arXiv:2602.18073v1 [math.MG] 20 Feb 2026

Bennett球面八杆连杆机构及其空间对应机构的几何分析

Hellmuth Stachel[1]

维也纳工业大学，奥地利维也纳，stachel@dmg.tuwien.ac.at，个人主页：https://www.dmg.tuwien.ac.at/stachel/

摘要。 本文以几何方法研究两种组合对称的过约束空间连杆机构。两者均包含八个构件和十二个转动副，并会在对齐位形下塌缩。第一种是球面机构，由六个球面等腰四边形组成。它是第3类 Bricard 八面体的球面像，Bennett 早在 1912 年便已对其进行分析。第二种机构是其对偶化版本，由六个 Bennett 等距四边形组成。通过直线反射这一方法，我们揭示了这些机构在空间位姿下的一些对称性。

关键词： 球面运动学、球面等腰四边形、Bennett 等距四边形、转动连杆机构

1 引言

R. Bricard的柔性八面体 [5] 和G. T. Bennett的等距四边形 [4] 是具有转动关节的过约束空间机构的引人入胜的实例。二者在下文所介绍的两类过约束连杆机构中均发挥着重要作用。

第3类Bricard八面体的球面像给出一个球面八杆连杆机构，它是六个球面等腰四边形的并集（图1）。Bennett在[3] 中借助三角关系证明了该连杆机构是柔性的，并利用这一结论确认了第3类八面体的柔性。该球面连杆机构的一个特定平面对应机构归功于G. Darboux [8]。

E. Study的转移原理提供了一种将球面几何中的命题转移到空间几何的可能性。它基于四元数的对偶化（参见例如 [11]），并允许将Bennett的球面连杆机构转移到一个具有八个连杆和十二个铰链的空间连杆机构，该机构是六个Bennett等距图形的并集（图9）。

此外，这种连杆机构并非新近提出。E. Baker 在 [1, 图 8 和 11] 中通过给出三角函数形式的闭合方程，分析了这种球面连杆机构。[1] 在同一篇论文中，他也讨论了平面版本和空间版本。此外，Baker 还提出了 Bennett 等距四边形的其他组合，并在一系列出版物中重新研究了这些组合及柔性6R回路，例如 [2]。

[1] 有趣的是，Baker 在论文 [3] 中将 Bennett 的论述评价为“难以理解”和“晦涩”。

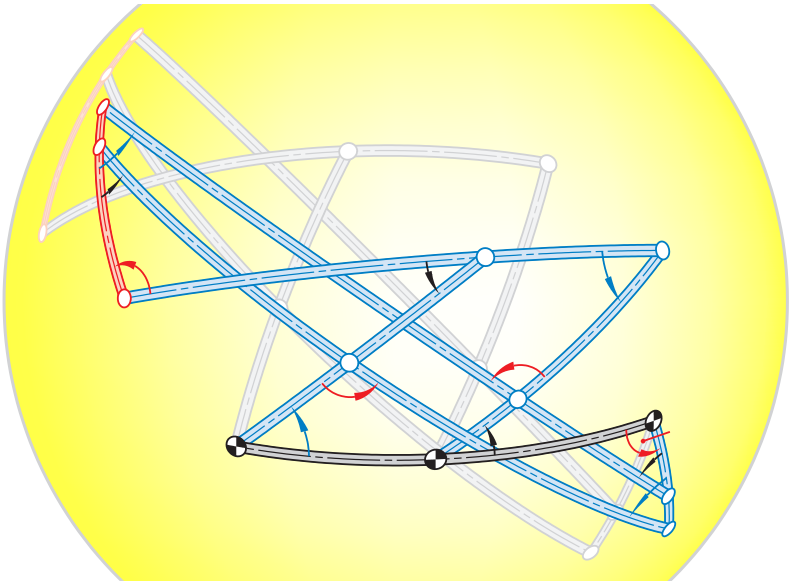


图1。Bennett 在 [3, 图5和 6] 中展示的球面等距图形复合，是一种超约束球面连杆机构，包含8根杆和12个关节，由六个等距图形组成。

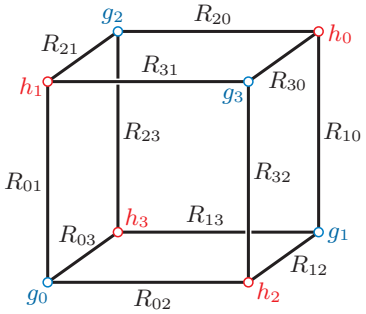


图2。在此连杆图中，Bennet 六杆连杆机构（图1）及其空间对应机构（图9）的连杆和关节分别表示为节点和杆。

Bennett 八杆连杆机构的空间版本也曾在更一般的背景下得到研究。 [9] Study 二次曲面上的有理曲线可用对偶四元数表示，其两种不同的因式分解会产生闭合转动连杆机构。尤其是，有理三次曲线的因式分解为构造空间六杆连杆机构铺平了道路（参见 [9]中的数值例 3），其球面版本属于零偏置型。这种连杆图用图中的节点和杆表示连杆机构的构件和关节（图 2），它等价于立方体的一维骨架，从而揭示了这一结构的组合对称性。

本文旨在为Bennett球面八杆连杆机构及其空间对应机构提供一种新颖的几何方法。由此，我们得以揭示它们在一般位形下的一些对称性。在我们的方法中，直线反射，即旋转 180°（也称为“半周旋转”）起着重要作用。文中附有若干图示，以支持几何推理并展示这些连杆机构。

2 球面八杆连杆机构

设 $\mathcal{S}^2$ 为以 O为中心的单位球面。为便于理解，我们先回顾球面 $\mathcal{S}^2$上的一些几何特性。关于球面几何的更多细节可参见例如 [7, 第10.1]节。

由于$\mathcal{S}^2$上没有直线，其作用由大圆取代，即位于经过中心 O的平面内的圆。如果 $\mathcal{S}^2$ 上的点位于同一个大圆上，我们称这些点为共线点。

– 每个点 $P \in \mathcal{S}^2$ 都有一个对径点 P^*，且每条经过P的大圆也包含 P^*。两条不同的大圆 g_1、g_2 交于一对对径点。– 对于任意两个不同的点 P 和 $Q \neq P^*$，存在唯一一条连接大圆。谈到任意两个非对径点 P、Q之间的圆弧或边 PQ 时，我们总是指连接大圆上以 P 和 Q为端点的两段圆弧中较短的一段。$\overset{\frown}{}$– 球面距离 PQ 定义为沿$\mathcal{S}^2$测量的边 PQ 的长度。它等于圆弧 PQ 的圆心角 $\sphericalangle POQ$，并满足 $0 \leq \widehat{PQ} \leq \pi$，包括极限情形 $Q = P$ 和 $Q = P^*$。我们只考虑边长小于 π的球面三角形和四边形。– 任意两个不同点 P、$Q \in \mathcal{S}^2$ 的球面垂直平分线定义为满足 $\widehat{XP} = \widehat{XQ}$的点 $X \in \mathcal{S}^2$ 的集合。由于球面距离相等也意味着沿弦测得的三维距离相等，因此垂直平分线是 P 与 Q之间对称平面上的大圆。– 给定两条大圆 g_1、g_2，角 $\sphericalangle\, g_1 g_2$ 定义为它们在交点处的切线 t_1、t_2 之间的夹角。此角等于两圆所在平面之间的夹角，并满足 $\sphericalangle\, g_1 g_2 = \sphericalangle\, t_1 t_2 \leq \frac{\pi}{2}$。– $\mathcal{S}^2$ 上圆弧 PQ与 PR之间的角 $\sphericalangle\, QPR$可限定在$0 \leq \sphericalangle\, QPR \leq \pi$之间。以点 $P \in \mathcal{S}^2$ 为中心的旋转角可以带符号，规定从外部观察时逆时针旋转为正。注意，将 P 替换为其对径点 P^*时，符号会改变。– 不同大圆 g_1、g_2 的交点是 g_1 和 g_2的唯一公垂大圆的球面中心。 –

定义 1. 球面四边形 $P_1 \ldots P_4$ 若对边长度相等，则称为球面等边四边形。该四边形可以没有自交，也可以交叉。后一种情况下，两条对边相交。

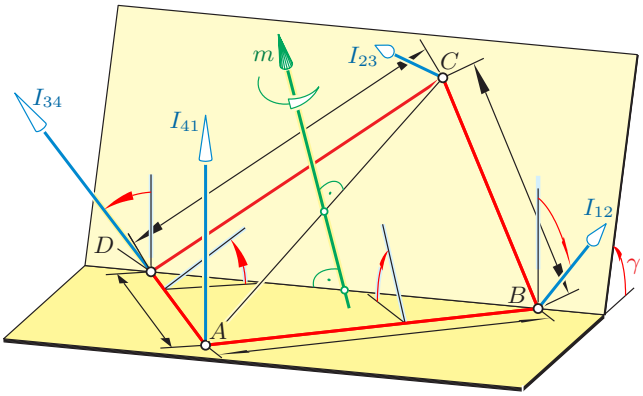


图 3. 对于边长为 a 的斜等腰四边形 $ABCD$，其凸包的二面角 α、β 与比例 $a : b = \sin\alpha : \sin\beta$ 相符。

所有斜等腰四边形都有一条对称轴 m。它在两条对角线的中点处与它们正交（图3，参见例如 [10,第 555]页）。将边替换为弦时，球面等腰四边形也具有同样的性质。因此，它们的轴 m 是 $\mathcal{S}^2$ 的直径，连接两条对角线大圆的两个交点 S 和 S^*。对于非交叉等腰四边形，该轴与对角弧交于其中点。否则， S 和 S^* 是大圆s 的球面中心，该大圆在对角弧的中点处与其正交（见图4左图和右图）。由于这些对称性，球面等腰四边形的对角相等。

如果将球面等边四边形的一个顶点替换为它的对径点，就会得到一个四边形，其对边长度之和为 π。

引理 1. 对于球面上的任意两个不同的有向大圆 g_1、g_2，都存在唯一一对对径对称中心 S、$S^* \in \mathcal{S}^2$，即半转的球面中心；该半转将 g_1 映射到 g_2，反之亦然。这两个中心位于 g_1 与 g_2 的公垂线上。此外，以大圆 s 为轴的反射会将有向大圆 g_1 与 g_2 互换，其球面中心为 S 和 S^*。

证明. 由大圆 g_1、g_2 张成的平面 γ_1、γ_2 相交于经过 O 的直线 d。所求半转必须保持这条直线不变。因此，其轴位于垂直于 d 的直径平面内，并且还位于平分 γ_1 与 γ_2 之间夹角的两个平面之一中。

在两种可能的半周旋转下， g_1 的像具有不同的定向。因此，只有其中一种能产生所需的 g_2定向。对于 g_1 在与正确半周旋转的轴正交的直径平面上的反射，情况也相同。 □

从现在起，我们假设球面等边四边形的四条边分别是球面连杆运动的基底、连杆和臂（图4）。众所周知，这种特殊的连杆运动可分解为两个有理单参数

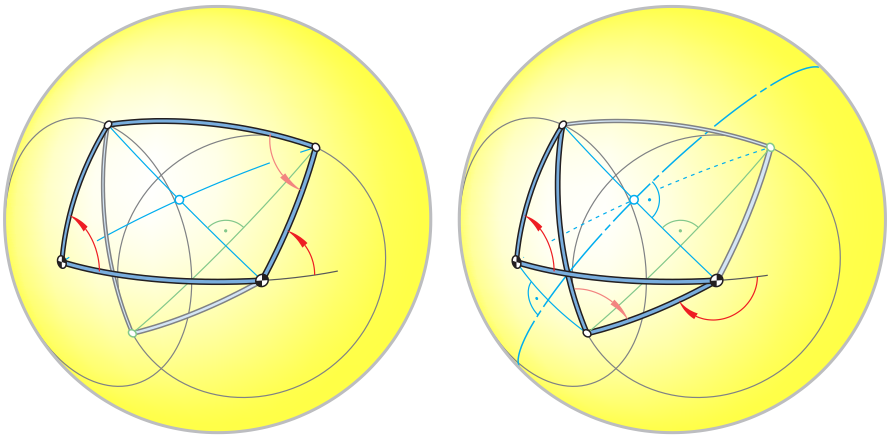


图4. 在非交叉球面等边四边形（左）中，两条对角弧的公共中点 S_1 是对称中心。在交叉球面等边四边形（右）中，对称轴s_1 在其中点处与两条对角弧正交相交。若一边保持固定，球面等边四边形的连杆运动分裂为两个有理运动，并在对齐位形处分岔。

运动，并在对齐位形处发生分岔。在每种有理运动中，臂以这样的方式旋转：半转角的正切$t_i := \tan\frac{\varphi_i}{2}$ 成比例（参见例如 [5] 或 [12, 式（9）]）。按照图3中使用的记号，有

$$t_2 = c_{21}t_1, \text{ where } c_{21} = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\sin\alpha \pm \sin\beta}, \ \alpha = \widehat{R_{01}R_{02}}, \ \beta = \widehat{R_{01}R_{31}}. \qquad (1)$$

引理2. 在球面 $\mathcal{S}^2$上，设 $R_{01}R_{02}$ 与 $R_{02}R_{03}$ 为两个等距图形的对齐基底，且经过 R_{02} 的臂同样对齐（图5）。于是，这两个等距图形的同步连续运动与第三个等距图形相容，该等距图形以 $R_{01}R_{03}$ 为基底，且其臂分别与给定等距图形的臂对齐。

三个等距四边形的对称中心 S_1、 S_2 和 S_3 共线。

证明。 设 φ_1、 φ_2 和 φ_3 表示三个臂相对于大圆 g_0 上初始共线位形的转角（图5）。根据（1），半转角的正切值 t_1 和 t_2 以及 t_2 和 t_3 分别成比例。因此，复合后仍得到等距四边形运动。要确定所得等距四边形的连杆，可以使用比例因子的公式。

我们更倾向于采用一种更具几何性的解法：给定任意非对齐位形，令 h_i 为由经过 R_{0i} 的臂在 $i = 1$，2，3 上张成的大圆。此外，我们通过给定的旋转，将任意选定的大圆 g_0 的定向传递为 h_1、 h_2 和 h_3的定向。

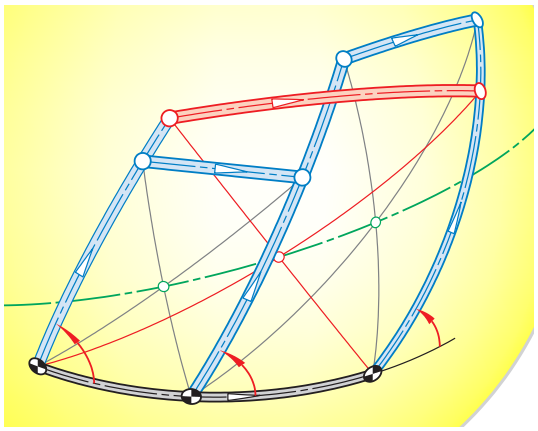


图5。这组三个球面等腰四边形具有柔性，且其对称中心共线（引理2）。

参见引理 1，我们寻找半转 σ_3 的中心 S_3 ，使其将h_1 变换为 h_3的相反定向 h_3 。该中心 S_3 位于与 h_1 和 h_3 正交相交的大圆上。绕 S_3 进行的半转将基底 $R_{01}R_{03}$ 变换为所需的连杆 $R_{23}R_{21}$ ，并将大圆 g_0 变换为延伸该连杆的大圆 g_2 的相反定向。
另一方面，存在半周旋转 σ_1 和 σ_2 的中心 S_1 和 S_2 ，分别将底边 $R_{01}R_{02}$ 和 $R_{02}R_{03}$ 映射到相应的联接点 $R_{32}R_{31} \subset g_3$ 和$R_{13}R_{12} \subset g_1$。总结如下：

$$\begin{aligned}
&\sigma_1\colon\ g_0 \leftrightarrow \overline{g}_3,\ h_1 \leftrightarrow \overline{h}_2,\ R_{01} \leftrightarrow R_{32},\ R_{02} \leftrightarrow R_{31},\\
&\sigma_2\colon\ g_0 \leftrightarrow \overline{g}_1,\ h_2 \leftrightarrow \overline{h}_3,\ R_{02} \leftrightarrow R_{13},\ R_{03} \leftrightarrow R_{12},\\
&\sigma_3\colon\ g_0 \leftrightarrow \overline{g}_2,\ h_3 \leftrightarrow \overline{h}_1,\ R_{03} \leftrightarrow R_{21},\ R_{01} \leftrightarrow R_{23}.
\end{aligned} \tag{2}$$

σ_1 与 σ_2的复合（记作 $\sigma_2\sigma_1$）是绕直径 p 的旋转 ρ_{21} ；该直径垂直于 σ_1 和 σ_2 的轴，旋转角为$\frown S_1S_2$ 的两倍，并将 h_1 映射到 h_3。反向复合 $\sigma_1\sigma_2$ 给出逆位移 ρ_{21}^{-1}，即绕 p 沿相反方向旋转相同角度。

三个半周旋转的复合 $\sigma_3\sigma_2\sigma_1$ 是一个保向位移，因而也是使大圆 h_1的定向发生反转的旋转。这必定是绕该大圆 h_1的一条直径所作的半转，并且它是对合的。因此成立

$$\sigma_3\sigma_2\sigma_1 = (\sigma_3\sigma_2\sigma_1)^{-1} = \sigma_1\sigma_2\sigma_3.$$

等价方程

$$\sigma_3(\sigma_2\sigma_1)\sigma_3 = \sigma_1\sigma_2 \tag{3}$$

表明，半转 σ_3 将旋转 ρ_{21} 变换为 ρ_{21}^{-1}，这意味着它反转了 ρ_{21}的轴 p 。因此，σ_3 的轴与 p 在球心 O 处正交相交，因而与 σ_1 和 σ_2的轴共面。

□

根据（2），点 R_{01} 和 $R_{32} = \sigma_1$（R_{01}）到由 σ_1、 σ_2 和 σ_3 的轴张成的平面的距离相等。其他顶点也有类似关系。

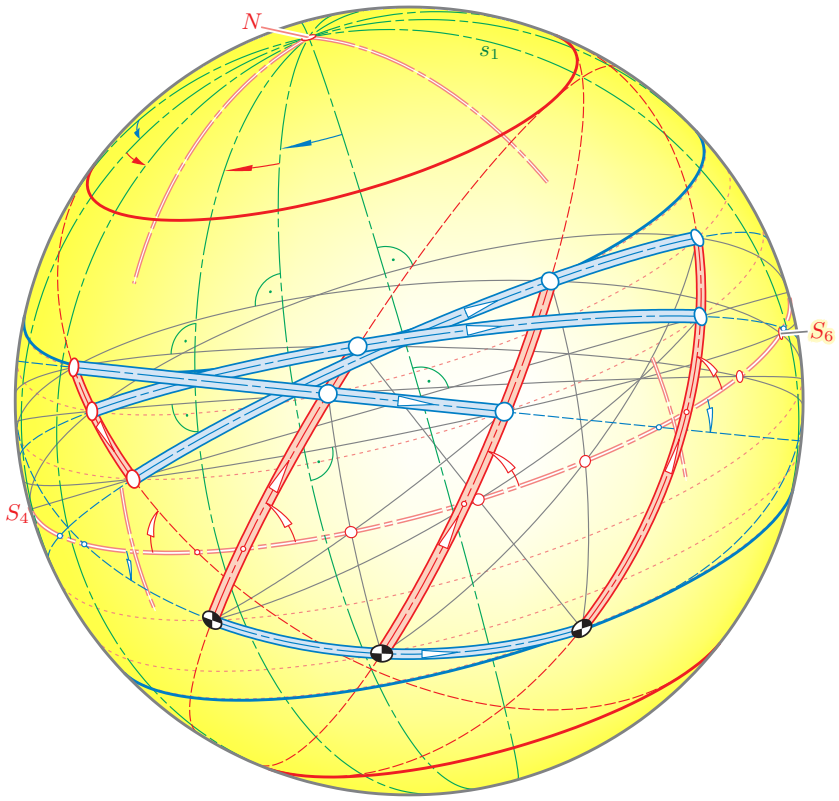


图6。Bennett球面八杆连杆机构是六个等距四边形的并集，其对称中心 S_1，……， S_6 位于大圆 n 上，该大圆的球面中心为 N（引理2）。12 个关节 R_{ij} 每四个一组，位于两对与 n 平行且关于其对称的圆上。8 根杆可分为两组，每组四根，分别与 n 成相等的角。

现在，我们可以在图5所示的三个等距四边形基础上，增加另外三组，从而得到图6所示的Bennett球面八杆连杆机构：

大圆 h_3 承载着两个等距四边形的底边 $R_{03}R_{13}$ 和 $R_{03}R_{23}$ ，它们的中心分别为 S_2 和 S_3。根据引理2，存在另一个球面

等边四边形，其基底为 $R_{13}R_{23}$，臂沿着 g_1 和 g_2，对称中心为 S_4，且该中心必须与 S_2 和 S_3对齐。

同样，位于 h_1 上的底边 $R_{01}R_{31}$ 和 $R_{01}R_{21}$ 属于中心分别为 S_1 和 S_3 的等距图形，并由此产生另一个等距四边形，其底边为 $R_{21}R_{31}$，臂沿 g_2 和 g_3，中心 S_5 与 S_1 和 S_3对齐。最后，位于 h_2 上的底边$R_{02}R_{12}$ 和 $R_{02}R_{32}$ 定义了第六个等距四边形。它具有底边 $R_{12}R_{32}$、沿 g_1 和 g_3的臂，以及与所有其他中心 S_1，……，S_5对齐的中心 S_6。至此，我们总结如下：

$$\sigma_4\colon g_1 \leftrightarrow \overline{g}_2, \quad \sigma_5\colon g_2 \leftrightarrow \overline{g}_3, \quad \sigma_6\colon g_3 \leftrightarrow \overline{g}_1. \tag{4}$$

还需证明，这三个额外的等距四边形的联接点位于同一个大圆 h_0 上（参见图6）：

前两个额外联接点所张成的大圆，分别由 h_3 经绕 S_4 的半转 σ_4、以及由 h_1 经绕S_5的半转 σ_5 得到。由（2）可知，h_3 和 h_1 分别是 h_2的相反定向 h_2 在 σ_2和 σ_1下的像。这意味着前两个额外的等距四边形的联接点位于大圆 $\sigma_4\sigma_2$（h_2）以及 $\sigma_5\sigma_1$（h_2）上。这两个大圆相等，因为我们可以指出

$$\rho_{42} := \sigma_4\sigma_2 = \sigma_5\sigma_1 =: \rho_{51}. \tag{5}$$

证明。两个复合都是绕 p 轴的旋转，该轴正交于经过六个对称中心的大圆所在的平面。两个复合都将 g_0 变换为具有正确定向的 g_2，前者通过g_1，后者通过 g_3。因此，如果先对 g_0 施加第一个旋转，再施加第二个旋转的逆旋转，我们将再次得到具有正确定向的 g_0。由于 p 不可能是大圆 g_0的轴，两个旋转的复合必为恒等变换，这就证明了方程（5）。

□

类似地，我们可以证明，第六个连杆（位于σ_6（h_2）上）与位于 σ_5（h_1）上的第五个等距四边形的连杆方向一致。由 $h_2 = \sigma_2(h_3)$、$h_1 = \sigma_3(h_3)$ 以及下式可得这一结论：

$$\rho_{62} := \sigma_6\sigma_2 = \sigma_5\sigma_3 =: \rho_{53} \quad \text{and} \quad \rho_{61} := \sigma_6\sigma_1 = \sigma_4\sigma_3 = \rho_{43}. \tag{6}$$

（5）和（6）中的复合都是绕经过点$N \in \mathcal{S}^2$的 p 轴旋转的，因此我们得到

$$\rho_{61}\colon g_0 \mapsto g_1,\ h_1 \mapsto h_0, \quad \rho_{42}\colon g_0 \mapsto g_2,\ h_2 \mapsto h_0, \quad \rho_{53}\colon g_0 \mapsto g_3,\ h_3 \mapsto h_0. \tag{7}$$

它们还可推出如下恒等式：

$$\rho_{54} := \sigma_1\sigma_2 := \rho_{12}, \quad \rho_{65} := \sigma_2\sigma_3 := \rho_{23}, \quad \rho_{46} := \sigma_3\sigma_1 := \rho_{31}, \tag{8}$$

从而使图6所示等距四边形对称轴 s_i 之间在 N 处形成相等角。换言之，(s_1, s_4)、(s_2, s_5)和(s_3, s_6)这几对共享球面角平分线 t_1 和 t_2。根据（7），R_{10}, R_{01}, R_{23}和 R_{32} 到由中心 $S_1 \ldots, S_6$ 张成的平面的距离相等。这证实了 Bennett 在 [3,图5和6]中已考虑到的局部对称性。

定理1。 如图*1*所示的贝内特球面六杆机构可连续运动，其自由度为 *d.o.f.* $= 1$。在每个位形下，所包含等距四边形的对称中心 $S_1, \ldots, S_6$ 均位于同一个大圆 n上。

对于 $i = 1,2,3$ 绕球面中心 N 的 n，以 $g_0 \mapsto g_i$ 为旋转的旋转将 h_i映射到 h_0。n 与延长边 $g_0, \ldots, g_3$ 以及 $h_0, \ldots, h_3$ 的交点，分别关于经过 N 的正交大圆 t_1, t_2 对称（图*6*）。

证明。 如上所述，乘积 $\tau_{321} := \sigma_3\sigma_2\sigma_1$ 是一个反转 h_1定向的半转。因此，τ_{321} 的轴是 h_1 的直径；另一方面，它与 $\sigma_1, \ldots, \sigma_6$的轴共面。关于 t_1 或 t_2 的反射表明，$\tau_{654} := \sigma_6\sigma_5\sigma_4$ 是绕一条与 τ_{321}的轴对称的轴进行的半转；另一方面，根据（4），τ_{654} 改变了 g_1 的定向。对其他三个三重乘积得出类似结论后，便证实了最后一条陈述。 □

3 对偶化版本

球面等腰四边形的空间对应物是Bennett等距四边形，即可动的4R链，其中相邻铰链的公垂线构成一个闭合斜等边形（图7）。在每个空间位姿中，存在一条直线 s，使得关于 s 的反射交换对顶点、铰链和角（图3）。根据 [6], , Bennett 等距四边形是唯一连续可动的4R闭环。

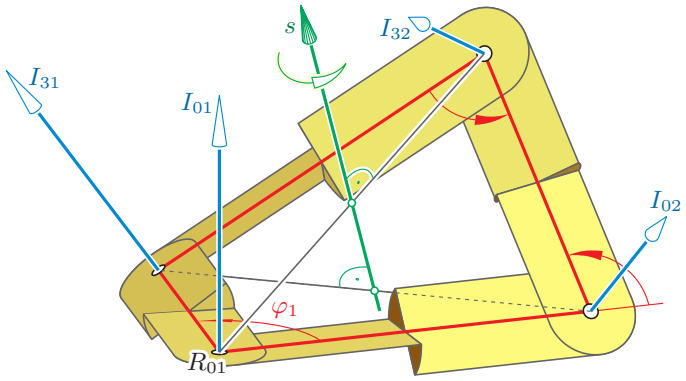


图7. Bennett 等距四边形是一个可动的4R闭环，其中相邻铰链之间的公垂线构成一个等距四边形。关于直线 s 的反射交换对边、角和铰链。

Bennett 等距四边形的铰链以其球面像定义了一个球面等边四边形。这表明，相邻边的转角再次遵循方程（1）。因此，与引理2类似，将底边对齐的两个 Bennett 等距四边形 $R_{01}R_{02}$ 和 $R_{01}R_{02}$ 置于 g_0 上，并使对齐臂

$R_{02}R_{32}$ 和 $R_{02}R_{32}$ 位于 h_2 上，如图8所示，可根据（1）实现从第一个等距四边形的第一臂 $R_{01}R_{31}$（位于 h_1 上）到第二个等距四边形的最后一臂 $R_{01}R_{13}$（位于 h_3 上）的传动。这表明，具有基底 $R_{01}R_{03}$ 的第三个 Bennett 等距四边形与前两个等距四边形的运动相容。

像之前一样，为边 g_0、h_1、h_2、h_3 指定定向后，第三个等距四边形的对称轴 s_3 上的反射可定义为将 h_1 映射到 h_3的反向定向 h_3。因此，该轴经过 h_1 与 h_3 之间最短线段的中点，其方向是 h_1 与 h_3方向之间的角平分线。

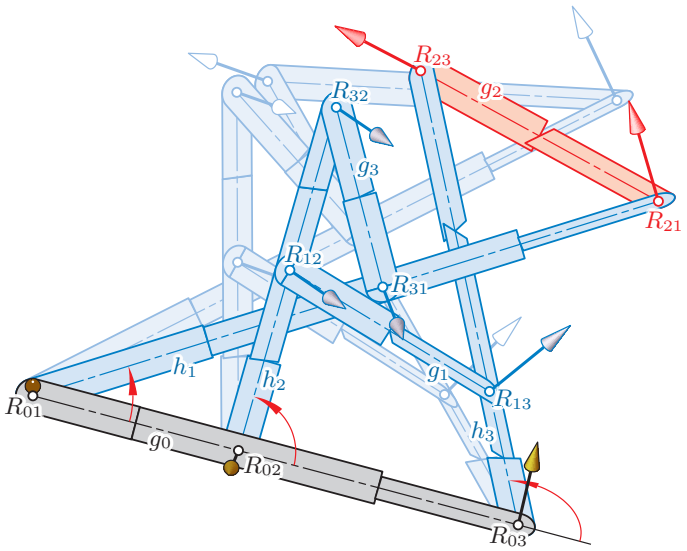


图 8. 一个由 Bennett 等距四边形构成的柔性三元组，其底边在 g_0上对齐，臂位于直线 h_1、h_2 和 h_3上，联接点位于直线 g_3、g_1 和 g_2上。

我们沿用球面情形中的记号，并用 σ_1、σ_2 和 σ_3表示三个等距四边形的直线反射。因此，前一节中的推导几乎可以逐字照搬。唯一的区别是，现在前两个反射的复合 $\sigma_2\sigma_1$ 是绕两条相应轴 s_1 和 s_2的公垂线 n 进行的螺旋位移，它将 h_1 与R_{31} 以及铰链 I_{31} 映射到 h_3 与 R_{13} 以及 I_{13}。由于乘积 $\tau_{321}:=\sigma_3\sigma_2\sigma_1$是保持直线 h_1 不动、但反转其定向的螺旋位移，τ_{321} 必定是对一条与 h_1正交的直线所作的反射。由此，如上文根据（3）可知，s_3 也与 n 垂直相交。此外，τ_{321} 的轴是 h_1 与 n的公垂线。

在将第一组三个Bennett等距四边形扩展为三个额外的等距四边形后，我们得到额外的直线反射 σ_4，σ_5 和 σ_6，它们满足方程（5）—（8）。这证实了额外的等距四边形具有共线的联接点

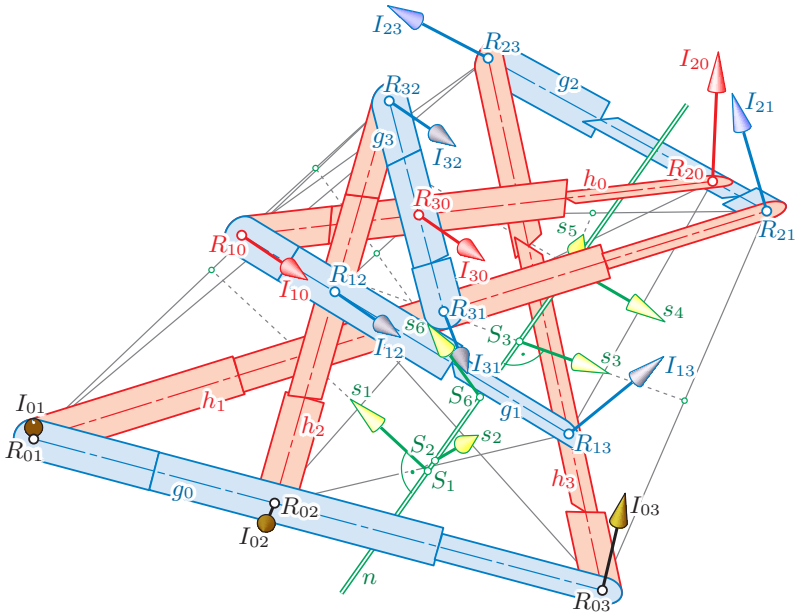


图 9。 Bennett球面八杆连杆机构的空间版本由 8 个构件 Γ_0、……、 Δ_3 和 12 个铰链 $I_{01} \ldots I_{32}$组成，排列成 6 个 Bennett等距四边形。在每个空间位姿中，六个等距四边形的对称轴 s_1、……、 s_6 均以直线 n 为公垂线。

位于直线 h_0 上，而全部六个等距图形的对称轴 $s_1 \ldots s_3$ 的布置使得各对（s_1，s_4）、（s_2，s_5）和（s_3，s_6）具有一条公共对称轴t，并且与 n 正交（图10）。因此，直线 g_0、……、 g_3 到 n 的距离相等，并且与 n构成相等角；直线 h_0、……、 h_3 与 n之间的距离和角度也具有相同性质。

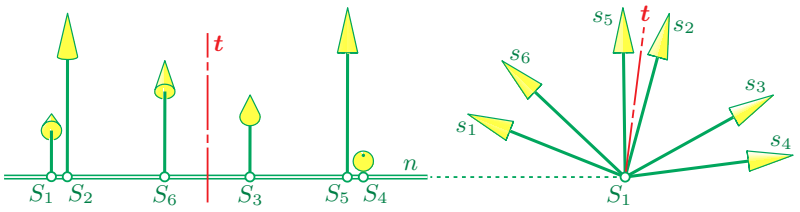


图 10。 对称轴 s_1、……、 s_6 与直线 n 正交相交。它们的排列方式使得轴对 (s_1、 s_4)、(s_2、 s_5) 和 (s_3、 s_6) 具有共同的对称轴 t 。左：垂直于 n 的视图。右： n 的点视图。

定理2. *Bennett*球面八杆机构的空间版本是六个*Bennett*等距四边形的复合体（图*9*），并以自由度 $= 1$连续可动。在每个位形中，所含等距图形的对称轴 s_1, ……， s_6 具有一条公垂线 n。

对于 $i = 1$、2、3，成立如下结论：绕 n 且参数为 $g_0 \mapsto g_i$ 的螺旋位移同时将 h_i 映至 h_0。 n 与 g_0，……， g_3 之间的公垂线分别关于轴 t与 n 和 h_0，……， h_3之间的公垂线对称（图*10*）。

注释与评论
作者衷心感谢因斯布鲁克大学的Hans-PeterSchr¨ocker所提供的有益建议。

参考文献

1. J.E. Baker: *On Bricard's doubly collapsible octahedron and its planar spherical and skew counterparts.* J. Franklin Inst. **332** B/( ), 6 – ( ) 657 679 1995。2. J.E. Baker: *A collapsible network of similar pairs of nested Bennett linkages.* Mech. Mach. Theory **59**，119–124（2013）。3. G.T. Bennett: *Deformable octahedra.* Proc. London Math. Soc., 2^{nd} series, **10**，309–343（1912）。4. G.T. Bennett: *The skew isogram mechanism.* Proc. London Math. Soc., 2^{nd} series, **13**，151–173。（1914）。5. R. Bricard: *Mémoire sur la théorie de l'octaèdre articulé.* J. math. pures appl., Liouville, S´er. 5, **3**，113–148（1897）。6. K. Brunnthaler, H.-P. Schr¨ocker, M. Husty: Bennett机构综合的新方法。CK 2005会议论文集，计算运动学国际研讨会，卡西诺，2005年。7. G. Glaeser, H. Stachel, B. Odehnal: *The Universe of Conics.* 从古希腊人到 21^{st} 世纪的发展。2^{nd} 版，Springer Spectrum，柏林、海德堡，2024年。8. G. Darboux: *Recherches sur un système articulé.* Bull. Sci. Math. Astronom., 2^{e} s´erie, **3**/1，151–192（1879）。9. G. Heged¨us, J. Schicho, H.-P. Schrocker: *Factorization of rational curves in the Study quadric.* Mech. Mach. Theory **69**, 142 – 152 2013。10. B. Odehnal, H. Stachel, G. Glaeser: *The Universe of Quadrics.*Springer Spectrum，柏林、海德堡，2020年。11. H. Stachel: *Euclidean line geometry and kinematics in the 3-space.* 载于 N.K. Art´emiadis, N.K. Stephanidis（编）：第4届国际几何学大会论文集，塞萨洛尼基，1996年，雅典：塞萨洛尼基亚里士多德大学，1997年，第380–391页。12. H. Stachel: *A kinematic approach to Kokotsakis meshes.* Comput. Aided Geom. Des. **27**，428–437（2010）。