# 卡滞纽结：刚性、不变量与解粘距离

Ioannis Diamantis数据分析与数字化系，马斯特里赫特大学，荷兰马斯特里赫特i.diamantis@maastrichtuniversity.nl

arXiv:2602.18129v1 [math.GT] 20 Feb 2026

**摘要**

卡滞结是一种包含特定交叉的结图，这些交叉称为卡滞交叉，其相邻弦必须保持局部不可分离。这些刚性约束限制了允许的环境同痕，并为结嵌入研究引入了新的几何特征。本文为受此类约束支配的纽结构建了一个拓扑框架。我们将卡滞交叉建模为嵌入空间中的局部刚性构型，使卡滞纽结与刚性空间图理论密切关联，同时保留经典的上下信息和交叉定向。我们形式化了相应的同痕概念，并引入解粘操作，以释放刚性并允许进行经典简化。为了以代数方式检测刚性结构，我们构造了卡滞纽结的多项式不变量，包括 HOMFLYPT 型不变量，以及一个扩展考夫曼括号的态和模型。这些不变量表明，即使底层经典结型保持不变，刚性仍会贡献独立的信息。我们还引入宽松同痕框架，并定义解粘距离这一几何度量，用以量化关联两个卡滞纽结所需释放的刚性约束最少数量。这一视角将卡滞交叉视为同痕的障碍，并凸显了约束释放在图示简化中的作用。

## 1 引言

经典纽结理论研究 $S^1$ 在 $S^3$ 中的嵌入，视环境同痕为等价关系，由此揭示拓扑、几何与代数之间深刻的联系；例如参见 Rolfsen [16]。随着时间推移，通过改变可接受嵌入的类别或结图的局部变换结构，经典框架衍生出诸多扩展。例如，奇异结 [17], 、虚结 [14], 和刚性空间图 [12] 表明，改变局部灵活性往往会产生新的不变量，并揭示此前隐藏的几何现象（参见 Kauffman [13], 、Yamada [18]）。

限制局部灵活性的一种自然方式是在交叉处施加不可分离条件。本着这一思路，Bataineh [1]引入了卡滞纽结，将其定义为一种结图，其中某些被称为卡滞交叉的交叉表示物理连接在一起、同时保留上下穿越信息的线段。这一框架通过在刚性顶点处加入方向结构，扩展了奇异结的研究范围；其最初的动机之一是 RNA 折叠方面的应用。在这一背景下，人们构造了若干图解不变量，其中包括能够检测手性的多项式构造。

继 Bataineh 引入这一概念后，越来越多的研究开始发展卡滞纽结与链环的代数基础。Ceniceros、Elhamdadi、Komissar 和 Lahrani [3]利用粘结链环图研究 RNA 折叠的拓扑，并引入了一种代数

**MSC（2020）：** 57K10, 57K12,57K14, 05C10, 57M15**关键词：** 卡滞纽结、刚性交叉、辫式不变量、态和不变量、刚性空间图、解粘距离。

结构，用于编码有向的卡滞 Reidemeister 变换，并结合着色不变量与明确的计算结果。随后，Ceniceros、Elhamdadi、Magill 和 Rosario [4] 通过在经典交叉和卡住的交叉处赋予玻尔兹曼权重，将 quandle 余循环不变量推广到粘结情形，从而得到新的多项式不变量。最近，Bondarenko、Ceniceros、Elhamdadi 和 Jones [2] 引入了广义幺群多项式以及 stuquandle 的代数框架，进一步丰富了卡滞链环的不变量理论。

本研究采取一种互补的视角。我们并不主要聚焦于图解不变量，而是建立一个空间与几何框架，用以研究受刚性约束支配的纽结。具体而言，我们将卡滞交叉解释为空间嵌入中的刚性高度顶点，引入通过解粘实现约束释放的概念，并考察局部刚性如何影响整体同痕行为。从这一角度看，卡滞纽结可视为这样一种嵌入：其环境同痕本身受到预设局部结构的约束。因此，刚性并非仅仅是组合性的；它还构成一种几何障碍，可能阻止经典化简变换发生。理解这类局部约束如何影响纽结的整体行为，是本研究的主要动机。

这一框架中的一项关键操作是解粘操作，它在保留底层交叉信息的同时释放刚性约束。通过考察移除足够多的约束后，经典同痕何时变得可行，这一操作使我们能够动态地研究刚性。与这一操作视角相辅相成的是，我们构造了能够直接检测刚性的不变量。我们提出一种适用于含有刚性交叉的图示的 HOMFLYPT 型多项式，并构造一种扩展经典考夫曼括号的状态和不变量。这些构造表明，即使经典结型保持不变，刚性仍会带来独立的代数信息。

在不变量构造之外，我们引入一个宽松等价框架，其中刚性可以被不可逆地释放。这自然引出解粘距离的概念，它是一种几何度量，用于量化为使两个卡滞纽结相关联而必须移除的最少约束数。解粘距离将刚性交叉直接解释为同痕的障碍，并凸显约束释放在图示简化中的作用。我们进一步在刚性空间图的设定中解释卡滞纽结，将该理论置于更广泛的拓扑背景之中，并强调刚性应被理解为嵌入结构的一部分，而非图示上的人为产物。

本文的主要贡献如下：

- 我们通过将卡滞交叉解释为嵌入图中的刚性高度顶点，为卡滞纽结建立空间框架。
- 我们形式化粘结同痕，并将解粘操作引入为释放局部约束的机制。
- 我们构造能够检测刚性的多项式不变量，包括 HOMFLYPT 型多项式和状态和模型。
- 我们构建了一个宽松同痕框架，并定义了解粘距离，为刚性释放提供了一种几何度量。
- 我们将卡滞纽结与刚性空间图理论联系起来，将这一主题置于局部约束下拓扑的更广阔领域之中。

综合来看，这些结果表明，卡滞纽结构成了一类自然的受约束嵌入，其行为受局部刚性与全局拓扑之间相互作用的支配。本文引入的结构为研究存在既定几何约束时的纽结理论

奠定了基础。本文应被视为建立局部约束下拓扑理论的第一步。

本文结构安排如下。第2 节介绍卡滞纽结及其空间实现，并定义粘结同痕。第3 节定义解粘操作。第4 节构造一种 HOMFLYPT 型不变量，而第5 节介绍一种状态和不变量。第6 节将卡滞纽结解释为刚性空间图；第7 节则介绍宽松同痕和解粘距离，为刚性释放提供一种几何度量。

## 2 将 StuckKnots 视为刚性高度嵌入

卡滞纽结的概念由 Bataineh 在 [1] 中提出，与 Kauffman [12] 所发展的刚性顶点空间图理论密切相关。

**定义 2.1**。一个定向卡滞纽结图是一个有序对 $(D, S)$，其中 $D$ 是平面上的一个定向结图或链环图，$S$ 是其交叉中的一个指定有限子集，称为卡滞交叉。因此，$D$ 的每个交叉都属于以下两种类型之一：

- 经典交叉：具有指定上下穿越信息的普通交叉。
- 卡滞交叉：一种上下信息被指定为固定的交叉。

高度数据可以通过在图上标记一对对置区域来记录，遵循 Kauffman 状态模型中采用的区域约定 [11]。区域标记构成图的组合数据的一部分，如图1所示）。

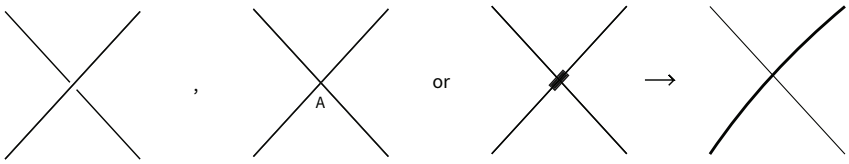



图 1：左：经典交叉。右：将卡滞交叉表示为刚性顶点，并配以一个确定高度约定的指定区域（标记为 $A$）。

**注 2.2**。卡滞纽结与经典纽结理论的若干推广有关。与奇异结不同，奇异结中的双重点表示尚未确定的交叉（参见 Kauffman [13]），而刚性高度交叉编码的是固定的交叉信息。它们也不同于刚性顶点空间图，因为其顶点附有明确的高度数据。最后，卡滞交叉并不像伪纽结理论中的交叉那样具有不确定性（例如参见 Hanaki [7]），而是施加了永久性的几何约束。

图 2 展示了典型的卡滞结图。

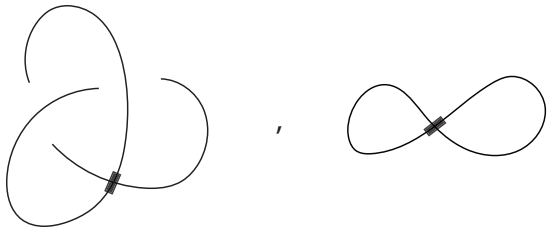



图 2：左：同时包含经典交叉与卡滞交叉的三叶结。右：带有一个卡住的交叉的平凡结。

卡住的交叉的一个定义特征是，在稍后引入的等价关系中，相邻弦必须始终在局部与该顶点相接；尤其是，不能通过任何将这些线段分开的变换移除该顶点。为了严格地对这一约束建模，我们将卡住的交叉视为空间图中的刚性顶点，并为其赋予高度顺序。

**定义 2.3**。 刚性高度顶点 是由两条弧的横截投影产生的交叉，并附有指定的上下顺序，表明哪条弧从另一条弧上方经过。

刚性条件表明，关联弧应被视为在局部不可分离，而其对容许变形的具体影响则留待粘结同痕的定义中说明（见 § 2.2）。如此一来，卡滞结可视为源自一个四价空间图的嵌入，并在指定顶点处施加刚性。这一视角使卡滞纽结在概念上与刚性顶点空间图十分接近，同时保留了经典交叉特有的方向信息。下一小节将通过提升构造，把图示与空间嵌入之间的对应关系形式化。

我们强调，刚性对嵌入施加的是结构约束，而非仅仅为平面投影添加标记。因此，卡滞纽结被视为真正的拓扑对象，而非纯粹由图示构成的对象。

## 2.1 空间实现

尽管定义 2.1 是图示性的，但每个卡滞结都能在三维空间中得到一种自然实现，这类似于用于伪链的提升构造[5]。这种空间解释进一步表明，卡滞结是拓扑对象，而非纯粹的平面构造。

**定义 2.4**。 一个空间卡滞结是一个二元组（$f,\ S$），由一个驯嵌入 $f\colon S^1 \hookrightarrow S^3$以及一个有限的指定子集 $S \subset S^1$组成，该子集称为粘结点集合。对于每个 $p \in S$，像 $f(p)$ 在小邻域$B_\varepsilon(f(p))$中配备了预先规定的局部高度顺序，从而确定关联弧之间固定的上下关系。这些点称为刚性顶点。

这类嵌入的一般平面投影会产生图，其中横截双重点对应于经典交叉，而点 $S$ 的像投影为卡滞交叉。

这类嵌入可以通过标准的提升过程获得。每个经典交叉都在一个足够小的三维球内实现，使上弧位于下弧之上且不与其相交。卡滞交叉位于包含刚性高度顶点的小三维球内，其中关联弧在刚性顶点处相交，并遵循预先规定的高度顺序。连接各交叉的弧被替换为三维空间中的嵌入弧，并选择其路径以避免意外相交（示意见图 3）。

因此，卡滞纽结可视为经典结的一种推广，其中特定的局部相交结构由刚性顶点约束加以保留。事实上，每个经典结都可实现为一个刚性顶点集为空的卡滞结。因此，这一框架自然地将经典结的范畴嵌入更广泛的受约束嵌入类别中。下一小节将讨论这些约束对纽结整体等价的影响。

**注记 2.5.** 从几何角度看，卡住的交叉类似于线段之间的键合相互作用：一条弧从另一条弧上方经过，同时吸引键维持它们在局部的连接。这类相互作用在键合纽结与辫子的理论中有所研究 [6]，这提示刚性约束与键合结构之间存在概念上的桥梁。

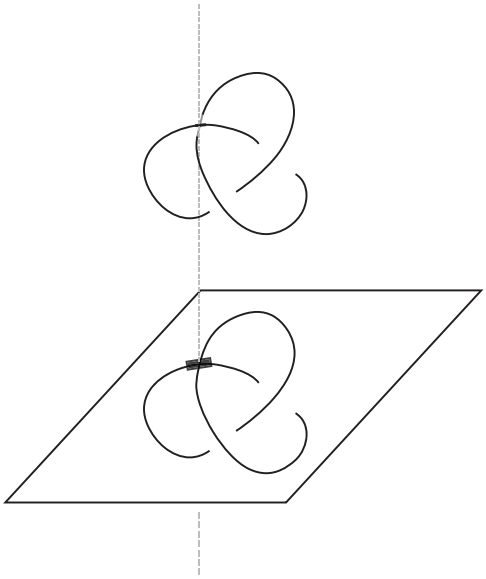


图 3：通过提升构造获得的图示卡滞结及其空间实现。

## 2.2 粘结同痕

在确立了卡滞纽结的空间解释后，我们现在定义恰当的等价概念。由于卡滞结是通过带有刚性高度顶点的空间嵌入实现的，因此自然的等价关系是在保持这一刚性结构的前提下进行环境同痕。

**定义 2.6**。 若两个空间卡滞结之间存在保持每个刚性高度顶点及其高度顺序的 $S^3$ 环境同痕，则称它们粘结同痕 。

特别是，不允许任何会生成、消除或拆分刚性高度顶点的环境同痕。因此，刚性是嵌入的内在特征，而非可移除的图示装饰。上述空间定义可通过局部变换得到完整的图示表述，从而将经典的 Reidemeister 定理扩展到带刚性顶点的嵌入。卡滞结的图示变换见 [1] ，其依据是空间图的标准论证。我们将在上述空间框架内形式化这些变换，并陈述其完备性。

**定理 2.7** （卡滞结的 Reidemeister 定理类比）。 两个卡结图表示粘结同痕的空间嵌入，当且仅当它们可以通过有限次应用图 *4*4所示的局部变换相互关联。这些变换包括：

1. 图的平面同痕；
2. 在卡住的交叉之外进行的经典*Reidemeister*移动；
3. 涉及卡住的交叉、保持高度顺序并使相邻弦连接在顶点上的刚性顶点变换。

证明。论证遵循环境同痕与 Reidemeister 变换之间的经典对应关系，并在刚性顶点附近格外谨慎。给定两个保持刚性高度顶点不变的空间粘结结之间的环境同痕，标准的一般位置论证保证可以选取这样的同痕：其在平面上的投影除有限个临界时刻外均为正则。每个这样的时刻都对应一种局部构型变化，且该变化由上述某个变换刻画。

远离刚性顶点处，经典 Reidemeister 变换与通常证明中的情形完全相同。在刚性顶点附近，同痕受到约束，必须保持横截交点和规定的高度顺序，因此唯一允许的局部变化是刚性顶点变换。反过来，每个图示变换都支撑在一个足够小的三维球内，并可提升为保持刚性结构的环境同痕。因此，这些变换恰好生成由粘结同痕所诱导的等价关系。

□

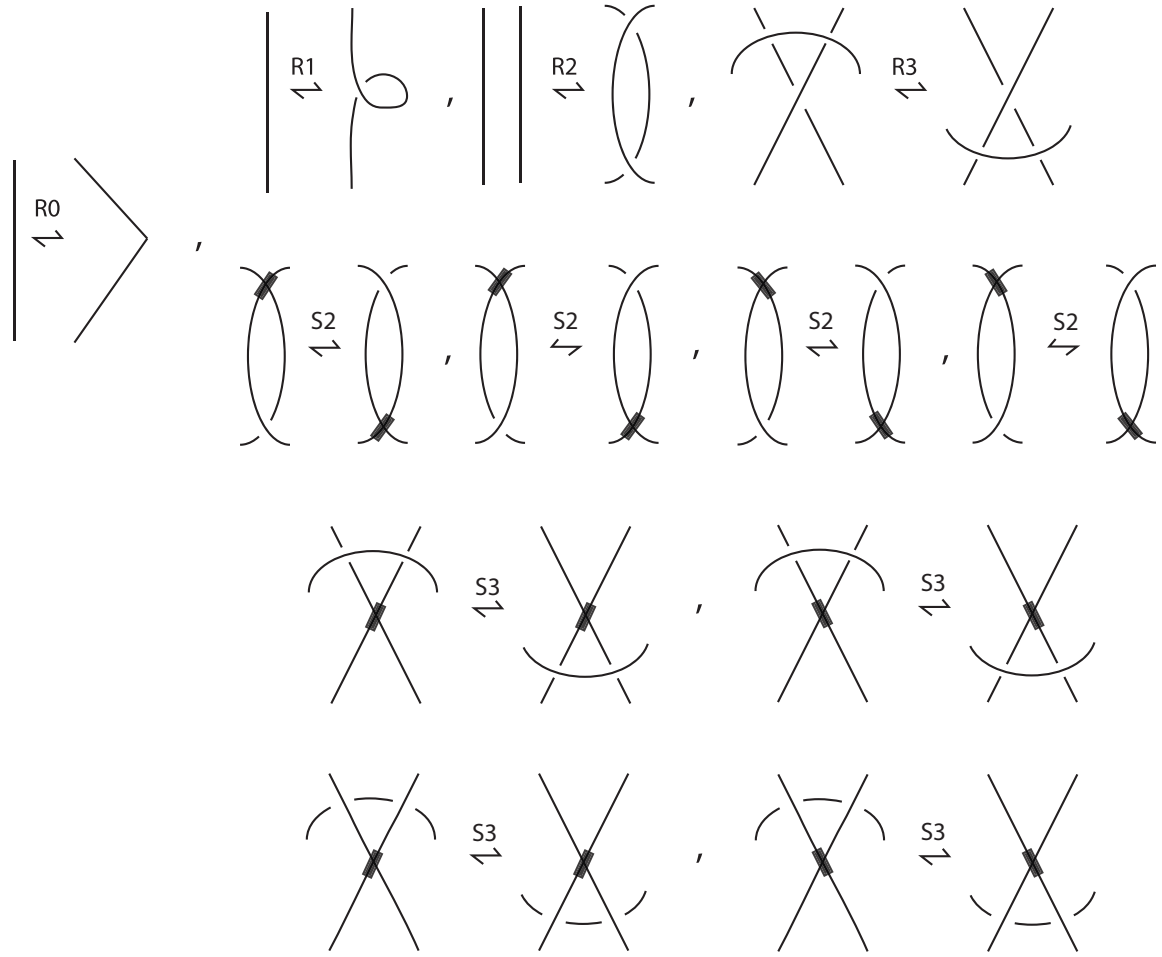



图 4：经典交叉与卡住的交叉的同痕变换。

**注 2.8**。 我们强调，刚性高度顶点处不允许进行 Reidemeister 第一变换，因为这类操作需要分开相邻弦，从而违反刚性约束。此外，值得一提的是，Ceniceros 等人在近期的研究中探讨了卡滞链环的定向 Reidemeister 型变换。 [3], 他们在其中引入了一个代数框架。

如前所述，每个经典纽结都可以实现为不含刚性高度顶点的卡滞结，因此经典理论自然地包含在当前框架之中。在这种对应关系下，粘结同痕限制为经典环境同痕。现在我们将这种关系形式化。令 SK 表示卡滞结（或链环）类型的集合，即空间卡滞结对粘结同痕取商所得的集合；令 K 表示经典结（或链环）类型的集合。

**定义 2.9**。 此遗忘刚性映射

$$\pi : \mathcal{SK} \to \mathcal{K}$$

定义为在空间粘结结中遗忘刚性高度顶点，从而只考虑底层嵌入圆 $f(S^1) \subset S^3$。

直观地说，映射 $\pi$ 提取出这样一个经典结：忽略刚性约束，同时保留环境嵌入。

**命题 2.10**。 映射 $\pi$ 定义良好。

证明。 假设两个空间粘结结表示 SK 中的同一个元素。根据定义，它们通过空间粘结结之间的环境同痕相关联；也就是说，这种同痕将刚性高度顶点（及其高度顺序）作为嵌入结构的一部分予以保持。现在，如果我们忽略刚性高度数据，那么同一个环境同痕就是 $S^3$中底层嵌入圆之间的环境同痕。因此，所得经典结型与所选代表元无关，并且 $\pi$ 定义良好。等价地，映射 $\pi$ 是通过遗忘刚性高度顶点得到的典范映射。

□

映射 $\pi$ 表明，每个卡滞结都确定了一个底层经典结型。反过来，经典结可以看作不存在刚性顶点的特殊卡滞结。这一观察引出了一个自然的包含映射。

**定义 2.11.** 定义

$$\iota : \mathcal{K} \to \mathcal{SK}$$

将经典结视为没有刚性高度顶点的卡滞结。

因此，经典纽结理论作为僵结理论的一个全子理论嵌入其中。

**命题 2.12.** 映射 $\iota$ 定义良好且为单射，并且 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}$。

证明。 若两个经典结环境同痕，那么将它们视为没有刚性高度顶点的卡滞结时，同一个环境同痕在粘结情形下也是可行的；因此 $\iota$ 定义良好。此外，由于 $\iota$ 不会引入刚性高度顶点，应用 $\pi$ 时不会遗忘任何内容，所以 $\pi \circ \iota = \mathrm{id}_{\mathcal{K}}$。单射性立刻可得。

□

总之，这两个映射 $\pi$ 和 $\iota$ 阐明了两种理论之间的结构关系：经典结自然嵌入更广泛的卡滞纽结类中，而遗忘刚性映射则恢复受约束嵌入的底层经典结型。

**注 2.13.** 对于固定的经典结型 $K$，原像（纤维） $\pi^{-1}(K)$ 通常包含许多不同的卡结类型，它们源自刚性高度顶点的不同构型。因此，遗忘刚性映射 $\pi$ 表明，僵结理论是经典纽结理论的一种细化，其中额外的刚性数据丰富了底层嵌入。

**注 2.14.** 如果同时忽略刚性约束以及每个刚性高度顶点处的高度顺序，那么一个空间粘结结就确定了一个奇异结，也就是说，一个具有有限个横截双重点的浸入结。与映射到经典结的遗忘刚性映射不同，后者保留嵌入结构；这一投影会抹去高度数据，只记录横截交点的存在。这一观察在概念上将卡滞纽结与奇异结理论联系起来，并表明，为奇异结发展出的技术可能有助于研究刚性高度嵌入。

## 3 解粘操作

由于刚性高度顶点对环境同痕施加局部约束，并可能妨碍空间嵌入的简化，一种自然的操作便是在保留底层曲线的同时解除这些约束。这便引出了“解粘操作”。它在理论中发挥着结构性作用，使不同“刚性等级”的嵌入之间能够相互转换。

**定义 3.1.** 设 $(D, S)$ 是一个僵结图，且 $x \in S$。在 $x$ 处进行的解粘操作 会移除该交叉处的刚性约束，将其转化为具有相同上下穿越结构的经典交叉。

我们将这一操作记为

$$\mathcal{U}_x : (D, S) \to (D, S \setminus \{x\}).$$

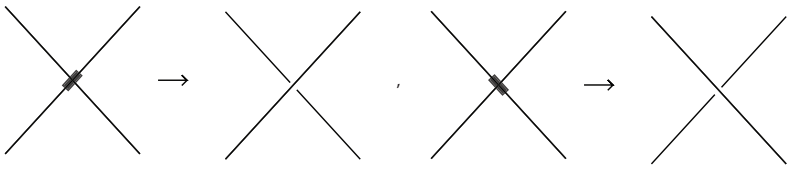


图 5：解粘操作在保留上下穿越结构的同时，移除交叉处的刚性约束。

从几何上看，解粘操作释放了空间嵌入中的一个局部约束，同时不改变底层的嵌入曲线。特别是，它改变的是刚性结构，而非纽结的环境同痕类。

**定义 3.2.** 平凡僵结 是指由一条没有交叉且没有刚性高度顶点的简单闭曲线的平面图表示的卡滞结；等价地说，它是从僵结范畴的视角看待的经典平凡结。

因此，在将经典纽结纳入僵结理论时，平凡僵结对应于经典平凡结。以下命题将这一观察表述得更为精确。

**命题 3.3.** 解粘操作不会改变底层的经典结型。

证明。 解粘操作只改变额外的刚性数据：它将一个刚性高度顶点替换为普通的横截交叉，同时保留嵌入圆，因此也保留由提升构造得到的底层空间嵌入。因此，在解粘操作之前或之后应用刚性遗忘映射 $\pi$ ，得到的经典嵌入相同，底层经典结型也不变。

□

**注 3.4**。 因此，应将解粘视为在固定的经典结型内修改刚性数据；也就是说，解粘操作改变的是嵌入的约束结构，而非其底层环境同痕类。

这一观察启发我们定义一种刚性的数值度量，其依据是到达平凡僵结所需的最少解僵操作次数（见 § 7）。

## 3.1 刚性滤过

由于粘结同痕不允许创建或删除刚性高度顶点，因此每个受阻纽结都有一个定义良好的刚性度量，即此类顶点的数量。

**定义 3.5**。 对于 $k \geq 0$，令 $\mathrm{R}_k$ 表示恰有 $k$ 个刚性高度顶点的卡结类型。这一整数称为该受阻纽结的刚性等级 。

刚性等级在受阻纽结类型层面上定义良好，因为粘结同痕会保持刚性高度顶点的数量。集合 $\{\mathrm{R}_k\}_{k\geq 0}$ 将受阻纽结类型划分为结构约束逐渐增强的各个等级。此外，解粘操作会严格降低刚性等级，将 $\mathrm{R}_k$ 映射到 $\mathrm{R}_{k-1}$。因此，刚性赋予卡滞纽结集合一种自然的层级结构，类似于按刚性进行的滤过。这种滤过表明，僵结理论具有一种自然的按刚性分级，这一特性为代数和 skein 理论构造提供了自然框架。

**注 3.6.** 从 R$k$ 转到 R$k-1$ 需要进行一次解粘操作，从而解除空间嵌入中的一个刚性约束。另请注意，等级 $\mathrm{R}_0$ 对应于经典结的类别。

**例 3.7.** 含有单个刚性高度顶点的平凡结图属于 $\mathrm{R}_1$。执行一次解粘操作将该纽结置于 $\mathrm{R}_0$，，此后经典Reidemeister移动将该图约化为平凡僵结。

## 4 StuckKnots 的 skein 理论不变量

上一节引入的刚性层级表明，僵结理论可按刚性高度顶点的数目进行自然分级。因此，一个核心目标是构造能够检测此类局部约束如何与环境拓扑相互作用的代数不变量。

Skein 理论提供了一种将局部几何数据转化为可计算整体不变量的有力机制。自 Jones [10] 与 HOMFLYPT [9] 多项式被发现以来，skein 关系通过使交叉信息在整张图中传播，在纽结理论中发挥了基础性作用。我们将这一思想推广到含有刚性顶点的嵌入。与奇异交叉不同，刚性交叉携带高度数据，且不能通过同痕消除。因此，它们在嵌入中表现为“持续性局部缺陷”，而非瞬态交点。任何针对卡滞纽结的 skein 不变量都必须编码这种持续性，同时与经典理论保持相容。在本节中，我们处理定向粘结图，并假定所有同痕变换都保持定向。

令 $L_+$、$L_-$、$L_0$ 表示图 6所示的标准定向 skein 三元组。回顾一下，HOMFLYPT 多项式 $P$ 由 skein 关系刻画：

$$aP(L_+) - a^{-1}P(L_-) = zP(L_0),$$

再加上归一化条件 $P$(平凡结) $= 1$。

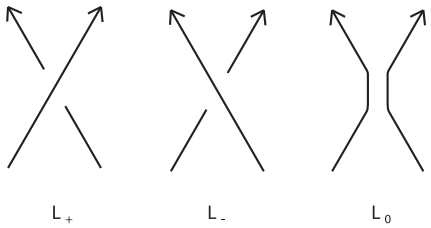



图 6：经典 skein 三元组（$L_+$、$L_-$、$L_0$）。

刚性交叉继承其相邻弦的定向，并根据指定哪条线段跨越另一条线段而呈现两种形式。我们用 $L_*^+$和 $L_*^-$表示这些局部图。

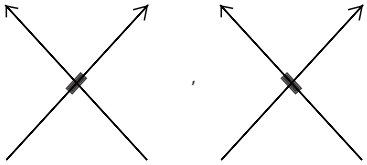


图 7：定向刚性交叉 $L_*^+$和 $L_*^-$。

由于刚性交叉无法通过同痕消除，其 skein 行为必须体现局部连接的持续存在，而不能仅仅反映线段的定向。这

一视角促使我们扩展经典 HOMFLYPT 递推，将刚性直接纳入 skein 框架。我们的目标是构造一种不变量，既能检测经典交叉数据与刚性约束之间的相互作用，又与前文引入的刚性层级保持兼容。因此，我们在经典 skein 关系中加入针对刚性交叉的额外局部规则，旨在保留定向数据，并体现这些顶点在允许同痕下不可分离的性质。现在，我们将介绍一种把 HOMFLYPT 多项式扩展至卡滞纽结的 skein 不变量。

**定义 4.1.** 刚性*HOMFLYPT*多项式 $P_R$ 由经典skein关系递归定义

$$aP_R(L_+) - a^{-1}P_R(L_-) = zP_R(L_0),$$

以及刚性交叉关系

$$P_R(L_*^+) = t\,P_R(L_0) + r\,P_R(L_+),$$

$$P_R(L_*^-) = t\,P_R(L_0) + r^{-1}P_R(L_-),$$

其中 $a$， $z$， $t$， $r$ 是相互独立的不定元，且归一化条件为

$$P_R(\bigcirc) = 1, \qquad P_R(L \sqcup \bigcirc) = \frac{a - a^{-1}}{z}\,P_R(L).$$

这些参数具有不同的几何作用：变量 $a$ 和 $z$ 编码经典skein行为，参数 $t$ 衡量分离股线所产生的贡献，而变量$r$ 则记录刚性交叉固有的定向高度结构。对 $r$ 使用逆系数，可确保与定向反转相容，并避免代数参数不必要地增多。

**注 4.2.** 当不存在刚性交叉时，定义关系便化为经典 HOMFLYPT 多项式的定义关系。因此，将 $P_R$ 限制在分层空间 $\mathrm{R}_0$ 上，即可恢复经典不变量。

现在我们验证，这些递归关系唯一确定了所有卡结图对应的不变量。

**命题4.3**。 上述关系唯一确定所有卡滞结图的 $P_R$ 。

证明。 证明对字典序下的数对（$N$， $s$）进行归纳，其中$N = c + s$ 表示交叉的总数（即经典交叉 $c$ 与刚性高度顶点 $s$之和）。

- **基本情形：** 若 $N = 0$，图 $D$ 不含任何类型的交叉。此时， $D$是一个无链环。其值由归一化 $P_R$（$\bigcirc$） $= 1$ 以及不交并规则 $P_R$（$L \sqcup \bigcirc$） $= \frac{a-a^{-1}}{z} P_R$（$L$）唯一确定。

- **归纳步骤（卡滞交叉）：** 若 $s > 0$，选取一个刚性高度顶点 $L_*^{\pm}$。应用刚性交叉关系，将 $P_R$（$L_*^{\pm}$）表示为线性组合：

  $$P_R(L_*^{\pm}) = t\,P_R(L_0) + r^{\pm 1}P_R(L_{\pm}).$$

  图 $L_0$ 的交叉总数为 $N - 1$，而图 $L_{\pm}$ 的交叉总数为 $N$，但有 $s - 1$ 个刚性高度顶点。在这两种情况下，所得图示在字典序（$N$， $s$）上都严格更低。

- **归纳步骤（经典交叉）：** 如果 $s = 0$ 和 $N > 0$，该图只包含经典交叉。我们遵循标准的解结算法：通过选取一个基点并沿纽结遍历，我们可以利用经典skein关系表示 $P_R(D)$

$$aP_R(L_+) - a^{-1}P_R(L_-) = zP_R(L_0)$$

表示为一个平凡结与交叉数严格更少的图示的线性组合（$N-1$）。由于在此步骤中所有图示都满足 $s = 0$，它们在字典序中仍然较低。

由于 $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ 上的字典序是良基的，递归过程会在有限步内终止。因此，$P_R$（$D$）被唯一确定为关于 $\mathbb{Z}[a^{\pm1}, z^{\pm1}, t, r^{\pm1}]$的多项式。

□

唯一性保证递归关系确定了一个定义在图示上的函数。现在我们验证该函数在粘结同痕下是不变量，因此它定义的是卡滞纽结的不变量，而不是特定图示表示的不变量。

**定理4.4**。 多项式 $P_R$ 在粘结同痕下是不变量。

证明。 我们验证定义关系在生成粘结同痕的变换下保持不变。

- 刚性交叉之外的 Reidemeister第二与第三移动：对于仅包含经典交叉的图示，这些关系化简为 HOMFLYPT 多项式的关系，而该多项式在这些移动下的不变性早已众所周知。

- Reidemeister 第一变换：归一化 $P_R(L \sqcup \bigcirc) = \frac{a-a^{-1}}{z} P_R(L)$确保在引入或去除扭结时保持不变，与经典情形完全相同。

- 涉及刚性交叉的移动：假设一个图经历涉及刚性高度顶点的同痕移动，例如S2移动。如图8所示，应用刚性关系 $P_R(L_*^{\pm}) = tP_R(L_0) + r^{\pm1}P_R(L_{\pm})$可将该图化为一个平滑交叉与一个经典交叉的线性组合。由于平滑 $L_0$ 与经典交叉 $L_{\pm}$ 在相应的经典Reidemeister移动下各自单独保持不变，它们的线性组合也保持不变。类似的论证适用于S3移动（一条弧滑过一个刚性顶点），其中刚性关系与环境同痕可交换。

由于所有生成移动都保持该多项式，$P_R$ 在粘结同痕下不变。 □

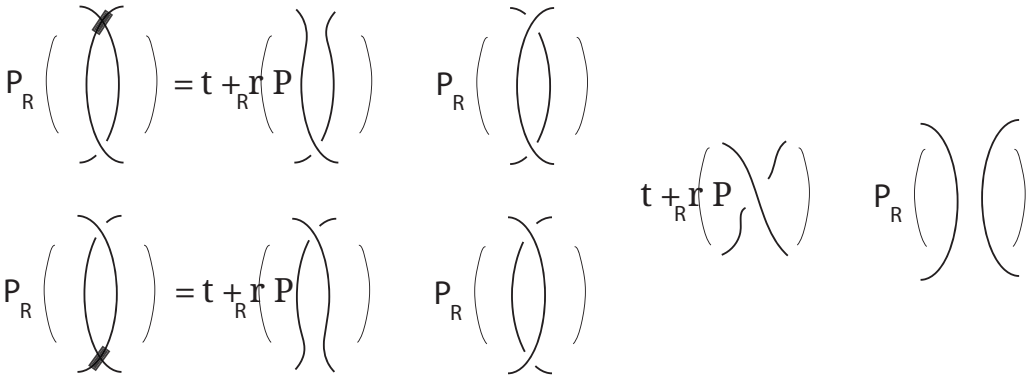



图8：在 S2移动下的不变性。

除了不变性之外，该多项式还体现了刚性层级。每个刚性交叉都为缠结展开贡献独立的代数数据，从而赋予该不变量按刚性分级的自然结构。

**命题 4.5.** 设 $K^* \in \mathcal{SK}$ 为一个具有 $k$ 个刚性高度顶点的卡滞结。多项式 $P_R(K^*)$ 中出现的每个单项式$m$都满足：

$$\deg_{\{t,r\}}(m) \le k,$$

其中 $\deg^{\{t,r\}}$ 表示变量 $t$ 和 $r$ 的总次数。

证明。 我们对刚性高度顶点的个数 $k$ 使用归纳法。

- **基础情形（$k = 0$）：** $P_R(K^*)$ 是关于 $a$ 和 $z$ 的经典 HOMFLYPT 多项式。由于$t$ 和 $r$ 不出现，次数为 $0 \le 0$。
- **归纳步骤：** 假设该不等式对 $k-1$ 个刚性顶点成立。对于具有$k$ 个顶点的纽结，我们应用刚性关系：

$$P_R(L_*^{\pm}) = t\,P_R(L_0) + r^{\pm 1} P_R(L_{\pm}).$$

根据归纳假设， $P_R(L_0)$ 与 $P_R(L_{\pm})$ 中的单项式的次数至多为$k-1$。

– 乘以 $t$ 所得的次数至多为 $(k-1)+1 = k$。– 乘以 $r$ 所得的次数至多为 $(k-1)+1 = k$。– 乘以 $r^{-1}$ 所得的次数至多为 $(k-1) - 1 = k-2$。

在所有情况下，任何所得单项式的次数 $m$ 都满足 $\deg^{\{t,r\}}(m) \le k$。

□

**注 4.6**。 的递归定义 $P_R$ 遵循一种称为 缠结插入的一般模式，该模式由 Henrich 和 Kauffman 引入 [8]。在他们的框架中，通过插入一组特定的缠结来处理奇异顶点或未知交叉，从而为奇异结和刚性空间图构造不变量。我们的刚性关系可视为这一模式的特例，专为卡滞纽结独特的高度排序而设计。

现在我们给出若干示例，说明刚性如何提供经典结型之外的信息。

**例 4.7**。 设 $D$ 是一个仅由单个正卡滞交叉 $L_*^+$构成、位于一个平凡环上的图。刚性 skein 关系给出

$$P_R(D) = t\,P_R(L_0) + r\,P_R(L_+).$$

这里， $L_0$ 是卡滞交叉的平滑结果，即二分支平凡链环；而 $L_+$ 是将卡滞交叉替换为经典交叉（一个正扭结）后得到的图。由于 $L_+$ 是平凡结的经典图，并且对于不含卡滞交叉的图， $P_R$ 与经典 HOMFLYPT 多项式一致，因此我们有 $P_R(L_+) = P(\bigcirc) = 1$。利用

$$P_R(L \sqcup \bigcirc) = \frac{a - a^{-1}}{z}\,P_R(L),$$

我们得到

$$P_R(D) = t\left(\frac{a - a^{-1}}{z}\right) + r.$$

值得注意的是，尽管二者经典等价，该多项式仍将此图与平凡结区分开来，这说明刚性确实贡献了真正的新信息。

**例4.8.** 设 $K$ 为一个经典结图，并设 $K_x^*$ 为通过将 $K$ 的一个交叉指定为类型 $L_*^+$的刚性高度顶点而得到的卡滞结。刚性 skein 关系给出

$$P_R(K_x^*) = t\,P_R(L_0) + r\,P_R(L_+),$$

其中 $L_+$ 是原始经典结 $K$ ， $L_0$ 是其在 $x$处的平滑。由于 $t$ 与 $r$ 是独立参数，所得多项式 $P_R(K_x^*)$不能仅用 $a$ 和 $z$ 表示，除非 $t = 0$ 与 $r = 1$。这表明 $P_R$ 能够独立于底层经典结型 $\pi(K_x^*)$ 检测局部刚性。

这些例子表明，刚性为skein 框架引入了真正新的自由度，说明该多项式能够检测经典不变量所看不见的特征。

**注4.9.** skein 关系的结构暗示了一个更广泛的代数框架。支撑 $P_R$ 的 skein 关系表明，stuck 链或许可以采用类似于经典情形的 skein 模表述。尽管我们在此不深入这一方向，但它为今后的研究提供了一个自然的框架。

# 5 卡滞纽结的一个状态和不变量

在§ 3.1 中引入的刚性滤过表明，卡滞纽结的不变量不仅应编码经典交叉数据，还应编码刚性高度顶点的持续性。虽然 HOMFLYPT 型多项式通过修正的 skein 关系纳入了刚性，但状态和模型提供了一种互补方法，其中刚性顶点在展开中作为局部状态被保留。

状态和构造将局部几何结构转化为可计算的全局数据，在纽结理论中发挥着基础作用。在当前设定下，它们提供了一种自然机制，确保刚性在展开的每个阶段都清晰可见。因此，我们构造了一种适用于卡滞纽结的括号型不变量，它推广了经典考夫曼括号 [11]。核心思想是：经典交叉可以进行平滑操作，而刚性顶点则作为结构状态保留下来，以体现它们在空间嵌入中作为局部不可分离附着的作用。因此，刚性在状态展开过程中始终清晰可见，而不会在化简过程中消失。

所得多项式旨在同时反映经典纠缠以及刚性附着所施加的结构约束。

## 5.1 状态模型

现在我们将刚性在状态展开中的传播形式化。设 $D$ 是一个卡滞纽结 $K^*$ 的图。每个经典交叉都可进行通常的 $A$ 和 $B$ 平滑。在卡住的交叉处，我们引入第三种局部状态，以表示线段之间持续存在、不可分离的接触。

因此， $D$ 的每个交叉都按照以下局部规则之一进行处理：

1. $A$平滑，
2. $B$平滑，
3. 刚性顶点状态 $V$（也是卡滞交叉处唯一允许的局部状态）。

消解经典交叉后，会得到一组简单闭曲线，以及在整个状态中始终保留的刚性顶点。注意，在 $V$ 状态中，卡住的交叉被保留为刚性四价顶点，其高度顺序与 $D$ 中相同。

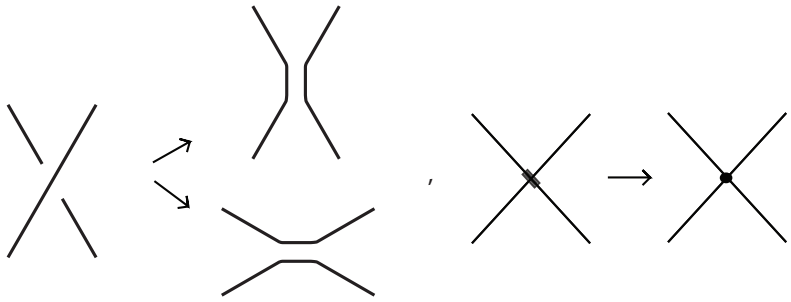


图9：交叉处的局部状态： $A$ 平滑、 $B$ 平滑，以及刚性顶点状态 $V$。

我们为每种局部消解赋予乘法权重。

$$A \text{ smoothing} : A, \qquad B \text{ smoothing} : A^{-1}, \qquad V \text{ state} : R,$$

其中， $A$ 和 $R$ 是相互独立的不定元。

**定义5.1**。 图状态 $s$ 是指在每个交叉处选取一种局部消解。定义 $s$ 的权重为

$$w(s) = A^{\alpha(s)-\beta(s)} R^{\nu(s)},$$

其中， $\alpha(s)$和 $\beta(s)$分别表示 $A$ 平滑和 $B$ 平滑的数量，而 $\nu(s)$表示刚性顶点状态的数量。

消解经典交叉后，每个状态 $s$ 都对应一个空间图，该图由嵌入弧在持续存在的刚性顶点处连接而成。由于每个刚性顶点都是四价的，得到的状态由一个或多个连通分支组成。令 $|s|$ 表示这些连通分支的数量。

**定义5.2**。 图 $D$ 的粘结括号 定义为以下状态和：

$$\langle D \rangle_R = \sum_s w(s)\, \delta^{|s|-1}, \qquad \delta = -A^2 - A^{-2},$$

其中求和遍及图 $D$ 的所有可能状态 $s$ 。

请注意，由于每个经典交叉有两种消解方式，而刚性交叉只有一种，因此状态的数量是有限的。

**注5.3**。 当不存在刚性交叉时，状态模型恰好退化为经典考夫曼括号。因此，粘结括号通过添加一个记录刚性顶点存在情况的乘法参数，推广了经典考夫曼括号。

与经典理论一样，括号 $\mathrm{h}D\mathrm{i}_R$ 在第二、第三类里德迈斯特变换下保持不变，但在 Reidemeister 第一变换下不保持不变。为了得到环境同痕不变量，我们使用缠绕数进行归一化。

令 $w(D)$ 表示 $D$ 的缠绕数，其中只计经典交叉。刚性顶点不贡献缠绕数，因为它们不代表定向交叉。

**定义 5.4**。 定义多项式

$$P_{K^*}(A, R) = (-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle_R.$$

**定理 5.5**。 多项式 $P_{K^*}(A, R)$ 在粘结同痕下是不变量。

证明。 我们验证括号在粘结同痕的生成移动下保持不变。

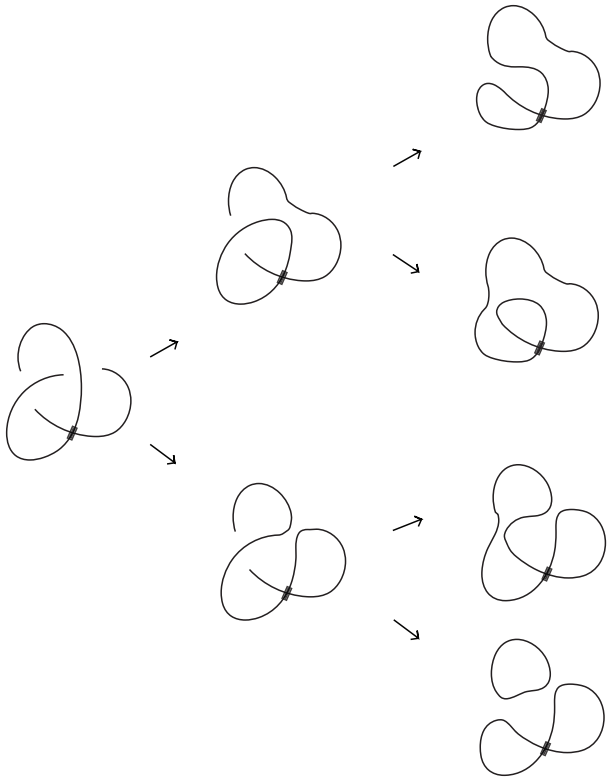


图 10：通过消解经典交叉同时保留刚性顶点而得到的状态示例。

- 远离刚性顶点的 Reidemeister第二与第三移动：这些结论可由经典括号论证得出， [11], 因为局部状态展开没有变化。
- 涉及刚性顶点的变换：允许同痕会保留刚性顶点，且不会分开关联弧。每个刚性变换都在局部作用，并保留刚性顶点及其关联弧，从而在权重相同的状态之间建立一一对应。

- Reidemeister 第一变换：由于刚性顶点不允许进行 Reidemeister 1 型操作，所有扭结贡献都来自经典交叉。一个扭结会在括号中引入通常的乘法因子，而该因子恰好被缠绕数归一化抵消。因此，该多项式在所有允许的变换下均为不变量。

因此， $P_{K^*}(A,\ R)$ 是卡结类型的不变量。 □

**注 5.6**。 令 $R = 1$ 可恢复经典 Kauffman 括号的归一化，而 $R = 0$则突显了持续存在的刚性顶点在状态展开中的贡献。

## 5.2 粘结括号的性质

现在，我们来考察粘结括号的若干结构特征。具体而言，我们将证明，该不变量能够检测刚性，在状态和构造中具有自然的普适性，并且可以补充前文介绍的定向 skein 不变量。

**刚性检测**。 额外变量 $R$ 确保刚性顶点对不变量作出明确贡献。

**命题 5.7**。 刚性顶点通过 $R$ 的幂对多项式作出明确贡献。特别是，如果一个图至少包含一个刚性顶点，那么 $P_{K^*}(A, R)$ 通常是关于 $R$ 的非常数多项式，除非依赖于 $R$ 的项恒等相消。

证明。 每个包含刚性顶点的状态都会贡献一个因子 $R$，而仅由经典交叉产生的状态则不会。因此，状态展开通过依赖于 $R$的项记录了刚性顶点的存在。

□

**例 5.8**（经典卷曲与刚性卷曲）。 设 $D_{\mathrm{cl}}$ 是带有一个经典正卷曲（一个经典交叉）的平凡结标准图。设 $D_{\mathrm{rig}}$ 为从同一图形得到的图，其中该交叉被视为一个刚性高度顶点（回顾图2右侧）。这两个图在经典意义下等价（在遗忘刚性映射下均表示平凡结），但它们在粘结括号归一化下的表现不同。

**（i）经典卷曲**。在经典考夫曼括号中，一个正卷曲贡献因子$-A^3$:

$$\langle D_{\mathrm{cl}} \rangle = -A^3 \langle \bigcirc \rangle = -A^3.$$

缠绕数只计算经典交叉，因此 $w(D_{\mathrm{cl}}) = +1$。于是归一化多项式为

$$P_{\iota(\mathrm{unknot})}(A, 1) = (-A^3)^{-w(D_{\mathrm{cl}})} \langle D_{\mathrm{cl}} \rangle = (-A^3)^{-1}(-A^3) = 1,$$

这正是经典平凡结应有的结果（此处我们写作 $R = 1$，以强调其化简为经典归一化）。

**(ii) 刚性卷曲**。在 $D_{\mathrm{rig}}$ 中没有任何经典交叉（唯一的交叉是刚性的），因此没有 $A/B$ 可供选择，并且恰好只有一个状态。在该状态中，刚性顶点保留，并贡献一个 $R$因子。此外，解析后的图只有一个底层分支（忽略刚性顶点），因此 $|s| = 1$ 且 $\delta^{|s|-1} = \delta^0 = 1$。因此

$$\langle D_{\mathrm{rig}} \rangle_R = R.$$

由于刚性顶点不计入缠绕数， $w(D_{\mathrm{rig}}) = 0$，因此

$$P_{K^*}(A, R) = (-A^3)^{-w(D_{\mathrm{rig}})} \langle D_{\mathrm{rig}} \rangle_R = R.$$

这一计算表明，即使底层经典结型仍然是平凡结，将一个交叉指定为刚性的也可能改变不变量。

**注 5.9**。粘结括号可以视为经典考夫曼括号向含有刚性高度顶点的图的一种自然扩展。一旦确定经典交叉的局部平滑权重，引入一个用于刚性顶点的乘法参数，便是将刚性纳入状态和框架的最简单机制。从这个意义上说，粘结括号在经典纽结理论中的作用类似于考夫曼括号。这一观点启发我们可以开发适用于带刚性顶点的嵌入的缠绕模 [15]；不过，本文不再探讨这一方向。

**与 HOMFLYPT 型不变量的比较**。状态和不变量补充了此前构造的 HOMFLYPT 型多项式。尽管二者都刻画了刚性，但它们源自不同的代数框架。HOMFLYPT 型多项式通过修改交叉关系以纳入刚性高度结构，从而扩展了有向 Skein 理论。相比之下，粘结括号将刚性顶点视为消解过程中的持久状态，使其贡献在整个展开过程中始终可见，而非被吸收到交叉数据中。

**注 5.10**。这两种构造的互补性在例4.7 和5.8中已显而易见。对于包含单个刚性交叉的平凡结，HOMFLYPT 型多项式通过涉及经典平滑的修正 skein 关系来记录刚性，而粘结括号则赋予一个直接源自刚性顶点状态的持久乘法贡献。因此，前者将刚性纳入交叉数据，后者则在整个状态展开过程中明确保留刚性。

# 6 将 StuckKnots 视为空间刚性图

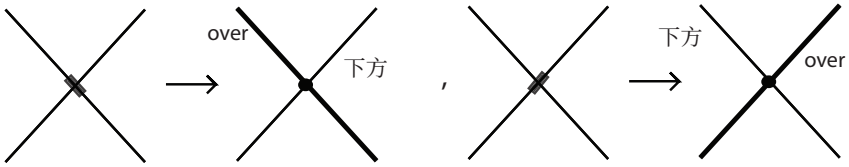
卡滞交叉的存在，使卡滞纽结自然而然地纳入空间图拓扑的框架。与其将卡住的交叉视为带装饰的双重点，不如将其恰当地解释为一种刚性顶点，其局部结构必须在环境同痕下保持不变。这一视角将卡滞纽结置于局部约束下的拓扑这一更广泛的范式之中。

引入刚性顶点空间图，是为了研究 $S^3$ 中图的嵌入，其中每个顶点处边的循环次序在整个同痕过程中保持固定。

**定义 6.1**。 刚性空间图 是有限图在 $S^3$中的一种嵌入，并视为在保持每个顶点处边的循环次序的环境同痕下等价。

刚性顶点空间图已得到广泛研究，并发展出了若干不变量来分析其嵌入（例如参见 Yamada [18]）。关于刚性顶点嵌入的基础性论述可见 Kauffman [13]。

从这一视角来看，每个卡滞交叉都对应一个刚性四价顶点，并配有高度数据，用以指定哪条相交的线段从另一条上方经过。高度顺序通过引入类似于经典交叉所携带的方向信息，进一步细化了通常的刚性顶点结构。




Fi图 11：将一个卡住的交叉解释为具有高度顺序的刚性四价顶点 .

因此，每个卡滞结都自然确定一个刚性空间图，其刚性顶点恰好位于卡住的交叉处。

**命题 6.2**。 卡滞结与带有高度标记的4价顶点的刚性空间图之间存在自然对应。

证明。 给定一幅僵结图，将每个卡住的交叉替换为一个刚性四价顶点，同时保留关联弧的高度顺序。经典交叉仍为横截双重点，并通过通常的提升构造实现。卡滞结的环境同痕会保留刚性交叉及其高度数据，因此会诱导出一个保持顶点刚性的相关空间图的环境同痕。反过来，空间图的任何此类同痕都会投影为一系列允许的图示变换。因此，该构造定义良好。

□

这种解释表明，刚性是空间嵌入的内在特征，而非图示上的修饰：刚性顶点的存在本身就限制了允许的同胚变形。因此，卡滞纽结可被视为受约束的空间嵌入，而非带标记投影。

额外的高度结构进一步使卡滞纽结区别于经典刚性顶点图，后者并未规定上下交叉顺序。从这个意义上说，卡滞纽结处于经典纽结理论与刚性空间图理论之间，兼具两者的特征，同时呈现出两种理论单独考察时都不存在的、对刚性敏感的现象。

**注6.3**。 刚性空间图的诠释提出了一种互补的组合视角。给定一幅卡滞结的图 $D$ ，可以构造一个图，其中顶点对应交叉，边则表示连接交叉且中间没有其他交点的绳段。只考虑刚性交叉后得到的子图，能够反映局部约束在整幅图中的分布情况。

尽管这种构造依赖于图，且在 Reidemeister 变换下不是不变量，但它提供了一种自然的语言，用于描述刚性集中的区域，并梳理受约束交叉之间的相互作用。系统地探究这类组合结构与简化过程及解卡现象之间的关系，是一个值得未来研究的方向。

# 7 刚性释放与解粘距离

刚性高度顶点对环境同痕施加局部约束，可能阻止经典化简变换发生。尤其是，通常可以通过 Reidemeister 变换消去的构形，可能仅仅由于刚性的存在而仍受到阻碍。这一观察促使我们扩大允许的图示操作类别。我们通过一种宽松等价框架将这一想法形式化，在该框架中，刚性交叉可以不可逆地转化为经典交叉。由此得到的概念自然引出一种几何度量，用以衡量刚性对卡滞结的约束程度。

## 7.1 宽松同痕

**定义 7.1**。 僵结图之间的宽松同痕 是一个图示的有限序列，其中每一步均为以下两者之一：

1. 一次卡滞同痕变换；或
2. 一次解粘操作，在保持其上下穿越结构的同时，将刚性交叉转换为经典交叉。

刚性交叉一旦解除粘连，在整个序列中都保持为经典交叉。

宽松同痕通过允许不可逆地解除刚性约束，扩展了经典变换系统。因此，充分解除刚性后，便可能进行经典Reidemeister移动。

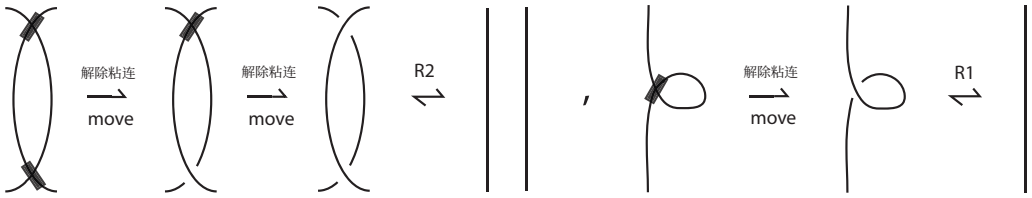



图 12：左：一对相邻刚性交叉阻碍了第二 Reidemeister 变换。解除两个顶点的粘连后，交叉便会抵消。右：在粘结同痕下无法消除的刚性扭结。释放刚性后，即可通过 Reidemeister 第一变换消除交叉。

**注 7.2.** 宽松同痕应被视为对结构约束的受控放宽，而非改变底层纽结的环境同痕类。解粘操作的目的不是改变经典结型，而是衡量刚性在多大程度上妨碍图示简化。

## 7.2 解粘距离

本小节将引入一种定量指标，用以衡量刚性对卡滞结的约束程度。由于粘结同痕和解粘操作都会保留底层经典结型，任何一系列宽松操作都只能关联其经典投影彼此环境同痕的卡滞纽结。因此，以下引入的距离概念仅在固定的经典结型内有意义。

**定义 7.3.** 设 $K_1^*$ 和 $K_2^*$ 为受阻纽结类型。解粘距离 $u(K_1^*,\ K_2^*)$ 定义为：在连接 $K_1^*$ 和 $K_2^*$ 的代表元的任意宽松同痕中，所需解粘操作的最少次数。若不存在这样的操作序列，则令 $u(K_1^*,\ K_2^*) = \infty$。

**注 7.4.** 由于解粘操作只改变刚性结构，同时保留底层嵌入的环境同痕类，因此仅当 $K_1^*$ 和 $K_2^*$ 具有相同的经典结型时，量 $u(K_1^*,\ K_2^*)$ 才是有限的。特别地，卡滞结到平凡僵结的距离仅当底层经典结本身是平凡结时才有限。

释放选定的刚性交叉后，受影响区域中的图便只包含经典交叉。随后可以自由应用经典Reidemeister移动，从而进行此前受刚性阻碍的化简。

我们先给出一些基本的下界和上界。

**命题 7.5.** 设 $K^*$ 是一个含有 $k$ 个刚性交叉的卡滞结，其底层经典结型为平凡结。那么

$$0 \le u(K^*, \bigcirc) \le k.$$

证明. 下界显然成立。解除全部 $k$ 个刚性交叉后，会得到一个平凡结的经典图；随后可通过经典Reidemeister移动将其化为平凡图。因此，至多需要 $k$ 次解僵操作。

□

这一估计表明，解粘距离受刚性交叉数量的控制；同时，如果刚性集中在只需少量解粘操作便可消除的构形中，也可能只需释放较少的约束。接下来我们注意到，在松弛同痕的拼接下，解粘距离具有次可加性。

**命题 7.6**。 对于卡结类型 $K_1^*, K_2^*, K_3^*$，假设存在从$K_1^*$ 到 $K_2^*$ 以及从 $K_2^*$ 到 $K_3^*$的宽松同痕。那么解粘距离满足

$$u(K_1^*, K_3^*) \le u(K_1^*, K_2^*) + u(K_2^*, K_3^*).$$

证明。 设 $\gamma_1$是一个从 $K_1^*$到 $K_2^*$的宽松同痕，实现了 $u(K_1^*, K_2^*)$；设 $\gamma_2$是一个从$K_2^*$到 $K_3^*$的宽松同痕，实现了 $u(K_2^*, K_3^*)$。先执行从 $K_1^*$到 $K_2^*$的宽松同痕，再执行从 $K_2^*$ 到 $K_3^*$ 的宽松同痕，即可得到一个从 $K_1^*$ 到 $K_3^*$的宽松同痕。连接后的序列中解粘操作的次数至多为这两个数量之和，由此得证该不等式。

□

**注 7.7.** 因此，解粘距离表现得如同刚性释放下卡滞纽结空间中的路径长度。尽管这暗示卡滞纽结的集合具有某种几何结构，但我们在此不探讨其度量表述。

### 7.3 刚性作为一种障碍

解粘距离可以通过变换障碍来作几何解释。在经典纽结理论中，局部构型可以通过 Reidemeister 变换得到简化，使交叉相互抵消，或通过环境变形将其移除。然而，在粘结情形下，刚性高度交叉无法自由参与这类局部简化：刚性可能会冻结 原本可以移除的构型。从这个意义上说，刚性交叉充当局部障碍，阻止特定的 Reidemeister 变换得以实现，直到刚性被释放。

这一视角有助于推导解粘距离的下界。我们无需从整体上分析整幅图，而可以找出一些在经典理论中可约、却受到刚性阻碍的局部构型。每个这样的构型都要求至少进行一次解粘操作，之后相应的经典化简才可进行。

在下文中，当我们说某个构型支撑于一个圆盘内时，意思是存在投影平面中的一个嵌入圆盘 $\Delta$，使得 $\Delta$恰好包含该构型中所示的交叉和弧，并且图与 $\partial\Delta$ 相交于适当数量的横截边界点。这一标准的局部性条件确保该障碍确实是局部的，不依赖于图的整体几何。

#### 刚性扭结与受阻的 Reidemeister 第一变换

一种特别简单的障碍来自一个唯一交叉为刚性交叉的扭结。在经典理论中，可以通过 Reidemeister 1 型操作将其消去，但在粘结同痕中，刚性交叉无法移除。解除该交叉的粘连后，它就变成经典交叉，此时便可以进行 Reidemeister 1 型操作（回忆一下图12的右侧）。

**定义 7.8.** 刚性扭结 是一个支撑在圆盘内的图示构型，其底层经典图是一个 Reidemeister 第一变换扭结，且其唯一的交叉是刚性的。

**命题 7.9.** 如果卡滞结的图包含一个支撑在圆盘内的刚性扭结，那么任何对该图进行简化的宽松同痕都必须包含至少一个支撑在该圆盘内的解粘操作。特别是，刚性扭结的存在迫使以下不等式成立

$$u(K^*, K'^*) \geq 1$$

对于一个 由移除该扭结后的图表示的卡滞结类型 $K'^*$ .

证明。 根据假设，该圆盘内包含一个交叉，其局部底层经典构型是一个 Reidemeister 第一变换扭结。在粘结同痕下，刚性交叉不能被移除，因此仅靠粘结同痕变换无法消除该扭结。在宽松同痕中，唯一能改变刚性的操作是解粘操作；交叉一经解粘便成为经典交叉。此时可以进行经典的 Reidemeister 第一变换（该操作在远离刚性交叉处进行），从而移除该扭结。因此，要实现这一简化，必须在该圆盘内至少进行一次解粘操作。

□

**备注 7.10**。 这是一种最小障碍现象：一个单独的 刚性交叉就能阻止整个局部简化变换。这说明刚性约束的是变换演算，而不仅仅是影响交叉数。

#### 半刚性 Reidemeister 2 与一步障碍

第二个基本障碍出现在这种情况：Reidemeister 2 消去本可移除一对交叉，但刚性阻止了消去，即使这两个交叉中只有一个是刚性交叉（回想图12左侧的情形）。

**定义 7.11**。 半刚性*Reidemeister 2*构型 是一个由圆盘支撑的局部构型，其底层经典图是一对 Reidemeister 2 型交叉，并且两个交叉中恰有一个是刚性交叉（另一个为经典交叉），且刚性交叉具有经典R2消去所要求的相同上下穿越类型。

**命题 7.12**。如果一个图包含一个支撑在圆盘内的半刚性*Reidemeister 2*构型，那么任何消去这对局部交叉的宽松同痕，都至少需要一次支撑在该圆盘内的解粘操作。

证明。在经典情形下，这两个交叉通过一次第二 Reidemeister 变换相消。在粘结情形下，只要两个交叉中有一个是刚性的，就不能进行这种消去：局部移动会移除（或分离）刚性高度顶点，而这在粘结同痕下是不允许的。在宽松同痕中，要使第二 Reidemeister 变换可行，唯一的方法是先解除刚性交叉的粘连，将其转化为经典交叉。转化后，圆盘内的局部图恰好是一对经典 R2 交叉，因此可通过第二 Reidemeister 变换将其消去。因此，至少需要一次解粘操作。 □

**注 7.13**。前一个命题表明，解粘距离的下界可以来自这样的局部构型：只有一个刚性交叉阻碍经典消去。这比 R2 对中的两个交叉都是刚性的情形更为精细，因为一次解粘操作就足以解除对消去的阻碍。

**独立障碍与下界**

当人们能够找到许多支撑于互不相交区域中的独立局部障碍时，障碍观点会变得特别有效。

**定义 7.14**。 图中的一组局部构型是两两不相交的，若每个构型都支撑于一个嵌入圆盘中，且这些圆盘两两不相交。

**命题 7.15**。 设一个卡滞结的图包含 $m$ 个两两不相交的受刚性阻碍的 *Reidemeister* 构型，其中每一个在其支撑圆盘内至少进行一次解粘操作后，便可通过一次经典 *Reidemeister* 移动被移除。则

$$u(K^*, K'^*) \geq m$$

对任意由已移除全部 $m$ 个构型的图所表示的受阻纽结类型 $K'^*$ 。特别地，若其底层经典结是平凡结且 $K'^* = \bigcirc$，则

$$u(K^*, \bigcirc) \geq m.$$

证明。 固定这 $m$ 个构型的支撑圆盘 $\Delta_1$，……，$\Delta_m$，其中对 $i \neq j$ 有 $\Delta_i \cap \Delta_j = \emptyset$。由假设，对每个 $i$， $\Delta_i$ 内的局部构型不能仅靠粘结同痕移除；只有在 $\Delta_i$ 中执行至少一次解粘操作之后，它才变得可移除。由于这些圆盘互不相交，在 $\Delta_i$ 中执行的解粘操作不会影响 $j \neq i$ 时 $\Delta_j$ 内的刚性结构或局部移动的可容许性。因此所需的刚性解除是独立的：任何移除全部 $m$ 个构型的宽松同痕都必须在每个圆盘中包含至少一次解粘操作。故总共至少需要 $m$ 次解粘操作。 □

命题 7.15 表述了一条一般原理：刚性会产生局部简化的几何障碍。定位支撑于不相交圆盘中的障碍族，可为解粘距离给出系统性下界。更广泛地说，这表明可将刚性交叉视为结构约束，从而将一个图划分为若干受约束行为的区域。理解此类障碍如何相互作用（无论是相互强化、传播还是相互抵消），是未来研究的一个自然方向。

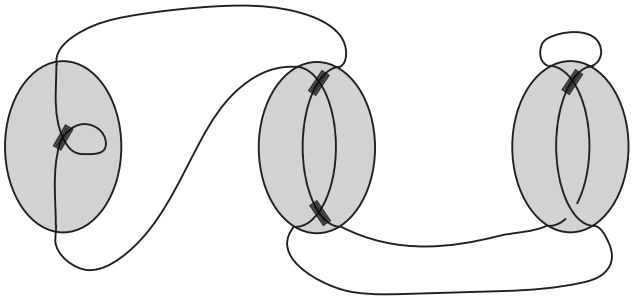


图13：由不相交圆盘支撑的两两不相交的刚性障碍。每个障碍都要求至少进行一次解粘操作，局部 Reidemeister 化简才可进行。

### 7.4 解粘距离的例子

最后，我们通过若干基本构型来说明解粘距离，这些构型展现出逐渐增强的刚性阻碍形式。

**例7.16.** 单个刚性交叉的存在，阻止了原本可以消去扭结的 Reidemeister 1 型操作。一旦解除该交叉的粘连，经典化简便可进行，并立即消去该交叉。因此，这种构形的解粘距离为一。

**例7.17.** 考虑一个包含 Reidemeister 2 型构形的平凡结图，其中一个交叉是刚性的，另一个是经典的。尽管通常这两个交叉会相互抵消，但刚性高度顶点阻止线段彼此分开，因此仅靠粘结同痕无法消去这对交叉。在刚性交叉处进行一次解粘操作后，该构形便成为经典的 Reidemeister 2 型交叉对，并立即抵消。因此，到平凡僵结的解粘距离为一。

**例7.18**。 考虑一个平凡结图，其中包含若干刚性扭结，且每个扭结都位于彼此不相交的圆盘内。每个扭结都需要先进行一次解粘操作，之后才能进行 Reidemeister 第一变换化简。由于这些构型彼此不相交，所需的解粘操作相互独立。若这样的扭结有 $m$个，则任何能简化该图的宽松同痕都必须至少包含 $m$ 次解粘操作，因此

$$u(K^*, \bigcirc) \geq m.$$

这些例子表明，解粘距离不仅取决于刚性交叉的数量，也取决于它们的几何排列。即使是表示经典平凡结的图示，当刚性分布在彼此独立的局部障碍处时，也可能具有很大的解粘距离。这一观点进一步印证了将刚性视为同痕的结构性阻碍这一理解，并表明受约束嵌入具有一种不同于交叉数或解结数等经典度量的复杂性概念。

## 参考文献


[1] K. Bataineh，卡滞纽结，*Symmetry*，**12**（2020），第9期，1558。

[2] E. Bondarenko、J. Ceniceros、M. Elhamdadi 和 B. Jones，广义 quandle 多项式及其在 stuquandle、stuck 链和 RNA 折叠中的应用，*Open Math.* **23**（2025），20250151。

[3] J. Ceniceros、M. Elhamdadi、J. Komissar 和 H. Lahrani，《RNA 折叠与卡滞纽结》，韩国数学会通讯 **39** (2024)，第 1 期，223–245。

[4] J. Ceniceros、M. Elhamdadi、B. Magill 和 G. Rosario，《RNA 折叠、定向卡住结与状态和不变量》，《数学物理杂志》**64** (2023)，031702。[5] I. Diamantis、S. Lambropoulou 和 S. Mahmoudi，《从环面拟结到环面拟结》，*Symmetry* **16**(2024)，第 10 期，1360。[6] I. Diamantis、L. H. Kauffman 和 S. Lambropoulou，《键合结与辫子的拓扑与代数》，《数学》**13** (2025)，第 20 期，3260。[7] R. Hanaki，《纽结、链环与空间图的拟图》，《大阪数学杂志》**47** (2010)，863–883。[8] A. Henrich 和 L.H. Kauffman，《拟结、奇异结与刚性顶点空间图的缠结插入不变量》，结、链环、空间图与代数不变量 (E. Flapan 等编)，《当代数学》，第 689 卷，美国数学学会，2017，61–83。[9] P. Freyd、D. Yetter、J. Hoste、W. B. R. Lickorish、K. Millett 和 A. Ocneanu，《纽结与链环的一种新多项式不变量》，《美国数学学会通报》**12** (1985)，239–246。[10] V. F. R. Jones，《通过冯·诺伊曼代数构造的纽结多项式不变量》，《美国数学学会通报》**12**(1985)，103–111。[11] L. H. Kauffman，《状态模型与琼斯多项式》，拓扑1987，**26**，395–407。[12] L. H. Kauffman，《三维空间中图的不变量》，《美国数学学会汇刊》1989，**311**，697–710。[13] L. H. Kauffman，《结与物理学》，世界科学出版社，新加坡，1991。[14] L.H. Kauffman，《虚结理论》，《组合学欧洲杂志》，**20**(7)，1999，663–691。[15] J. Przytycki，《三维流形的 skein 模》，《波兰科学院通报：数学》，**39, 1-2** (1991)，91–100。[16] D. Rolfsen，《结与链环》，*AMS Chelsea*出版社，2003。[17] V.A. Vassiliev，《结空间的上同调》，《奇点理论及其应用》（V.I. Arnold 编），《苏联数学进展》，第 1 卷，美国数学学会，罗德岛州普罗维登斯，1990，23–69。

[18] S. Yamada，《空间图的一个不变量》，图论杂志 **13** (1989)，第 5 期，537–551。