arXiv:2602.18214v1 [math.ST] 20 Feb 2026

积分态密度一致逼近的定量集中不等式

MaxK¨amper Christoph Schumacher Fabian Schwarzenberger*Ivan Veseli´c†

2026年2月23日

积分态密度（IDS）是刻画凝聚态系统的量子哈密顿算子的一个基本谱量，用以描述能级分布的密集程度。它可解释为体积平均的谱分布。因此，由Pastur–Shubin公式相联系，积分态密度有两个等价定义：算子论迹公式，以及有限体积上归一化特征值计数函数的极限。我们研究带有有限程相关的有界随机势的离散随机Schr¨odinger算子，并证明一个定量集中不等式：它以显式的高概率保证，经验积分态密度（归一化特征值计数函数）在预定误差范围内一致逼近抽象的积分态密度迹公式，从而蕴含积分态密度的置信区域。

数学主题分类： 47B80, 60B12, 62E20, 82B10
关键词： 统计力学、安德森模型、积分态密度、一致收敛、经验测度、集中不等式、熵界

1 引言

积分态密度（IDS）是描述凝聚态物质的量子哈密顿量 H_ω 的一项重要谱特征。它是此类哈密顿量的谱分布函数，按体积归一化或取体积平均；这里假设系统具有某种形式的平移不变性，至少具有遍历性。简单来说，它告诉我们谱在哪些区域更密集、哪些区域更稀疏。它可用于计算相应的非相互作用多粒子系统的所有基本热力学量。

定义积分态密度有两种先验上彼此独立的方法。一种是具有算子代数风格的闭式公式，另一种是极限公式。前者写作

$$\mathbb{R} \ni E \mapsto \mathrm{Tr}[\mathbb{1}_{(-\infty,E]}(H_\omega)\mathbb{1}_\Lambda] \tag{1}$$

*计算机科学/数学系，德累斯顿应用技术大学，德国德累斯顿 01069
†数学系，多特蒙德工业大学，德国多特蒙德 44221

其中，Tr 表示迹， $\mathbb{1}_{(-\infty,E]}(H_\omega)$ 表示能量区间（$-\infty$， E]上的谱投影，而 $\mathbb{1}_\Lambda$ 表示单位立方体 $\Lambda=[-1/2,1/2$ 的示性函数所对应的乘法算子）^{d}。第二种定义为

$$\mathbb{R}\ni E\mapsto \lim_{L\to\infty} N_\omega^{\Lambda_L}(E) \tag{2}$$

其中，$N_\omega^{\Lambda_L}$表示$H_\omega^{\Lambda_L}$在盒子 $\Lambda_L:=[-L/2,L/2)^d$上的某种适当限制的归一化特征值计数函数。显然，这两个表达式相等，是大数定律或遍历定理的一种变体。这一恒等式与 L.A. Pastur 和 M.A. Shubin 的名字相关；他们在开创性工作中为若干不同类别的算子建立了这一公式，参见例如 [Shu79、Pas80], ，以及专著 [CL90、PF91、Sto01、Ves08、AW15]和其中的参考文献。

近年来，研究者开始关注 Pastur-Shubin公式的强版本，即收敛关于能量参数 E一致成立，参见例如 [Len02、LS05、LMV08、LV09、LSV10、PS12、Sch12、ASV13、SSV17、SSV18]。由于（据我们所知）在这一背景下采用的所有论证都依赖于有限秩扰动的交错性质，因此本文其余部分将只讨论定义在某个平移不变图的 ℓ^2 上的哈密顿量。（大多数思想都已推广到同一形式的量子图，尤其是一维连续随机薛定谔算子。）显然，关于能量的一致收敛强于逐点（几乎处处）收敛。此外，概率分布函数的一致收敛在测度空间上诱导出一种自然拓扑。

从经验角度来看，只有量（2）是可获取的。由于我们的目标是通过极限过程识别由（1）定义的底层测度，因此自然会提出以下问题：

- 根据实验测量样本，或者更现实地说，根据若干计算物理模拟，能够以多高的精度预测或估计积分态密度？要达到预先设定的精度和置信度，需要进行多少次测量或迭代？

- 用统计学的术语来说，我们要寻找积分态密度的置信区域。另一种情形是，假设某种材料或哈密顿量具有特定的积分态密度，并基于若干样本进行检验。此时的问题是，需要多少个样本才能区分出所假设的测度？

为了说明我们的结果如何回答这类问题，我们针对一个特别简单的模型，表述本文所得定理的一个推论：令 $H_\omega=-\Delta+V_\omega$：$\ell^2(\mathbb{Z}^d)\to\ell^2(\mathbb{Z}^d)$，其中 Δ 是离散拉普拉斯算子，而 $(V_\omega\varphi)(k)=\omega_k\varphi(k)$ 是由一列以 $k\in\mathbb{Z}^d$ 为指标的独立同分布有界随机变量 ω_k 生成的乘法算子。记 ω_k 的分布为 μ，并令 $\mathbb{P}=\bigotimes_{\mathbb{Z}^d}\mu$。令 $H_\omega^{\Lambda_L}=p_{\Lambda_L}H_\omega i_{\Lambda_L}$ 为到子空间 $\ell^2(\Lambda_L)$ 上的压缩，并令 $N_\omega^{\Lambda_L}$ 为其归一化特征值计数函数。我们的结果给出以下置信区域估计：

定理 1
对于 $d\geq 3$ 以及所有 $\alpha,\beta\in(0,1)$

$$\sup_\mu \mathbb{P}\{\|N_\omega^{\Lambda_L}-N\|_\infty>\beta\}<\alpha$$

给定

$$L > \max\left\{\left(\frac{C}{\beta}+1\right)^2, \left(\left(\log\left(2/\alpha\right)K\right)^{2/(d-2)}+1\right)^2, 16\right\} \tag{3}$$

其中

$$C = 40d + 104\cdot 2^d - 51 \ \textit{and}\ K = \left(\frac{480}{\log(3/2)} + \frac{16}{\log(2)}\right) < 1207.$$

这里的上确界取遍所有在 $\mathbb{R}$ 上具有有界支撑的博雷尔概率测度 μ 。

因此，与测量 $\omega \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 相对应的 $\alpha-$置信区域为

$$\left\{\rho \in \mathbb{B} \mid \rho \text{ isotone }, \left\|N_\omega^{\Lambda_L} - \rho\right\|_\infty \leq \beta\right\},$$

在满足（3）的条件下。这里 $\mathbb{B}$是有界右连续函数的空间 s.

本文其余部分安排如下：

我们在第2节介绍一般模型的框架，并在第3节给出主要结果，最后讨论这些结果并概述证明。证明分为两部分：几何部分见第4节，概率部分见第5节。主要定理的证明在第6节完成，而第7节讨论一些推广，尤其是有限生成可和群上的随机薛定谔算子以及长程渗流图上的拉普拉斯算子。

更一般的结果和详细证明可参见博士论文 [K¨a24], ，该论文可在线免费获取。因此，本文仅在简化条件下介绍部分论证，而不展开全部细节；我们将重点说明，本文所研究的更具体情形中的结论如何由该论文所建立的一般框架推出。

2 记号、模型假设及一些基本性质

在本节中，我们先约定一些记号，陈述关于所考虑概率空间的假设 (M1) 和 (M2)，随后建立特征值计数函数的基本性质，并将其记为 (A1) 至 (A6)。

令 $\|x\|_1 = \sum_{i=1}^d |x_i|$ 表示 $\mathbb{Z}^d$ 中的 ℓ^1-范数，并令其所对应的度量为

$$\mathrm{d}_{\mathbb{Z}^d}\colon \mathbb{Z}^d \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{N}_0,\ \mathrm{d}_{\mathbb{Z}^d}(x,y) = \|x-y\|_1 .$$

对于 Λ_1, $\Lambda_2 \subseteq \mathbb{Z}^d$ 我们将 Λ_1 与 Λ_2 之间的距离定义为

$$\mathrm{d}_{\mathrm{set}}(\Lambda_1,\Lambda_2) := \min\left\{\mathrm{d}_{\mathbb{Z}^d}(x,y) \mid x\in\Lambda_1, y\in\Lambda_2\right\}.$$

对于任意 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ ，我们用 $|\Lambda|$ 表示 Λ 中点的数量。
设 $\Omega = (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \mathbb{P})$，其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$ 是 $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}$ 的 Borel σ-代数，且 $\mathbb{P}$ 是满足以下条件的概率测度:

(M1) 平移不变性：平移

$$\gamma_z : \Omega \to \Omega, (\gamma_z \omega)_y := \omega_{y+z}. \tag{4}$$

是可测的，并且对每个 $z \in \mathbb{Z}^d$， $\mathbb{P} \circ \gamma_z = \mathbb{P}$ 。

(M2) 距离独立性：存在一个 $r \geq 0$ ，使得对所有 $k \in \mathbb{N}$ ，如果

- $\Lambda(1) ..., \Lambda(k)$ 是 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集,
- $|\Lambda(i)| \neq 0$ 对所有 $1 \leq i \leq k$ ，并且
- $\min\{\mathrm{d}_{\text{集合}}(\Lambda(i)\ \Lambda(j)) \mid i \neq j\} > r$

则投影 $\left(\Pi_{\Lambda(i)}\right)_{1 \leq i \leq k}$

$$\Pi_\Lambda : \Omega \to \Omega_\Lambda,\ \Pi_\Lambda(\omega) := \omega_\Lambda := (\omega_z)_{z \in \Lambda}.$$

a相互独立，其中 $\Omega_\Lambda = (\mathbb{R}^\Lambda,\ \mathcal{B}(\mathbb{R}^\Lambda)\ \mathbb{P}_\Lambda)$ 的像测度为 $\mathbb{P}_\Lambda = \mathbb{P} \circ \Pi_\Lambda^{-1}$.

算子 $H_\omega = -\Delta + V_\omega : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$，其中

$$H_\omega \Psi(x) := \sum_{y \in \mathbb{Z}^d :\ |y-x|=1} (\Psi(x) - \Psi(y)) + \omega_x \Psi(x) \tag{5}$$

对于 $\omega \in \Omega$，称其为**安德森算子**。
将安德森算子压缩到 $\mathbb{Z}^d$ 的有限子集 Λ 上，得到**限制安德森算子**

$$H_\omega^\Lambda : \ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\Lambda),\ H_\omega^\Lambda = p_\Lambda H_\omega i_\Lambda.$$

这里， $i_\Lambda : \ell^2(\Lambda) \to \ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 和 $p_\Lambda : \ell^2(\mathbb{Z}^d) \to \ell^2(\Lambda)$ 分别是 $\ell^2(\Lambda)$ 到 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 的**嵌入** 以及从 $\ell^2(\mathbb{Z}^d)$ 到 $\ell^2(\Lambda)$ 的**投影** ，其中

$$i_\Lambda \phi(z) = \begin{cases} \phi(z) & z \in \Lambda \\ 0 & z \notin \Lambda \end{cases}, \quad p_\Lambda \varphi(z) = \varphi(z)\ \forall z \in \Lambda.$$

限制安德森算子是一个厄米矩阵算子，因为 H_ω 是自伴的，且 $\ell^2(\Lambda)$ 是有限维的。因此，该算子有有限个实特征值。这些函数

$$N(\Lambda, \omega) : \mathbb{R} \to [0,1],\ N(\Lambda,\omega)(x) := \#\left\{\text{eigenvalues of } H_\omega^\Lambda \leq x\right\} \tag{6}$$

$$\bar{N}(\Lambda, \omega) : \mathbb{R} \to [0,1],\ \bar{N}(\Lambda,\omega)(x) := \frac{N(\Lambda,\omega)}{|\Lambda|}. \tag{7}$$

分别称为限制安德森算子 H_ω^Λ 的**特征值计数函数（evcf）**和归一化特征值计数函数。所有特征值均始终按其重数计数。我们希望研究当集合 Λ 越来越大时该函数的收敛性。

为了讨论 evcf 的某些有用性质，我们首先引入一些记号。令$\mathcal{C}$ 为 $\mathbb{Z}^d$的所有有限子集构成的集合。我们称

$$\partial^r(\Lambda) := \{x \in \Lambda : \mathrm{d}_{\mathrm{set}}(x, \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda) \leq r\} \cup \{x \in \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda : \mathrm{d}_{\mathrm{set}}(x, \Lambda) \leq r\}$$

集合 $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$ 的 **r-边界**，并定义

$$\Lambda^r := \Lambda \setminus \partial^r(\Lambda) = \{x \in \Lambda \mid \mathrm{d}_{\mathrm{set}}(x, \mathbb{Z}^d \setminus \Lambda) > r\}.$$

对于带有指标的集合 Λ_i，我们使用简写 $\Lambda_i^r = (\Lambda_i)^r$。
我们将 $\{x \in \mathbb{Z}^d$ 的任意整数平移称为：$0 \le x_i < n \ \forall 1 \le i \le d\}$ 边长为 **立方体的边长**n，其总是包含 n^d 个元素。接下来我们将大量使用这样一个事实：每个边长严格递增的立方体序列 Λ_k，$k \in \mathbb{N}$，都是所谓的 **Følner序列**，这意味着

$$\frac{|\partial^r(\Lambda_k)|}{|\Lambda_k|} \xrightarrow[i\to\infty]{} 0 \tag{8}$$

对所有 $r \in \mathbb{N}$ 均成立。

现在，我们可以表述一些稍后将用到的特征值计数函数的性质。

(A1) 平移不变性：对于 $\Lambda \in \mathcal{C}$，$z \in \mathbb{Z}^d$ 和 $\omega \in \Omega$，我们有

$$N(\Lambda + z, \omega) = N(\Lambda, \gamma_z \omega).$$

(A2) 局部性：对于所有 $\Lambda \in \mathcal{C}$ 和 ω，$\omega' \in \Omega$，若 $\Pi_\Lambda(\omega) = \Pi_\Lambda(\omega')$，则有

$$N(\Lambda, \omega) = N(\Lambda, \omega').$$

(A3) 几乎可加性：对于所有 $\omega \in \Omega$，所有两两不相交的 $\Lambda(1), \ldots, \Lambda(n) \in \mathcal{C}$ 和 $\Lambda := \bigcup_{i=1}^n \Lambda(i)$，我们有

$$\left\| N(\Lambda, \omega) - \sum_{i=1}^n N(\Lambda(i), \omega) \right\|_\infty \le \sum_{i=1}^n b(\Lambda(i)) \quad \text{with } b(\Lambda) := 8\left|\Lambda \setminus \Lambda^1\right|$$

b 满足

- 对于所有 $\Lambda \in \mathcal{C}$ 和 $z \in \mathbb{Z}^d$，我们有 $b(\Lambda) = b(\Lambda + z)$
- $b(\Lambda) \le 8|\Lambda|$ 对于所有 $\Lambda \in \mathcal{C}$
- 若 $(\Lambda(n))_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个边长严格递增的立方体序列，则

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b(\Lambda(n))}{|\Lambda(n)|} = 0$$

(A4) **有界性**:

$$\sup_{\omega\in\Omega} \|N(\{0\}, \omega)\|_\infty = 1$$

(A5) 单调性：函数 $N(\Lambda, \omega)$ 单调递增，即

$$\forall \Lambda \in \mathcal{C}, \omega \in \Omega : \ x < y \Longrightarrow N(\Lambda, \omega)(x) \le N(\Lambda, \omega)(y).$$

(A6) 逐点可测性：对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{C}$，函数 $N(\Lambda, \cdot)(x) : \left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\right)\right) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ 是可测的，其中 $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 Borel σ-代数。

证明。 关于 (A1) 至 (A5) 的证明，参见 [SSV17，引理 7.1]。
为证明 (A6)，记 $\lambda_j^{\downarrow}(H_\omega^\Lambda)$ 为 H_ω^Λ 的按重数计的第 j 大特征值。我们使用 [Bha13, 的推论 III.2.6，该推论表明，对于所有 $\Lambda \in \mathcal{C}$ 和 $\omega \neq \omega' \in \Omega$，都有

$$\max_{j=1,\dots,|\Lambda|} \left|\lambda_j^{\downarrow}(H_\omega^\Lambda) - \lambda_j^{\downarrow}(H_{\omega'}^\Lambda)\right| \leq \left\|H_\omega^\Lambda - H_{\omega'}^\Lambda\right\|$$

其中，最后一个范数是算子范数。由限制安德森算子的定义可得

$$\left\|H_\omega^\Lambda - H_{\omega'}^\Lambda\right\| = \|p_\Lambda(V_\omega - V_{\omega'})i_\Lambda\| = \|p_\Lambda(V_{\omega-\omega'})i_\Lambda\| = \left\|\omega_\Lambda - \omega'_\Lambda\right\|_\infty .$$

因此，对于所有 j，$\lambda_j^{\downarrow}(H_\cdot^\Lambda)\colon \Omega^\Lambda \to \mathbb{R}$ 是连续的，因而是可测的。这反过来意味着，对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和所有 $1 \leq j \leq |\Lambda|$，$\{\omega \in \Omega\colon \lambda_j^{\downarrow}(H_\omega^\Lambda) \leq x\}$ 是一个可测集，因此函数 $\mathbb{1}\left\{\lambda_j^{\downarrow}(H_\omega^\Lambda) \leq x\right\}$ 也是可测的。最后

$$N(\Lambda,\omega)(x) = \sum_{j=1}^{|\Lambda|} \mathbb{1}\left\{\lambda_j^{\downarrow}(H_\omega^\Lambda) \leq x\right\},$$

这表明，对于所有 $x \in \mathbb{R}$ 和 $\Lambda \in \mathcal{C}$，$\omega \mapsto N(\Lambda, \omega)(x)$ 都是可测的。 □

3 主要结果：关于 evcf 的浓缩不等式

有了上述记号，我们现在可以陈述主要结果。首先是关于归一化特征值计数函数的一个集中不等式。该结果是对 [K¨a24，推论 7.3] 的改编。

定理 2
设 $d \geq 3$, $M \geq 2$ 和 $\Omega = (\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}, \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})\ \mathbb{P})$ 为满足 ***(M1)*** 和 ***(M2)*** 的概率空间，其中 r 是满足 ***(M2)*** 的最小常数。设 N 为积分态密度，$N(\Lambda_n, \omega)$ 为式 (5) 中立方体 $\Lambda_n \subset \mathbb{Z}^d$（边长为 $n \in \mathbb{N}$）对应的安德森算子的归一化特征值计数函数。则存在一个集合 $A_{M,\ n} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d})$，使得

$$\left\|\bar{N}(\Lambda_n,\omega) - N\right\|_\infty \leq 32d\frac{1}{n} + 104\left(2^d-1\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(8d + 4r(2^d-1) + 72dr + 1\right)\frac{1}{\sqrt{n}-1} \tag{9}$$

对所有 $\omega \in A_{M,\ n}$ 和

$$\mathbb{P}\left(A_{M,n}\right) \geq 1 - M\exp\left(-\frac{\sqrt{\lfloor n/\lfloor\sqrt{n}\rfloor\rfloor^d}}{\lfloor\sqrt{n}\rfloor K_M}\right) \tag{10}$$

给定 $n > (2r+1)^2$ 和 $n > 16$，其中

$$\begin{aligned} K_M &= \left(\frac{40(M+1)}{\log(3/2)(M-1)} + \frac{4}{\log(M)}\right)\sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q}\sqrt{2+2q\log(2)} \\ &< 16\left(\frac{10(M+1)}{\log(3/2)(M-1)} + \frac{1}{\log(M)}\right). \end{aligned}$$

注记 3。 定理 1 是定理 2 的直接推论。首先我们选取 $M=2$ 和 $r=0$，然后注意到 (9) 蕴含

$$\left\|\bar{N}(\Lambda_n,\omega)-N\right\|_\infty < \frac{C}{\sqrt{n}-1}$$

且（10）意味着

$$\mathbb{P}\left(A_{2,n}\right) \geq 1-2\exp\left(-\frac{\left(\sqrt{n}-1\right)^{d/2-1}}{K}\right)$$

其中 C 和 K 如定理 1 的陈述所示。于是，只需选取足够大的 n ，以确保

$$\frac{C}{\sqrt{n}-1} \leq \beta,\ \mathbb{P}\left(A_{2,n}\right) \geq 1-\alpha$$

以及定理 2 所需的条件 $n > (2r+1)^2$ 和 $n>16$ ，从而得到定理 1 中给出的界。

注 4（维数为一和二维时有何不同？）。 对于低于三维的情形，集中不等式在 n方面需要采用略有不同的标度。定理 2 对于 $d=1$ 和 $d=2$ 的相应结果给出了一个误差界，它与（9）的区别仅在于最后一项，即

$$\left\|\bar{N}(\Lambda_n,\omega)-N\right\|_\infty \leq 32d\frac{1}{n}+104\left(2^d-1\right)\frac{1}{n^{1-1/k}}+\frac{8d+4r(2^d-1)+72dr+1}{\sqrt[k]{n}-1} \tag{11}$$

对所有$\omega \in A'_{M,\ n}$ 此时事件$A'_{M,\ n}$ 满足

$$\mathbb{P}\left(A'_{M,n}\right) \geq 1-M\exp\left(-\frac{\sqrt{\lfloor n/\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor\rfloor^d}}{\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor K_M}\right)$$

其中

$$k=\begin{cases}4 & \text{for } d=1\\ 3 & \text{for } d=2\end{cases}$$

但其他常数保持不变。证明见 [K¨a24，推论 73]。

对前述结果的证明中的概率部分稍作修改后，还可以得到一个集中不等式，其中指数改进为 $\frac{\lfloor n/\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor\rfloor^d}{\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor}$（而不是 $\sqrt{\lfloor n/\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor\rfloor^d}$ ），但这需要对 n 的大小作出更强的假设。

定理 5

设 $d\in\mathbb{N}$，以及对 $d\geq 5$ 有 $k=2$，对 $d<5$ 有 $k>\frac{4+d}{d}$。在定理 2 的设定下，存在一个集合 $B_n\in\mathcal{B}\left(\mathbb{R}^{\mathbb{Z}^d}\right)$，使得 （11）对所有 $\omega\in B_n$ 都成立，并且

$$\mathbb{P}\left(B_n\right) \geq 1-\exp\left(-\frac{1}{24}\frac{\lfloor n/\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor\rfloor^d}{\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor}\right)$$

若

$$n>\max\left\{16,(2r+1)^k,\left((12K_2)^{2/d}+1\right)^{\frac{dk}{dk-d-4}}\right\}$$

其中 $K_2=\left(\sum_{q=0}^{\infty}2^{-q}\sqrt{2+2q\log(2)}<\left(\frac{120}{\log(3/2)}+\frac{4}{\log(2)}\right)\left(\frac{480}{\log(3/2)}+\frac{16}{\log(2)}\right)\right)$。

3.1 对我们新发现的成果与局限性的讨论

我们的结果证明，抽象谱分布函数 $\mathbb{R} \ni E \mapsto \mathrm{Tr}[\mathbb{1}_{(-\infty,E]}(H_\omega)\mathbb{1}_\Lambda]$可用于基于抽样数据构造显式的置信区域。据我们所知，这是首个以统计学语言在**测度空间**中估计积分态密度的严格结果。

我们的误差界之所以如此强，是因为采用了基于熵和括号数的集中不等式；同时，我们注意到，由于特征值计数函数的结构，括号覆盖具有有利性质，进而带来了高效的复杂度界。据我们所知，为特征值计数函数构造括号覆盖是本文，亦即博士论文 [K¨a24] 的全新贡献。

我们的结果当然无法为近似误差或所需样本数提供尖锐的界。这些界过大，对计算物理学家而言并无实际意义。一方面，这是因为我们在证明中估计常数时作出了许多牺牲。更重要的是，几何误差至少达到量级 $n^{-1/2}$，因此每个样本都需要极大的尺寸。量级为$n^{-1/2}$ 的几何误差是改进我们估计结果的瓶颈。或许可以借助某种平面波或准动量分解，将ℓ^2 空间中的态分解，并按照 Klopp 在 [Klo99] 中的方法，对准周期边界条件取平均，从而实现改进。

此外，我们所考虑的哈密顿量本身就是一种近似，因为它是单电子薛定谔算符，并且采用离散化版本。在计算物理中，人们通常会在更早的阶段转向降维有效模型，并为这类有效模型确定置信区域。上确界范数在此处或许并非首选工具。

3.2 证明策略与本文其余部分的安排

我们的总体策略沿用 [SSV18], ，而该工作又受到更早研究的启发，例如 [LMV08] 和 [LSV10]。这些技术可分为两类。第一类将在第 4 节讨论，基于几乎可加性以及 $\mathbb{Z}^d$ 的几何性质。第二类旨在量化基于集中不等式的大数定律，相关内容将在第 5 节介绍。这里我们采用的方法不同于前面提到的 [LMV08], [LSV10], 和 [SSV18]。

最终集中不等式的证明又由三个步骤构成：首先，我们在第 4 节的引理 6 中，将 $N_{(\Lambda_n,\omega)}|\Lambda_n|$ 近似为大量独立同分布随机变量的归一化和。然后，我们在第 5 节引入 Orlicz范数，并利用它概述一个概率论论证（定理 13），以证明该平均和几乎必然地一致收敛到 $n \to \infty$ 的一个期望值。我们通过括号覆盖来完成这一点，这也是第 5.1 小节的主题。该论证给出了显式误差界，形式为两个集中不等式，即推论 15 和推论 17。

之后，我们再次运用几何论证（即第 4 节的定理 7），证明（与 $N_{(\Lambda_n,\ \omega)}|\Lambda_n|$ 的近似相关的）期望值序列也收敛。在第 6 节中，我们将此前的所有步骤汇总起来，得出主要结果。

用符号表示，这一策略可概括如下：

$$\frac{N(\Lambda_n,\omega)}{|\Lambda_n|} \approx \frac{1}{k(n)}\sum_{i=1}^{k(n)} \frac{N(\Lambda_{m,i},\omega)}{|\Lambda_{m,i}|} \xrightarrow[a.s.]{n\to\infty} \mathbb{E}\left(\frac{N(\Lambda_m,\omega)}{|\Lambda_m|}\right) \xrightarrow{m\to\infty} N. \tag{12}$$

这里， Λ_n 是边长为 n 的立方体， $k(n) < n$ 是一个随 n 单调增长的数， $(\Lambda_{m,i})_{1\le i\le k(n)}$ 是一系列边长为 $m < 2n$ 且互不相交的立方体。

4 几何近似估计

我们从几何逼近论证开始。令 $\Lambda_n := ([0,n)\cap\mathbb{Z})^d$ 为一个边长为 $n\in\mathbb{N}$ 的立方体。我们用边长为 m 的较小立方体铺砌这个立方体，使得 $2m < n$，并定义**铺砌集**

$$T_{m,n} := \{t\in T_m : \Lambda_m + t \subset \Lambda_n\}$$

其中 $T_m := m\mathbb{Z}^d = \{(z^{(i)})_{1\le i\le d}\in\mathbb{Z}^d : z^{(i)} \text{ 模 } m = 0\ \forall 1\le i\le d\}$。该集合的基数为 $|T_{m,n}| = \lfloor n/m\rfloor^d$ 且所有满足 $t\in T_m$ 的集合 $\Lambda_m + t$ 两两不相交。并集

$$\Lambda_{m,n} := \bigcup_{t\in T_{m,n}} (\Lambda_m + t) = \Lambda_m + T_{m,n}.$$

满足 $\Lambda_{m,n} = \Lambda_{\lfloor n/m\rfloor m}$。我们进一步定义

$$\hat{\Lambda}_{m,n} := \Lambda_n \setminus \Lambda_{m,n}.$$

参见图1中的示意图。

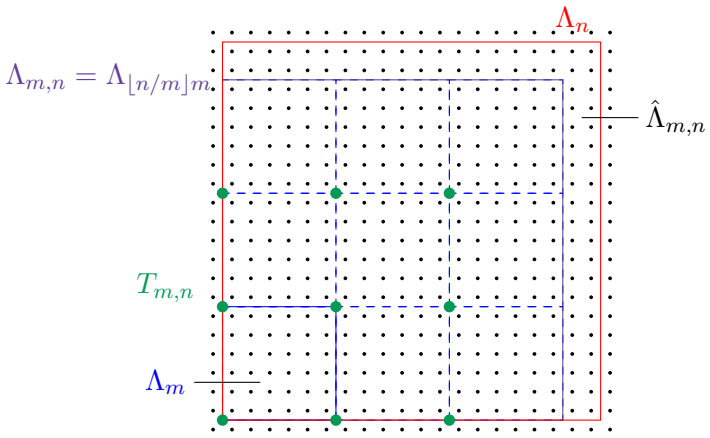


图1： $d = 2$的若干格子子集示意图。

特征值计数函数的性质确保，对于所有 $\omega\in\Omega$，以及所有 n， m， $r\in\mathbb{N}$，满足 $n > 2m$, $m > 2r+1$

$$\left\| \frac{N(\Lambda_n,\omega)}{|\Lambda_n|} - \frac{1}{|T_{m,n}|}\sum_{t\in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t,\omega)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \le \frac{b\left(\Lambda_{\lfloor n/m\rfloor m}\right)}{\left|\Lambda_{\lfloor n/m\rfloor m}\right|} + \frac{26\left(|\Lambda_n| - |\Lambda_n^m|\right)}{|\Lambda_n^m|} + \frac{b(\Lambda_m) + b(\Lambda_m^r) + 17\left(|\Lambda_m| - |\Lambda_m^r|\right)}{|\Lambda_m^r|}. \tag{13}$$

具体计算请参见 [K¨a24, 引理 5.1]。接下来，我们希望用 n、m、r 和 d将这个表达式写得更明确。

引理 6
对于具有 n、$m \in \mathbb{N}$、$n > 4m$ 和 $m > 2r+1$ 的 d 维立方体上的特征值计数函数，我们有

$$\left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - \frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \leq 32d \frac{1}{n} + 104 \left(2^d - 1\right) \frac{m}{n} + \left(4d + 2r(2^d - 1) + 36dr\right) \frac{1}{m} \tag{14}$$

证明。由 (A3)，边界函数 b 为 $b(\Lambda) = 8\left|\Lambda \setminus \Lambda^1\right|$，此外，对于立方体 Λ_n，我们还有 $|\Lambda_n| = n^d$ 和 $|\Lambda_n^r| = (n-2r)^d$。因此

$$\frac{b\left(\Lambda_{\lfloor n/m \rfloor m}\right)}{\left|\Lambda_{\lfloor n/m \rfloor m}\right|} = 8 \frac{\left|\Lambda_{\lfloor n/m \rfloor m}\right| - \left|\Lambda^1_{\lfloor n/m \rfloor m}\right|}{\left|\Lambda_{\lfloor n/m \rfloor m}\right|} = 8 \left(1 - \left(\frac{\lfloor n/m \rfloor m - 2}{\lfloor n/m \rfloor m}\right)^d\right).$$

从而

$$\begin{aligned}
&\left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - \frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \\
&\quad \leq 8 \left(1 - \left(\frac{\lfloor n/m \rfloor m - 2}{\lfloor n/m \rfloor m}\right)^d\right) + 26 \left(\left(\frac{n}{n-2m}\right)^d - 1\right) \\
&\qquad + \frac{m^d - (m-2)^d + (m-2r)^d - (m-2r-2)^d + 17(m^d - (m-2r)^d)}{m^d} \\
&\quad = 8 \left(1 - \left(1 - \frac{2}{\lfloor n/m \rfloor m}\right)^d\right) + 26 \left(\left(1 + \frac{2m/n}{1 - 2m/n}\right)^d - 1\right) \\
&\qquad + \left(1 - \left(1 - \frac{2}{m}\right)^d\right) + \left(\left(1 - \frac{2r}{m}\right)^d - \left(1 - \frac{2r+2}{m}\right)^d\right) + 17 \left(1 - \left(1 - \frac{2r}{m}\right)^d\right)
\end{aligned} \tag{15}$$

该表达式仅在 $m > 2r + 1$ 时成立，因为为得到统一的表达式，我们排除了 $(\Lambda_m^r)^1 = \emptyset$ 但 $m - 2r - 2 < 0$ 的边界情形。
现在我们使用伯努利不等式

$$1 - (1-y)^d \leq yd \tag{16}$$

对于（15）右侧的第一项、第三项和第五项，$y \leq 1$。由于 $\lfloor n/m \rfloor m \geq n - m$，我们有

$$\frac{1}{\lfloor n/m \rfloor m} \leq \frac{1}{n-m} \leq \frac{1}{n} \frac{1}{1 - m/n} \leq \frac{2}{n}.$$

若 $n > 2m$。
如果 $n \geq 4$，我们可以应用伯努利不等式并得到这些界

$$\left(1 - \left(1 - \frac{2}{\lfloor n/m \rfloor m}\right)^d\right) \leq \frac{2d}{\lfloor n/m \rfloor m} \leq \frac{4d}{n},$$

$$\left(1 - \left(1 - \frac{2}{m}\right)^d\right) \leq \frac{2d}{m} \quad \text{and} \quad \left(1 - \left(1 - \frac{2r}{m}\right)^d\right) \leq \frac{2dr}{m}$$

因为 $m > 2r+1$，因此 $m \geq 2$ 也成立，而 $m \geq 2r$ 已经是必要条件。接下来我们注意到，根据二项式定理

$$(1+x)^d = \sum_{j=0}^{d} \binom{d}{j} x^j \tag{17}$$

我们有

$$(1+x)^d - 1 \leq |x| \sum_{j=1}^{d} \binom{d}{j} |x|^{j-1} \leq |x| \sum_{j=1}^{d} \binom{d}{j} = |x| \left(2^d - 1\right)$$

对于 $|x| \leq 1$。由

$$\frac{z}{1-z} \leq 2z \leq 1 \Leftrightarrow z \leq \frac{1}{2}$$

可得

$$\left(\left(1 + \frac{2m/n}{1-2m/n}\right)^d - 1 \right) \leq \frac{4m}{n} \left(2^d - 1\right)$$

只要 $4m < n$。
对于第四项，我们对.....同时使用 (16) 和 (17)

$$\left(1 - \frac{2r}{m}\right)^d - \left(1 - \frac{2r+2}{m}\right)^d \leq \left(2^d - 1\right) \frac{2r}{m} + \frac{d(2r+2)}{m} = \frac{2r2^d + 2d(r+1) - 2r}{m}.$$

综上可得

$$\left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - \frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \leq 32d \frac{1}{n} + 104 \left(2^d - 1\right) \frac{m}{n} + \left(4d + 2r(2^d - 1) + 36dr\right) \frac{1}{m}$$

将所有先前的界应用于 (15)。 □

这一结果进一步表明，随着立方体增大，归一化特征值计数函数的期望值存在极限，即

定理 7
令 N 为特征值计数函数，r、$n \in \mathbb{N}$ 满足 $2r+1 < n$ 且 $\Lambda_n := ([0,n) \cap \mathbb{Z})^d$。则 ${}^{\mathbb{E}N}(\Lambda_n^r, \cdot)|\Lambda_n|$（在 $\mathbb{R}$ 上逐点定义）构成一个 $\|\cdot\|_\infty$-柯西序列，并且存在一个单调递增的极限函数 $N^* \in \mathbb{B}$。此外

$$\left\| \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_n^r, \cdot)}{|\Lambda_n|} - N^* \right\|_\infty \leq \left(4d + 2r(2^d - 1) + 36dr\right) \frac{1}{n}. \tag{18}$$

证明。 首先我们注意到，由于 (A1) 以及概率空间所假定的性质 (M1)，方程

$$\mathbb{E}N(\Lambda_m^r + t, \cdot) = \mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot) \circ \gamma_t = \mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot)$$

对所有 $t \in \mathbb{Z}^d$ 和 $m, r \in \mathbb{N}$ （其中 $m > 2r$）均成立。因此

$$\mathbb{E}\frac{1}{|T_{m,n}|}\sum_{t\in T_{m,n}}\frac{N(\Lambda_m^r+t,\cdot)}{|\Lambda_m|}=\frac{1}{|T_{m,n}|}\sum_{t\in T_{m,n}}\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r+t,\cdot)}{|\Lambda_m|}=\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}. \tag{19}$$

同样成立。因此，我们可以重用引理 6 中的界来界定

$$\left\|\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_n^r,\cdot)}{|\Lambda_n|}-\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_k^r,\cdot)}{|\Lambda_k|}\right\|_\infty$$

也同样成立。不过，该界仅对 $n > 4m$ 成立，而我们需要为所有 n， m建立柯西判别准则。

接下来，令 $m < n \in \mathbb{N}$ 和 $\delta > 0$。由 (A3) 和 (8) 可知，存在一个 $k > 4n$ ，它能被 n 和 m 整除（从而得到 $\lfloor k/n\rfloor n = \lfloor k/m\rfloor m = k$），使得

$$\max\left\{\frac{b(\Lambda_k)}{|\Lambda_k|},\frac{|\partial^n(\Lambda_k^n)|}{|\Lambda_k^n|},\frac{|\partial^m(\Lambda_k^m)|}{|\Lambda_k^m|}\right\}<\delta.$$

利用三角不等式和 (19)，可得

$$\begin{aligned}\left\|\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_n^r,\cdot)}{|\Lambda_n|}-\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}\right\|_\infty &\le \left\|\mathbb{E}\frac{1}{|T_{n,k}|}\sum_{t\in T_{n,k}}\frac{N(\Lambda_n^r+t,\cdot)}{|\Lambda_n|}-\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_k,\cdot)}{|\Lambda_k|}\right\|_\infty\\ &+\left\|\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_k,\cdot)}{|\Lambda_k|}-\mathbb{E}\frac{1}{|T_{m,k}|}\sum_{t\in T_{m,k}}\frac{N(\Lambda_m^r+t,\cdot)}{|\Lambda_m|}\right\|_\infty.\end{aligned} \tag{20}$$

右侧的两项都可以用相同的方法处理：先考虑一个特定的 $x \in \mathbb{R}$，再利用 (13) 以及引理 6 中关于

$$\begin{aligned}&\left|\mathbb{E}\frac{1}{|T_{n,k}|}\sum_{t\in T_{n,k}}\frac{N(\Lambda_n^r+t,\cdot)(x)}{|\Lambda_n|}-\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_k,\cdot)(x)}{|\Lambda_k|}\right|\\ &\le \mathbb{E}\left|\frac{1}{|T_{n,k}|}\sum_{t\in T_{n,k}}\frac{N(\Lambda_n^r+t,\cdot)(x)}{|\Lambda_n|}-\frac{N(\Lambda_k,\cdot)(x)}{|\Lambda_k|}\right|\\ &\le \mathbb{E}\left(\frac{b(\Lambda_k)}{|\Lambda_k|}+\frac{26\left(|\Lambda_k|-|\Lambda_k^n|\right)}{|\Lambda_k^n|}+\frac{b(\Lambda_n)+b(\Lambda_n^r)+17\left(|\Lambda_n|-|\Lambda_n^r|\right)}{|\Lambda_n^r|}\right)\\ &\le 27\delta+\frac{b(\Lambda_n)+b(\Lambda_n^r)+17\left(|\Lambda_n|-|\Lambda_n^r|\right)}{|\Lambda_n^r|}\\ &\le 27\delta+\left(4d+2r(2^d-1)+36dr\right)\frac{1}{n}.\end{aligned}$$

由于 x 是任意的，因此可得

$$\left\|\mathbb{E}\frac{1}{|T_{n,k}|}\sum_{t\in T_{n,k}}\frac{N(\Lambda_n^r+t,\cdot)}{|\Lambda_n|}-\frac{\mathbb{E}N(\Lambda_k,\cdot)}{|\Lambda_k|}\right\|_\infty \le 27\delta+\left(4d+2r(2^d-1)+36dr\right)\frac{1}{n} \tag{21}$$

其中右侧第二项在 n增大时趋于 0。因此，对于每个$\varepsilon > 0$ ，都存在一个 $n_0 \in \mathbb{N}$ ，使得

$$\left(4d + 2r(2^d - 1) + 36dr\right)\frac{1}{n} < \varepsilon \ \forall n \geq n_0. \tag{22}$$

若将 n 替换为 m，界(21)同样成立。因此，若 n， $m \geq N$ 则

$$\left\| \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_n^r, \cdot)}{|\Lambda_n|} - \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \leq 54\delta + 2\varepsilon$$

这由(20)、(21)和(22)可得。由此证明 ${}^{\mathbb{E}N_{(\Lambda_n^r,\ \cdot)}}\!/_{|\Lambda_n|}$ 是一个柯西序列，并且具有一致极限 N^*。由于对每个 n和每个 ω， ${}^{N_{(\Lambda_n^r,\ \omega)}}\!/_{|\Lambda_n|}$都是右连续、单调递增且以1为界的，根据有界收敛定理，其期望值也具有这些性质。因此，每个 ${}^{\mathbb{E}N_{(\Lambda_n^r,\ \cdot)}}\!/_{|\Lambda_n|}$都属于 $\mathbb{B}$ 且单调递增；作为一致极限， N^* 同样如此。通过取极限 $m \to \infty$，由于 δ是任意的，我们还可以得到 ${}^{\mathbb{E}N_{(\Lambda_n^r,\ \cdot)}}\!/_{|\Lambda_n|} - N^*$之差的界(18)。

——— □

5 概率近似估计

承接上一节，我们可以用较小立方体上的归一化特征值计数函数的平均和来近似大立方体上的归一化特征值计数函数，并对近似误差进行显式控制。接下来，我们希望研究这一平均和的行为。作为独立同分布随机变量的平均和，我们可以期望它收敛到某个期望值。更具体地说，作为两个几何近似估计(14)和(18)的推论，我们有

$$\begin{aligned}
\left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - N^* \right\|_\infty &\leq \left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - \frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \\
&\quad + \left\| \frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)}{|\Lambda_m|} - \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty \\
&\quad + \left\| \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|} - N^* \right\|_\infty \\
&\leq 32d\frac{1}{n} + 104\left(2^d - 1\right)\frac{m}{n} + 2\left(4d + 2r(2^d - 1) + 36dr\right)\frac{1}{m} \\
&\quad + \left\| \frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)}{|\Lambda_m|} - \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|} \right\|_\infty .
\end{aligned} \tag{23}$$

对于 $n, m \in \mathbb{N}$、 $n > 4m$ 和 $m > 2r + 1$。
右侧最后一项恰恰是我们需要为随机函数与确定性函数之差取得一个界的地方。它是样本均值与期望值之差的范数，因此至少对每个固定的 $x \in \mathbb{R}$ ，大数定律保证

$$\frac{1}{|T_{m,n}|} \sum_{t \in T_{m,n}} \frac{N(\Lambda_m^r + t, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} \to \frac{\mathbb{E}N(\Lambda_m^r, \cdot)(x)}{|\Lambda_m|} \quad \text{for } n \to \infty$$

对几乎所有 $\omega \in \Omega$ 成立。剩下的挑战是将收敛加强为一致界，并对其进行量化。

为简化记号，我们将使用

$$\sup_{x\in\mathbb{R}}\left|\frac{1}{|T_{m,n}|}\sum_{t\in T_{m,n}}\frac{N(\Lambda_m^r+t,\omega)(x)}{|\Lambda_m|}-\mathbb{E}\frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)(x)}{|\Lambda_m|}\right|=\sup_{f\in\mathcal{F}'}\left|\frac{1}{s}\left(\sum_{t=1}^{s}f(X_t)-\mathbb{E}f(X_t)\right)\right|$$

其中 $\mathcal{F}'=\left\{\frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)(x)}{|\Lambda_m|}:\ x\in\mathbb{R}\right\}$, $s=|T_{m,n}|$ 以及 $X_t=(\gamma_t\omega)^{\Lambda_m^r}$。我们不再对实数集上的函数取上确界，而是将每个 x 对应的特征值计数函数视为从 Ω 到 $\mathbb{R}$的一个独立函数，然后对所有这些函数取上确界。我们所考虑的量词形式如下：

$$\mathbb{P}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}f(X_i)-\mathbb{E}f(X_1)\right|\geq\kappa\right)\leq c_1(\kappa,s)\cdot\exp\left(c_2(\kappa,s)\right)$$

对于所有满足适当条件的 $\kappa>0$，其中 $c_1(\kappa,\ s)$ 和 $c_2(\kappa,\ s)$。

与此类集中不等式相关的是 Orlicz范数。

定义 8 (Orlicz范数)

实随机变量 X 相对于单调递增、非恒定凸函数 $\Phi\colon\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ （满足 $0\leq\Phi(0)<1$ ）的***Orlicz***范数为

$$\|X\|_\Phi:=\inf\left\{C>0:\mathbb{E}\Phi\left(\frac{|X|}{C}\right)\leq 1\right\}$$

其中 $\inf(\emptyset):=\infty$。

$\Phi(x)=x^p$ 的 Orlicz范数是通常的 L^p范数。若 $|X|\leq|Y|$ 几乎处处成立，则 $\|X\|_\Phi\leq\|Y\|_\Phi$。特别值得关注的是与以下函数相关的 Orlicz范数

$$\psi_{p,M}(x):=\frac{1}{M}\mathrm{e}^{(x^p)}$$

对于 $p\geq 1$，尤其是 $p=1$ 和 $p=2$。若 $M=2$，则所得的 Orlicz范数与以下函数对应的范数相同

$$\Psi_p(x):=\mathrm{e}^{(x^p)}-1\geq x^p.$$

在本证明的其余部分中，我们用 $\psi_{p,M}$ 和 Ψ_p指称这些特定函数，而用 Φ表示满足 $0\leq\Phi(0)<1$的一般单调递增、非恒定凸函数。

通过两个界可以明确看出其与指数集中不等式的联系；这两个界分别由凸函数的马尔可夫不等式和层蛋糕公式推出。证明参见例如 [K¨a24，引理 6.2]。

引理 9

令 Φ如定义 *8* 所示。

(O1) If $\|X\|_\Phi\leq D<\infty$ *then* $\mathbb{E}\Phi\left(\frac{|X|}{\|X\|_\Phi}\right)\leq 1$ *and* $\mathbb{P}(|X|\geq y)\leq\frac{1}{\Phi\left(\frac{y}{D}\right)}$

(O2) 若 X 是一个实随机变量，且 $\mathbb{P}(|X| > x) \leq B\mathrm{e}^{-Cx^p}\ \forall x > 0$，其常数为 B、$C > 0$和 $p \geq 1$，则

$$\|X\|_{\psi_{p,M}} \leq \left(\frac{B + M - 1}{(M-1)C}\right)^{1/p}$$

范德法特和韦尔纳（以及其他学者）建立了一个关于（平均）经验过程上确界的估计。不过，他们使用了略有不同的归一化方式，即除以$1/\sqrt{s}$ 而不是 $1/s$。下文中，我们将结合 Pollard 的一些论证，运用他们的结果并将其推广到当前情形。

定义10 （经验过程（[vW96，第2.1]章））
设 $s \in \mathbb{N}$，且 X_1、X_2、.....、X_s 是取值于可测空间 Y、像测度为 P的独立同分布随机变量。经验过程作用于一个 P-可积函数 $f\colon Y \to \mathbb{R}$时，定义为

$$\mathbb{G}_s(f) := \frac{1}{\sqrt{s}}\left(\sum_{i=1}^{s}(f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i))\right). \tag{24}$$

设 $\mathcal{F}$是由 P-可积函数组成的集合 $f\colon Y \to \mathbb{R}$，则映射 $\mathcal{F} \ni f \to \mathbb{G}_s(f)$ 称为以$\mathcal{F}$为指标的经验过程。

映射 $f \mapsto \mathbb{G}_s(f)$是线性的。若 $\mathcal{F}$ 是有限的，则有以下界。

引理11
设 $\mathbb{G}_s$ 如定义*10*所述。设 $\mathcal{F}$ 为可测有界函数的有限集。那么对于$M \geq 2$

$$\left\|\max_{f\in\mathcal{F}}|\mathbb{G}_s(f)|\right\|_{\psi_{1,M}} \leq K'_{\psi,M}\left(\max_{f\in\mathcal{F}}\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{s}}(2 + \log(|\mathcal{F}|)) + \max_{f\in\mathcal{F}}\|f\|_{L^2(P)}\sqrt{2 + \log(|\mathcal{F}|)}\right) \tag{25}$$

其中 $K'_{\psi,\ M} = \sqrt[4]{(M+1)\log(3/2)(M-1)}$。

证明的定性思路源自范德法特和韦尔纳的 [vW96]中的引理2.2.10。定量版本的证明见 [K¨a24，引理6.4]。我们在此简要概述。

证明概要。证明主要依赖两个引理。第一个是对 [Pol90] 中引理3.2的改编，该引理给出了经验过程上确界的Orlicz范数界。对于 $p = 1$，2以及实随机变量 X_1，..... X_m，不等式

$$\left\|\max_{1\leq i\leq m} X_i\right\|_{\psi_{p,M}} \leq \frac{(2 + \log(m))^{1/p}}{\log(3/2)}\max_{1\leq i\leq m}\|X_i\|_{\psi_{p,M}}. \tag{26}$$

成立。第二个是伯恩斯坦不等式，它指出，对于独立同分布随机变量X_1，X_2，.....，X_s，若 $|X_i| \leq C$对所有 $1 \leq i \leq s$均成立，则有如下不等式

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{s}(X_i - \mathbb{E}X_i) \geq x\right) \leq \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2 + cx}}$$

其中 $\sigma^2 := \sum_{i=1}^s \mathbb{E}\left(X_i^2\right)$ 且 $c = \frac{C}{3}$ 对所有 $x > 0$均成立。将伯恩斯坦不等式应用于经验过程，可得

$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{G}_s(f)|\,\mathbb{1}\left\{|\mathbb{G}_s(f)| \le \frac{b}{a}\right\} > x\right) \le 2\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{4b}}$$
$$\mathbb{P}\left(|\mathbb{G}_s(f)|\,\mathbb{1}\left\{|\mathbb{G}_s(f)| > \frac{b}{a}\right\} > x\right) \le 2\mathrm{e}^{-\frac{x}{4a}}.$$

其中

$$a := \max_{f\in\mathcal{F}} \frac{2}{3}\frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{s}} \le \max_{f\in\mathcal{F}} \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{s}},\ b := \max_{f\in\mathcal{F}} \mathbb{E}(f(X_1))^2 = \max_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^2(P)}^2.$$

(O2) 现在意味着

$$\left\||\mathbb{G}_s(f)|\,\mathbb{1}\left\{|\mathbb{G}_s(f)| \le \frac{b}{a}\right\}\right\|_{\psi_{2,M}} \le \sqrt{\frac{4(M+1)}{M-1}}b \tag{27}$$
$$\left\||\mathbb{G}_s(f)|\,\mathbb{1}\left\{|\mathbb{G}_s(f)| > \frac{b}{a}\right\}\right\|_{\psi_{1,M}} \le \frac{4(M+1)}{M-1}a.$$

由于这两个不等式的右端都只依赖于 a 和 b，而不依赖于 f，现在便可以对这类Orlicz范数的上确界给出界。结合(26)，这便可以对由有限集作为指标的、形如(27)左端那些截断经验过程之最大值的Orlicz范数给出界。利用Orlicz范数的其他一些性质，可以将经验过程的最大值拆成两个截断部分，从而得到引理中所述的界。

□

接下来，我们将该界推广到可数函数集。具体做法是用越来越大的有限集来逼近该集合，但要使这一策略成功，所考虑的函数需要具备一定的正则性。这里的想法是：对任意 $q \in \mathbb{N}$ 选取一组逐渐变得更稠密的函数$(g_i^q)_{1\le i\le N(q)}$，并保证对每个 $f \in \mathcal{F}$ 都存在指标 $1 \le i(f,q) \le N(q)$，使得

$$f = \sum_{q=2}^{\infty}\left(g_{i(f,q)}^q - g_{i(f,q-1)}^{q-1}\right) \quad \text{and} \quad \left\|g_{i(f,q)}^q - g_{i(f,q-1)}^{q-1}\right\|_{L^2(P)} < 2^{-q}$$

始终成立，这意味着“层级” q 上的函数$(g_i^q)_{1\le i\le N(q)}$ 可用于逼近任意 $f \in \mathcal{F}$，误差至多为 2^{-q+1}（P意义下的 L^2）。

由引理11可知，我们需要同时控制 $L^2(P)$范数和上确界范数下的误差，这使论证更加复杂；此外，还面临着寻找 g_i^q 的挑战。为说明这一过程，暂且假设对于有限的 $\mathcal{F}$，我们有如下界：

$$\left\|\max_{f\in\mathcal{F}}|\mathbb{G}_s(f)|\right\|_{\psi_{1,M}} \le \left(\max_{f\in\mathcal{F}}\|f\|_{L^2}\right)\sqrt{2+\log(|\mathcal{F}|)}$$

而是引理11的实际界（25），并且能够像上面那样选取 g_i^q。然后，在这个假设的简化情形下，我们可以尝试通过以下方式处理可数集 $\mathcal{F}$：

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}|\mathbb{G}_s(f)| = \sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\mathbb{G}_s\left(\sum_{q=2}^{\infty}g_{i(f,q)}^q - g_{i(f,q-1)}^{q-1}\right)\right| \le \sum_{q=2}^{\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\left|\mathbb{G}_s\left(g_{i(f,q)}^q - g_{i(f,q-1)}^{q-1}\right)\right|.$$

由于对于每个 $q \in \mathbb{N}$，我们只有有限种选择，因此，对和式中的每一项，关于 $f \in \mathcal{F}$ 的上确界都不超过函数 $(g_i^q)_{1\le i\le N(q)}$ 的上确界。这是对有限集取上确界；又由于我们假设 $\left\| g_i^{q\,(f,\,q)} - g_i^{q-1\,(f,\,q-1)} \right\|_{L^2(P)} < 2^{-q}$ 始终成立，因此，上述假设的玩具模型会导出

$$\left\| \max_{f\in\mathcal{F}} |\mathbb{G}_s(f)| \right\|_{\psi_{1,M}} \le \sum_{q=2}^{\infty} 2^{-q} \sqrt{2 + \log(|\mathcal{F}_q|)}$$

其中 $|\mathcal{F}_q|$ 是可能组合 $\left(g_i^{q\,(f,\,q)} - g_i^{q-1\,(f,\,q-1)}\right)$ 的数量。如果这个总和收敛，我们就能得到所需的界。

遗憾的是，引理11比这个假想的简化模型更复杂，但将每个函数替换为若干个小“环节”之和，并从一个有限集中进行选择这一总体思路仍然适用，尽管还需要执行一些额外步骤。我们将按上述方式识别函数g_i^q，并衡量给定函数集合 $\mathcal{F}$ 所需的“环节”数量，这个数量就是它的括号数。

定义12（括号覆盖）

设 Y是一个可测空间， P是 Y上的一个测度。对于两个函数 $l, u\colon\ Y \to \mathbb{R}$，若对所有 $y \in Y$都有$l(y) \le u(y)$，则括号 $[l,u]$ 是集合

$$[l,u] = \{f\colon Y \to \mathbb{R} \mid l(y) \le f(y) \le u(y) \text{ for all } y \in Y\}.$$

这里， l 称为下边界函数，而 u称为括号的上边界函数。

设 $\mathcal{F}$ 是函数集合 $f\colon\ Y \to \mathbb{R}$。若满足以下条件，则 $\mathcal{I} = \{[l_i, u_i], 1 \le i \le N\}$ 是 $\mathcal{F}$ 的单调括号覆盖

(BC1) 对所有 $y \in Y$ 和 $1 \le i \le N$，都有

$$u_i(y) \ge l_i(y)$$

且对所有 $y \in Y$ 和 $1 \le i \le N-1$，都有

$$l_{i+1}(y) \ge u_i(y).$$

(BC2) $\mathcal{F} \subset \cup_{i=1}^{N} [l_i, u_i]$。

若一列 $(\mathcal{I}_q)_{q\in\mathbb{N}}$ 满足 $\mathcal{I}_q = \left\{[l_{q,i}, u_{q,i}], 1 \le i \le N_{[]}(q, \mathcal{F}, P)\right\}$，其中每个都是单调括号覆盖，并具有边界函数序列 $(l_{q,i})_{1\le i\le N_{[]}(q,\mathcal{F},P)}$ 和 $(u_{q,i})_{1\le i\le N_{[]}(q,\mathcal{F},P)}$，且属于 $L^2(P)$，则称其为嵌套单调括号覆盖（相对于 P），当且仅当

(NBC1)

$$\|u_{q,i} - l_{q,i}\|_{L^2(P)} < 2^{-q}$$

对于所有 $q \in \mathbb{N}, 1 \le i \le N_{[]}(q, \mathcal{F}, P)$,

(NBC2) 对于所有 q、 $t \in \mathbb{N}$ 和 $1 \le i \le N_{[]}(q$、 $\mathcal{F}$、 $P)$，我们有

$$l_{q,i} \in (l_{q+t,j})_{1\le j\le N_{[]}(q+t,\mathcal{F},P)}$$
$$u_{q,i} \in (u_{q+t,j})_{1\le j\le N_{[]}(q+t,\mathcal{F},P)}.$$

我们将函数 $q \to N_{[]}(q、\ \mathcal{F}、\ P)$ 称为嵌套单调括号覆盖的单调括号函数。

请注意，这一定义比许多其他情形中使用的括号更为严格；后者通常只要求满足 (BC2) 和 (NBC1)。这些也是下一个定理所需的关键性质，不过，对于我们感兴趣的特征值计数函数而言，其他性质自然也成立，因此这里可以得到更好的常数。

对上述假想的简化情形所作讨论的严谨类比是：

定理 13 (经验过程在可数集上确界的 Orlicz 范数)设 $X_1, X_2, \ldots$ 是取值于可测空间 Y 的独立同分布随机变量，其像测度为 P, $\mathcal{F}$，并设 f 是一个具有嵌套单调括号覆盖的可数可测函数集，且 $N_{[]}(q, \mathcal{F}, P)$ 为相应的单调括号函数。那么对所有 $M \geq 2$

$$\left\| \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\sum_{i=1}^{s} (f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i)) \right) \right| \right\|_{\psi_{1,M}} \leq K''_{\psi,M} \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q} \sqrt{2 + \log\left(N_{[]}(q, \mathcal{F}, P)\right)} \tag{28}$$

成立，其中 $\|\cdot\|_{\psi_{1,M}}$ 是与 $\psi_{1,M} := \frac{1}{M}\mathrm{e}^{x}$, $K'_{\psi,M} = \frac{4}{(M+1)\ \log(3/2)(M-1)}$ 对应的 *Orlicz* 范数，而 $K''_{\psi,M} = (10\ K'_{\psi,M} + \frac{4}{\log(M)})$。

这一结果的定性版本已在 [vW96],的定理 2.5.6 和 2.14.2 中确立；其定量版本及证明见 [K¨a24, 定理 6.9]。

5.1 特征值计数函数的括号覆盖

下一步是为函数集合（的一个可数子集）找到一个嵌套单调括号覆盖。

$$\mathcal{F}' = \left\{ \frac{N(\Lambda_m^r, \cdot)(x)}{|\Lambda_m|} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

为此，我们将利用归一化特征值计数函数的一些性质，即有界性 (A4)、渐近行为

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{x \to \infty} \frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} = \frac{|\Lambda_m^r|}{|\Lambda_m|} \quad \text{for all } \omega \in \Omega,$$

单调性 (A5) 和逐点可测性 (A6)。
我们进一步定义

$$\Phi \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \qquad \Phi(x) := \mathbb{E}\left(\frac{N(\Lambda_m^r, \cdot)(x)}{|\Lambda_m|} \right)$$

它通过控制收敛继承了有界性、极限行为和单调性。由于这种极限行为，定义.....较为方便。

$$\Phi(-\infty) = 0, \quad \Phi^{-}(\infty) = \frac{|\Lambda_m^r|}{|\Lambda_m|}.$$

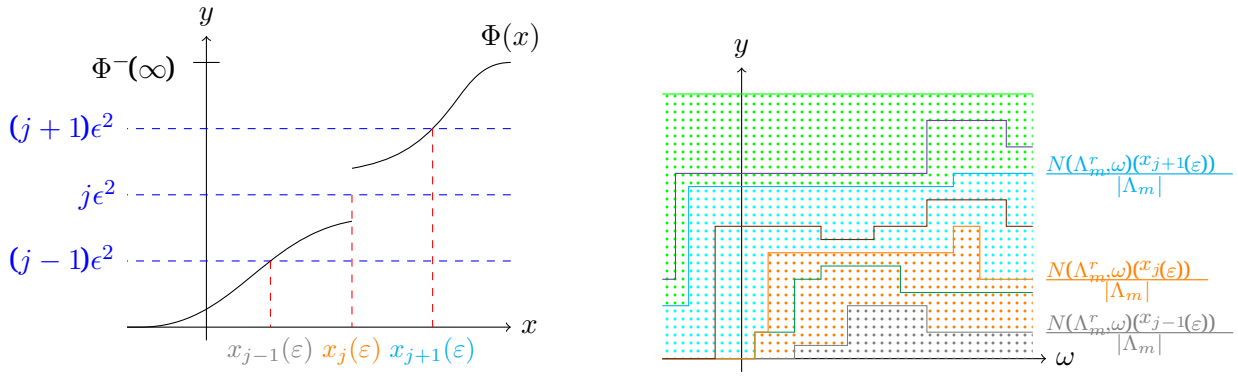


图 2：$x_j(\varepsilon)$ 的选取示意图（左），以及由 evcf 构成的嵌套单调括号覆盖（右）。

我们进一步定义.....

$$\Phi^{-1}(\alpha) := \inf\{\lambda \in \mathbb{R} \mid \Phi(\lambda) \geq \alpha\},$$

分位数函数或的 Φ，并基于此

$$x_j(\varepsilon) := \begin{cases} -\infty & \text{if } j = 0 \\ \Phi^{-1}(j \cdot \varepsilon \cdot \frac{|\Lambda_m^r|}{|\Lambda_m|}) & \text{if } 0 < j < k \\ \infty & \text{if } j = k \end{cases}$$

对于 $\varepsilon \in \mathbb{Q} \cap (0,\ 1)$ 和 $j = 0,\ 1$、.....、 $k := \lceil \frac{1}{\varepsilon} \rceil$。

根据这些定义，我们得到以下嵌套单调括号覆盖。

引理 14

这些括号

$$\mathcal{F}_{2^{-q},j} := \left[\frac{N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|} \left(x_{j-1}\left(2^{-2q}\right) \right), \frac{N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|} \left(x_j\left(2^{-2q}\right) \right) \right], \quad j \in \{1, \ldots, 2^{2q}\}$$

构成一个嵌套单调括号覆盖，其

$$\mathcal{F} := \left\{ \frac{N(\Lambda_m^r, \cdot)}{|\Lambda_m|}(x) : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R} \mid \exists Q \in \mathbb{Q} : x = \Phi^{-1}(Q) \right\} \tag{29}$$

关于测度 $\mathbb{P}$ 和单调括号函数的嵌套单调括号覆盖

$$N_{[]}(q, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \leq 2^{2q}.$$

例如，参见图 2。左图展示了如何根据 Φ 选择 $x_j(\varepsilon)$，右图则示意了由此得到的夹逼。右图中的横轴对应一个可能的 ω 抽象空间，图中绘制的是针对不同 x 的一些“几乎归一化”的特征值计数函数 $\omega \mapsto N(\Lambda_m^r, \omega)(x) / |\Lambda_m|$。每个彩色虚线区域表示一个括号（颜色与其上边界函数相同），并涵盖该括号内函数的所有可能取值。

证明。我们先证明定义12中的 (BC2) 和 (NBC1)，但为避免技术上的复杂性，这里只考虑 Φ 连续的情形。由于所谓的 Wegner估计，这已经涵盖了大量情形，例如参见 [Kir08，第 5 章。5]。不作连续性假设的一般证明在技术上更复杂，但思路相同。相关证明见 [K¨a24，引理 6。16]。

所有函数 $N_{(\Lambda_m^r,\cdot)/|\Lambda_m|}\left(x_j\left(2^{-2q}\right)\right)$ 至少包含在一个括号中。对于每个 $x \in \Phi^{-1}(\mathbb{Q}) \setminus \{x_0\left(2^{-2q}\right), \ldots, x_k\left(2^{-2q}\right)\}$，都存在唯一的 $j \in \{1, \ldots, 2^{2q}\}$ 使得 $x_{j-1}\left(2^{-2q}\right) < x < x_j\left(2^{-2q}\right)$。因此

$$\frac{N(\Lambda_m^r,\omega)}{|\Lambda_m|}\left(x_{j-1}\left(2^{-2q}\right)\right) \leq \frac{N(\Lambda_m^r,\omega)}{|\Lambda_m|}(x) \leq \frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}\left(x_j\left(2^{-2q}\right)\right) \ \forall \omega \in \Omega_\Lambda$$

由于 $N(\Lambda_m^r,\omega)(x)$ 关于变量 x 的单调性，得到

$$\frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}(x) \in \mathcal{F}_{\varepsilon,j}$$

因此

$$\mathcal{F} \subset \bigcup_{j=1}^{2^{2q}} \mathcal{F}_{2^{-2q},j}.$$

接下来注意到

$$\Phi(\Phi^{-1}(\alpha)) = \alpha \tag{30}$$

根据假设的 Φ 的连续性。归一化特征值计数函数的取值仅属于 $[0,1]$，因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left(\left(\frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}\left(x_j\left(2^{-2q}\right)\right) - \frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}\left(x_{j-1}\left(2^{-2q}\right)\right)\right)^2\right) \\
&\quad \leq \mathbb{E}\left(\frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}\left(x_j\left(2^{-2q}\right)\right) - \frac{N(\Lambda_m^r,\cdot)}{|\Lambda_m|}\left(x_{j-1}\left(2^{-2q}\right)\right)\right) \\
&\quad = \Phi\left(x_j\left(2^{-2q}\right)\right) - \Phi\left(x_{j-1}\left(2^{-2q}\right)\right) \\
&\quad = j2^{-2q}\frac{|\Lambda_m^r|}{|\Lambda_m|} - (j-1)2^{-2q}\frac{|\Lambda_m^r|}{|\Lambda_m|} \leq 2^{-2q}
\end{aligned}$$

成立，由此可知每个括号的 $L^2(\mathbb{P})$-大小小于或等于 2^{-q}。由于 $N(\Lambda_m^r,\omega)$ 和 $x_{j-1}\left(2^{-2q}\right) \leq x_j\left(2^{-2q}\right)$ 的单调性，条件（BC1）自动满足。根据 $x_j\left(2^{-2q}\right)$ 的定义，对于所有 $q \in \mathbb{N}$ 和 $0 \leq j \leq 2^{2q}$，我们有 $x_j((2^{-q})^2) = x_{4j}((2^{-(q+1)})^2)$，这确保了条件（NBC2）成立。每个对应于 $\varepsilon = 2^{-q}$ 的括号恰好包含四个对应于$\varepsilon = 2^{-(q+1)}$的括号。

我们至多需要 $k = \lceil \frac{1}{2^{-2q}} \rceil$ 个集合，以 $\mathcal{F}$ 所述的方式进行覆盖，因此有

$$N_{[]}(q, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \leq \lceil \frac{1}{2^{-2q}} \rceil = 2^{2q}.$$

□

5.2 集中不等式

利用引理 14 中得到的括号函数界，将定理 13 应用于 evcfs，可得一个集中不等式。

推论 15 （次根指数集中不等式）
设 N为式(6)中定义的特征值计数函数，且 $\Lambda^r_{m,1}$, ...,$\Lambda^r_{m,s}$ 为 $\Lambda^r_m = \left([0,m)^d \cap \mathbb{Z}^d\right)^r \neq \emptyset$ 的平移，使得 $\min\{\mathrm{d}_{set}(\Lambda^r_{m,i}, \Lambda^r_{m,j}) \mid i \neq j\} > r$。则对 $M \geq 2$, $\kappa > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in\Phi^{-1}(\mathbb{Q})}\left|\frac{1}{s}\sum_{i=1}^{s}\frac{N(\Lambda^r_{m,i},\omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda^r_m,\omega)(x)}{|\Lambda_m|}\right| \geq \kappa\right) \leq M\exp\left(-\frac{\sqrt{s}\kappa}{K_M}\right)$$

成立，其中

$$K_M = \left(10\frac{4(M+1)}{\log(3/2)(M-1)} + \frac{4}{\log(M)}\right)\sum_{q=0}^{\infty}2^{-q}\sqrt{2++2q\log(2)} < \infty.$$

证明。 我们首先定义新函数 $N_{\Lambda^r_m}\colon \Omega_{\Lambda^r_m} \to \mathbb{B}$，定义如下

$$N_{\Lambda^r_m}(\nu)(x) := N(\Lambda^r_m, i_{\Lambda^r_m}(\nu))(x)$$

对于 $\nu \in \Omega^{\Lambda^r_m}$ 和 $x \in \mathbb{R}$，其中限制概率空间 $\Omega^{\Lambda^r_m}$ 如 (M2) 中所定义。这里 $\mathbb{B}$是有界右连续函数空间。
For 固定 ν，我们仍有$N_{\Lambda^r_m}(\nu)(x) \leq N_{\Lambda^r_m}(\nu)(y)$，若 $x \leq y$。此外，由(A2)，我们有 e

$$N_{\Lambda^r_m}(\Pi_{\Lambda^r_m}(\omega))(x) = N(\Lambda^r_m, i_{\Lambda^r_m}(\Pi_{\Lambda^r_m}(\omega)))(x) = N(\Lambda^r_m,\omega)(x) \tag{31}$$

对所有 $\omega \in \Omega$，从而$\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\Lambda^r_m}} N_{\Lambda^r_m}(\cdot)(x) = \mathbb{E}N(\Lambda^r_m,\cdot)(x)$。因此，引理 14中所建立的括号可延续至

$$\tilde{\mathcal{F}} := \left\{\frac{N_{\Lambda^r_m}(\cdot)}{|\Lambda_m|}(x) : \Omega_\Lambda \to \mathbb{R} \mid \exists Q \in \mathbb{Q} : x = \Phi^{-1}(Q)\right\}$$

with

$$N_{[]}(q, \tilde{\mathcal{F}}, \mathbb{P}_{\Lambda^r_m}) \leq \lceil\frac{1}{2^{-2q}}\rceil = 2^{2q}.$$

现设 $z_i \in \mathbb{Z}^d$ 使得$\Lambda^r_{m,i} = \Lambda^r_m + z_i$。 则由(M1)，我们有

$$N(\Lambda^r_{m,i},\omega)(x) = N(\Lambda^r_m,\gamma_{z_i}\omega)(x) = N_{\Lambda^r_m}(\Pi_{\Lambda^r_m}(\gamma_{z_i}\omega))(x). \tag{32}$$

注意，由于

$$\Pi_{\Lambda^r_m+z}(\omega) = (\omega_y)_{y\in\Lambda^r_m+z}$$

and

$$\Pi_{\Lambda^r_m}(\gamma_z\omega) = (\omega_{y+z})_{y\in\Lambda^r_m}$$

$\Pi_{\Lambda^r_m+z}(\omega)$ 和 $\Pi_{\Lambda^r_m}(\gamma_z\omega)$包含相同的值，只是指标不同。因此，根据 (M1) 和 (M2), $\left(\Pi_{\Lambda^r_m}\circ\gamma_{z_i}\right)_{1\leq i\leq s}$ 是独立同分布的。

~现在，我们对集合 $\mathcal{F}$ 应用定理 13，其中随机变量 $X_i := \Pi_{\Lambda_m^r} \circ \gamma_{z_i}$独立同分布，从而得到

$$\left\| \sup_{x\in\Phi^{-1}(\mathbb{Q})} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{N_{\Lambda_m^r}(\Pi_{\Lambda_m^r} \circ \gamma_{z_i})(x)}{|\Lambda_m|} - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\Lambda_m^r}} N_{\Lambda_m^r}(\cdot)(x)}{|\Lambda_m|} \right) \right) \right| \right\|_{\psi_{1,M}}$$
$$\leq K''_{\psi,M} \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q} \sqrt{2 + 2q\log(2)}$$

对所有 $M \geq 2$ 和 $K''_{\psi,\,M}$，如定理 13 所示。通过 (31) 和 (32) 代入后可得

$$\left\| \sup_{x\in\Phi^{-1}(\mathbb{Q})} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{N(\Lambda_{m,i}^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} \right) \right) \right| \right\|_{\psi_{1,M}}$$
$$\leq K''_{\psi,M} \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q} \sqrt{2 + 2q\log(2)} =: K_M.$$

最后，我们使用 (O1) 来证明对所有 $\eta > 0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in\Phi^{-1}(\mathbb{Q})} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \left(\sum_{i=1}^{s} \left(\frac{N(\Lambda_{m,i}^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} \right) \right) \right| \geq \eta \right) \leq \frac{1}{\psi_{1,M}\left(\frac{\eta}{K_M}\right)} = M\mathrm{e}^{-\frac{\eta}{K_M}}.$$

使用 $\eta = \kappa\sqrt{s}$ 即可得到所述不等式。 □

我们可以利用下面这个由 Massart 提出的集中不等式，将集中不等式从 s 平方根的指数形式进一步改进为关于 s 的次指数形式。

定理16 ([Mas07，公式 (5.45)])
设 T 是一个可数集，并令 $Z_1, Z_2, ..., Z_s$ 为取值于实数集 $\mathbb{R}^T$ 的独立随机向量，满足 $\mathbb{E}(Z_{i,t}) = 0$ 且对所有 $1 \leq i \leq s$ 和 $t \in T$，$|Z_{i,t}| \leq 1$，其中 $Z_{i,t}$ 是 Z_i 的 t-坐标。令 $\sigma^2 := \sup_{t\in T} \sum_{i=1}^{s} \mathbb{E}((Z_{i,t})^2)$，$U := \sup_{t\in T} \sum_{i=1}^{s} (Z_{i,t})^2$ 且 $Z := \sup_{t\in T} |\sum_{i=1}^{s} Z_{i,t}|$，则对任意 $\eta > 0$

$$\mathbb{P}\left(Z \geq \mathbb{E}Z + 2\sqrt{(\sigma^2 + \mathbb{E}U)\eta} + 2\eta \right) \leq e^{-\eta}.$$

结果是如下推论。

推论 17 （次指数集中不等式）
令 N 为式(6)中定义的特征值计数函数，并令 $\Lambda_{m,1}^r, ..., \Lambda_{m,s}^r$ 为 $\Lambda_m^r \neq \emptyset$ 的平移，使得 $\min\{\mathrm{d}_{set}(\Lambda_{m,i}^r, \Lambda_{m,j}^r) \mid i \neq j\} > r$。则

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x\in\Phi^{-1}(\mathbb{Q})} \left| \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \frac{N(\Lambda_{m,i}^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} \right| \geq \kappa \right)$$
$$\leq \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\kappa+1} - 1\right)^2 s + \frac{K_2}{2}\sqrt{s} \right) \quad \leq \exp\left(-\frac{1}{12}\kappa^2 s + \frac{K_2}{2}\sqrt{s} \right)$$

对所有 $0 < \kappa \leq 1$ 和 $s \geq \left(\frac{K_2}{\kappa}\right)^2$，其中

$$K_2 = \left(\frac{120}{\log(3/2)} + \frac{4}{\log(2)}\right) \sum_{q=0}^{\infty} 2^{-q} \sqrt{2 + +2q\log(2)} < \infty.$$

此外，对于 $0 < \kappa \leq 1$，我们有

$$\mathbb{P}\left(\sup_{x \in \Phi^{-1}(\mathbb{Q})} \left| \frac{1}{s} \sum_{i=1}^{s} \frac{N(\Lambda_{m,i}^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} \right| \geq \kappa \right) \leq \exp\left(-\frac{\kappa^2}{24} s\right).$$

对于 $s \geq \left(12\frac{K_2}{\kappa^2}\right)^2$。

˜证明。 我们对 $X_i := \Pi_{\Lambda_m^r} \circ \gamma_{z_i}$, $T = \mathcal{F}$ 应用定理16,

$$Z_i = (f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i)))_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} = \left(\frac{N_{\Lambda_m^r}(\Pi_{\Lambda_m^r} \circ \gamma_{z_i})(x)}{|\Lambda_m|} - \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}_{\Lambda_m^r}} N_{\Lambda_m^r}(\cdot)(x)}{|\Lambda_m|} \right)_{x \in \Phi^{-1}(\mathbb{Q})}$$

并且 $Z_{i,\ f} = f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i)$，因为这样

$$Z = \sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i=1}^{s} (f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i)) \right|$$

经过归一化后，它就是我们所关注的上确界。我们立即看到 $\mathbb{E}(Z_{i,\ f}) = 0$，并且由于 $0 \leq f \leq 1$，我们还有 $|Z_{i,\ f}| \leq 1$。由于 $X_1, \ ..., X_s$ 相互独立，且所有 ˜$f \in \mathcal{F}$ 都是可测的，我们还知道，对于每个 f，$Z_{1,\ f}, \ ..., Z_{s,\ f}$ 相互独立。因此，向量 $Z_1, \ ..., Z_s$ 相互独立。由此满足定理的要求，我们需要求出 σ^2 和 $\mathbb{E}U$ 的界。我们有

$$\begin{aligned}
\sigma^2 &= \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^{s} \mathrm{Var}(f(X_i)) = \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^{s} \mathbb{E}(f(X_i)^2) - (\mathbb{E}(f(X_i)))^2 \\
&\leq \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^{s} \mathbb{E}(f(X_i)^2) \leq \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^{s} 1 = s
\end{aligned}$$

and

$$U = \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^{s} (f(X_i) - \mathbb{E}f(X_i))^2 \leq \sup_{f \in \tilde{\mathcal{F}}} \sum_{i=1}^{s} 1 = s,$$

因为每个 f 都逐点介于 0 和 1 之间。这意味着 $\mathbb{E}U \leq s$。现在我们只需要给出 $\mathbb{E}Z$ 的一个界。正如定义 8 后所述，由 $\psi_{p,2}$ 生成的 Orlicz范数与由 $\Psi_p = \mathsf{e}^{(x^p)} - 1 \geq x^p$生成的范数相同。因此 $\mathbb{E}X = \|X\|_{\Phi(x)=x} \leq \|X\|_{\Psi_1} = \|X\|_{\psi_{1,2}}$，并且根据与推论 15 相同的论证，我们有

$$\mathbb{E}Z = \sqrt{s}\mathbb{E}\left(\sup_{x \in \Phi^{-1}(\mathbb{Q})} \left| \frac{1}{\sqrt{s}} \sum_{i=1}^{s} \frac{N(\Lambda_{m,i}^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda_m^r, \omega)(x)}{|\Lambda_m|} \right|\right) \leq \sqrt{s} K_2.$$

应用定理16即可得到

$$\mathbb{P}\left(\sup_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\frac{1}{s}\left|\sum_{i=1}^{s}(f(X_i)-\mathbb{E}f(X_i))\right|\geq\overbrace{\frac{K_2\sqrt{s}+2\sqrt{2s}\sqrt{x}+2x}{s}}^{=:\kappa(x,s)}\right)\leq e^{-x}.$$

现在我们需要求出 $x(\kappa,s)$，即 $x\to\kappa(x,s)$ 的反函数。设 $y:=\sqrt{x}$，则需要求解的方程为

$$\begin{aligned}
&K_2\sqrt{s}+2\sqrt{2}\sqrt{s}y+2y^2=\kappa s\\
\Leftrightarrow&y^2+\sqrt{2}\sqrt{s}y+\frac{K_2}{2}\sqrt{s}=\frac{\kappa}{2}s\\
\Leftrightarrow&\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s}\right)^2-\frac{1}{2}s+\frac{K_2}{2}\sqrt{s}=\frac{\kappa}{2}s\\
\Leftrightarrow&\left(y+\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s}\right)^2=\underbrace{\frac{\kappa}{2}s+\frac{1}{2}s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}}_{\text{has to be }\geq 0}
\end{aligned}$$

若 $s\geq\left(\frac{K_2}{\kappa+1}\right)^2$，则该方程可解，且解为

$$y=\sqrt{\frac{\kappa+1}{2}s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}}-\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{s}$$

该值必须为正；当 $s\geq\left(\frac{K_2}{\kappa}\right)^2$ 时这一条件成立，同时也蕴含前述条件。在此条件下，我们有

$$\begin{aligned}
x=y^2&=\frac{\kappa+2}{2}s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}-\sqrt{2s}\sqrt{\underbrace{\frac{\kappa+1}{2}s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}}_{\leq\frac{\kappa+1}{2}s}}\\
&\geq\left(\frac{\kappa+2}{2}-\sqrt{\kappa+1}\right)s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}=\frac{1}{2}\left(\sqrt{\kappa+1}-1\right)^2s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}
\end{aligned}$$

因此

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\sup_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\frac{1}{s}\left|\sum_{i=1}^{s}(f(X_i)-\mathbb{E}f(X_i))\right|\geq\kappa\right)\\
&\quad\leq\exp\left(-\left(\frac{\kappa+2}{2}s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}-\sqrt{2s}\sqrt{\frac{\kappa+1}{2}s-\frac{K_2}{2}\sqrt{s}}\right)\right)\\
&\quad\leq\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\sqrt{\kappa+1}-1\right)^2s+\frac{K_2}{2}\sqrt{s}\right).
\end{aligned}$$

接下来，我们利用 $\left(\sqrt{\kappa+1}-1\right)^2\geq\kappa^2/6$ 对所有 $0\leq\kappa\leq 1$均成立这一点，这可通过进行代换 $\vartheta=\sqrt{\kappa+1}$来验证。由此可得

$$\mathbb{P}\left(\sup_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\frac{1}{s}\left|\sum_{i=1}^{s}(f(X_i)-\mathbb{E}f(X_i))\right|\geq\kappa\right)\leq\exp\left(-\frac{1}{12}\kappa^2s+\frac{K_2}{2}\sqrt{s}\right).$$

当且仅当我们得到非平凡结果时。

$$-\frac{1}{12}\kappa^2 s + \frac{K_2}{2}\sqrt{s} \leq 0$$

这等价于

$$s \geq \left(6\frac{K_2}{\kappa^2}\right)^2.$$

此外，对于

$$s \geq \left(12\frac{K_2}{\kappa^2}\right)^2,$$

我们得到

$$-\frac{1}{12}\kappa^2 s + \frac{K_2}{2}\sqrt{s} \leq -\frac{1}{24}\kappa^2 s$$

因此

$$\mathbb{P}\left(\sup_{f\in\tilde{\mathcal{F}}}\frac{1}{s}\left|\sum_{i=1}^{s}(f(X_i)-\mathbb{E}f(X_i))\right| \geq \kappa\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{12}\kappa^2 s + \frac{K_2}{2}\sqrt{s}\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{24}\kappa^2 s\right)$$

这就是该推论的最后一个结论。 □

现在可以将这些集中不等式与第 4 节的几何近似结合起来。

6 主要结果的证明

这里我们证明第3节中详细陈述的定理 2、备注 4 和定理 5。
定理 *2* 的证明。对 $n > 2m$应用推论 15，其中 $s = |T_{m,\ n}| = \lfloor n/m \rfloor^d$ 且 $\left(\Lambda^r_{m,i}\right)_{1\leq i\leq s} = (\Lambda^r_m + t)_{t\in T_{m,\ n}}$ 可得

$$\mathbb{P}\left(A_{M,n,m,\kappa}\right) \geq 1 - M\exp\left(-\frac{\sqrt{s}\kappa}{K_M}\right)$$

对于推论 15 中的 $M \geq 2$ 和 K_M，其中

$$A_{M,n,m,\kappa} = \left\{\omega\in\Omega : \sup_{x\in\Phi^{-1}(\mathbb{Q})}\left|\frac{1}{|T_{m,n}|}\sum_{t\in T_{m,n}}\frac{N(\Lambda^r_m+t,\omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda^r_m,\omega)(x)}{|\Lambda_m|}\right| < \kappa\right\}.$$

现在我们希望将该陈述从 x 的可数集推广到整个能量轴。通过格利文科–坎泰利型论证，我们得到

$$\omega \in A_{M,n,m,\kappa} \Rightarrow \left\|\frac{1}{|T_{m,n}|}\sum_{t\in T_{m,n}}\frac{N(\Lambda^r_m+t,\omega)(x)}{|\Lambda_m|} - \mathbb{E}\frac{N(\Lambda^r_m,\omega)(x)}{|\Lambda_m|}\right\|_\infty \leq \kappa,$$

主要利用单调性(A5)以及 Φ的若干性质。详情参见 [K¨a24，引理6.18]。结合(23)，我们有

$$\left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - N^* \right\|_\infty \leq 32d\frac{1}{n} + 104\left(2^d - 1\right)\frac{m}{n} + 2\left(4d + 2r(2^d - 1) + 36dr\right)\frac{1}{m} + \kappa. \tag{33}$$

对于 $\omega \in A_{M,n,m,\kappa}$ 和 $n > 4m$ 以及 $m > 2r + 1$。

现在，我们希望选择 m 和 κ 作为 n 的函数，使一致误差尽可能快地收敛。由于 $n > m$ 右侧的第一项并不主导误差，因此与收敛相关的项只有 $\frac{m}{n}$、$\frac{1}{m}$ 和 κ。前两项的最优选择是 $m = \sqrt{n}$，因为任何其他选择都会增大第一项或第二项。由于 m 需要是自然数，我们将选择 $m(n) = \lfloor \sqrt{n} \rfloor$。由此可知，我们可以选择$\kappa(n) = \frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}$，而不会减慢收敛速度。

但现在我们需要检查 $\sqrt{\lfloor n/m(n) \rfloor^d}\kappa(n)$是否仍会随 n增长，否则就不会有集中性。我们有

$$\sqrt{\lfloor n/m(n) \rfloor^d}\kappa(n) \geq \sqrt{\lfloor n/\sqrt{n} \rfloor^d}\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} = \lfloor \sqrt{n} \rfloor^{d/2-1},$$

因此，我们的选择对 $d \geq 3$有效，但对 $d = 1,2$ 无效。 [我们在此排除这些特殊情形，因为对于 $m(n)$和 $\kappa(n)$，我们需要选择不同的函数。这些情形的结果列于备注 4，证明见 [K¨a24，推论 7。3].] 我们之前要求了 $m > 2r + 1$，因此只要 $n > (2r + 1)^k$，$n > m$ 就成立。我们还需要确保 $n > 4m$，但由于

$$\frac{n}{m} = \frac{n}{\lfloor \sqrt[k]{n} \rfloor} \geq n^{1-\frac{1}{k}} \geq \sqrt{n}$$

这由 $n > 16$ 实现。采用这一选择后得到的结果是

$$\begin{aligned}\left\| \frac{N(\Lambda_n, \omega)}{|\Lambda_n|} - N^* \right\|_\infty &\leq 32d\frac{1}{n} + 104\left(2^d - 1\right)\frac{\lfloor \sqrt{n} \rfloor}{n} + \left(8d + 4r(2^d - 1) + 72dr + 1\right)\frac{1}{\lfloor \sqrt{n} \rfloor} \\ &\leq 32d\frac{1}{n} + 104\left(2^d - 1\right)\frac{1}{\sqrt{n}} + \left(8d + 4r(2^d - 1) + 72dr + 1\right)\frac{1}{\sqrt{n} - 1}\end{aligned}$$

正如 (9) 中所述。 N^* 与 N 的对应关系已在 [SSV17，定理 7.2] 中确立。

□

备注 *4* 的证明。为了检查针对 $d = 1$ 和 $d = 2$ 需要作出哪些改变，我们从 $m(n) \sim n^j$ 的一般情形入手，其中某个 $j < 1/2 \in \mathbb{R}$ 和 $\kappa(n) = 1/m(n)$。一致界的收敛将由 n^{-j} 控制，因为 $\frac{m}{n} \sim n^{-(1-j)}$。我们必须确保

$$\sqrt{\lfloor n/m(n) \rfloor^d}\kappa(n) \sim n^{\frac{d(1-j)}{2} - j}$$

随 n 增长，即

$$j < \frac{d}{2(1 + d/2)} = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{for } d = 1 \\ \frac{1}{2} & \text{for } d = 2 \end{cases}.$$

因此，我们选择

$$\begin{aligned} d = 1 &: m(n) = \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor,\ \kappa(n) = \frac{1}{\lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor} \\ d = 2 &: m(n) = \lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor,\ \kappa(n) = \frac{1}{\lfloor \sqrt[3]{n} \rfloor}. \end{aligned}$$

并得到

$$\begin{aligned}\left\|\frac{N(\Lambda_n,\omega)}{|\Lambda_n|}-N\right\|_\infty &\le 32d\frac{1}{n}+104\left(2^d-1\right)\frac{\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor}{n}+\left(8d+4r(2^d-1)+72dr+1\right)\frac{1}{\lfloor\sqrt[k]{n}\rfloor}\\ &\le 32d\frac{1}{n}+104\left(2^d-1\right)\frac{1}{n^{1-1/k}}+\left(8d+4r(2^d-1)+72dr+1\right)\frac{1}{\sqrt[k]{n}-1}\end{aligned}$$

其中

$$k=\begin{cases}4 & \text{for } d=1\\ 3 & \text{for } d=2\end{cases}.$$

□

定理 *5* 的证明。(11) 中的界可依照定理 2 的证明得出，只需将推论 15 换成推论 17 的集中不等式即可。与该证明中的情况一样，由一致界得到的 $m(n)$ 的最佳取值应为 $m(n)=\lfloor\sqrt{n}\rfloor$，但我们还需要确保

- $\lfloor n/m(n)\rfloor^d/m(n)^2$ 在 n 中递增（采用为定理 2 计算出的同一个 $m(n)$ 即可满足这一条件），
- $\lfloor n/m\rfloor^d/m(n)^4\ge(12K_2)^2$。

为了使推论 17 中的公式适用，

令 $m(n)\sim n^{1/k}$，其中 k 尚待确定，得到

$$\frac{\lfloor n/m\rfloor^d}{m(n)^4}\sim n^{d(1-1/k)-4/k},$$

因此需要确保 $d(1-1/k)-4/k>0$，这等价于 $k>\frac{4+d}{d}$。我们偏好的情形 $k=2$ 仅在 $d\ge5$ 时满足这一条件。于是有

$$\frac{\lfloor n/m\rfloor^d}{m(n)^4}\ge\frac{\left(n^{1-1/k}-1\right)^d}{n^{4/k}}$$

并确保其适用性，如果

$$n^{1-1/k}-1\ge n^{4/(dk)}\left(12K_2\right)^{2/d}$$

或者等价地

$$n^{1-1/k-4/(dk)}-n^{-4/(dk)}\ge\left(12K_2\right)^{2/d}.$$

由于

$$n^{1-1/k-4/(dk)}-n^{-4/(dk)}\ge n^{1-1/k-4/(dk)}-1$$

这在以下条件下可以保证

$$n^{1-1/k-4/(dk)}-1\ge\left(12K_2\right)^{2/d}$$

或者等价地

$$n>\left(\left(12K_2\right)^{2/d}+1\right)^{\frac{d}{d-\frac{(d+4)}{k}}}$$

如前所述。 □

7 推广到其他情形

本文讨论的情形仅涉及格点 $\mathbb{Z}^d$ 上带有立方体限制的离散 Schr¨odinger 算子的特征值计数函数。只需对所用的度量近似稍作调整，也可以选用任意单铺砌 Følner 序列来代替立方体。这些调整见 [K¨a24，第 5 节。2], 与我们的主要结果相对应的结果见 [K¨a24，第 7 节。2]此外，也可以考虑有限生成可和群的凯莱图，以及嵌套 Følner 序列上的特征值计数函数；相关内容见 [K¨a24，第 8 节。1]在这里，我们需要采用ε-准铺砌，因此得到的定量结果会稍欠精确。

在本文给出的证明中，我们常常利用薛定谔算子具有有限跃迁范围这一事实，但这一假设可以放宽。例如，我们还可以为长程渗流图上拉普拉斯算子的特征值计数函数推导集中不等式。相关结果见 [K¨a24，第 8 节。2] for $\mathbb{Z}^d$ and 立方体。

致谢

本文的研究部分得到了德国科学基金会通过资助项目 VE 253:9-1随机薛定谔算子：随机性的非线性影响以及 GRK 2131概率中的高维现象——涨落与不连续性的资助

参考文献

[ASV13] S. Ayadi、F. Schwarzenberger 和 I. Veseli´c. 长程渗流图上随机加权哈密顿量的积分态密度的一致存在性. *Math Phys Anal Geom*, 16:309–330, 2013. arXiv:1207.2445, doi:10.1007/ s11040-013-9133-2.[AW15] M. Aizenman 和 S. Warzel. 随机算子. Graduate Studies in Mathematics. 美国数学会, 2015. doi:10.1090//gsm/168.[Bha13] R. Bhatia. 矩阵分析. Graduate Texts in Mathematics. Springer New York, 2013. doi:10.1007/978-1-4612-0653-8.[CL90] R. Carmona 和 J. Lacroix. 随机薛定谔算子的谱理论 ¨. Prob- ability and Its Applications. Birkh¨auser, Boston, MA, 第 1 版， 1990 年版 , 1990. doi:10.1007/978-1-4612-4488-2.[Kir08] W. Kirsch. 随机薛定谔算子导论. 25:1–119, 2008. 附录由 Fr´ed´eric Klopp 撰写.[Klo99] F. Klopp. 周期薛定谔算子随机扰动的内部 Lifshits 尾. *Duke Math. J.*, 98(2):335–396, 1999.[K¨a24] M. K¨amper. 安德森模型中特征值计数函数的显式集中不等式. 博士论文, 多特蒙德工业大学, 2024. doi:10.17877/ DE290R-25115.

[Len02] D. Lenz. 有限字母表子移位上的一致遍历定理. 《遍历理论与动力系统》, 22(1):245–255, 2002. arXiv:math/0005067, doi:10.1017/ S0143385702000111.[LMV08] D. Lenz、P. M¨uller 和 I. Veseli´c. 模型上的积分态密度的一致存在性 $\mathbb{Z}^d$. 《正性》, 12:571–589, 11 2008. arXiv:math-ph/0607063, doi:10.1007/s11117-008-2238-3.[LS05] D. Lenz 和 P. Stollmann. Delone 动力系统的遍历定理及积分态密度的存在性. Journal d Analyse Math ´ematique, 97:1–24, 11 2005. arXiv:math-ph/0310017, doi:10.1007/BF02807400.[LSV10] D. Lenz、F. Schwarzenberger 和 I. Veseli´c. Banach 空间值遍历定理与积分态密度的一致逼近. 《几何学献刊》, 150(1):1–34, 2010. arXiv:1205.3649, doi:10.1007/s10711-010-9491-x.[LV09] D. Lenz 和 I. Veseli´c. 离散结构上的哈密顿量：积分态密度的跳跃与一致收敛. 《数学杂志》, 263:813–835, 12 2009. arXiv:0709.2836v2, doi:10.1007/s00209-008-0441-3.[Mas07] P. Massart. 集中不等式与模型选择：2003 年圣弗卢尔概率暑期学校第 XXXIII 讲. 《数学讲义》. Springer, 2007. doi:10.1007/978-3-540-48503-2.[Pas80] L. A. Pastur. 单体近似下无序系统的谱性质. 《数学物理通讯》, 75(2):179 – 196, 1980. doi: 10.1007/BF01222516.[PF91] L. A. Pastur 和 A. Figotin. 随机与几乎周期算子的谱. Springer 柏林、海德堡, 1991. URL: https://link.springer.com/book/ 9783642743481.[Pol90] D. Pollard. 经验过程：理论与应用. NSF-CBMS 概率与统计区域会议丛书, 2:i–86, 1990. doi:10.1214/cbms/ 1462061091.[PS12] F. Pogorzelski 和 F. Schwarzenberger. 可均群上的 Banach 空间值遍历定理及其应用. Journal d'Analyse Math ´ematique, 130, 05 2012. arXiv:1205.3649, doi:10.1007/s11854-016-0028-6.[Sch12] F. Schwarzenberger. 长程渗流哈密顿算子的积分态密度的一致逼近. 《统计物理学杂志》, 146:1156–1183, 2012. arXiv: 1011.4192v1, doi:10.1007/s10955-012-0431-z.[Shu79] M. A. Shubin. 几乎周期系数椭圆算子的谱理论与指标. 《俄罗斯数学调查》, 34(2):109, apr 1979. doi:10. 1070/RM1979v034n02ABEH002908.[SSV17] C. Schumacher、F. Schwarzenberger 和 I. Veseli´c. 格上几乎可加函数的格利文科–坎特利定理. 《随机过程及其应用》, 127(1):179–208, 2017. arXiv:1606.07664v1, doi:10.1016/j.spa.2016.06.005.

[SSV18] C. Schumacher、F. Schwarzenberger 和 I. Veseli´c. 关于可均群上分布值场的格利文科–坎特利理论、Ornstein–Weiss 准分割以及一致遍历定理。《应用概率年刊》，28(4):2417 – 2450，2018。doi:10.1214/17-AAP1361.[Sto01] P. Stollmann。《受无序性束缚：随机介质中的束缚态》。《受无序性束缚：随机介质中的束缚态》。Birkh¨auser，2001。doi:10.1007/ 978-1-4612-0169-4.[Ves08] I. Veseli´c。随机薛定谔算子积分态密度的存在性与正则性 ¨性质。2008。doi:10.1007/978-3-540-72691-3.[vW96] A. van der Vaart 和 J. A. Wellner。弱收敛与经验过程：统计学应用。纽约：Springer，1996。doi:10.1007/ 978-3-031-29040-4。