arXiv:2602.18179v1 [math.MG] 20 Feb 2026

度量流形的一维与余维一同调

DENIS MARTI

Abstract. 我们比较与光滑流形同胚的度量空间中的奇异同调和积分流链同调。对于这类空间，我们给出足以保证存在从积分流链余维一同调群到奇异余维一同调群的满同态的条件。此外，我们证明，积分流的一维等周不等式蕴含一维同调群相同。

1. Introduction

在其开创性论文 [7], 中，Federer 和 Fleming 引入了欧几里得空间中的整流及其相关同调群。随后，Ambrosio 和 Kirchheim 将这一理论推广到度量空间 [2], ，使得人们能够在更一般的背景下考察积分流链同调群。这些同调群已成为度量几何中的重要课题；例如参见 [6, 13, 28, 29]。它们是研究度量空间解析与几何结构的有用工具。例如，在闭Lipschitz流形中，积分流链同调群与奇异同调群相同。这为奇异同调类提供了一种测度论和解析学上的表示。本文旨在探讨更一般空间中的奇异同调与积分流链同调之间的关系。更具体地说，我们研究与光滑流形同胚的度量空间。这类空间称为度量流形，其拓扑结构与解析结构之间存在紧密联系，因而适合我们的研究。事实上，作者与 Basso 和 Wenger 合作的工作[4], 证明，在温和的假设下，度量流形中的积分流链最高维同调群是无限循环群。其生成元称为度量基本类，并在 [19, 20]中作了进一步研究。

定义1.1. 设 X 是一个具有有限 *Hausdorff* n-测度、且与一个闭的、定向的、连通的黎曼 n-流形 M同胚的度量空间。X 的度量基本类是一个整流 $T \in \mathbf{I}_n(X)$，满足 $\partial T = 0$，使得

(a) 存在 $C > 0$ 使得 $\|T\| \le C \cdot \mathcal{H}^n$; *(b)* 对每个利普希茨映射 φ: $X \to M$，都有 $\varphi_\# T = \deg(\varphi) \cdot [\![M]\!]$。

这里，$[\![M]\!]$ 表示由整流表示的 M 的基本类，deg(φ)是 φ的（拓扑）度，而 $\|T\|$ 是 T的质量测度。由 [4, 命题 5.5] 可知，若度量流形 X 具有度量基本类 T，则 T 生成积分流链同调群的最高维同调群$H_n^{IC}(X)$。特别地，$H_n^{IC}(X)$与最高维奇异同调群同构。我们将证明，度量基本类的存在也会对积分流链的余维一同调群产生影响。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类 53C23；次要分类 49Q15、28A75。

Key words and phrases. 度量几何、度量流形、同调、整流。D.M. 获得了瑞士国家科学基金会 212867 号资助。

定理 1.2。 设 X 是一个具有有限 *Hausdorff* n-测度且与某个闭、定向、连通的光滑 n流形同胚的度量空间。假设X 具有度量基本类。那么，存在一个从 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X)$ 到 $H_{n-1}(X)$的满同态。

这里， $H^{IC}_{n-1}(X)$ 和 $H_{n-1}(X)$ 分别表示 X 的第 $n-1$ 阶积分流链同调群和第 $n-1$ 阶奇异同调群。精确定义请参见第 2.3 节。以下类型的度量流形满足定理 1.2 的条件。根据定理 1.3], , 每个度量曲面（$n=2$）都有度量基本类。此外，任何作为具有有界体积的 Lipschitz 流形的 Gromov–Hausdorff 极限的度量流形，都有度量基本类 $[20,$ 定理 1.2]。最后， $[4,$ 定理 1.1] 表明，线性局部可缩的度量流形支持度量基本类。若存在 $\lambda>0$ ，使得每个半径为 $0<r<\operatorname{diam}(X)/\lambda$ 的球都能在同心、半径为 λr 的球内收缩，则称该度量空间线性局部可缩。我们注意到，一般而言，定理 1.2 中的同态并非同构。事实上，在第 5 节中，我们构造了两个具有有限豪斯多夫 2-测度、且同胚于二维球面的测地度量空间例子，但它们的积分流链一维同调群并非平凡。第一个例子是阿尔福斯 2-正则的，但不是线性局部可缩的。另一方面，第二个例子是线性局部可缩的，但不是阿尔福斯 2-正则的。若存在常数 $c>0$ ，使得对于 X 中的每个球 $B(x,\ r)$，都有.....，则称度量空间 X 为阿尔福斯 2-正则。

$$c^{-1}r^2 \le \mathcal{H}^2(B(x,r)) \le cr^2.$$

第 5 节中的两个例子都有度量基本类。因此，对于一大类度量曲面，其积分流链一维同调群严格大于一维奇异同调群。不过，在某些情况下，两者相同。

定理 1.3。 设 X 是与闭合、连通光滑流形同胚的拟凸度量空间。若 X 满足整流的一维小质量等周不等式，则 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$ 与 $H_1(X)$ 同构。

若存在常数 $c>0$ ，使得对任意 $x,y\in X$，都存在一条从 x 到 y 的曲线 γ ，其长度 length(γ) 不超过 $\le cd(x,y)$，则称度量空间 X 为拟凸度量空间。第 2.4 节介绍了整流的等周不等式的定义。此外，我们还将介绍利普希茨曲线的局部二次等周不等式。这类等周不等式在度量空间分析中发挥着重要作用；例如参见 $[17, 18, 22]$。众所周知，阿尔福斯 2-正则且线性局部可缩的度量曲面满足利普希茨曲线的局部二次等周不等式。由于利普希茨曲线的局部二次等周不等式蕴含整流的一维小质量等周不等式（命题 2.5），我们得到以下推论。

推论 1.4. 设 X 是一个与闭的、定向的、连通的光滑曲面同胚的度量空间。假设 X 是 *Ahlfors* 2-正则且线性局部可缩的。那么，对于每个 $k\ge 0,\ H_k^{\mathrm{IC}}(X)$ 与 $H_k(X)$ 同构。

第 5 节中的例子表明，要获得 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$ 与 $H_1(X)$ 之间的同构，推论中的所有假设都是必要的。

本文结构如下。在第 2 节中，我们固定记号，并介绍度量流、同调理论和等周不等式。我们还在本节中定义利普希茨映射 $g\colon X\to\mathbb{S}^1$ 的切片算子 $T\mapsto\langle T,\ g,\ p\rangle$ 。下一节中，我们证明定理 1.2。证明基于以下

经典事实。设 M 是一个闭的、定向的、连通的黎曼 n 维流形。给定一个本原同调类 $[\eta] \in H_{n-1}(M)$，存在一个光滑映射 $f\colon M \to \mathbb{S}^1$，使得对每个正则值 $p \in \mathbb{S}^1$，原像 $N_p = f^{-1}(p)$都是一个代表 $[\eta]$的光滑子流形。利用 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$和 $H_{n-1}(M)$同构这一事实，我们可以证明 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$中元素的类似结论。现在，设 X 是一个与 M 同胚的度量空间，并假设 X 具有度量基本类 $T \in \mathbf{I}_n(X)$。我们用利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$逼近该同胚 $\varrho\colon X \to M$，并考虑 $p \in \mathbb{S}^1$对应的切片 $\langle T, f\circ\varphi, p\rangle$ 和 $\langle [\![M]\!], f, p\rangle$。回想一下，$[\![M]\!]$ 表示由一个整流表示的 M 的基本类。由此可知，对几乎所有的 $p \in \mathbb{S}^1$，切片 $\langle [\![M]\!], f, p\rangle$ 等于由光滑子流形 N_p诱导的整流 $[\![N_p]\!]$。由于前推与切片算子可交换，且 T 是 X的度量基本类，因此我们有

$$\varphi_{\#}\langle T, f\circ\varphi, p\rangle = \langle \varphi_{\#}T, f, p\rangle = \langle [\![M]\!], f, p\rangle = [\![N_p]\!]$$

对几乎所有的 $p \in \mathbb{S}^1$ 都成立。因此，对几乎所有的 $p \in \mathbb{S}^1$，切片 $\langle T, f\circ\varphi, p\rangle$ 诱导出一个同调类 $[\xi] \in H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X)$，它在由 φ 诱导的同态 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 下映到 $[\eta]$。我们对 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 的每个生成元重复这一过程，从而得到一个满同态 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$。最后，我们注意到 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 与 $H_{n-1}(M)$ 以及 $H_{n-1}(M)$ 与 $H_{n-1}(X)$ 分别同构。至此，定理 1.2 的证明完成。定理 1.3 的证明见第 4 节。首先，我们证明任意同调类 $[\eta] \in H^{\mathrm{IC}}_1(X)$ 都可以由有限多个利普希茨环诱导的整 1-电流表示。这可由整1-电流的一个分解结果以及一维等周不等式推出。有限个利普希茨环诱导出 $H_1(X)$ 中的一个类。我们定义同态 $\Theta\colon H^{\mathrm{IC}}_1(X) \to H_1(X)$，将类 $[\eta] \in H^{\mathrm{IC}}_1(X)$ 映到由 $[\eta]$ 的一个有限个利普希茨环表示所诱导的奇异同调类。容易证明，$[\eta]$ 的两种不同表示在 $H_1(X)$ 中诱导出相同的同调类。由于 X 是测地的，直接论证可知 Θ 是满射。单射性则更为复杂。设 $[\eta] \in H^{\mathrm{IC}}_1(X)$ 满足 $\Theta([\eta]) = 0$。那么，存在 $[\eta]$ 的一个代表元 $T \in \mathbf{I}_1(X)$，它由有限个利普希茨环给出；此外，还存在一个以 T 为边界的奇异2-链 c。我们利用 c 和等周不等式构造一个整 2-流 $V \in \mathbf{I}_2(X)$，使其满足 $\partial V = T$。因此，$[\eta] = 0$，这说明 Θ 是单射。最后，在第 5 节中，我们构造引言中提到的两个例子。

2. Preliminaries

2.1. 度量概念。 设 $(X,\ d)$ 是一个度量空间。我们用 $B(x,\ r)$ 表示以 $x \in X$ 为中心、半径为 $r > 0$的开球。对于 $A \subset X$ 和 $r > 0$，我们将 A 的开r-邻域记为

$$N^X_r(A) = \{x \in X\colon d(A, x) < r\}.$$

如果上下文已明确环境空间 X，我们就简记为 $N_r(A)$。若度量空间之间的映射f: $X \to Y$满足对于所有 $x, y \in X$，均有 $d(f(x)\ f(y)) \le Ld(x, y)$，则称其为 L-利普希茨映射。满足前述不等式的最小 $L \ge 0$ 称为 f 的 Lipschitz 常数，记为 Lip(f)。若 f 是单射，且其逆映射 f^{-1} 也是 L-利普希茨映射，则称 f 是 L-双利普希茨映射。我们将从 X 到 $\mathbb{R}$的所有 Lipschitz 函数构成的集合记为 Lip(X)。X上的 Hausdorff k-测度记为 $\mathcal{H}^k$。给定两个映射 $f, g\colon X \to Y$，我们将 f 与 g 之间的一致距离定义为

$$d(f, g) = \sup_{x\in X} d(f(x), g(x)).$$

我们需要以下 Lipschitz 逼近结果。

引理 2.1。设 $f\colon X \to M$ 是从紧度量空间 X 到闭黎曼流形 M 的连续映射。那么，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个利普希茨映射 $g\colon X \to M$，使得 $d(f, g) < \varepsilon$。

该引理是 [4, 引理 2.1] 的一个特例，因为每个闭黎曼流形都是绝对 Lipschitz 邻域缩 retract [12, 定理 3.1]。在下文中，我们将频繁地在以下情形中使用前述引理。设 $\varrho\colon X \to M$ 是一个同胚，其中 X 是度量空间，M 是闭黎曼流形。根据引理 2.1，存在任意接近 ϱ的利普希茨映射 $X \to M$。若选取一个与 ϱ足够接近的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$，则 φ 与 ϱ同伦，且复合映射 $\varrho^{-1} \circ \varphi$ 与 X上的恒等映射同伦。事实上，将M 嵌入 l^∞中，并设 $U \subset l^\infty$ 是 M 的一个开邻域，使得存在收缩映射 $\pi\colon U \to M$。只要 $d(\varphi, \varrho)$足够小，φ与 ϱ之间的直线同伦 H就始终位于 U内。因此，$\pi \circ H$有定义，并且作为从 X到 M的映射，它是 φ 与 ϱ 之间的同伦。由于 X 是拓扑流形，因此它是绝对邻域 retract。因此，类似的论证表明，当 $\varphi\colon X \to M$与 ϱ足够接近时，$\varrho^{-1} \circ \varphi$ 与 X上的恒等映射同伦。

2.2. 度量流。我们简要介绍度量空间中的流理论，并记录一些后文会用到的事实。更多信息请参见 [2] 和 [16]。设 X 是一个完备度量空间，$k \geq 0$ 是一个整数。令 $\mathcal{D}^k(X) = \mathrm{Lip}_b(X) \times \mathrm{Lip}(X)^k$，其中 $\mathrm{Lip}_b(X)$表示有界 Lipschitz 函数 $X \to \mathbb{R}$构成的空间。若多重线性泛函 T 定义在 $\mathcal{D}^k(X)$上，并满足某种连续性、局部性和有限质量性质，则称其为度量 k-流。对于每个 k-流 T，都存在一个与之关联的有限博雷尔测度 $\|T\|$，称为 T的质量测度。该测度可视为广义曲面 T上的体积测度。我们用 $\mathbf{M}_k(X)$表示 X上的度量 k-流空间。设 $T \in \mathbf{M}_k(X)$。我们用 $\mathbf{M}(T) = \|T\|(X)$表示 T的质量。存在一个将 T唯一延拓至 $L^1(X, \|T\|) \times \mathrm{Lip}(X)^k$的方式。对于博雷尔集 $B \subset X$，我们定义限制 $T \llcorner B \in \mathbf{M}_k(X)$如下：

$$T \llcorner B(f, \pi_1, \ldots, \pi_k) = T(\mathbb{1}_B f, \pi_1, \ldots, \pi_k)$$

对所有 $(f, \pi_1, \ldots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(X)$。$T$的边界定义为

$$\partial T(f, \pi_1, \ldots, \pi_{k-1}) = T(1, f, \pi_1, \ldots, \pi_{k-1})$$

对所有 $(f, \pi_1, \ldots, \pi_{k-1}) \in \mathcal{D}^{k-1}(X)$。如果边界 ∂T是一个 $(k-1)$-流，则称 T 为正规 k-流。X 中的正规 k-流空间记作 $\mathbf{N}_k(X)$。我们将正规质量定义为 $\mathbf{N}(T) = \mathbf{M}(T) + \mathbf{M}(\partial T)$。赋予正规质量 $\mathbf{N}$ 后，空间$\mathbf{N}_k(X)$ 是一个巴拿赫空间。给定一个利普希茨映射 $\varphi\colon X \to Y$，T在 φ 下的前推是 Y中的度量 k-流，定义如下：

$$\varphi_\# T(f, \pi_1, \ldots, \pi_k) = T(f \circ \varphi, \pi_1 \circ \varphi, \ldots, \pi_k \circ \varphi)$$

对所有 $(f, \pi_1, \ldots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(Y)$。在欧几里得空间中，每个函数 $\theta \in L^1(\mathbb{R}^k)$ 都按如下方式诱导一个度量 k-流

$$[\![\theta]\!](f, \pi_1, \ldots, \pi_k) = \int_{\mathbb{R}^k} \theta f \det(D\pi)\, d\mathcal{L}^k$$

对于所有 $(f, \pi) = (f, \pi_1, \ldots, \pi_k) \in \mathcal{D}^k(\mathbb{R}^k)$。若存在可数多个紧集 $K_i \subset \mathbb{R}^k$ and$\theta_i \in L^1(\mathbb{R}^k, \mathbb{Z})$，其 spt $\theta_i \subset K_i$，以及双利普希茨映射 $\varphi_i\colon K_i \to X$，使得.....则称正规 k-流 $T \in \mathbf{N}_k(X)$ 为积分 k-流

$$T = \sum_{i \in \mathbb{N}} \varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!] \quad \text{and} \quad \mathbf{M}(T) = \sum_{i \in \mathbb{N}} \mathbf{M}\left(\varphi_{i\#}[\![\theta_i]\!]\right).$$

我们用 $\mathbf{I}_k(X)$ 表示 X 中整 k-流的空间。若一个整 k-流 T的边界为零 $\partial T = 0$，则称其为整 k-循环。重要的例子包括

整循环是由黎曼流形诱导的流。设 M 是一个闭的、定向的黎曼 k-流形。那么

$$[\![M]\!](f,\pi)=\int_M f\det(D\pi)\,d\mathcal{H}^k$$

对所有 $(f,\ \pi)\in\mathcal{D}^k(M)$，在 M 上定义了一个整 k-流。斯托克斯定理表明 $[\![M]\!]$ 是一个循环。若 M连通，则整循环 $[\![M]\!]$生成$H_k^{\mathrm{lc}}(M)$，并称为 M 的基本类。

接下来，我们说明正规流的切片。这是一种重要技术，使我们能够用该流的较低维片段来表示一个流。设 $T\in\mathbf{N}_k(X)$，并设 $f\colon\ X\to\mathbb{R}$ 为利普希茨的。对几乎所有 $t\in\mathbb{R}$，T 经由 f 在 t 处的切片$\langle T,\ f,\ t\rangle$是一个正规 $(k-1)$-流，并由以下性质刻画：

$$\int_{\mathbb{R}}\langle T,f,t\rangle\psi(t)\,dt=T\llcorner(\psi\circ f)df \tag{2.1}$$

对所有 $\psi\in C_c(\mathbb{R})$；见 [2, 定理 5.6]。这里，$T\llcorner(\psi\circ f)df$ 是如下定义的 $(k-1)$-流

$$T\llcorner(\psi\circ f)df(g,\pi)=T((\psi\circ f)g,f,\pi)$$

对所有 $(g,\pi)\in\mathcal{D}^{k-1}(X)$。利用切片的刻画性质，我们证明切片与利普希茨映射的前推可交换。

引理 2.2. 设 $\varphi\colon\ X\to Y$ 是两个完备度量空间之间的利普希茨映射。此外，设 $T\in\mathbf{N}_k(X)$ 与 $f\colon\ Y\to\mathbb{R}$ 是利普希茨的。则

$$\varphi_\#\langle T,f\circ\varphi,t\rangle=\langle\varphi_\#T,f,t\rangle$$

对几乎所有 $t\in\mathbb{R}$。

证明。令 $g=f\circ\varphi$。暂时固定 $(h,\pi)\in\mathcal{D}^{k-1}(Y)$ 与 $\psi\in C_c(\mathbb{R})$。则

$$\varphi_\#(T\llcorner(\psi\circ g)dg)(h,\pi)=T\llcorner(\psi\circ g)dg(h\circ\varphi,\pi\circ\varphi).$$

因此，由切片的刻画性质 (2.1)，我们有

$$\begin{aligned}\varphi_\#(T\llcorner(\psi\circ g)dg)(h,\pi)&=\int_{\mathbb{R}}\langle T,g,t\rangle(h\circ\varphi,\pi\circ\varphi)\ \psi(t)\,dt\\&=\int_{\mathbb{R}}\varphi_\#\langle T,g,t\rangle(h,\pi)\ \psi(t)\,dt.\end{aligned}$$

另一方面，

$\varphi_\#(T(\psi\circ g)dg)(h,\pi)=T(((\psi\circ f)h)\circ\varphi,f\circ\varphi,\pi\circ\varphi)=(\varphi_\#T)(\psi\circ f)df(h,\pi)$。因此，这次将切片的刻画性质应用于 $\varphi_\#T$，我们得到

$$(\varphi_\#(T\llcorner(\psi\circ g)dg))(h,\pi)=\int_{\mathbb{R}}\langle\varphi_\#T,f,t\rangle(h,\pi)\ \psi(t)\,dt.$$

我们得出

$$\int_{\mathbb{R}}\varphi_\#\langle T,g,t\rangle(h,\pi)\ \psi(t)\,dt=\int_{\mathbb{R}}\langle\varphi_\#T,f,t\rangle(h,\pi)\ \psi(t)\,dt$$

对所有 $(h,\pi)\in\mathcal{D}^{k-1}(Y)$ 以及每一个 $\psi\in C_c(\mathbb{R})$ 成立。函数 $t\mapsto\varphi_\#\langle T,g,t\rangle(h,\pi)$ 与 $t\mapsto\langle\varphi_\#T,f,t\rangle(h,\pi)$ 对所有 $(h,\pi)\in\mathcal{D}^{k-1}(Y)$ 都是 $\mathcal{L}^1$-可积的。因此，变分法基本引理表明，对几乎所有的 $t\in\mathbb{R}$

$$\varphi_\#\langle T,g,t\rangle(h,\pi)=\langle\varphi_\#T,f,t\rangle(h,\pi).$$

至此证明完成。 □

如果 T 是一个整流，且 $f\colon\ X\to\mathbb{R}$ 是利普希茨的，那么对于几乎所有的 $t\in\mathbb{R}$，切片 $\langle T,\ f,\ t\rangle$ 也是一个整流 [2, 定理 5.7]。在这种情况下，我们有

切片的显式表示。我们首先介绍一些术语，并请参阅 [2, 第 9]节和 [3]，以获取有关下文所讨论概念的更多信息。设 X 是可分的，并将其嵌入 l^∞中。如果 $E \subset l^\infty$ 是 k-可整流的，那么在几乎所有的 $x \in E$处， E 都有一个近似切空间 Tan(E, x)。近似切空间是 l^∞的一个 k维线性子空间。 E的一个定向τ是选择单位简单 k-向量 $\tau = \tau_1 \wedge \cdots \wedge \tau_k$，使得 τ_i： $E \to l^\infty$是博雷尔函数，并且对于几乎每个 $x \in E$，它们张成近似切空间 Tan(E, x)。如果 π： $l^\infty \to \mathbb{R}$ 是利普希茨的，那么 π 在 E上几乎处处切向可微。 π 在 x 处的切向微分是一个线性映射

$$d_x^E \pi \colon \operatorname{Tan}(E, x) \to \mathbb{R}$$

它在适当意义下收敛到 π 在 x 处的差商。对于 π =(π_1, ..., π_k)： $l^\infty \to \mathbb{R}^k$利普希茨，我们令 $\bigwedge_k d_x^E \pi$为由 π各分量的切向微分所诱导的简单 k-余向量。令 $T \in \mathbf{I}_k(X)$。由 [2, 定理 9.1] 可知，存在一个 k-可求 rectifiable 集合 $E \subset X \subset l^\infty$ ，其 Hausdorff k-测度有限，一个 Borel 函数 θ： $E \to \mathbb{N}$，以及 E 的一个定向 τ ，使得对所有的(g, π) $\in \mathcal{D}^k(l^\infty)$

$$T(g, \pi) = \int_E g(x)\theta(x) \left\langle \bigwedge_k d_x^E \pi, \tau(x) \right\rangle d\mathcal{H}^k(x),$$

其中 $\langle \bigwedge_k d_x^E \pi$， $\tau(x)\rangle$ 表示 k-向量与k-余向量之间的标准对偶配对。我们记作 $T = [E, \theta, \tau]$。这种表示可视为由一个闭的、定向的黎曼流形 M所诱导的流 $[\![M]\!]$ 的测度论版本。事实上，我们有 $[\![M]\!] = [M, \theta, \tau]$，其中 $\theta = 1$，且 τ是 M的通常定向。

利用整流 $T \in \mathbf{I}_k(X)$的这种表示，我们现在可以明确描述 T的切片。设 f： $E \to \mathbb{R}$ 为利普希茨映射。那么，对于几乎所有 $t \in \mathbb{R}$，原像 $E_t = E \cap f^{-1}(t)$是$(k-1)$-可数整流的，并且对于 $\mathcal{H}^{k-1}$-几乎所有 $x \in E_t$， Tan(E_t, x) =ker($d_x^E f$)。根据 [2, 定理 9.1], , 对于几乎所有 $t \in \mathbb{R}$以及 $\mathcal{H}^{k-1}$-几乎所有 $x \in E_t$，我们可以写作 $\tau(x)$ $= \xi(x) \wedge \tau_t(x)$，其中 τ_t 是 E_t 的一个定向，并且

$$\langle T, f, t \rangle = [E_t, \theta, \tau_t] \tag{2.2}$$

定向 τ_t 由以下等式刻画

$$\left\langle \bigwedge_{k-1} d_x^{E_t} \pi, \tau_t(x) \right\rangle \frac{\mathbf{J}_k(d_x^E(\pi, f))}{\mathbf{J}_{k-1}(d_x^{E_t}\pi)} = \left\langle \bigwedge_k d_x^E(\pi, f), \tau(x) \right\rangle \tag{2.3}$$

对于 $\mathcal{H}^{k-1}$-几乎所有 $x \in E_t$ 以及每个利普希茨映射 π: $E \to \mathbb{R}^{k-1}$。这里，雅可比行列式等于

$$\mathbf{J}_k(d_x^E(\pi, f)) = \left| \left\langle \bigwedge_k d_x^E(\pi, f), \tau(x) \right\rangle \right|.$$

对于$\mathbf{J}_{k-1}(d_x^{E_t}\pi)$，也有类似的等式，但这里我们不需要用到它。

下一个目标是定义循环 $T \in \mathbf{I}_k(X)$ 关于利普希茨映射 g： $X \to \mathbb{S}^1$ 的切片。令 $p \in \mathbb{S}^1$ ，并令 φ: $X \to \mathbb{R}$， $x \to d_{\mathbb{S}^1}(g(x)\ p)$。我们有

$$\langle T, \varphi, t \rangle = \partial(T \llcorner \{\varphi < t\}) = \partial(T \llcorner g^{-1}(B(p, t)))$$

and

$$\operatorname{spt}(\langle T, \varphi, t \rangle) \subset g^{-1}(\{\varphi = t\})$$

对几乎所有 $t \in \mathbb{R}$都成立；参见 [2, 定理 5.6]。我们得出，对于 $\mathbb{S}^1$的给定可微坐标图 ψ ，可以在 ψ 的定义域中找到一个开集 $U \subset \mathbb{S}^1$ ，满足以下性质： ∂U 的 $\mathcal{H}^1$测度为零， $T \quad V \in \mathbf{I}_k(X)$, 其中 $V = g^{-1}(U)$，且 spt($\partial(T \quad V)$) $\subset g^{-1}(\partial U)$。我们固定$\mathbb{S}^1$ 的一个定向，并且对于 $p \in \mathbb{S}^1$，定义 $\llcorner$

$$\langle T, g, p \rangle = \langle T \llcorner g^{-1}(U), \psi \circ g, \psi(p) \rangle \tag{2.4}$$

只要右侧有意义，且 $\psi\colon\ U \subset \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 是上述任意一个正定向坐标卡。利用 [2, 定理 5.6], ，我们得到

$$\operatorname{spt}(\partial\langle T, g, p\rangle) = \operatorname{spt}(\langle \partial(T \llcorner V), \psi \circ g, \psi(p)\rangle) \subset g^{-1}(\partial U) \cap g^{-1}(p)$$

对几乎所有的 $p \in U$，在这种情况下，$\langle T,\ g,\ p\rangle$ 是一个循环。我们声称，该定义不依赖于坐标卡的选择。令 $T = [E, \theta, \tau]$，则由 (2.3) 可知，对几乎所有的 $p \in U$

$$\langle T, g, p\rangle = \langle T \llcorner V, \psi \circ g, \psi(p)\rangle = [E \cap V \cap g^{-1}(p), \theta, \tau_p] = [E_p, \theta, \tau_p],$$

其中 $E_p = E \cap g^{-1}(p)$ 且 $V = g^{-1}(U)$。特别地，E_p 不依赖于 ψ。接下来要证明定向 τ_p 也不依赖于 ψ。设 $\varphi\colon\ U \to \mathbb{R}$是另一个正定向坐标卡。利用链式法则（它对切向微分同样成立）直接计算可知，对每个利普希茨映射$\pi\colon\ E \to \mathbb{R}^{k-1}$，几乎所有的 $p \in \mathbb{S}^1$ 以及对几乎所有的 $\mathcal{H}^{k-1}$，都有 $x \in E_p$

$$\left\langle \bigwedge\nolimits_k d_x^E(\pi, \psi \circ g), \tau \right\rangle = d_{\varphi(g(x))}(\psi \circ \varphi^{-1}) \left\langle \bigwedge\nolimits_k d_x^E(\pi, \varphi \circ g), \tau \right\rangle$$

以及

$$\mathbf{J}_k(d_x^E(\pi, \psi \circ g)) = |d_{\varphi(g(x))}(\psi \circ \varphi^{-1})| \mathbf{J}_k(d_x^E(\pi, \varphi \circ g)).$$

由于 ψ 和 φ 均为正向定向，因此对每个$x \in V$，都有 $d_{\varphi(g(x))}(\psi \circ \varphi^{-1}) > 0$。由此，(2.3) 表明定向 τ_p 与图表 ψ无关。因此，对于几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$，切片 $\langle T, g, p\rangle$ 都是定义良好的积分（$k-1$）-循环，且与 (2.4) 中使用的图表无关。注意，l^∞ 的外围结构和表示 $T = [E, \theta, \tau]$ 仅用于证明对几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$，切片 $\langle T, g, p\rangle$ 是定义良好的。此外，根据 [2, 定理 9.6], ，切片的定义具有内在性，即不依赖于将 X 等距嵌入到 l^∞ 中。因此，对于可分度量空间中的利普希茨映射 $g\colon\ X \to \mathbb{S}^1$，我们使用切片，而不将其嵌入到 l^∞中。本节最后给出以下引理。

引理 2.3。设 $\varphi\colon\ X \to Y$ 是两个可分度量空间之间的利普希茨映射。此外，设 $T \in \mathbf{I}_k(X)$ 是一个循环，且 $g\colon\ Y \to \mathbb{S}^1$ 是利普希茨的。那么

$$\varphi_\#\langle T, g \circ \varphi, p\rangle = \langle \varphi_\# T, g, p\rangle$$

对几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$。

证明。设 $\psi\colon\ U \subset \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ 是一个正定向坐标卡，使得 ∂U 具有零$\mathcal{H}^1$-测度，$T \llcorner W \in \mathbf{I}_k(X)$和 $(\varphi_\# T) \llcorner V \in \mathbf{I}_k(Y)$ 分别适用于 $W = (g \circ \varphi)^{-1}(U)$ 和$V = g^{-1}(U)$。回顾一下，根据 [2, 定理 5.6] ，我们可以为每个坐标卡 ψ 在其定义域中找到一个具有这些性质的开集。由定义 (2.4) 和引理 2.2 可得

$$\varphi_\#\langle T, g \circ \varphi, p\rangle = \varphi_\#\langle T \llcorner W, \psi \circ g \circ \varphi, \psi(p)\rangle = \langle \varphi_\#(T \llcorner W), \psi \circ g, \psi(p)\rangle$$

对几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$。另一方面，

$$\langle \varphi_\# T, g, p\rangle = \langle (\varphi_\# T) \llcorner V, \psi \circ g, \psi(p)\rangle$$

对几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$。对于 $(f, \pi) \in \mathcal{D}^k(Y)$，我们有

$$(\varphi_\# T) \llcorner V(f, \pi) = T((\mathbb{1}_V \circ \varphi)(f \circ \varphi), \pi \circ \varphi) = T(\mathbb{1}_{\varphi^{-1}(V)} f \circ \varphi, \pi \circ \varphi)$$

and

$$\varphi_\#(T \llcorner W)(f, \pi) = T(\mathbb{1}_W f \circ \varphi, \pi \circ \varphi).$$

由于 $W = \varphi^{-1}(V)$，我们有 $(\varphi_\# T) \llcorner V = \varphi_\#(T \llcorner W)$，特别是，

$$\varphi_\#\langle T, g \circ \varphi, p\rangle = \langle \varphi_\# T, g, p\rangle$$

对几乎所有的 $p \in \mathbb{S}^1$ 都成立。证明至此完成。 □

2.3. **同调**。接下来，我们通过整流讨论奇异同调和同调群。更多详情请参阅 [9] 和 [25] 。设 X 为一个完备

度量空间，且设 $k \geq 0$ 为一个整数。标准的 k维欧几里得单形记作 Δ^k。我们称连续映射 $\varphi\colon \Delta^k \to X$ 为一个奇异 k-单形。奇异 k-链 c 是一个形式和

$$c = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot \varphi_i,$$

其中每个 φ_i 都是一个奇异 k-单形，且 $n_i \in \mathbb{Z}$。c 的边界是 $(k-1)$-链 bc 定义为

$$bc = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot b\varphi_i,$$

其中 $b\varphi_i = \sum_j (-1)^j \varphi_{i,\,j}$，且 $\varphi_{i,\,j}$ 限制在 Δ^k 的不同边界分支上。此时，我们为每个 Δ^k 固定了边界分支的编号。若 $bc = 0$，则称 c 为一个循环。X 中的奇异 k-链空间记为 $C_k(X)$。因此，这些群与边界算子共同构成一个链复形。我们用 $H_k(X)$ 表示该链复形的第 k 个同调群，并称其为 X 的第 k 个奇异同调群。若两个奇异 k-循环 c 和 c' 在 $H_k(X)$ 中代表同一个类，则称它们同调；也就是说，存在 $v \in C_{k+1}(X)$ 使得 $bv = c - c'$。设 $X \to Y\colon c = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot \varphi_i$ 连续，且 $c = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot \varphi_i$ 是一个奇异 k-链。f 对 c 的前推 $f_{\#}c$ 是 Y 中给出的奇异 k-链

$$f_{\#}c = \sum_{i=1}^{N} n_i \cdot (f \circ \varphi_i).$$

不难看出，这会在同调层面诱导一个同态$f_*\colon\ H_k(X) \to H_k(Y)$。特别地，对于所有 $c \in C_k(X)$，$f_*[c] = [f_{\#}c]$ 均成立，其中 $[c]$ 和$[f_{\#}c]$分别是 c和 $f_{\#}c$的同调类。如果两个连续映射$f,\ g\colon\ X \to Y$同伦，那么它们诱导相同的同态 $H_k(X) \to H_k(Y)$。

给定 $T \in \mathbf{I}_k(X)$，Ambrosio 和 Kirchheim 的边界可求长定理[2, 定理 8.6] 表明，$\partial T \in \mathbf{I}_{k-1}(X)$。因此，整流的边界算子 ∂将$\mathbf{I}_k(X)$映入$\mathbf{I}_{k-1}(X)$，特别是，

$$\cdots \xrightarrow{\partial_{k+1}} \mathbf{I}_k(X) \xrightarrow{\partial_k} \mathbf{I}_{k-1}(X) \xrightarrow{\partial_{k-1}} \cdots \xrightarrow{\partial_1} \mathbf{I}_0(X)$$

这是一个链复形。我们将 $H_k^{\mathrm{IC}}(X)$记作该链复形的第 k个同调群，并将 $H_k^{\mathrm{IC}}(X)$称为通过整流定义的第 k个同调群。两个循环$S, T \in \mathbf{I}_k(X)$具有相同的同调类 $[T] = [S]$，当且仅当存在$V \in \mathbf{I}_{k+1}(X)$使得 $\partial V = S - T$。设 $f\colon\ X \to Y$是利普希茨映射。边界算子与前推可交换，即对于每个 $T \in \mathbf{I}_k(X)$，都有 $\partial(f_{\#}T) = f_{\#}(\partial T)$。因此，$f$ 诱导一个同态 $f_*\colon\ H_k^{\mathrm{IC}}(X) \to H_k^{\mathrm{IC}}(Y)$。与奇异同调群的情形一样，如果存在从 f 到 g的利普希茨同伦，则两个利普希茨映射 $f, g\colon\ X \to Y$诱导相同的同态$H_k^{\mathrm{IC}}(X) \to H_k^{\mathrm{IC}}(Y)$。

如果奇异 k-链 c 中的每个奇异单形都是利普希茨映射，则称其为奇异 Lipschitz k-链。X 中奇异 Lipschitz k-链的空间记为 $C_k^{\mathrm{Lip}}(X)$。奇异 Lipschitz 链的边界仍是 Lipschitz 链。因此，我们可以通过这些 Lipschitz 链定义奇异 Lipschitz 同调群 $H_k^{\mathrm{Lip}}(X)$。注意，每个奇异 Lipschitz k-链都会诱导一个积分 k-流以及一个奇异 k-链。因此，包含映射 $C_k^{\mathrm{Lip}}(X) \hookrightarrow \mathbf{I}_k(X)$ 和 $C_k^{\mathrm{Lip}}(X) \hookrightarrow C_k(X)$ 分别是链映射。众所周知，如果底层空间是局部 Lipschitz 可缩的，那么这些包含映射会在同调层面诱导同构；参见 [25, 26]。

定理 2.4。 设 X 是一个紧度量空间。假设存在 $R,\lambda>0$，使得 X 中半径为 $0<r<R$ 的每个球 B 都可通过满足以下条件的利普希茨映射 φ： $[0,1]\times B\to X$ 收缩

$$d(\varphi(s,x),\varphi(t,y))\le \lambda r|s-t|+\lambda d(x,y)$$

对所有 s、$t\in[0,1]$ 以及任意 x、$y\in B$均成立。于是，

$$H_k^{\mathrm{IC}}(X)\cong H_k^{\mathrm{Lip}}(X)\cong H_k(X)$$

对所有 $k\in\mathbb{N}$均成立。这些同构分别由包含映射 $C_k^{\mathrm{Lip}}(X)\hookrightarrow \mathbf{I}_k(X)$和 $C_k^{\mathrm{Lip}}(X)\hookrightarrow C_k(X)$诱导。

显然，每个闭黎曼流形都满足该定理的条件，因为它局部双利普希茨等价于欧几里得空间。

2.4. 等周不等式。 设 X 为完备度量空间，且 $T\in\mathbf{I}_1(X)$ 为一个整 1-循环。若整 2-流 $V\in\mathbf{I}_2(X)$ 满足 $\partial V=T$，则称其为 T的填充。若 X 满足常数为 $C,\Lambda>0$ 的一维（欧几里得）小质量等周不等式，则以下条件成立。对于每个满足 $\mathbf{M}(T)<\Lambda$ 的循环 $T\in\mathbf{I}_1(X)$，存在一个填充 $V\in\mathbf{I}_2(X)$，使其填充 T 并满足

$$\mathbf{M}(V)\le C\,\mathbf{M}(T)^2.$$

接下来，我们介绍针对利普希茨曲线的局部等周不等式，并将其与针对整流的等周不等式进行比较。从二维单位圆盘 $\mathbb{D}$ 到 X 的索伯列夫映射空间记作 $W^{1,2}(\mathbb{D},X)$。关于度量空间中索伯列夫映射理论的详细阐述，见 [11]。设$\varphi\in W^{1,2}(\mathbb{D},X)$。那么，对于几乎所有的 $x\in\mathbb{D}$，映射 φ 在 x处有一个近似度量导数 $\operatorname{apmd}_x\varphi$，它是 $\mathbb{R}^2$ 上的一个半范数。我们需要为 $\mathbb{R}^2$上的半范数 s 定义两个不同的雅可比行列式。若 s 定义了一个范数，则令 $\mathbf{J}(s)=\mathcal{H}^2_{(\mathbb{R}^2,s)}([0,1]^2)$，且 $\mathbf{J}^*(s)=4/\mathcal{L}^2(P)$，其中 $\mathcal{L}^2(P)$ 是相对于 s而言，包含单位球的最小面积平行四边形的勒贝格测度。若 s 退化，则令 $\mathbf{J}(s)=\mathbf{J}^*(s)=0$。注意，对于 $\mathbb{R}^2$ [2,上的任意范数 s，都有 $\mathbf{J}^*(s)\le 2\mathbf{J}(s)$，引理 9.2]。 φ 的（参数化）豪斯多夫面积定义为

$$\operatorname{Area}(\varphi):=\int_{\mathbb{D}}\mathbf{J}(\operatorname{apmd}_x\varphi)\,d\mathcal{L}^2(x).$$

类似地，通过在前述定义中用$\mathbf{J}$ 替换$\mathbf{J}^*$，定义（参数化的）格罗莫夫质量$_*$ 面积，记作 $\operatorname{Area}^*(\varphi)$。对于子集 $A\subset\mathbb{D}$，将 φ限制在 A 上的面积 $\operatorname{Area}(\varphi|_A)$ 定义为仅在 A上积分。关于雅可比行列式和面积的更多信息，参见 [1, 17] 。对于几乎所有的 $v\in\mathbb{S}^1$，曲线 $t\mapsto\varphi(tv)$ 在 $[1/2,1)$ 上绝对连续。 φ 的迹定义为

$$\operatorname{tr}(\varphi)(v)=\lim_{t\nearrow 1}\varphi(vt)$$

对几乎处处的 $v\in\mathbb{S}^1$ 都成立。若 X 满足常数为 D，$\Gamma>0$ 的利普希茨曲线局部二次等周不等式，则称其满足该条件。具体而言，对于每条长度$(\gamma)<\Gamma$ 的利普希茨曲线 $\gamma\colon\mathbb{S}^1\to X$，都存在 $\varphi\in W^{1,2}(\mathbb{D},X)$，使得 $\operatorname{tr}(\varphi)=\gamma$ 且 $\operatorname{Area}(\varphi)\le D\operatorname{length}(\gamma)^2$。如果任意长度的所有利普希茨曲线都满足这一条件，则称 X 满足常数为 D的利普希茨曲线二次等周不等式。专家们都知道，利普希茨曲线的局部二次等周不等式蕴含整流的一维小质量等周不等式。不过，我们未能找到相关文献，因此在此给出证明。

命题 2.5。 设 X 是一个完备可分度量空间。假设 X满足针对利普希茨曲线的局部二次等周不等式，其常数为D、$\Gamma>0$。那么， X 满足针对整流的 1维小质量等周不等式，其常数为 $2D$、Γ。

证明的主要思路是用面积一致有界的利普希茨映射逼近给定的索伯列夫映射 $\varphi \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X)$，这与 [18, 命题 3.1]类似。我们可以利用这些逼近以及推前论证，在 X 中构造一个流。这种方法也曾用于 [4, 14, 19]。

证明。令 $\gamma\colon \mathbb{S}^1 \to X$ 为利普希茨映射。假设存在一个索伯列夫映射$\varphi\colon \mathbb{D} \to X$，满足 $\operatorname{tr}(\varphi) = \gamma$。我们断言，存在 $U \in \mathbf{I}_2(X)$，满足$\partial U = \gamma_{\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$，且 $\mathbf{M}(U) \le 2$ 面积(φ)。令 $B = B(0, 2)$ 为 $\mathbb{R}^2$中半径为 2 的开球。我们将 φ 如下延拓到闭球 B

$$\tilde{\varphi}(v) = \begin{cases} \varphi(v), & v \in \mathbb{D} \\ \varphi\big(\frac{v}{\|v\|}\big), & v \notin \mathbb{D}. \end{cases}$$

这里，$\|\cdot\|$ 表示标准欧几里得范数。注意到 $\tilde{\varphi}$ 属于 $W^{1,2}(B, X)$，且面积$(\tilde{\varphi})$ = 面积(φ)。因此存在 $g \in L^2(B)$，使得

$$d(\tilde{\varphi}(x), \tilde{\varphi}(y)) \le \|x - y\|(g(x) + g(y)) \tag{2.5}$$

对于几乎所有 $x, y \in B$；参见 [11, 定理 8.1。7]。对于 $k \in \mathbb{N}$，我们定义 $A_k = \{x \in B\colon g(x) \le k\}$ 并且

$$\varepsilon_k = \int_{B \setminus A_k} g(x)^2 \, d\mathcal{L}^2(x).$$

由于 $g \in L^2(B)$，切比雪夫不等式和积分的绝对连续性推出 $\mathcal{L}^2(B \setminus A_k) \le \frac{\varepsilon_k}{k^2}$ 以及 $\varepsilon_k \to 0$，当 $k \to \infty$ 时。特别地，每个 A_k 在 B 中都是 $\frac{\sqrt{\varepsilon_k}}{k}$-稠密的。由 (2.5) 可知，映射 $\tilde{\varphi}$ 在每个 A_k 上都是 $2k$-利普希茨的。此外，根据构造，映射 $\tilde{\varphi}$ 在 $B \setminus B(0, 1)$ 上是利普希茨的。因此，当 $k \in \mathbb{N}$ 充分大时，$\tilde{\varphi}$ 在 $\overline{B}_k = \overline{A_k \cup \big(B \setminus (B(0, 3/2)\big)}$ 上是 $4k$-利普希茨的。为简化记号，我们假设对所有 $k \in \mathbb{N}$，$\tilde{\varphi}$ 在 B_k 上都是 $4k$-利普希茨的。将 X 嵌入到 l^∞中。对每个 $k \in \mathbb{N}$，令 $\varphi_k\colon B \to l^\infty$ 为 $\tilde{\varphi}|_{B_k}$的一个 $4k$-利普希茨延拓。我们定义序列 $U_k = \varphi_{k\#}[\![B]\!] \in \mathbf{I}_2(l^\infty)$。我们有

$$\mathbf{M}(\varphi_{k\#}[\![B \setminus B_k]\!]) \le \operatorname{Lip}(\varphi_k)^2 \cdot \mathcal{L}^2(B \setminus B_k) \le 16\varepsilon_k,$$

and

$$\mathbf{M}(\varphi_{k\#}[\![B_k]\!]) \le \int_{B_k} \mathbf{J}^*(\operatorname{apmd}_x \varphi_k) \, d\mathcal{L}^2(x) = \operatorname{Area}^*(\varphi|_{B_k})$$

对所有 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。因此，

$$\mathbf{M}(U_k) \le \mathbf{M}(\varphi_{k\#}[\![B_k]\!]) + \mathbf{M}(\varphi_{k\#}[\![B \setminus B_k]\!]) \le \operatorname{Area}^*(\varphi) + 16\varepsilon_k$$

对每个 $k \in \mathbb{N}$ 均成立。此外，对所有 $k \in \mathbb{N}$ 和几乎处处的 $v \in \mathbb{S}^1$，$\varphi_k(2v) = \gamma(v)$，因此对每个 $k \in \mathbb{N}$，$\partial U_k = \varphi_{k\#}(\partial[\![B]\!]) = \gamma_{\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$。特别地，$\mathbf{N}(U_k)$ 一致有界。由整流的紧致性与闭性定理 [2, Theorem 5.2 and Theorem 8.5]，可知存在 $U \in \mathbf{I}_2(l^\infty)$，使得这些 U_k 弱收敛至 U。显然，$\partial U = \gamma_{\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$。由于这些 B_k 在 B 中 $\frac{\sqrt{\varepsilon_k}}{k}$-稠密，且每个 φ_k 都是 $4k$-利普希茨的，对所有 $k \in \mathbb{N}$，我们有 $\operatorname{spt} U_k \subset \varphi_k(B) \subset N^{l^\infty}_{4\sqrt{\varepsilon_k}}(X)$。因此，$U$ 属于 $\mathbf{I}_2(X)$。最后，质量的下半连续性蕴含

$$\mathbf{M}(U) \le \liminf_{k \to \infty} \mathbf{M}(U_k) \le \operatorname{Area}^*(\varphi) \le 2 \operatorname{Area}(\varphi).$$

这就证明了该断言。

现在，令 $T \in \mathbf{I}_1(X)$ 满足 $\mathbf{M}(T) < \Gamma$。根据 [5, 定理 5.3]，，存在可数多个单射 Lipschitz 环路 $\gamma_k\colon \mathbb{S}^1 \to X$，使得

$$T = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!] \quad \text{and} \quad \mathbf{M}(T) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{M}\left(\gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]\right). \tag{2.6}$$

我们得出结论：$\mathbf{M}\left(\gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]\right) =$ 长度$(\gamma_k) < \Gamma$ 对每个 $k \in \mathbb{N}$成立。因为 X对利普希茨曲线满足带有常数的局部二次等周不等式

D、$\Gamma > 0$，存在可数多个 $\varphi_k \in W^{1,2}(\mathbb{D}, X)$，满足$\mathrm{tr}(\varphi_k) = \gamma_k$以及面积$(\varphi_k) \leq D$长度$(\gamma_k)^2 = D\,\mathbf{M}\left(\gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]\right)^2$对每个 $k \in \mathbb{N}$成立。由该断言可知，存在可数多个 $U_k \in \mathrm{I}_2(X)$，满足 $\partial U_k = \gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$ 以及$\mathbf{M}(U_k) \leq 2D\mathbf{M}(\gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!])^2$对每个 $k \in \mathbb{N}$成立。对于 $m \in \mathbb{N}$，我们定义 $V_m = \sum_{k=1}^m U_k \in \mathrm{I}_2(X)$。(2.6)的第二部分表明，序列$(V_m)_m$ 在$\mathrm{I}_2(X)$中是柯西序列。我们将其极限记为 $V \in \mathrm{I}_2(X)$。我们有 $\partial V = T$。最后，由 $x \mapsto x^2$的凸性，

$$\begin{aligned}\mathbf{M}(V) &\leq \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \mathbf{M}(U_k) \leq 2D \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^m \mathbf{M}(\gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!])^2 \\ &\leq 2D \lim_{m\to\infty} \left(\sum_{k=1}^m \mathbf{M}(\gamma_{k\#}[\![\mathbb{S}^1]\!])\right)^2 = 2D\,\mathbf{M}(T)^2.\end{aligned}$$

至此证明完成。 □

在本节余下部分，设 X 是一个同胚于闭合定向连通光滑曲面的度量空间。此外，我们假设 X是阿尔福斯 2-正则且线性局部可缩的。在 [27] 中已证明 X满足弱 1-庞加莱′不等式；另见 [4, 推论 1.6]。众所周知，这表明 X 是拟凸的；例如见 [11, 定理 8.3.2]。庞加莱′不等式与相对等周不等式密切相关。更确切地说，由 [15, 定理 1.1] 可知，存在 $D, \lambda \geq 1$ 使得

$$\min\{\mathcal{H}^2(B \cap E), \mathcal{H}^2(B \setminus E)\} \leq D \cdot \mathcal{H}^1(\lambda B \cap \partial E)^2 \tag{2.7}$$

对每个博雷尔集 $E \subset X$ 和每个球 $B \subset X$成立。这里， λB 表示与 B 中心相同、且半径等于 B半径的 λ 倍的球。注意，在[15] 中，不等式 (2.7) 是针对余维一豪斯多夫测度$\mathcal{H}$ 表述的，其定义为

$$\mathcal{H}(E) = \lim_{R\to 0} \inf\left\{\sum_{i=0}^\infty \frac{\mathcal{H}^2(B(x_i, r_i))}{r_i} : E \subset \bigcup_{i=1}^\infty B(x_i, r_i), r_i \leq R\right\}$$

对于所有博雷尔集 $E \subset X$。由于 X 是阿尔福斯 2-正则的，我们有 $\mathcal{H} \leq c \cdot \mathcal{H}^1$，其中 $c > 0$ 表示 X 的阿尔福斯 2-正则常数。因此，(2.7) 中的相对等周不等式成立。

定理 2.6。 设 X 是一个与闭的、有向的、连通光滑曲面同胚的度量空间。假设 X 是阿尔福斯 2-正则的，并且线性局部可缩。那么， X 满足关于利普希茨曲线的局部二次等周不等式。

证明。 设 $Y \subset X$ 是一个与闭圆盘 $\mathbb{D}$ 同胚的子集，满足 $\operatorname{diam} Y < \operatorname{diam}(X)/3$ ，并令 $\Omega \subset Y$ 为一个若尔当区域。若尔当区域 Ω 是一个与 $\mathbb{D}$ 同胚的开集，并且 $\partial\Omega$ 与 $\mathbb{S}^1$ 同胚。相对等周不等式 (2.7) 蕴含

$$\mathcal{H}^2(\Omega) \leq D \cdot \mathcal{H}^1(\partial\Omega)^2 = D \cdot \operatorname{length}(\partial\Omega)^2.$$

由 [17, 定理 1.4]可知， Y满足利普希茨曲线的二次等周不等式，其常数为 D。用上述有限多个子集 Y 覆盖 X ，我们得出 X 满足利普希茨曲线的局部二次等周不等式。□

3. Codimension one homology

在本节中，设 X 是一个具有有限 Hausdorff n 测度的度量空间，且与一个闭的、定向的、连通的黎曼 n 流形 M 同胚。我们记 $\varrho\colon X \to M$ 为一个度为一的同胚。一个经典事实是

M 中每个本原余维一奇异同调类都可以由一个嵌入子流形表示。若一个同调类为零类，或者不是另一个类的非平凡倍数，则称其为本原类。我们需要将这一结论推广到通过整流定义的同调。

引理 3.1. 设 $[\eta] \in H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 是本原且非零的。那么，存在一个光滑满射 $f\colon M \to \mathbb{S}^1$，具有以下性质。对于几乎所有的$p \in \mathbb{S}^1$，原像 $f^{-1}(p) = N_p$ 是一个闭合、定向的光滑$(n-1)$–流形，并且 $\big[[\![N_p]\!]\big] = [\eta] = [\langle [\![M]\!], f, p\rangle]$。

这里，$\langle [\![M]\!], f, p\rangle$ 是由 f在 $p \in \mathbb{S}^1$处对 M的基本类 $[\![M]\!]$取切片所得的切片，如第 2.2 节中所定义；而 $[\![N_p]\!] \in \mathbf{I}_{n-1}(M)$ 表示由 N_p诱导的整数（$n-1$）循环。

证明。$H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 和 $H_{n-1}(M)$ 同构；见定理 2.4。滥用记号，我们也用 $[\eta]$ 表示由同构 $H_{n-1}(M) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 给出的奇异同调类。由庞加莱对偶可知，$[\eta]$ 可由光滑满射映射 $f\colon M \to \mathbb{S}^1$ 表示。标准对偶定理意味着，对于每个正则值 $p \in \mathbb{S}^1$，原像 $f^{-1}(p) = N_p$ 是一个闭的定向子流形，代表 $[\eta]$；见 [21]。利用 N_p 的三角剖分和定理 2.4，可以很容易地验证，由 N_p 诱导的奇异同调类与由 $[\![N_p]\!]$ 在 $H^{IC}_{n-1}(M)$ 中诱导的同调类，在同构 $H_{n-1}(M) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 下相同。现在，设 $p \in \mathbb{S}^1$ 是一个正则值，使得切片$\langle [\![M]\!], f, p\rangle$ 存在。于是，$\langle [\![M]\!], f, p\rangle$ 可表示为 $[M \cap f^{-1}(p)\ \theta, \tau_p]$，其中$\theta = 1$，且 τ_p 是由 f 和 M 的定向诱导的 $M \cap f^{-1}(p) = N_p$ 的定向；见 (2.2)。由定理 9.7] 的证明可知，τ_p 与由 f 给出的 N_p 的拉回定向相同；见 [8, 第 100] 页。因此，$\langle [\![M]\!], f, p\rangle = [N_p, \theta, \tau_p] = [\![N_p]\!]$。特别地，对于几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$，$[[\![N_p]\!]] = [\eta] = [\langle [\![M]\!], f, p\rangle]$。证明完毕。□

定理 1.2 将直接由以下命题推出。

命题 3.2. 假设 X 具有度量基本类。那么，存在 $\varepsilon > 0$，使得每个满足 $d(\varrho, \varphi) < \varepsilon$ 的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$都会诱导一个满同态 $\varphi_*\colon H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$。

回忆一下，X 的度量基本类是一个循环 $T \in \mathbf{I}_n(X)$，满足$\varphi_\# T = \deg(\varphi) \cdot [\![M]\!]$，对每个利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$均如此；其中 $\deg(\varphi)$ 表示 φ的（拓扑）度。事实上，T 还满足另一个我们在此用不到的性质；参见定义1.1。

命题 3.2 的证明。由于 M 是闭黎曼流形，存在一个双利普希茨嵌入 $\iota\colon M \hookrightarrow \mathbb{R}^N$，以及一个利普希茨收缩 $\pi\colon N_{2\varepsilon}(\iota(M)) \to \iota(M)$，其中 $N \geq n$ 和 $\varepsilon > 0$取某些值。参见例如 [10, 定理 3.10] 和 [12, 定理 3.1]。设 $\varphi, \psi\colon X \to M$是两个满足 $d(\varphi, \varrho)\ d(\psi, \varrho) < \varepsilon$ 的利普希茨映射。连接$(\iota \circ \varphi)$与$(\iota \circ \psi)$的直线同伦 H 始终位于 $N_{2\varepsilon}(\iota(M))$内。因此，复合映射$(\iota^{-1} \circ \pi \circ H)\colon [0,1] \times X \to M$定义良好、是利普希茨映射，并且是 φ与 ψ之间的同伦。由此可得，φ_* 和 ψ_* 作为同态 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$相等。

同调群 $H_{n-1}(M)$ 是有限生成的，因为 M 是绝对邻域收缩；例如参见 [9, 推论 A.8]。因此，$H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 也是有限生成的。我们固定 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 的一个生成集，其中的元素都是 $H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 的本原元。显然，只需证明对于每个生成元 $[\eta] \in H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$，存在 $[\xi] \in H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X)$，使得对于所有满足$d(\varrho,\ \varphi) < \varepsilon$的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$，都有 $\varphi_*[\xi] = [\eta]$。令 $[\eta] \in H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 为一个生成元。由引理 3.1 可知，存在一个光滑映射 $f\colon M \to \mathbb{S}^1$，使得对几乎所有

$p \in \mathbb{S}^1$。由引理 2.1，我们可以用一个与 ϱ 同伦的利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$ 来逼近同胚 $\varrho\colon X \to M$，该映射满足 $d(\varphi, \varrho) < \varepsilon$，且复合映射 $f \circ \varphi$ 是满射。度是一个同伦不变量，因此 $\deg(\varphi) = \deg(\varrho) = 1$。如第 2.2 节所述，对于几乎所有 $p \in \mathbb{S}^1$，切片 $\langle T, g, p\rangle$ 存在，且是一个整数 $(n-1)$-循环。引理 2.3 蕴含

$$\varphi_*[\langle T, f\circ\varphi, p\rangle] = [\varphi_\#\langle T, f\circ\varphi, p\rangle] = [\langle \varphi_\# T, f, p\rangle] = [\langle [\![M]\!], f, p\rangle] = [\eta],$$

对于几乎处处的 $p \in \mathbb{S}^1$。这里，我们用到 T 是 X 的度量基本类，因此 $\varphi_\# T = \deg(\varphi)\cdot[\![M]\!] = [\![M]\!]$。证明至此完成。□

我们以定理 1.2 的简短证明结束本节

定理 *1.2* 的证明。 设 $\varepsilon > 0$ 如命题 3.2 所述。将引理 2.1 应用于同胚 $\varrho\colon X \to M$，可得利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$，满足$d(\varphi, \varrho) < \varepsilon$。因此，诱导同态 $\varphi_*\colon H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X) \to H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M)$ 是满射。我们用 $\Theta\colon H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(M) \to H_{n-1}(M)$ 表示定理 2.4 中的同构。由于 ϱ 是同胚，诱导映射 $\varrho_*^{-1}\colon H_{n-1}(M) \to H_{n-1}(X)$ 是同构。由此可得 $(\varrho_*^{-1}\circ\Theta\circ\varphi_*)\colon H^{\mathrm{IC}}_{n-1}(X) \to H_{n-1}(X)$ 是满射。□

4. 一维同调

本节的目标是证明定理 1.3。设 X 是一个拟凸度量空间，具有有限的 Hausdorff n 测度，并且对整流满足一维小质量等周不等式，其常数为 C，$\Lambda > 0$。此外，假设存在一个同胚 $\varrho\colon X \to M$，其中 M 是一个闭黎曼流形。注意，在对度量作双 Lipschitz 变换后，X 仍对整流满足一维小质量等周不等式，而定理 1.3 的结论在双 Lipschitz 度量变换下保持不变。因此，我们可以假设 X 是测地的。

首先，我们证明 $H^{\mathrm{IC}}_1(X)$ 中的每个同调类都有一个由有限个单射 Lipschitz 环路的和表示的代表。

引理 4.1。 设 $T \in \mathbf{I}_1(X)$ 是一个循环。那么，存在有限个单射 *Lipschitz* 环路 $\gamma_i\colon \mathbb{S}^1 \to X$，并且 $V \in \mathbf{I}_2(X)$ 使得

$$\partial V = T - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{i\#}[\![\mathbb{S}^1]\!].$$

证明。 由 [5, 定理 5.3] 可知，存在可数多个单射 Lipschitz 环路 $\gamma_i\colon \mathbb{S}^1 \to X$，使得

$$T = \sum_{i}^{\infty} T_i \quad \text{and} \quad \mathbf{M}(T) = \sum_{i}^{\infty} \mathbf{M}(T_i),$$

其中 $T_i = \gamma_{i\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$。令 N 充分大，使得对所有 $i > N$，我们有$\mathbf{M}(T_i) < \min(1, \Lambda)$。于是，对每个 $i > N$，存在 T_i的一个填充 $V_i \in \mathbf{I}_2(X)$，满足

$$\mathbf{M}(V_i) \le C\,\mathbf{M}(T_i)^2 \le C\,\mathbf{M}(T_i).$$

因此，和 $V = \sum_{i>N} V_i$ 收敛，并定义了一个整 2-流，它是 $\sum_{i>N} T_i$的一个填充。特别地，

$$\partial V = T - \sum_{i=1}^{N} T_i = T - \sum_{i=1}^{N} \gamma_{i\#}[\![\mathbb{S}^1]\!].$$

证明至此完成。□

显然，单射 Lipschitz 环路的有限和会在 $C_1(X)$ 中诱导出一个元素。为简化记号，只要 T 是由单射 Lipschitz 环路的有限和给出的整 1-循环，我们也用 T 表示其诱导的奇异 1-链。我们要定义一个同态 $H_1^{\mathrm{IC}}(X) \to H_1(X)$，将每个类 $[\eta] \in H_1^{\mathrm{IC}}(X)$ 映射到 $H_1(X)$ 中的一个类，该类由 $[\eta]$ 的一个代表元诱导，而此代表元由有限条 Lipschitz 环路给出。但为此，我们首先需要证明，在 $H_1(X)$ 中诱导出的类不依赖于 $[\eta]$ 的表示方式。幸运的是，我们可以轻松地通过黎曼流形 M 将不同的表示方式分解，从而证明这一点。

引理 4.2。 设 $\beta_i, \gamma_j \colon \mathbb{S}^1 \to X$ 是有限多个利普希茨环路，使得整 1-循环

$$T = \sum_i^N \beta_{i\#}[\![\mathbb{S}^1]\!] \quad \text{and} \quad S = \sum_j^M \gamma_{j\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$$

在 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$中定义相同的同调类。那么，所诱导的奇异同调类 $[T], [S] \in H_1(X)$ 相等。

在黎曼流形 M 中，包含映射 $C_1^{\mathrm{Lip}}(M) \hookrightarrow \mathbf{I}_1(M)$ 和 $C_1^{\mathrm{Lip}}(M) \hookrightarrow C_1(M)$ 分别在同调层面诱导同构；参见定理 2.4。

证明。 由引理 2.1 可知，存在一个利普希茨映射 $\varphi\colon X \to M$，使得复合映射 $\psi = \varrho^{-1} \circ \varphi$ 与 X 上的恒等映射同伦。因此，$[\psi_\# T] = [T]$ 和 $[\psi_\# S] = [S]$ 作为奇异同调类相等。由于 S 和 T 作为整流同调，整 1-循环 $\psi_\# S$ 和 $\psi_\# T$ 在 $H_1^{\mathrm{IC}}(M)$ 中代表相同的同调类。注意， $\varphi_\# T$ 和 $\psi_\# S$ 是利普希茨链。因此，通过同构 $H_1^{\mathrm{IC}}(M) \to H_1(M)$ 得到的 $\varphi_\# T$ 和 $\psi_\# S$的奇异同调类，与将 $\varphi_\# T$ 和 $\psi_\# S$ 视为奇异链所诱导的类一致。因此，作为奇异同调类，

$$[T] = [\psi_\# T] = \varrho_*^{-1}[\varphi_\# T] = \varrho_*^{-1}[\varphi_\# S] = [\psi_\# S] = [S]$$

证明至此完成。 □

我们定义一个同态

$$\Theta\colon H_1^{\mathrm{IC}}(X) \to H_1(X),\ [\eta] \mapsto \left[\sum_{i=1}^N \gamma_{i\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]\right], \tag{4.1}$$

其中，$\sum_{i=1}^N \gamma_{i\#}[\![\mathbb{S}^1]\!]$ 是 $[\eta]$ 由有限条 Lipschitz 环路构成的任意一种表示。由引理 4.1，对每个类 $[\eta] \in H_1^{\mathrm{IC}}(X)$，都存在这样一种表示。此外，引理 4.2 表明， Θ 是良定义的。为了证明定理 1.3，我们必须证明 Θ 是双射。

到目前为止，我们一直用 Lipschitz 环路来表示 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$中的同调类。不过，可以很容易地将这种表示转换为由 Lipschitz 曲线 $\gamma\colon [0,1] \to X$ 构成的表示，反之亦然。本节余下部分中，我们将根据具体情况采用更合适的表示方式。

引理 4.3. 同态 Θ 是满射。

证明。 取 $\varepsilon > 0$，使得 X 中半径小于 ε 的每个球都在 X 中可缩。这样的 ε 存在，因为 X 与一个闭光滑流形同胚。设 $[\eta] \in H_1(X)$ 是一个奇异同调类，并令 c 是表示 $[\eta]$ 的奇异 1-链。那么 c 具有 $c = \sum_i^N n_i \cdot \gamma_i$ 的形式，其中 $n_i \in \mathbb{Z}$，且 $\gamma_i\colon [0,1] \to X$ 是连续曲线。暂且固定 $i = 1, .., N$。取 $0 = t_1 < \cdots < t_k = 1$ 为 $[0,1]$ 的一个划分，使得每个 $\gamma_i([t_j, t_{j+1}])$ 都包含在半径为 $\varepsilon/2$ 的开球内。我们定义一条利普希茨曲线 $\beta_i\colon [0,1] \to X$，使得对每个 $j = 1, \ldots, k-1$，它都是从 $\gamma_i(t_j)$ 到 $\gamma_i(t_{j+1})$ 的测地线。每个拼接 $-\beta_i|_{[t_j,t_{j+1}]} \cdot \gamma_i|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 都是

一条闭曲线，并且包含在半径为 ε 的球内，因此是可缩的。这里，$-\beta_i|_{[t_j,t_{j+1}]}\cdot\gamma_i|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 表示先沿着 $\gamma_i|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 行进，再沿相反方向行进 $\beta_i|_{[t_j,t_{j+1}]}$ 的曲线。由此可知，存在一个奇异 2-链 C，使得 $bC=\gamma_i-\beta_i$。我们对每个 $i=1,\ldots,N$ 重复这一过程，并定义 $T=\sum_{i=1}^{N}n_i\cdot\beta_{i\#}[\![0,1]\!]\in\mathbf{I}_1(X)$。显然，$\partial T=0$ 和 c 以及 T 作为奇异链是同调的。因此，$\Theta\big([T]\big)=[c]=[\eta]$。由此可知，$\Theta$ 是满射。□

引理4.4。同态 Θ 是单射。

证明。设$[\eta]\in H_1^{\mathrm{IC}}(X)$满足 $\Theta\big([\eta]\big)=0\in H_1(X)$。因此，$[\eta]$ 可以表示为有限条利普希茨曲线 γ_i以及一个奇异2-链 c，其中 c 以 $T=\sum_{i=1}^{N}\gamma_{i\#}[\![0$为边界，$1]\!]$成立，此时将 T解释为奇异 1-链。我们可以设对于每个 $i=1,\ldots,N$，均有length(γ_i) $<\Lambda/3$。记 $c=\sum_{j=1}^{m}\theta_j\psi_j$，其中 $\psi_j\colon\ \Delta^2\to X$ 是连续映射，且 θ_j 等于 1 或 -1。如有必要，通过进行重心细分并相应地细分 γ_i，我们可以假设对于所有 x、$y\in\Delta^2$ 以及每个 $j=1,\ldots,m$，都有$d(\psi_j(x)\ \psi_j(y))<\Lambda/3$。对于 $j=1,\ldots,m$ 以及 $k=1$=2、3，令 $\psi_j^k\colon\ [0,1]\to X$为 ψ_j 在 Δ^2的第 k个边界分支上的限制。那么

$$\partial c=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3}(-1)^k\theta_j\psi_j^k=\sum_{i=1}^{N}\gamma_i. \tag{4.2}$$

对于每个 $j=1,\ldots,m$ 以及每个 $k=1,2,3$，我们如下定义利普希茨曲线 $\beta_j^k\colon$ $[0,1]\to X$。如果 ψ_j^k 等于曲线 γ_i中的某一条，则令 $\beta_j^k=\gamma_i$。否则，令 $\beta_j^k\colon$ $[0,1]\to X$为一条从 $\psi_j^k(0)$ 到 $\psi_j^k(1)$ 的测地线。我们可以以一致的方式完成此定义，使得当 $\psi_j^k=\psi_{j'}^{k'}$时有 $\beta_j^k=\beta_{j'}^{k'}$。对于每个 $j=1,\ldots,m$，令 $S_j=\sum_{k=1}^{3}(-1)^k\beta_{j\#}^k[\![0,\ 1]\!]\in\mathbf{I}_1(X)$。由此可得

$$\mathbf{M}(S_j)\le\sum_{k=1}^{3}\operatorname{length}(\beta_j^k)<\Lambda,$$

对所有 $j=1,\ldots,m$均成立。此外，根据构造，每个 S_j都是一个循环。因此，小质量等周不等式意味着，对于每个 $j=1,\ldots,m$，存在一个填充 $V_j\in\mathbf{I}_2(X)$，其填充对象为 S_j。令$V=\sum_{j=1}^{m}\theta_jV_j$。根据（4.2），我们有

$$\partial V=\sum_{j=1}^{m}\theta_j\partial V_j=\sum_{j=1}^{m}\theta_jS_j=\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3}(-1)^k\theta_j\beta_{k\#}^j[\![0,1]\!]=\sum_{i=1}^{N}\gamma_{i\#}[\![0,1]\!]=T.$$

因此，V是 T的填充，特别地，$[T]=[\eta]$ 是 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$中的平凡类。这就完成了证明。□

结合前面的两个引理，我们得出，在（4.1）中定义的同态Θ：$H_1^{\mathrm{IC}}(X)\to H_1(X)$ 是一个同构。这证明了定理 1.3。我们以推论的证明结束本节。

推论 *1.4* 的证明。设 X 是一个与闭的、定向的连通光滑曲面同胚的度量空间。假设 X 是阿尔福斯 2-正则且线性局部可缩的。由命题 2.5 和定理 2.6 可知，X 满足整流的一维小质量等周不等式。因此，根据定理 1.3，同调群 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$ 与 $H_1(X)$ 同构。此外，根据 [4, 定理 1.3]，存在 $T\in\mathbf{I}_2(X)$，它生成 $H_2^{\mathrm{IC}}(X)$，特别地，$H_2^{\mathrm{IC}}(X)$ 与 $H_2(X)$ 同构。回想一下，X 是拟凸的；参见第 2.4 节。利用这一点，不难证明 $H_0^{\mathrm{IC}}(X)$ 与 $H_0(X)$ 也同构。最后，X 是阿尔福斯 2-正则的，因此对所有 $k>2$，$_k(X)\ \mathbf{I}=0$。由此可得，对所有 $k>2$，$H_k^{\mathrm{IC}}(X)=0=H_k(X)$。证明完毕。□

5. Examples

我们构造两个测地度量空间 X 和 Y，它们与 2-球面 $\mathbb{S}^2$ 同胚，且豪斯多夫 2-测度有限。X 是阿尔福斯 2-正则的，但不是线性局部可缩的；Y 则是倍增且线性局部可缩的，但不是阿尔福斯 2-正则的。然而，X 和 Y 的整流一维同调群并非平凡。回想引言中的定义：如果存在 $\lambda > 0$，使得 E 中每个满足 $r \in (0, \operatorname{diam}(E)/\lambda)$ 的球 $B(x, r)$ 都能在 $B(x, \lambda r)$ 内收缩，那么度量空间 E 就称为线性局部可缩的。此外，如果存在 $c > 0$，使得对于 E 中每个满足 $r \in (0, \operatorname{diam}(E))$ 的球 $B(x, r)$，我们有

$$c^{-1} r^2 \leq \mathcal{H}^2(B(x, r)) \leq c r^2.$$

根据 [4, 定理1.3], ，两个空间 X 与 Y 都具有度量基本类。因此，这些例子表明，经由整流得到的同调群可以大于奇异同调群。

5.1. 第一个例子。 设$(S_k)_{k \geq 1}$ 为 $\mathbb{S}^2$ 中半径为$1/2^{3k}$的互不相交圆的族，沿一条“直线”排列，使得 $d(S_k, S_{k+1}) = 1/2^k$ 对所有 $k \geq 1$成立。我们用D_k 表示由 S_k所围成的闭圆盘。对于 $k \geq 1$，我们定义“蘑菇” M_k，其茎部等于圆柱 $S_k \times [0, 1/2^{3k}]$，其帽等于半径为 2^{-k}的半球。

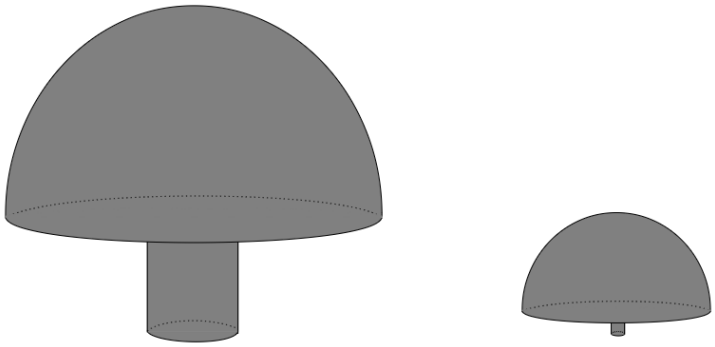


Figure 1. 两个相继的蘑菇 M_k 与 M_{k+1}

我们通过将每个圆盘 D_k 替换为蘑菇 M_k 得到 X，并为 X配备内禀度量 d_{int}。于是

$$\mathcal{H}^2(X) \leq \mathcal{H}^2(\mathbb{S}^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^2(M_k) = 4\pi + 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^{4k}} + \frac{1}{2^{2k}} < 5\pi.$$

因此，X 是一个豪斯多夫 2-测度有限且与 $\mathbb{S}^2$同胚的测地度量空间。我们声称 X 是阿尔福斯 2-正则的。下界很容易验证。暂且固定 $x \in X$ 和 $r \in (0, 1)$。令 $j, N \geq 1$ 满足：M_j 是距离 x 和 $\sum_{k=N-1}^{\infty} 1/2^k \leq r \leq \sum_{k=N}^{\infty} 1/2^k$最近的蘑菇。若$N \geq j + 2$，则 $B(x, r)$除了 M_j 之外不与任何其他蘑菇相交，因此上界 $\mathcal{H}^2(B(x, r)) \preceq r^2$ 显然成立。否则，若 $N < j + 2$，则 $B(x, r)$至多与 $k \geq N - 1$对应的 M_k 相交，因此，

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^2(B(x, r)) &\leq c r^2 + \sum_{k=N-1}^{\infty} \mathcal{H}^2(M_k) \leq c r^2 + \sum_{k=N-1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^k} \right)^2 \\ &\leq c r^2 + 4\pi \left(\sum_{k=N-1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \right)^2 \leq (c + 4\pi) r^2, \end{aligned}$$

其中 $c > 0$ 是标准 2-球面的阿尔福斯 2-正则常数。以某个 S_k 为球心、环绕 M_k 茎部的球，只有在包含整个蘑菇 M_k的球内才是可缩的。茎部周长与 M_k 高度之比正比于 $1 + 2^{2k}$。由此可知， X 不是线性局部可缩的。最后，对于 $k \geq 1$，我们定义 $T = \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} [\![S_i]\!] \in \mathbf{I}_1(X)$。那么， T 是一个循环，并且

$$\mathbf{M}(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k}\, \mathbf{M}([\![S_k]\!]) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} < \infty.$$

请注意，每个 $[\![S_k]\!]$ 都只有两种填充： $[\![M_k]\!]$ 和 $[\![M_k^c]\!]$。这两种可能中， $[\![M_k]\!]$ 的质量较小。然而，

$$\sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k}\, \mathbf{M}([\![M_k]\!]) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} 2^{2k} \left(\frac{1}{2^{4k}} + \frac{1}{2^{2k}} \right) = \infty.$$

由此可知， T 没有有限质量的填充。特别是， $[T] \neq 0$ 和 $H_1^{\mathrm{IC}}(X)$ 并非平凡的。

5.2. **第二个例子**。 我们利用单位立方体在 $\mathbb{R}^3$中的曲面 $Q = \partial[0,1]^3$ 构造下一个例子 Y。和之前一样，我们将 Q 中的小块替换成更复杂的集合，从而得到 Y。我们先定义这些集合。将单位正方形 $[0,1]^2$ 划分为 9 个边长为 $1/3$ 的正方形，并用立方体 $[0,1/3]^3$的曲面替换中间的正方形，其中底面正方形已被移除。所得曲面 G 称为生成元，由 13 个边长为 $1/3$ 的正方形组成。令 $S_0 = G$。我们通过归纳定义曲面 S_k：将 S_{k-1} 中每个 13^k 正方形替换为按比例因子 $1/3^k$缩放的生成元副本。

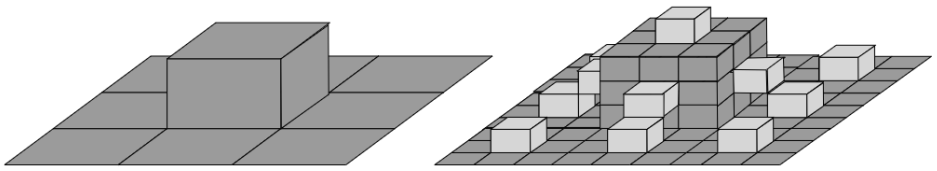


FIGURE 2. 生成元 G和第一次迭代 S_1。

注意， S_k 存在自交。为避免这种情况，我们仔细修圆在 S_k中添加的每个新立方体的边角。我们为每个 S_k 赋予内在长度度量 d_{int}。不难证明，序列 $(S_k)_{k\geq 0}$ 在豪斯多夫距离下收敛。极限 $\mathcal{S}$ 是所谓雪花球面的一侧。雪花球面是雪花曲线的二维类比，已在 [23, 24]中得到广泛研究。我们需要以下事实。

(1) S_k 一致倍增；**(2)** 对每个 $k \in \mathbb{N}$， $\mathcal{H}^2(S_k) = (13/9)^k$，特别是 $\mathcal{H}^2(S_k) \to \infty$当$k \to \infty$时；**(3)** 对所有 $x,\ y \in S_k$ 和 $k \in \mathbb{N}$， $d_{\mathrm{int}}(x,\ y) \leq 4$；**(4)** S_k 一致线性局部可缩。

前三个性质很容易验证，细节请参见 [23]。下面解释最后一个性质为何成立。根据 [23, 定理 5， S_k的极限 $\mathcal{S}$ 通过拟对称映射 f同胚于单位正方形： $\mathcal{S} \to [0,1]^2$。也就是说，存在一个同胚 η： $[0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$d_{\mathcal{S}}(x,y) \leq t d_{\mathcal{S}}(x,z) \quad \Longrightarrow \quad \|f(x) - f(y)\| \leq \eta(t) \|f(x) - f(z)\| \tag{5.1}$$

对于所有 x， y， $z \in \mathcal{S}$和 $t \geq 0$均成立。由 f的构造可知， S_k与单位正方形一致地拟对称。这里，“一致地”是指存在一个同胚 $\mu\colon\ [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得每个拟对称映射$f_k\colon\ S_k \to [0,1]^2$ 都满足关于该同胚 μ的条件（5.1）。此外，根据定义可直接推出：若紧度量空间 X 拟对称于一个线性局部可缩度量空间，则它自身也线性局部可缩（定量地）。由此得到性质（4）。令 Q 为单位立方体 $[0,1]^3$ 的表面，令（Q_k）$_{k\in\mathbb{N}}$ 为一族边长为（$3/4$）^{k}的互不相交的正方形。我们通过将每个正方形 Q_k 替换为 S_k （适当缩放）来构造 Y。于是， Y 是一个拓扑 2-球面，且其豪斯多夫 2-测度有限

$$\mathcal{H}^2(Y) \leq \mathcal{H}^2(Q) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{3}{4}\right)^{2k} \mathcal{H}^2(S_k) = 6 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{13}{16}\right)^k < \infty.$$

结合性质 (2) 与 (3) 可知， Y 不是阿尔福斯 2-正则的。由于倍增性质与线性局部可缩性在缩放下保持不变，我们得出结论： Y 是倍增的且线性局部可缩的。最后，令 $T = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{13}{10}\right)^k \partial[\![S_k']\!]$，其中 S_k'表示我们附加到Y上的 S_k的缩放副本。于是， T 是一个整 1-循环，且

$$\mathbf{M}(T) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{13}{10}\right)^k \mathbf{M}(\partial[\![S_k']\!]) = 4\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{39}{40}\right)^k < \infty.$$

对于每个 $k \geq 1$，整 1-循环 $\partial[\![S_k']\!]$ 恰好有两个填充，即 $[\![S_k']\!]$ 和 $[\![(S_k')^c]\!]$。对每个 $k \geq 1$，我们有 $\mathbf{M}([\![S_k']\!]) \leq \mathbf{M}([\![(S_k')^c]\!])$。然而，

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{13}{10}\right)^k \mathbf{M}([\![S_k']\!]) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{169}{160}\right)^k = \infty.$$

因此， T 没有有限质量的填充。我们得出结论： $[T] \neq 0$ 和 $H_1^{\mathrm{lc}}(X)$并非平凡。

References

[1] J. C. ´Alvarez Paiva 和 A. C. Thompson。《赋范空间与芬斯勒空间上的体积》。载于 *A sampler of Riemann-Finsler geometry* 50 *Math. Sci. Res. Inst. Publ.* 1 48 ，第 卷，页码 –。剑桥大学出版社，剑桥，2004 年。[2] Luigi Ambrosio 和 Bernd Kirchheim。度量空间中的流。 *Acta Math.*, 185 80，2000 1 1( ): –。[3] Luigi Ambrosio 和 Bernd Kirchheim。度量空间与巴拿赫空间中的可求 rectifiable 集。 *Math.* , ( ): –555, *Ann.* 318 3 527 2000。[4] Giuliano Basso、Denis Marti 和 Stefan Wenger。同胚于流形的度量空间上的几何与解析结构。 *Duke Math. J.*，174(9):1723–1773，2025。[5] Paolo Bonicatto、Giacomo Del Nin 和 Enrico Pasqualetto。整度量流的分解。 *J. Funct. Anal.*，282(7):论文编号 109378，28 页，2022。[6] Th. De Pauw、R. M. Hardt 和 W. F. Pfeffer。正规链的同调与电荷的上同调。 *Mem. Amer. Math. Soc.*，247(1172):v+115，2017。[7] Herbert Federer 和 Wendell H. Fleming。正规流与整流。 *Annals of Mathematics* 72 3 458 , ( ): –520, 1960。[8] Victor Guillemin 和 Alan Pollack。《 *Differential topology*》。Prentice-Hall, Inc.，恩格尔伍德克利夫斯，新泽西州，1974 年。[9] Allen Hatcher。《 *Algebraic topology*》。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年。[10] Juha Heinonen。《 *Geometric embeddings of metric spaces* 90 *Report. University of Jyväskylä Department of Mathematics and Statistics* 》，第 卷。于韦斯屈莱大学，于韦斯屈莱，2003 年。[11] Juha Heinonen、Pekka Koskela、Nageswari Shanmugalingam 和 Jeremy T. Tyson。《 *Sobolev spaces on metric measure spaces* 27 *New Mathematical Monographs* 》，第 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2015 年。[12] Aarno Hohti。关于绝对利普希茨邻域收缩、混合器与拟凸性。*Topol. Proc.*, 18:89–106，1993。

[13] Jingyin Huang、Bruce Kleiner 和 Stephan Stadler。莫尔斯准平坦 I。 *J. Reine Angew.* , : –129, *Math.* 784 53 2022。[14] Toni Ikonen。索伯列夫映射下流的推前。 *arXiv preprint arXiv:2303.15003*, 2023。[15] Riikka Korte 和 Panu Lahti。度量空间上的相对等周不等式与有限周长的充分条件。 *Ann. Inst. H. Poincaré C Anal. Non Linéaire*, 31(1):129–154, 2014。[16] Urs Lang。度量空间中的局部流。 *J. Geom. Anal.*, 21(3):683–742, 2011。[17] Alexander Lytchak 和 Stefan Wenger。度量圆盘的典范参数化。 *Duke Math. J.* 169 4 761 797, 2020 , ( ): –。

[18] Alexander Lytchak、Stefan Wenger 和 Robert Young。渐近锥中的德恩函数与 H¨older 延拓。 *J. Reine Angew. Math.*, 763:79–109, 2020。[19] Denis Marti。不可定向流形与带边界流形的度量基本类。 *In preparation*。[20] Denis Marti 和 Elefterios Soultanis。具有度量基本类的度量空间的刻画。 *arXiv preprint arXiv:2412.15794*, 2024。[21] William H. Meeks, III 和 Julie Patrusky。用嵌入子流形表示余维一同调类。 *Pacific J. Math.*, 68(1):175–176, 1977。[22] Damaris Meier、Noa Vikman 和 Stefan Wenger。度量曲面上的单调索伯列夫延拓及其在一致化中的应用。 *arXiv preprint arXiv:2510.26458*, 2025。[23] Daniel Meyer。自相似曲面与折纸的有理映射拟对称嵌入。 *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.*, 27(2):461–484, 2002。[24] Daniel Meyer。雪球是拟球。 *Trans. Amer. Math. Soc.*, 362(3):1247–1300, 2010。[25] Ayato Mitsuishi。通过余层证明整流同调与整数奇异链同调的一致性。 *Math. Z.*, 292(3-4):1069–1103, 2019。[26] Christian Riedweg 和 Daniel Sch¨appi。奇异（利普希茨）同调与整流同调。 *arXiv preprint arXiv:0902.3831*, 2009。[27] Stephen Semmes。通过定量拓扑在一般空间中寻找曲线，并将其应用于索伯列夫与庞加莱不等式。 *Sel. Math., New Ser.*, 2(2):155–295, 1996。[28] Antoine Song。球面体积与球面普拉托问题。 *To appear in Séminaire de théorie spectrale et géométrie* 。[29] Stefan Wenger。度量空间中整流的平坦收敛。 *Calc. Var. Partial* , ( ): –。 *Differential Equations* 28 2 139 160, 2007

Department of Mathematics, University of Fribourg, Chemin du Musée 23, 1700 Fribourg, Switzerland*Email address*: denis.marti@unifr.ch