Pınar 和 C. Kızılkale。《模糊性下的稳健筛选》。《数学规划》，163 (1-2)：273–299，2017。L. J. Savage。《个人概率与期望的引出》。《美国统计协会杂志》，66(336)：783–801，1971。N. Schweizer 和 N. Szech。Myerson 正则性的定量视角。技术报告，WZB 讨论论文，2015。S. Wang。稳健销售机制中简单菜单的力量。《管理科学》，71(6)：5268–5287，2025。S. Wang、S. Liu 和 J. Zhang。基于矩信息的极小极大遗憾稳健筛选。制造与服务运营管理，26(3)：992–1012，2024。

附录：第 2.3 节和第3

证明。 引理2.3的证明。我们首先研究 $\mathbb{F}_{\lambda,\ a}$ 并计算收益函数 $\mathbf{Rev}(v) = v\mathcal{E}(\lambda v)$ 关于 $v \in [0, a]$ 的导数：

$$\begin{aligned}
\alpha \in [0,1): \quad \mathrm{Rev}'(v) &= (1+(1-\alpha)\lambda v)^{-\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1}{1-\alpha}\cdot(1-\alpha)\lambda v\cdot(1+(1-\alpha)\lambda v)^{-\frac{1}{1-\alpha}-1} \\
&= (1+(1-\alpha)\lambda v)^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}\cdot(1-\alpha\lambda v)\ ; \\
\alpha = 1: \quad \mathrm{Rev}'(v) &= e^{-\lambda v} - v\lambda e^{-\lambda v} = e^{-\lambda v}\cdot(1-\lambda v)\ .
\end{aligned}$$

在这两种情况下，收益函数在 v 上递增（如果 $\alpha\lambda v \le 1$ ），否则在 v 上递减。回想一下，分布 $\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a}$ 在 a 处截断。因此，正如所述， p^* 要么是 a ，要么是 $\frac{1}{\alpha\lambda}$ 。 —

接下来，我们研究 $\mathbb{F}_{\lambda,\ b}$ ，并计算收益函数 $\mathbf{Rev}(v) = v\mathcal{E}(\lambda(v-b))$ 对 $v \in [b, \infty)$ 的导数：

$$\begin{aligned}
\alpha \in [0,1): \quad \mathrm{Rev}'(v) &= (1+(1-\alpha)\lambda(v-b))^{-\frac{1}{1-\alpha}} - \frac{1}{1-\alpha}\cdot(1-\alpha)\lambda v\cdot(1+(1-\alpha)\lambda(v-b))^{-\frac{1}{1-\alpha}-1} \\
&= (1+(1-\alpha)\lambda(v-b))^{\frac{\alpha-2}{1-\alpha}}\cdot(1-\alpha\lambda v-(1-\alpha)\lambda b)\ ; \\
\alpha = 1: \quad \mathrm{Rev}'(v) &= e^{-\lambda(v-b)} - \lambda v e^{-\lambda(v-b)} = e^{-\lambda(v-b)}\cdot(1-\lambda v)\ .
\end{aligned}$$

在这两种情况下，收益函数在 v 上递增（如果 $1-\alpha\lambda v - (1-\alpha)\lambda b \ge 0$ ），否则在 v 上递减。因此，正如所述， p^* 要么是 b，要么是 $\frac{1-(1-\alpha)\lambda b}{\alpha\lambda}$ 。 □

证明。 引理 2.4 的证明。令 $\mathbf{Rev}(v) = v\cdot(1-\mathbb{F}(v))$ 为 $\mathbb{F}$ 的收益函数。其导数等于

$$\mathrm{Rev}'(v) = 1 - \mathbb{F}(v) - vf(v) = -f(v)\cdot\varphi_{0,\mathbb{F}}(v)\ .$$

因此，收益′(v) ≥ 0 ⟺ φ_0，$\mathbb{F}$(v) ≤ 0。由于 φ_0，$\mathbb{F}$(v) = φ_α，$\mathbb{F}$(v) + αv，且根据α-正则性，φ_α(𝔽)是递增的，因此可知 φ_0(𝔽)也是递增的。根据 p^*(𝔽)的定义，φ_0(𝔽)恰好穿过零点一次。因此，收益(v)在φ_0(𝔽) ≤ 0的区域内递增，即在 $[0, p^*(\mathbb{F})]$, ，而在φ_0(𝔽) ≥ 0的区域内递减，即在 $[p^*(\mathbb{F})\ \infty)$。根据 LB 和 UB 的定义，该陈述成立。 □

证明。 引理 2.5的证明。我们首先验证 $v \to v\mathcal{E}(\lambda v)$在$\alpha\lambda v \le 1$时的区域上是对数凹的：

$$\begin{aligned}
\alpha \in [0,1): \quad (\ln(v\mathcal{E}(\lambda v)))' &= \left(\ln v - \frac{1}{1-\alpha}\ln(1+(1-\alpha)\lambda v)\right)' = \frac{1}{v} - \frac{\lambda}{1+(1-\alpha)\lambda v}\ ; \\
\alpha = 1: \quad (\ln(v\mathcal{E}(\lambda v)))' &= (\ln v - \lambda v)' = \frac{1}{v} - \lambda\ .
\end{aligned}$$

我们进一步计算二阶导数：

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{v} - \frac{\lambda}{1+(1-\alpha)\lambda v}\right)' &= -\frac{1}{v^2} + \frac{(1-\alpha)\lambda^2}{(1+(1-\alpha)\lambda v)^2} \\
&= -\frac{1+2(1-\alpha)\cdot\lambda v - \alpha(1-\alpha)\lambda^2 v^2}{v^2(1+(1-\alpha)\lambda v)^2} \le 0\ , \qquad \forall \alpha\lambda v \le 1
\end{aligned}$$

接下来，假设 $a \le a'$，并令 $l = \mathrm{LB}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,\, a},\ \Gamma)$。定义 $l' = l + a' - a$。只需证明 $\check{\mathrm{Rev}}(l',\ \mathbb{F}_{\lambda,\, a'}) \ge \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\mathbb{F}_{\lambda,\, a'})$：

$$\begin{aligned}\mathrm{Rev}(l', \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a'}) = l'\mathcal{E}(\lambda l') &\ge (l\mathcal{E}(\lambda l)) \cdot \left(a'\mathcal{E}(\lambda a')\right) / \left(a\mathcal{E}(\lambda a)\right) \\ &= \Gamma \cdot a'\mathcal{E}(\lambda a') = \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a'})\ ,\end{aligned}$$

其中，该不等式由 $v \to v\mathcal{E}(\lambda v)$ 的对数凹性以及 $l \le a, l' \le a'$ 和$l + a' = l' + a$这一事实成立；最后一个等式由引理 2.3 得出。 □

证明。 定理 3.2 的证明。对于 $\alpha \in [0, 1)$,

$$\begin{aligned}q_1 \cdot \left(1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger}(v)\right) = q_1 \cdot \mathcal{E}(\lambda^\dagger(v - b^\dagger)) &= q_1 \cdot \left(1 + (1-\alpha)\,\lambda^\dagger(v - b^\dagger)\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= \left(q_1^{-(1-\alpha)} + (1-\alpha)\lambda\,(v - v_1)\right)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= (\lambda v_1 + (1-\alpha)\lambda\,(v - v_1))^{-\frac{1}{1-\alpha}} = ((1-\alpha)\lambda v + \alpha\lambda v_1)^{-\frac{1}{1-\alpha}} \\ &= (1 + (1-\alpha)\lambda(v - b))^{-\frac{1}{1-\alpha}} = 1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(v).\end{aligned}$$

对于 $\alpha = 1$,

$$1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda^\dagger,b^\dagger}(v) = \mathcal{E}(\lambda^\dagger(v - b^\dagger)) = e^{-\lambda(v - \frac{1}{\lambda})} = e^{1-\lambda b} \cdot e^{-\lambda(v-b)} = \frac{1}{q_1}\left(1 - \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}(v)\right).$$

$\hat{}$ $\hat{}$因此，对所有 $\alpha \in [0, 1]$ 和所有 $v \ge v_1$，我们有 $1 - \mathbb{F}_{\lambda,b}(v) = q_1 \cdot (1 - \mathbb{F}_{\lambda^\dagger,b^\dagger}(v))$。 □

$\check{}$ $\hat{}$证明。 推论 3.1 的证明。必要性由引理 2.4 以及 $\mathbb{F}_{\lambda,a}, \mathbb{F}_{\lambda,b} \in \mathcal{F}$ 这一事实得出。接下来，我们通过反证法证明这两个条件的充分性。假设存在一个满足这两个条件的单调定价策略 p，但它不是 Γ-近似的。那么，存在一个分布 $\mathbb{F} \in \mathcal{F}$，使得 $\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F}) < \Gamma \cdot \mathrm{OPT}(\mathbb{F})$。如果 $p(\mathbb{F}) \le p^*(\mathbb{F})$，我们应用引理 $\check{}$ $\check{}$Lemma 3.1 并得到一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda,a} \in \mathcal{F}$，使得

$$\frac{\mathrm{Rev}(p(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}), \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a})}{\mathrm{OPT}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,a})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} < \Gamma\ .$$

$\check{}$ $\check{}$ $\check{}$ $\check{}$由于 $p(\mathbb{F}_{\lambda,\, a}) \le p^*(\mathbb{F}_{\lambda,\, a})$，因此必有 $p(\mathbb{F}_{\lambda,\, a}) < \mathrm{LB}(\mathbb{F}_{\lambda,\, a},\ \Gamma)$，这与该陈述的第一个条件相矛盾。

$\hat{}$ $\hat{}$若 $p(\mathbb{F}) \ge p^*(\mathbb{F})$，则应用引理 3.2 并得到一个分布 $\mathbb{F}_{\lambda,\, b} \in \mathcal{F}$ 使得

$$\frac{\mathrm{Rev}(p(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}), \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})}{\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})} \le \frac{\mathrm{Rev}(p(\mathbb{F}), \mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} < \Gamma\ .$$

$\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$ $\hat{}$由于 $p(\mathbb{F}_{\lambda,\, b}) \ge p^*(\mathbb{F}_{\lambda,\, b})$，因此必有 $p(\mathbb{F}_{\lambda,\, b}) > \mathrm{UB}(\mathbb{F}_{\lambda,\, b},\ \Gamma)$，这与该陈述的第二个条件相矛盾。 □

命题 4.1 的证明

如第3 节和4节所述，要验证 Γ-近似，需要证明对于任意 $\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b} \in \widehat{\mathcal{F}}$，都存在一个函数 $h^\Gamma(\cdot, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})$，使得

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}}\left[h^\Gamma(s, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b})\right] \le \mathrm{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}, \Gamma),$$

且 $h^{\Gamma}(\cdot, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) \in H^{\Gamma}$，其中 H^{Γ} 定义如下：

$$H^{\Gamma} = \left\{ h : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \;\middle|\; \begin{array}{l} \mathbb{E}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[h(s)] \geq \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma), \quad \forall (\lambda, a) \in K = \{(\lambda, a) \mid \alpha\lambda a \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2; \\ h \text{ is non-decreasing} \end{array} \right\}.$$

只需考虑如下形式的分布 $\widehat{\mathbb{F}}_{1,\,b}$ 其中 $b \geq 1$。[4] 具体而言，我们必须证明存在一个函数 $h^{\Gamma}(\cdot, \widehat{\mathbb{F}}_{1,\,b})$ 满足以下三个条件：

(i) 上界：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}}\left[h^{\Gamma}(s, \widehat{\mathbb{F}}_{1,b})\right] \leq \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}, \Gamma); \tag{15}$$

(ii) 下界：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}\left[h^{\Gamma}(s, \widehat{\mathbb{F}}_{1,b})\right] \geq \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma), \quad \forall (\lambda, a) \in K = \{(\lambda, a) \mid \lambda a \leq 1\} \subseteq \mathbb{R}^2; \tag{16}$$

(iii) 单调性：

$$h^{\Gamma}(s, \widehat{\mathbb{F}}_{1,b}) \text{ is non-decreasing in } s. \tag{17}$$

离散化方法 在连续空间中直接验证这些条件难以实现。因此，我们采用一种实用的方法，将相关参数（a、b 和 λ）以及函数 h 离散化。这种转换将连续问题转化为一组有限的线性条件，随后可通过线性规划进行验证。

我们为这些参数定义如下离散集合：

- **参数 a：** 集合 $\mathbb{A}$ 是一个从 $a = 1$ 到 $\bar{a} = 20$、步长为 $\Delta_a = 0.01$的离散网格：

$$\mathbb{A} = \{\underline{a}, \underline{a} + \Delta_a, \cdots, \bar{a} = \underline{a} + n_{\mathbb{A}} \cdot \Delta_a\}$$

- **参数 b：** 集合 $\mathbb{B}$ 是 $\mathbb{A}$的一个连续子集，定义范围从 $b = 1$ 到 $b = 10$，步长与 $\bar{\Delta}_b = 0.001$相同：

$$\mathbb{B} = \{\underline{b}, \underline{b} + \Delta_b, \cdots, \bar{b} = \underline{b} + n_{\mathbb{B}} \cdot \Delta_b\} \in \mathbb{A}$$

- **参数 λ：** 集合 $\mathbb{L}$ 是一个从 $\lambda = 0$ 到 $\bar{\lambda} = 1$、步长为 $\Delta_\lambda = 0.001$的离散网格：

$$\mathbb{L} = \{\underline{\lambda}, \underline{\lambda} + \Delta_\lambda, \cdots, \bar{\lambda} = \underline{\lambda} + n_{\mathbb{L}} \cdot \Delta_\lambda\}$$

为方便起见，我们记 $\mathbb{A}[i] = a + i\Delta_a$、$\mathbb{B}[j] = b + j\Delta_b$和 $\mathbb{L}[k] = \lambda + k\Delta_\lambda$。

给定 b，我们要寻找一个分段常数函数 $h^b(s)$，其断点集合为 $\mathbb{A}$，定义如下：

$$h^b(s) = \begin{cases} h^b(\mathbb{A}[0]) & \text{if } s \leq \mathbb{A}[0] \\ h^b(\mathbb{A}[i]) & \text{if } \mathbb{A}[i-1] < s \leq \mathbb{A}[i], \text{ for } 1 \leq i \leq n_{\mathbb{A}} \\ h^b(\mathbb{A}[n_{\mathbb{A}}]) + e \cdot (s - \bar{a}) & \text{if } s > \mathbb{A}[n_{\mathbb{A}}] \end{cases}.$$

[4]该归约之所以成立，是因为一般解可以通过重新缩放来构造：$h^{\Gamma}(s,\ \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b}) \triangleq h^{\Gamma}(\lambda s,\ \widehat{\mathbb{F}}_{1,\ \lambda b})$.

离散化条件 我们将验证限制在所有 $j \in \{1, \cdots, n_{\mathbb{B}}\}$对应的点 $b = \mathbb{B}[j]$ 和 $b' = \mathbb{B}[j-1]$。因此，连续条件被重新表述为关于 h^b取值的一组有限线性约束。函数 h^b 必须满足以下条件，这些条件会针对所有相关的离散点进行检查。

(i) 单调性：函数 h^b 必须在离散网格上非递减。

$$h^b(\mathbb{A}[i]) \geq h^b(\mathbb{A}[i-1]) \quad \forall i \in \{1, 2, \cdots, n_{\mathbb{A}}\}; \tag{18}$$

(ii) 上界：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \widehat{\mathbb{F}}_{1,b}} \left[h^b(s) \right] \leq \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{1,b'}, \Gamma); \tag{19}$$

(iii) 下界：对于所有满足约束 $\lambda' a' \leq 1$ 的 $i \in \{1, \cdots, n_{\mathbb{A}}\}$ 和 $k \in \{1, \cdots, n_{\mathbb{L}}\}$，令$a = \mathbb{A}[i]$、$a' = \mathbb{A}[i-1]$、$\lambda = \mathbb{L}[k]$和 $\lambda' = \mathbb{L}[k-1]$，此条件都必须成立。

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} \left[h^b(s) \right] \geq \begin{cases} \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda',a}, \Gamma) & \text{if } \lambda' a \leq 1 \\ \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda',1/\lambda'}, \Gamma) & \text{otherwise} \end{cases}. \tag{20}$$

定理 B.1。 设 $\Gamma \leq 0.8$。如果存在一个函数 h^b，使得条件 (18)、(19)和 (20)对所有满足 $(b = \mathbb{B}[j], b' = \mathbb{B}[j-1])$ 的数对 $j \in \{1, \cdots, n_{\mathbb{B}}\}$都成立，那么该 Γ-近似成立。

通过设定 $\Gamma = 0.790$，我们通过数值验证确认这些条件对所有此类数对都成立。

命题B.1。 对于单调风险率分布类，存在一个函数 $h^\Gamma(s, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b})$ ，其近似比达到 0.790。

定理 B.1 的证明依赖于以下三个引理。

引理 B.1。 设 $h^b(s)$ 是一个断点集为 $\mathbb{A}$ 的分段常数函数。若对于某个 $1 \leq i \leq n_{\mathbb{A}}$，$a \in (\mathbb{A}[i-1], \mathbb{A}[i])$，并令 $a' = \mathbb{A}[i]$，则：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} \left[h^b(s) \right] = \mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a'}} \left[h^b(s) \right].$$

证明。 证明。由于在区间 $[a, a']$ 内 $h^b(s)$ 保持相同，因此结论成立。 □

引理 B.2。 设 $h^b(s)$ 是一个断点集为 $\mathbb{A}$ 的非递减分段常数函数。若 $a \leq \bar{a}$，则对于任意 $\lambda < \lambda'$，

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} \left[h^b(s) \right] \geq \mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda',a}} \left[h^b(s) \right].$$

证明。 证明。考虑

$$\begin{aligned} \mathop{\mathbb{E}}_{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}} [h(s)] &= \sum_{i=1}^{n_{\mathbb{A}}} h^b(\mathbb{A}[i]) \left(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(\mathbb{A}[i]) - \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(\mathbb{A}[i-1]) \right) + h^b(\mathbb{A}[0]) \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(\mathbb{A}[0]) \\ &= \sum_{i=0}^{n_{\mathbb{A}}-1} \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(\mathbb{A}[i]) \left(h^b(\mathbb{A}[i]) - h^b(\mathbb{A}[i+1]) \right) + \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(\mathbb{A}[n_{\mathbb{A}}]) h^b(\mathbb{A}[n_{\mathbb{A}}]) \\ &= \sum_{i=0}^{n_{\mathbb{A}}-1} \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(\mathbb{A}[i]) \left(h^b(\mathbb{A}[i]) - h^b(\mathbb{A}[i+1]) \right) + h^b(\mathbb{A}[n_{\mathbb{A}}]). \end{aligned}$$

最后一个等式成立，因为 $\mathbb{F}_{\lambda,\ a}(\mathbb{A}[n_{\mathbb{A}}]) = 1$ 其中 $a \le \bar{a}$。

由于 h^b 是非递减的，因此 $h^b(\mathbb{A}[i]) - h^b(\mathbb{A}[i+1]) \le 0$。因此，要证明总期望关于 λ非递增，只需证明对于任意固定的 v，$\mathbb{F}_{\lambda,\ a}(v)$关于 λ 非递减。回顾其定义：

$$\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(v) := \begin{cases} 1 - \mathcal{E}(\lambda v) & v \in [0, a) \\ 1 & v \in [a, \infty) \end{cases} \qquad \text{where } \mathcal{E}(v) = e^{-v}$$

对 λ求导即可得出该结果。 □

引理 B.3。 假设 $h^b(x)$ 是一个非递减函数。对于任意 $b' < b \le \bar{a}$,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}}\left[h^b(s)\right] \ge \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b'}}\left[h^b(s)\right].$$

证明。 证明。由于 $h^b(s)$是一个非递减函数，因此结论成立。 □

证明。 定理 B.1的证明。我们首先给出 $h^\Gamma(s,\ \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,\ b})$的构造：[5]

- For $\lambda b > \bar{b}$, we define $c = \max_{a\in[0,1]} \frac{\mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{1,a},\Gamma)}{1-e^{-a}}$, and set $h^\Gamma(s, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = c \cdot \lambda \cdot s$.
- For $\lambda b \le \bar{b}$, let $b' = \arg\min_{b'}\{b' \in \mathbb{B} \mid b' \ge b\}$, and set $h^\Gamma(s, \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}) = h^{b'}(\lambda s)$.

在不失一般性的前提下，以下证明中我们重点讨论 $\mathbb{F}_{1,\ b}$。在这两种情况下，由该构造可知，单调性条件（17）成立。现在，我们分别讨论 b取较大值和较小值的情形。

情形 1： $\frac{a}{1-e^{-a}}\ b \le b = 10$。通过数值分析，上界条件（15）成立，因为 $\max_{a\in[0,1]}$ 下界$\frac{}{}$

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}}\left[h^\Gamma(s, \widehat{\mathbb{F}}_{1,b})\right] = c \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}}[s] = c \cdot (b+1) < b \le \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}, \Gamma) \qquad (\text{since } b > 10).$$

对于下界条件（16），给定 $\lambda a \le 1$，期望

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}\left[h^\Gamma(s, \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a})\right] = c \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}[s] = \frac{c}{\lambda} \cdot \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\breve{\mathbb{F}}_{1,\lambda a}}[s] \ge \frac{1}{\lambda}\mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{1,\lambda a}, \Gamma) = \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma).$$

情形 2： $b \le b$。

对于上界条件（15），关于 $\mathbb{F}_{1,\ b}$ 的期望为：

$$\mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}}\left[h^\Gamma(s, \widehat{\mathbb{F}}_{1,b})\right] = \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}}\left[h^{b'}(s)\right] \le \mathop{\mathbb{E}}_{s\sim\widehat{\mathbb{F}}_{1,b'}}\left[h^{b'}(s)\right] \le \mathsf{UB}(\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}, \Gamma).$$

[5]我们注意到 $\lambda b \ge 1$.[6]我们的目标是计算 $\max_{a\in[0,1]}$ 下界$(\breve{\mathbb{F}}_{1,\ a,\ \Gamma})\,1-e^{-a}$，其中 $1-e^{-a} = \mathop{\mathbb{E}}_{x\sim\breve{\mathbb{F}}_{1,\ a}}[x]$。为方便起见，记 $g(a) =$ 下界$(\breve{\mathbb{F}}_{1,\ a,\ \Gamma})$。

- 令 a^* 为使 $g_{(a)}\,1-e^{-a}$ 关于 a 在 a^* 处的导数为 0 的值。因为 $g(a)e^{-g(a)} = \Gamma a e^{-a}$。取对数并求导，得到 $g'_{(a^*)\ g(a^*)} - g'(a^*) = \frac{1}{a^*} - 1$。

- $g_{(a)\,1-e^{-a}}$ 的导数为 $\frac{g'(a)(1-e^{-a})-g(a)e^{-a}}{(1-e^{-a})^2}$。这意味着，$g'(a^*)(1-e^{-a^*}) - g(a^*)e^{-a^*} = 0$。

结合这两个条件可得 $g(a^*) = 1 - (e^{a^*}-1)\frac{1-a^*}{a^*}$。

现在我们寻找满足 $\ln g(a^*) - g(a^*) - \ln a^* + a^* = \log \Gamma$ 的 a^*。左侧是一个严格递增函数。对于 $\Gamma = 0.8$，我们得到 $a^* \approx 0.47525$, $g(a^*) \approx 0.32821$, $1 - e^{-a^*} \approx 0.37827$，从而得到比率 0。86766。对于 $\Gamma < 0.8$，该比率的最大值$\mathsf{LB}(\mathbb{F}_{1,a},\Gamma)\ 1-e^{-a}$ 甚至会更小。

该不等式由引理B.3得出。

剩下要验证的是，对于任意 λ 和 a 满足 $\lambda a \le 1$，以及任意 $s \sim \mathbb{F}_{\lambda,a} b \in \mathbb{B}$，$\underset{\smile}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma)$ 成立。

我们先处理边界情形。对于 $a > \bar{a}$，下界 $\underset{\smile}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda',a}, \Gamma)_{s \sim \mathbb{F}_{\lambda,a}}$

已在引理 4.3 中得到证明。对于 $a < \underline{a}$，我们有：

$$\underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] = \underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{0,\underline{a}}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] = h^b(\underline{a}) \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{0,\underline{a}}, \Gamma) = \Gamma \cdot \underline{a}.$$

注意到，在 $\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 下，采用_$\Gamma \cdot a$ 定价可保证对最优收益达到 Γ 近似，因此 $\underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,\ a},\ \Gamma)$。

因此，在证明余下部分中，我们假设 $a \le a \le \bar{a}$ 和 $\lambda \le 1$。令 $a' = \arg\min\{a' \in \mathbb{A} \mid a' \ge a\}$，$\lambda' = \arg\max\{\lambda' \in \mathbb{L} \mid \lambda' \ge \lambda\}$。我们区分两种子情形：若 $\alpha(\lambda' - \Delta_\lambda)a' \le 1$，则

$$\underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] = \underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a'}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda',a'}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda'-\Delta_\lambda,a'}, \Gamma) \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma).$$

第一个等式和不等式分别由引理 B.1 和引理 B.2得出。否则，

$$\underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] = \underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a'}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \underset{s \sim \breve{\mathbb{F}}_{\lambda',a'}}{\mathbb{E}}\left[h^b(s)\right] \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda'-\Delta_\lambda,1/(\lambda'-\Delta_\lambda)}, \Gamma) \ge \mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}, \Gamma).$$

最后一个不等式成立，因为 $\lambda > \lambda' - \Delta_\lambda$ 和 $a \le 1/(\alpha(\lambda' - \Delta_\lambda))$。 □

关于 Γ 的上界。为建立 Γ的上界，我们采用P(𝔽)的离散化版本。具体而言，离散化后，我们考虑以下优化规划：

$$\begin{aligned}
\max_{K(a,\lambda)\ge 0}: \quad & \sum_{a\in\mathbb{A},\lambda\in\mathbb{L}} K(a,\lambda)\mathsf{LB}(\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a},\Gamma) \\
\text{subject to}: \quad & \sum_{a\in\mathbb{A},\lambda\in\mathbb{L}} K(a,\lambda)\left(1-\breve{\mathbb{F}}_{\lambda,a}(s)\right)\,\mathrm{d}\mathbb{G} \le 1-\widehat{\mathbb{F}}_{1,b}(s+\Delta_a) \qquad \forall s\in\mathbb{A} \\
& \sum_{a\in\mathbb{A},\lambda\in\mathbb{L}} K(a,\lambda) = 1. \qquad (21)
\end{aligned}$$

定理 B.2. *P(𝔽)* 的最优值不低于 (21)的最优值 .

根据该定理，要建立 Γ-近似的上界，只需确定参数 b 和 Γ，使得 (21) 的最优值超过 $\mathsf{UB}(\mathbb{F}_{1,\ b},\ \Gamma)$。当 $\Gamma = 0.796$和 $b = 1.95$时，(21) 的最优解在数值上超过 2。3765，而 $\mathsf{UB}(\mathbb{F}_{1,\ b},\ \Gamma) \le 2.3756$。

命题 B.2. 对于单调风险率分布类，任何凹定价策略都无法取得优于 0.796 的近似比。

第 C 节缺失的证明6

证明。 定理 6.1 的证明。显然，左端不小于右端，因为形如 $\tilde{p}(\Psi(\mathbb{F})) = \omega\Psi(\mathbb{F})$ 是所有可行定价规则 $\tilde{p}(\Psi(\mathbb{F}))$ 的子集。

$$\max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\theta} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(\theta)} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(\theta),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(\Psi(\mathbb{F})),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \geq \max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} .$$

为证明左侧不大于右侧，我们首先通过 $\min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(1)} \frac{\mathrm{Rev}(\omega^*,\mathbb{F})}{\mathbb{F}}$ 最优值() 从上界约束左侧：

$$\max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\theta} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(\theta)} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(\theta),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} \leq \max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(1)} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(1),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(1)} \frac{\mathrm{Rev}(\omega,\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} .$$

另一方面，对于任意 $\mathbb{F}\in\mathcal{F}$，分布 $\mathbb{F}'$ with $\mathbb{F}'(v) = \mathbb{F}(\Psi(\mathbb{F})\cdot v)$ 对所有 v均成立，由于 Ψ的齐次性，该分布属于$\mathcal{F}(1)$。因此，我们有

$$\min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega^*\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \frac{\omega^*\Psi(\mathbb{F})\cdot(1-\mathbb{F}(\omega^*\Psi(\mathbb{F})))}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \frac{\omega^*\cdot(1-\mathbb{F}'(\omega^*))}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')} \geq \min_{\mathbb{F}'\in\mathcal{F}(1)} \frac{\mathrm{Rev}(\omega^*,\mathbb{F}')}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')} ,$$

其中，第二个等式成立是因为最优值具有齐次性，即 $\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) = \Psi(\mathbb{F})\cdot\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')$。因此，我们证明了左侧与右侧的等价性，并且 $\tilde{p}^*(\theta) = \omega^*\cdot\theta$:

$$\max_{\tilde{p}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}} \min_{\theta} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}(\theta)} \frac{\mathrm{Rev}(\tilde{p}(\theta),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \max_{\omega} \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega^*\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})}$$

□

证明。 定理 6.2的证明。由于 $\omega\Psi(\mathbb{F})$ 关于 $\mathbb{F}$是单调的，根据定理 3.1，对于任意ω，我们有

$$\min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}\cup\hat{\mathcal{F}}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})}$$

根据定义（3），任意 $\mathbb{F}\in\mathcal{F}\cup\mathcal{F}$ 均具有 $\mathbb{F}_{\lambda,\,a}$ 或 $\mathbb{F}_{\lambda,\,a}$的形式。如果 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\lambda,\,a}$，令 $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_{a\lambda,\,1}$。于是我们有 $\Psi(\mathbb{F}) = a\Psi(\mathbb{F}')$，且 $\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) = a\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')$。如果 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\lambda,\,b}$，令 $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_{b\lambda,\,1}$。于是我们有 $\Psi(\mathbb{F}) = b\Psi(\mathbb{F}')$，且 $\mathrm{OPT}(\mathbb{F}) = b\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')$。在两种情况下，我们都有 $\mathbb{F}'\in\mathcal{F}|_{a=1}\cup\mathcal{F}|_{b=1}$ and

$$\frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \frac{\omega\Psi(\mathbb{F})\cdot(1-\mathbb{F}(\omega\Psi(\mathbb{F})))}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \frac{\omega\Psi(\mathbb{F}')\cdot(1-\mathbb{F}'(\omega\Psi(\mathbb{F}')))}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')} = \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}'),\mathbb{F}')}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')} .$$

由于 $\mathcal{F}|_{a=1}\subseteq\mathcal{F}$和 $\mathcal{F}|_{b=1}\subseteq\mathcal{F}$，对于任意 ω，我们有

$$\min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}|_{a=1}\cup\hat{\mathcal{F}}|_{b=1}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}\cup\hat{\mathcal{F}}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} ,$$

由此完成了对（11）的证明。

接下来，对任何形式为 $\mathbb{F}_{\lambda,\,a}$ 或 $\mathbb{F}_{\lambda,\,b}$的 $\mathbb{F}\in\mathcal{F}\cup\mathcal{F}$，记作 $\theta = \Psi(\mathbb{F})$。定义 $\mathbb{F}'$，使得对所有 v，$\mathbb{F}'(v) = \mathbb{F}(\theta v)$：若 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\lambda,\,a}$，则令 $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_{\lambda\theta,\,a/\theta}$；若 $\mathbb{F} = \mathbb{F}_{\lambda,\,b}$，则令 $\mathbb{F}' = \mathbb{F}_{\lambda\theta,\,b/\theta}$。由于 Ψ是齐次的，我们有 $\Psi(\mathbb{F}') = 1$，因此 $\mathbb{F}'\in\mathcal{F}(1)\cup\mathcal{F}(1)$。此外，

$$\frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \frac{\omega\theta\cdot(1-\mathbb{F}(\omega\theta))}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \frac{\omega\theta\Psi(\mathbb{F}')\cdot(1-\mathbb{F}'(\omega\Psi(\mathbb{F}')))}{\theta\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')} = \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}'),\mathbb{F}')}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F}')} .$$

˘ ˘ ^ ^由于 $\mathcal{F}(1) \subseteq \mathcal{F}$ 且 $\mathcal{F}(1) \subseteq \mathcal{F}$，对于任意 ω，我们有

$$\min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}(1)\cup\widehat{\mathcal{F}}(1)} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\check{\mathcal{F}}\cup\widehat{\mathcal{F}}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})} = \min_{\mathbb{F}\in\mathcal{F}} \frac{\mathrm{Rev}(\omega\cdot\Psi(\mathbb{F}),\mathbb{F})}{\mathrm{OPT}(\mathbb{F})},$$

这就完成了对（12）的证明。 □

证明。 命题 6.1 的证明。根据定理6.2中的（11），不失一般性，˘ ^自然可以只考虑 $\{\mathbb{F}_{\lambda,1}:\lambda\le 1\}$ 和 $\{\mathbb{F}_{\lambda,1}:\lambda\ge 1\}$。我们首先计算 $\mathbb{F}_{\lambda,1}$ 和$\mathbb{F}_{\lambda,1}$的 L^η 范数˘ ^：

$$\|\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta = \left(\int_0^1 v^\eta\lambda e^{-\lambda v}\,\mathrm{d}v + e^{-\lambda}\right)^{1/\eta} = \left(\int_0^\lambda \left(\frac{t}{\lambda}\right)^\eta \lambda e^{-t}\frac{1}{\lambda}\,\mathrm{d}t + e^{-\lambda}\right)^{1/\eta} = \left(\lambda^{-\eta}\int_0^\lambda t^\eta e^{-t}\,\mathrm{d}t + e^{-\lambda}\right)^{1/\eta};$$
$$\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta = \left(\int_1^\infty v^\eta\lambda e^{-\lambda(v-1)}\,\mathrm{d}v\right)^{1/\eta} = \left(e^\lambda\int_\lambda^\infty \left(\frac{t}{\lambda}\right)^\eta e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/\eta} = \left(e^\lambda\lambda^{-\eta}\int_\lambda^\infty t^\eta e^{-t}\,\mathrm{d}t\right)^{1/\eta}.$$

- 对于分布 $\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}$，价格 $\omega\|\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta$ 下的购买概率为 $e^{-\lambda\omega\|\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta}$，因此收益为 $\omega\cdot\|\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta\cdot e^{-\lambda\omega\|\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta}$。注意，$\mathrm{OPT}(\check{\mathbb{F}}_{\lambda,1}) = e^{-\lambda}$。这对应于约束（13a）。

- 对于分布 $\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}$，价格 $\omega\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta$ 下的购买概率为 $\min\{e^{-\lambda_{(\omega\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta-1)}}1\}$，因此收益为 $\omega\cdot\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta\cdot\min\left\{e^{-\lambda_{(\omega\|\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}\|_\eta-1)}}\ 1\right\}$。注意，$\mathrm{OPT}(\widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,1}) = 1$。这对应于约束（13b）。

最后，对折扣因子 $\omega\in[0,1]$ 进行优化，可得该定价规则的最优近似比 Γ。至此，证明完毕。 □

证明。 命题 6.4 的证明。根据定理 6.2 中的 (12)，为了评估 CVaR 约束下的最坏情况表现，自然只需考虑形如˘ ^$\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 和$\mathbb{F}_{\lambda,b}$ 的分布，这些分布在 (2) 中定义，其参数经过选择以满足 $\mathrm{CVaR}_q = 1$ 约束。为了˘ ^刻画满足 $\mathrm{CVaR}_q = 1$ 约束的参数对 (λ,a)（对应于$\mathbb{F}_{\lambda,a}$）和 (λ,b)（对应于$\mathbb{F}_{\lambda,b}$），我们显式计算每个分布的 CVaR_q，并将其表示为参数的函数。具体而言，在$\mathbb{F}_{\lambda,a}$ 和$\mathbb{F}_{\lambda,b}$ 下，与尾部概率 q' 相关联的估值分别可表示如下。

$$\text{For } \check{\mathbb{F}}_{\lambda,a}:\ \mathbb{F}^{-1}(1-q') = \begin{cases} -\frac{\ln(q')}{\lambda} & q'\ge e^{-\lambda a} \\ a & q' < e^{-\lambda a}\end{cases};\qquad \text{for } \widehat{\mathbb{F}}_{\lambda,b}:\ \mathbb{F}^{-1}(1-q') = b - \frac{\ln(q')}{\lambda},\ \forall q'\in[0,1].$$

˘(i) 对于$\mathbb{F}_{\lambda,a}$，我们按如下方式计算 CVaR_q。

(a) 如果 $q\le e^{-\lambda a}$，那么

$$\mathrm{CVaR}_q = \mathbb{E}[v\mid v\ge \mathrm{VaR}_q] = a.$$

因此，可行的（λ，a）需要满足 $a=1$，$\lambda\le -\ln q$。对于参数 λ，价格 ω 下的购买概率为 $e^{-\lambda\omega}$，因此可获得 $\omega e^{-\lambda\omega}$的收益。该分布下的最优收益为 $ae^{-\lambda a} = e^{-\lambda}$。因此，价格 ω 的性能比为 $\frac{\omega\cdot e^{-\lambda\omega}}{e^{-\lambda}} = \omega e^{\lambda\cdot(1-\omega)}$，且随 λ递增。因此，最坏情况分布在 $\lambda=0$处取得，且 $\omega e^{\lambda\cdot(1-\omega)}$ 的下界为 ω。这对应于约束（14a）。

（b）如果 $q > e^{-\lambda a}$,

$$\mathrm{CVaR}_q = \mathbb{E}[v \mid v \geq \mathrm{VaR}_q] = \frac{1}{q}\left(\int_0^{e^{-\lambda a}} a \, \mathrm{d}q' + \int_{e^{-\lambda a}}^{q} -\frac{\ln(q')}{\lambda} \, \mathrm{d}q'\right) = \frac{1}{\lambda} \cdot \left(1 - \ln q - \frac{e^{-\lambda a}}{q}\right).$$

这意味着 $e^{-\lambda a} = -q \cdot (\lambda + \ln q - 1)$。由于 $0 < e^{-\lambda a} < q$，可行的 (λ, a) 需要满足 $-\ln q < \lambda < 1 - \ln q$ 以及 $a = -\ln(-q \cdot (\lambda + \ln q - 1))\,\lambda$。对于参数 λ，价格 ω 可获得 $\omega e^{-\lambda\omega}$ 的收益。该分布下的最优收益为 $\omega \cdot e^{-\lambda a} = -\ln(-q \cdot (\lambda + \ln q - 1))\,\lambda \cdot q \cdot (1 - \lambda - \ln q)$。因此，价格 ω 的性能比为 $q \cdot (-\ln)\ln(-q \cdot (\lambda + \ln q - 1))\,\lambda$，这对应于约束（14b）。

（ii）对于 $\mathbb{F}_{\lambda,\, b}$，条件风险价值 q 计算如下

$$\mathrm{CVaR}_q = \mathbb{E}[v \mid v \geq \mathrm{VaR}_q] = \frac{1}{q}\int_0^{q} b - \frac{\ln q'}{\lambda} \, \mathrm{d}q' = b + \frac{1}{\lambda}(1 - \ln q).$$

由于 $b + \frac{1}{\lambda}(1 - \ln q) = 1$ 且 $b \geq 0$，可知 (λ, b) 满足 $\lambda > 1 - \ln q$ 和 $b = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 - \ln q)$。价格 ω 下的购买概率为 $\min\left\{1, e^{-\lambda(\omega - b)}\right\} = \min\left\{1, e^{-\lambda\omega + \lambda - 1 + \ln q}\right\}$，因此价格 ω 可获得 $\omega \cdot \min\left\{1, qe^{-\lambda(\omega - 1 + 1/\lambda)}\right\}$ 的收益。该分布下的最优收益等于 $b = 1 - \frac{1}{\lambda}(1 - \ln q)$。因此，价格 ω 的性能比为 $\omega \cdot \min\left\{1, qe^{-\lambda(\omega - 1 + 1/\lambda)}\right\} \cdot (1 - \frac{1}{\lambda})^{-1} \cdot q^{-}(\ln)$，这对应于约束（14c）。

因此，最优价格 ω，且近似比由问题（14）计算。 □