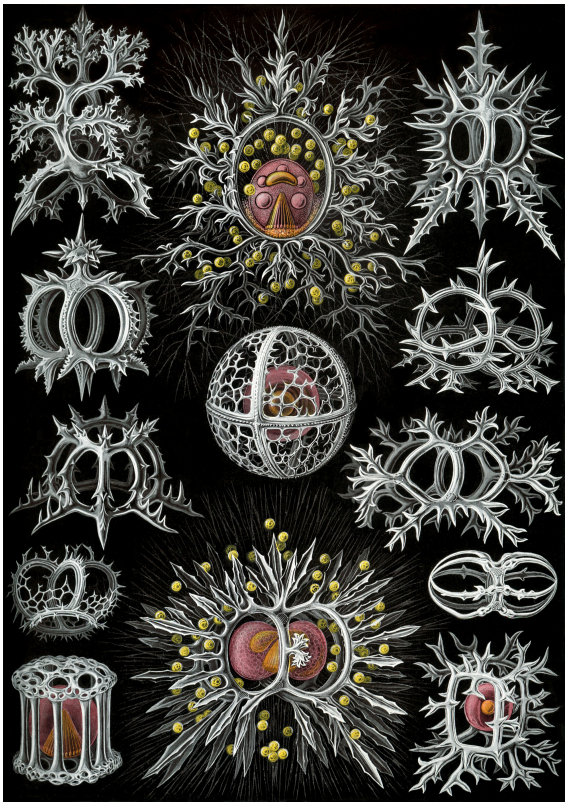
arXiv:2602.18245v1 [math.KT] 20 Feb 2026

稳定紧空间的代数 K-理论

GEORG LEHNER

摘要。我们计算有限型局部化不变量在稳定局部紧空间上的层范畴中的取值，其中包括代数 K-理论。我们的公式同时推广了局部紧豪斯多夫空间和相干（谱）空间的情形，并将若干较小的 K-理论计算还原为其特殊实例。 X



Ernst Haeckel，《自然界的艺术形态》，1904年，第71号图版：Stephoidea，公有领域，来自维基共享资源

2020 数学主题分类。 主分类号：19D99，次分类号：06D22、54B40、18F20、18F70。关键词和短语。 稳定紧空间，Verdier 对偶，补丁拓扑，代数 K-理论，空间上层的 ∞-范畴。

目录

1. 引言 2 1.1. 动机 4 1.2. 证明策略 8 1.3. 致谢 9 2. 预备知识 9 2.1. 紧组合的 ∞-范畴 10 2.2. 可对偶稳定 ∞-范畴与局部化不变量 12 2.3. 拓扑斯 13 2.4. Locale 14 2.5. 子局部 17 3. 稳定局部紧性 21 3.1. 稳定局部紧拓扑斯 21 3.2. 稳定局部紧空间 23 3.3. 稳定局部紧空间上的层 30 3.4. 稳定紧空间的 de Groot 与 Verdier 对偶 32 3.5. 补丁拓扑 34 4. 局部化不变量的 Nisnevich 型下降 38 4.1. D_3 40 上的层条件 4.2. 推广切除性 42 5. 稳定紧空间上的下降 44 6. 主定理 50 附录 A. 任意有限秩自由分配格上的层条件 51 参考文献 52

1. 引言

正如文章 [Efi25a], [Efi25b], [Efi25c]以及 [KNP24], 所阐述的那样, [Nik23] （Nikolaus）的讲义也可参阅。大型范畴的 K-理论近期取得的进展，带来了令人振奋的可能性：可以借助层论的语言，为装配猜想（如 Farrell-Jones 猜想、Novikov 猜想和 Borel猜想）提供一个概念框架。此外，似乎终于有可能弥合（代数）Farrell-Jones猜想与其算子理论对应物 Baum-Connes猜想之间的鸿沟。核心洞见在于，局部化不变量（如代数 K-理论）可以从小型稳定 ∞-范畴扩展到可对偶 稳定 ∞-范畴这一类范畴中。其中包括局部紧豪斯多夫空间 X 上谱层 Sh(X,Sp) 的 ∞-范畴；在算子理论的语境下，它们所扮演的角色类似于形如 $C_0(X,\mathbb{C})$ 的 C^*-代数。尽管整体图景仍远未完善，这个项目的一个重要动因是下面这项计算。

定理 1.1 ([Efi25a]定理 6.11，另见 [KNP24] 定理 3.6.1)。 设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间。那么

$$K^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp}))\simeq H_{cs}(X;K(\mathbb{S}))$$

其中Sp 是谱的 ∞-范畴，右侧表示关于由球面谱的 K-理论给出的局部系统的 X 的紧支层上同调。

定理 1.1 有一些可能的推广。首先，该定理不仅适用于K-理论，也适用于任意有限型局部化不变量，只要该局部化不变量的目标

是一个可对偶的 ∞-范畴。它也可以推广到非常值系数，即当考虑一个取值于可对偶范畴的 X 上的预层 $\mathcal{C}$ 时，也有类似的公式成立。

我们通过大幅扩展空间 X 的类别，提出了定理 1.1 的一个推广。Efimov 在 [Efi25a 的备注 6 中早已指出，空间 X 的豪斯多夫性2], 并非保证 Sh(X，Sp) 可对偶的必要条件；更弱的概念就足够了。回顾拓扑空间 X中开子集之间的远小于关系：两个开集 U，V 满足关系 $U \ll V$，当且仅当对所有开集的有向集 W_i, $i \in I$，都有

$$\bigcup_{i\in I} W_i \supset V \text{ implies } \exists i \in I : W_i \supset U.$$

（换　　句话说，包含映射 $U \subset V$ 是开集偏序集$\mathcal{O}(X)$中的一个紧态射，其中开集取自 X　　.)

定义 1.2。若拓扑空间 X 是清醒的，且远小于关系 $\ll$ 满足以下两个条件，则称其为稳定局部紧：

- 对于所有开集 U，都有 $U = \bigcup_{V \ll U} V$。
- 远小于关系在交下稳定，即 $U \ll V_1$ 且 $U \ll V_2$ 蕴含$U \ll V_1 \cap V_2$。

连续映射 $f\colon X \to Y$ 若 f^{-1} 保持远小于关系，则称为完美。若部分映射$f : X \to Y$ 的定义域为开集，且 f 在其定义域上的限制是完美映射，则称其为部分完美。我们定义范畴 SLC^p，其对象为稳定局部紧空间，态射为部分完美映射。

任意局部紧豪斯多夫空间 X 特别是稳定局部紧空间的一个例子。此外，局部紧豪斯多夫空间全子范畴到稳定局部紧空间范畴的包含映射有一个右伴随

$$\mathrm{LCH}_p \underset{\text{patch}}{\overset{\longrightarrow}{\longleftarrow}} \mathrm{SLC}_p$$

它赋予稳定局部紧空间 X 以其补丁拓扑。（参见第 3 节。　　5)

若 X 是稳定局部紧的，则层范畴 Sh(X，Sp) 是可对偶的（推论 3.52），因此可以对其应用局部化不变量，例如 K-理论。由此我们得到了定理 1.1 的以下推广。

定理 1.3（见定理 6.2）. 设 X 为稳定局部紧，设 $\mathcal{C}$ 为可对偶稳定 ∞-范畴，并设 F 为取值于可对偶稳定 ∞-范畴 E 的有限型局部化不变量 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to E$。则

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq H_{cs}(X^{\mathrm{patch}}; F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})).$$

此处，右端指 X^{patch} 的紧支撑上同调 。我们还得到如下或许令人惊讶的对偶性陈述。给定如上所述的 X 与 $\mathcal{C}$，将 X 上余层的 ∞-范畴定义为

$$\mathrm{Cosh}(X,\mathcal{C}) = \mathrm{Fun}^L(\mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp}),\mathcal{C}).$$

推论 1.4（见推论 6.3）. 设 X 为稳定局部紧，设 $\mathcal{C}$ 为可对偶稳定 ∞-范畴，并设 F 为取值于可呈稳定 ∞-范畴 $\mathcal{E}$ 的有限型局部化不变量 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathcal{E}$ 。则

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Cosh}(X,\mathcal{C})).$$

当 X 是局部紧豪斯多夫时，上述结论可由 Verdier 对偶轻易推出。然而，在缺乏豪斯多夫性的情况下，并不存在一个先验已知的函子，能直接比较 X 上的层与余层。（对于稳定紧空间，存在一个 Verdier 对偶版本，其中涉及 X的*de Groot* 对偶 $X^\vee$；我们将在第 3.4 节讨论这一结论。）

注 1.5. 根据 Efimov [Efi25c], , 万有 有限型局部化不变量$\mathcal{U}\colon \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathrm{Mot}$ 的目标是一个可对偶的稳定 ∞-范畴。由于每个有限型局部化不变量都经由$\mathcal{U}$分解，这意味着至少原则上，我们知道对于任意有限型局部化不变量 $F\colon \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathcal{E}$，$\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})$ 的取值，即使$\mathcal{E}$ 不是可对偶的。

1.1. **动机**。我们应当说明，本文的目的是双重的。其一，定理 1.3 的一个简单动机在于，它可广泛应用于许多不同的例。让我们详细阐述其中一些。

- 在 X 为豪斯多夫的情形下，我们有 $X = X_{\mathrm{patch}}$，并恢复如下已知事实，即
$$K^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq H_{cs}(X; K^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}))$$
由定理 1.1 给出。
- $X = \mathbf{S}$ 为 Sierpiński 空间这一特例，即由二元集合$\mathbf{2}$ 配以具有唯一开点的拓扑所给出的拓扑空间，可能颇具启发。我们有$\mathbf{S}_{\mathrm{patch}} = \mathbf{2}_{\mathrm{disc}}$ 是配备离散拓扑的两点空间。存在自然等价 $\mathrm{Sh}(\mathbf{S},\mathcal{C}) \simeq \mathcal{C}^{\Delta^1}$，并且连续映射 $p\colon \mathbf{2}_{\mathrm{disc}} \to \mathbf{S}$ 诱导该函子
$$\begin{array}{rcl} p_* : \mathcal{C}\times\mathcal{C} & \to & \mathcal{C}^{\Delta^1} \\ (c,d) & \mapsto & (c \times d \to c). \end{array}$$
如下陈述，即 p_* 在局部化不变量上诱导一个等价，恢复了众所周知的可加性定理。因此，我们希望将定理 1.3 视为可加性定理的解析推广。
- 情形$X = \overrightarrow{[0,\infty)}$，其拓扑由形如 $[0,a)$（其中 $0 \le a \le \infty$）的开集给出，也相当重要。存在一个 ∞-范畴之间的等价
$$\mathrm{Sh}(\overrightarrow{[0,\infty)},\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Sh}(\mathbb{R},\mathcal{C})_{\ge 0},$$
采用 Efimov [Efi25a，第 76] 页中的术语。在 $\mathcal{C} = \mathrm{Sp}$ 的情形下，可对偶的 ∞-范畴 $\mathrm{Sh}(\mathbb{R},\mathrm{Sp})_{\ge 0}$ 表示如下函子：它将可对偶的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 映至 $\mathcal{C}$ 中由 $\mathbb{Q}$ 索引的图表；只要 $a < b \in \mathbb{Q}$，其转移态射便为紧态射。Efimov 证明，$\mathrm{Sh}(\mathbb{R},\mathrm{Sp})_{\ge 0}$ 是 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$, [中的一个 ω_1-紧生成元（Efi25a，定理 D），并计算出，对于任意有限型局部化不变量 F，都有 $F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(\mathbb{R},\mathcal{C})_{\ge 0}) = 0$（Efi25a，命题 4.21]）。我们将此结果作为一个特例重新得到，因为 $\overrightarrow{[0,\infty)}^{\mathrm{patch}} = [0,\infty)$ 配备通常度量拓扑，其一点紧化是可缩的。

- 对于相干空间 X（有时也称为谱空间），其补片拓扑与可构造拓扑一致。在这种情况下，定理 1.3 的陈述已在作者先前的文章 [Leh25a] 中得到验证。

- 若 P 是一个局部有限偏序集，也就是说，对每个 $p \in P$，下集 $P_{\le p}$ 都是有限的，我们可以将 $X = P_{\mathrm{Alex}}$ 视为赋予亚历山德罗夫拓扑的集合 P；这意味着开集定义为向下封闭的集合。由此得到一个局部相干空间（[Leh25a，第 3.1] 节），并且可以证明存在自然等价
$$\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Fun}(P^{\mathrm{op}},\mathcal{C}),$$
参见 [Aok23a，命题 5.18].[1] 可以看出，$P^{\mathrm{patch}}{}_{\mathrm{Alex}} = P_{\mathrm{disc}}$ 不过是配备了离散拓扑的 P，因此我们得到
$$K^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Fun}(P^{\mathrm{op}},\mathcal{C})) \simeq K^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq \bigoplus_{p\in P} K^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}),$$

[1]警告：我们对局部有限偏序集的定义采用了与 Aoki 相反的约定。

当然，也可以利用 $\mathrm{Fun}(P^{\mathrm{op}},\mathcal{C})$ 具有按 P 索引的半正交分解这一事实，独立验证该结果，[Efi25a，命题 4.14]。局部有限偏序集的例子包括有限维单纯复形或多面体复形的面偏序集及其变体。它们自然地作为同伦论的工具出现（有限偏序集的情形可用于建模有限 CW 复形的同伦论），也会在考察空间的分层时出现；这些空间上的层在几何的组合领域中发挥着关键作用，例如组合交叉上同调（参见 [Bar+00]、[Kar04] 和 [Bra06]）以及热带（上）同调理论，[Bru+15]。将这些例子与无穷解析例子纳入同一框架，是考察稳定局部紧空间上的层这一一般框架（而非仅限于局部紧豪斯多夫空间）的优势之一。

- 设 V 为有限维实向量空间，γ 为非零的适当凸闭锥。Kashiwara-Schapira [KS02] 在 V 上定义了 γ-拓扑 V_γ，它由满足 $U+\gamma=U$ 的 V 的开子集 U 所构成的集合给出。他们证明

$$\mathrm{Sh}_{V\times\gamma}(V,\mathcal{C})\simeq\mathrm{Sh}(V_\gamma,\mathcal{C}),$$

其中 $\mathrm{Sh}_{V\times\gamma}(V,\mathcal{C})$ 是 V 上微支撑为 $V\times\gamma$ 的层的 ∞-范畴。（参见 [KS17] 中的定理 1.5。）张在 [Zha25] 中证明，任何有限型局部化不变量在此 ∞-范畴上的取值都为零。拓扑空间 V_γ 并非清醒的，但其清醒化会沿锥 γ 的方向添加边界点。由此得到一个稳定局部紧空间。（我们指出，层的 ∞-范畴无法区分一个空间与其清醒化。）用纯拓扑方法重新证明张的结果，将是未来工作中一条有趣的途径：通过从几何上理解 $(V_\gamma)^{sob}$ 的补丁拓扑，并应用定理 1.3。

本文的次要目的是说明，由上述例子列表所展示的稳定局部紧空间类显然具有实用价值，这绝非偶然。我们可以将其视为对下述问题的部分回答。

使 $\mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp})$ 具有可对偶性的最大（便利）空间类 X 是什么?

由于 $\mathrm{Sh}(X,\mathrm{Sp})\simeq\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})\otimes\mathrm{Sp}$，其中 An 表示由 anima/$\infty$-群胚构成的 ∞-拓扑斯，因此也可以转而考虑稍强的条件：∞-拓扑斯 $\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})$ 是一个紧生成的 ∞-范畴。我们提及以下事实。

- 给定偏序集 P 上任意一个对二元交封闭的格罗滕迪克拓扑 τ，存在一个自然的框架 $F=F(P,\tau)$，使得 $\mathrm{Sh}(P,\tau,\mathrm{An})\cong\mathrm{Sh}(F,\mathrm{An})$。这类格罗滕迪克拓扑在许多语境中都会自然出现。
- 如果给定的框架 F 所对应的 ∞-拓扑斯 $\mathrm{Sh}(F,\mathrm{An})$ 是一个紧组合的 ∞-范畴，那么 F 同构于某个清醒且局部紧空间 X 的开集集合。（参见定理 3.49 和定理 3.16。）
- 然而，并非每个清醒且局部紧空间 X 所对应的 ∞-拓扑斯 $\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})$ 都是紧组合的。在 1-拓扑斯的情形下，[JJ82，例 5.5] 已给出了一个反例。
- 如果进一步假设 X 实际上是稳定局部紧的，那么这个问题便会消失，$\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})$ 也会是紧组合的。X 的稳定性恰好对应于 $\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})$ 的这一附加性质：紧态射在积下封闭。

尽管对于某个拓扑空间 X（或者说框架），给定一个可对偶的 $\mathcal{C}$，层范畴 $\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})$ 仍可能是可对偶的，而 X 本身并非稳定局部紧，但这一范畴

稳定局部紧空间的范畴因此在某种意义上是空间范畴的理想候选，因为在其中我们可以得到可对偶的层范畴。

注记 1.6. 一个 ∞-拓扑斯 $\mathcal{X}$ 作为 ∞-范畴是紧组合的这一条件，等价于 $\mathcal{X}$ 在拓扑斯的 ∞-范畴 RTop 中是可指数化的，这一事实由 Anel-Lejay [AL18],[AL], 以及 Lurie [Lur18，第 21.1 节6], 独立证明，并推广了 Johnstone-Joyal [JJ82]关于 1-拓扑斯的类似陈述。

在更深的层面上，稳定局部紧空间理论与可对偶范畴理论之间存在许多密切的平行之处。Efimov 最初观察到这一图景的若干影子，表现为可对偶范畴与紧豪斯多夫空间之间的若干类比，见 [Efi25a，附录 F]。其中包括例如乌雷松引理的若干版本（其形式为断言 $[0,1]$ 与 $\mathrm{Sh}(\mathbb{R},\mathrm{Sp})_{\geq 0}$ 分别是范畴 $\mathrm{CH}^{\mathrm{op}}$ 与 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 的生成元），以及蒂霍诺夫定理（断言包含函子 $\mathrm{CH}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Top}^{\mathrm{op}}$ 与 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}} \to \mathrm{Pr}^L$ 保持余极限）。

不过，这种类比仍然有些模糊。将视角转向稳定局部紧空间时，可以观察到以下两点相似之处。

- 空间 X 是稳定局部紧的，当且仅当 X 是清醒的，并且存在一个伴随图表
$$\mathcal{O}(X) \underset{y}{\overset{\hat{y}}{\underset{\leftarrow k -}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X))$$
内蕴于下有界分配格的 2-范畴中。
- 可达稳定 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是可对偶的，当且仅当存在一个伴随图表
$$\mathcal{C} \underset{y}{\overset{\hat{y}}{\underset{\leftarrow k -}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$$
内蕴于（∞，2）-范畴的（大）稳定 ∞-范畴中。

类似地，稳定局部紧空间之间的部分完美映射以及强连续函子，也可以用纯粹的 2-范畴术语来刻画。其形式化设置是：这两种情形都是某个（∞，2）-范畴上的松弛幂等单子的连续代数 的实例。[2] 相应的 2-范畴版本有时也称为 KZ-单子。对 X 施加清醒性条件这一要求表明，事实上，我们应当考虑框架/局部这一环境（其中$\mathcal{O}(X)$ 就是一个例子），而非拓扑空间，作为 ∞-范畴 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}$ 的恰当形式类比。事实上，框架是分配格上 Ind 单子的代数；同样，可呈稳定∞-范畴（忽略大小问题）也是稳定 ∞-范畴上 Ind 单子的代数。将框架 F映射到其层 ∞范畴 $\mathrm{Sh}(F,\ \mathrm{Sp})$ 的函子，为这两种情形搭建了一座桥梁，并下降为一个从 $(\mathrm{SLC}_p)^{\mathrm{op}}$ 到 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 的良定义函子；它确实将生成元 $\overrightarrow{[0,\infty)}$（见推论3.46）映射到生成元 $\mathrm{Sh}(\mathbb{R},\ \mathrm{Sp})_{\geq 0}$。

Aoki 指出，框架与可呈现范畴之间的关系相当紧密，并将其形式化为层-谱伴随。

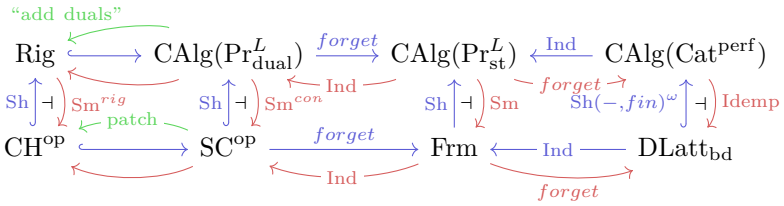
[2]关于 (∞,2)-范畴上的松弛幂等单子的一般理论仍在发展中，Abellán–Blom [AB26] 即将发表相关成果。

定理 1.7 ([Aok25a])。 存在一个伴随

$$\mathrm{Frm} \underset{\mathrm{cIdem}}{\overset{\mathrm{Sh}(-,\mathrm{An})}{\rightleftarrows}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{\mathrm{L}})$$

在框架范畴 Frm 与 *presentably* 对称幺半的 ∞-范畴之间，其中 $\mathrm{Sh}(F, \mathrm{An})$ 是取值于框架 F 上的层的 ∞-范畴，而 $\mathrm{cIdem}(C)$ 是 *presentably* 对称幺半 ∞-范畴 C 的余幂等元谱。

他在文章 [Aok25b], 中进一步充实了这一伴随，我们将其概括为以下伴随的交换图。我们称一个空间 X 稳定紧，如果它既是紧的，又是稳定局部紧的。用 SC 表示稳定紧空间与完美映射所构成的范畴，用 CH 表示紧豪斯多夫空间的全子范畴。（请注意，紧豪斯多夫空间之间的任何连续映射都会自动成为完美映射。）



几点说明。

- 此图中的函子 Sh 和 Sh$(-,\ fin)$ 指的是取值于谱的层。
- 范畴 CAlg(Pr^{L}对偶) 指的是可呈现的对称幺半稳定 ∞-范畴，其底层范畴是可对偶的，且 1 是紧对象，并且 $\otimes$ 在两个变量上都保持紧态射。
- Rig 指的是刚性 可呈现的对称幺半范畴。相关参考资料见[KNP24]和 [Ram24b]。
- 图中所有蓝色箭头都是左伴随，由这些箭头组成的所有方块都交换。红色箭头都是蓝色箭头的右伴随，绿色箭头都是蓝色箭头的左伴随。
- 中间几列分别给出了 Ind 单子的代数和连续代数。
- 最右侧几列在 Ind 下的像给出了相干空间和紧生成稳定 ∞-范畴的情形。这些可理解为自由 连续代数，它们通过直缩生成其余部分。
- 本文不会进一步讨论 CH 和 Rig 与图中其余部分的关系，但补丁拓扑函子除外；这一关系十分有趣。

注 1.8。 从更具哲学意味的角度来看，为什么可以预期定理 1.3 成立，我们指出， K-理论可以视为一种普适测度 。事实上，测度论与关于某些类别的 locale 上的层范畴的 K-理论之间存在若干密切的类比，作者在先前的文章 [Leh25a、7.2] 和 [Leh25b、注 1.20], 中对此作了一定探讨。其动机是观察到，这两个数学领域从根本上说，都只是容斥原理与从下耗尽原理的形式化。我们可以将 locale L 上的测度 定义为连续赋值 $\mu : \mathcal{O}(L) \to [0, \infty]$。如果 L 对应于一个局部紧豪斯多夫空间 X，那么 L 上的局部有限 测度与 X上的经典拉东测度 概念一致，参见 [Leh25b，定理 9.4 和第 12 节。2]事实上，稳定局部紧空间上的局部有限测度确实可以

唯一延拓为 X^{patch}上的局部有限测度，证明见 [KL05，定理 8.3]。反过来， X^{patch} 上的任意局部有限测度都可以沿完美映射 $X^{\mathrm{patch}} \to X$通过推前，在 X 上得到一个局部有限测度，从而得到一个同构

$$\mathrm{Meas}_{\mathrm{lf}}(X) \cong \mathrm{Meas}_{\mathrm{lf}}(X^{\mathrm{patch}}),$$

对于具有开支撑的稳定局部紧空间之间部分定义的完美映射，自然成立。类似地，我们可以预期 K-理论也会有相同行为。这是作者研究定理 1.3 中公式的动机之一。

1.2. **证明策略**。定理 1.3 的证明依托于一个元定理，它推广了 Clausen 在紧豪斯多夫空间情形下提出的一种论证，参见 [KNP24，定理 3.6.11]。

定理 1.9 (参见定理 5.2)。设 D 是一个紧组合的可呈范畴 ∞，且 l et

$$F : \mathrm{SC}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$$

是定义在稳定紧空间范畴上的反变函子，满足：

(1) $F(\emptyset) = 1$.*(2)* 完美下降：对于任意两个完美嵌入 K、 $L \subset X$ ，

$$\begin{array}{ccc} F(K \cup L) & \longrightarrow & F(K) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(L) & \longrightarrow & F(K \cap L) \end{array}$$

这是一个拉回。

(3) 余滤过下降：对于任意 X_i、 $i \in I$，若它们在 稳定紧中构成一个余滤过系统，则

$$F(\lim_{i \in I} X_i) \simeq \mathrm{colim}_{i \in I} F(X_i).$$

那么存在函子的自然等价

$$F \simeq \Gamma((-)^{\mathrm{patch}}; F(\mathrm{pt})).$$

证明在形式上与 Clausen 给出的证明几乎相同，但有一个关键观察：完美嵌入的集合 $K \subset X$ 与闭子集的集合 $C \subset X^{\mathrm{patch}}$同构。因此，对于每个给定的稳定紧空间 X，将 F 限制到 X 的完美嵌入集合上，会得到一个 K-层，其定义在 X^{patch}上。在 K-层与层的等价（定理 3.61）下，对应的层 F^X 满足：其紧支撑截面可计算为 $F^X(X) = F(X)$。现在需要证明这个层是局部常值的。我们将在第 5 节中详细验证这一点。

不难验证， K-理论，或者更一般地说，任何有限局部化不变量，都满足 (1) 和 (3)。（见推论 2.34。）然而，要证明有限局化不变量满足完美下降，则需要进行细致的分析。我们将其归结为两种不同的下降条件：闭与饱和紧下降；随后在第 4 节中利用归纳论证将其推广到所有完美嵌入。这建立在对补丁拓扑的闭集的具体描述之上：这些闭集由闭与饱和紧集的两两并在交运算下生成，见第 3.5 节。

注 1.10。 正如读者将会看到的，定理 1.3 的证明几乎不需要实际进行 K-理论计算。大部分困难在于理解稳定局部紧空间的恰当“点集拓扑”特征，以及它们的 ∞-层范畴。

注 1.11. 我们原本希望，定理 1.3 的证明可以归结为以下断言：

猜想 1.12. 万有有限局部化不变量 $\mathcal{U}$: CAlg(Pr$^L_{\mathrm{dual}}$) →CAlg(Mot) 是从其在 CAlg(Pr$^L_{\mathrm{st},\omega}$) 上的限制右 *Kan* 延拓得到的。

Efimov [Efi25a 的定理 4.16] 表明，不涉及对称幺半性的类似命题成立。若猜想 1.12 确实成立，则可利用伴随方块的可伴随性

$$\begin{array}{ccc} (\mathrm{CohSpc})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathrm{Sh}} & \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st},\omega}) \\ \downarrow \dashv \uparrow & \xleftarrow{\mathrm{Sm}^{con}} & \downarrow \dashv \uparrow \\ (\mathrm{SC})^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{\mathrm{Sh}} & \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}) \\ & \xleftarrow{\mathrm{Sm}^{con}} & \end{array}$$

证明 $\mathcal{U}$(Sh(–)) 沿其在 (CohSpc)^{op} 上的限制作右 Kan 延拓，其中 CohSpc 是相干空间（亦称谱空间）的范畴。由此可知，可伴随方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{ProFin} & \hookrightarrow & \mathrm{CohSpc} \\ \downarrow & \xleftarrow{\mathrm{const}} & \downarrow \\ \mathrm{CH} & \hookrightarrow & \mathrm{SC} \\ & \xleftarrow{\text{补丁}} & \end{array}$$

这将该陈述归结为以下结果：

$$\mathcal{U}(\mathrm{Sh}(X;\mathrm{Sp})) \simeq H^{\bullet}(X^{\mathrm{const}}, \mathcal{U}(\mathrm{Sp})),$$

对于相干空间 X，正如作者在 [Leh25a]，中所证明的那样，再加上一条关于层上同调函子是否为其沿 (ProFin)^{op} →(CH)^{op} 限制的右 Kan 延拓的陈述。这个问题借助新近发展的凝聚上同调框架得以处理，见 [Sch19]。目前，我们尚不确定猜想 1.12 是否正确，因此只能采用本文所述的更细致的证明策略。

备注 1.13. 在 X 为局部紧豪斯多夫的情形下，Efimov [Efi25a, 定理 6.11] 证明了一个更一般的陈述：对于任意取值于可对偶∞-范畴的预层 $\mathcal{C}$:$\mathcal{O}(X)^{\mathrm{op}}$ →Pr$^L_{\mathrm{dual}}$ （定义在 X 上），都有

$$\mathcal{U}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq H^{\bullet}_c(X, \mathcal{U}(\mathcal{C})^{\#}).$$

对于稳定局部紧空间，这个更一般的情形下定理 1.3 也成立是合理的推测，但我们在撰写本文期间并未尝试证明这一点。主要的问题或许在于理解$\mathcal{U}(\mathcal{C})$ 为何应当提升为 X^{patch} 上的预层，其中 $\mathcal{U}$ 表示泛局部化不变量。这一点有待未来工作解决。

1.3. **致谢**。 我们感谢 Thomas Nikolaus、Maxime Ramzi、Thorger Geiß、Phil Pützstück、Dustin Clausen、Bingyu Zhang、Mathieu Anel 和 Bastiaan Cnossen 提供的宝贵意见并参与讨论。此外，作者获得了德国研究联合会（DFG）的资助，项目编号为 427320536–SFB 1442；作者还获得了德国卓越战略 EXC 2044/2 - 390685587 项目“明斯特数学：动力学-几何-结构”的资助。

2. 预备知识

我们大体遵循 ∞范畴论的惯例，具体见 [Lur12], [Lur17] 和 [Lur18]。符号 [1] 表示偏序集 $\{0 \le 1\}$。符号 An 表示由 *anima* （等价地，空间或 ∞-群胚）构成的 ∞-范畴。我们用 Cat$_\infty$ 表示小 ∞-范畴构成的 ∞-范畴，并用 ∞-范畴表示

大 ∞-范畴，记作 $\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$。若 C 是一个 ∞-范畴，则 C^{op} 表示反转其 1-态射所得的 ∞-范畴。符号 Pr^L 表示由可表 ∞-范畴构成的 ∞-范畴，其态射为左伴随函子。赋予 Lurie 张量积 $\mathrm{C} \otimes \mathrm{D} = \mathrm{Fun}^R(\mathrm{C}^{\mathrm{op}}, \mathrm{D})$ 后，这个 ∞-范畴成为对称幺半范畴，其单位为 An，且该张量积分别对两个变量都保持余极限。相应的内部 Hom 为 $\mathrm{Fun}^L(\mathrm{C}, \mathrm{D})$。$(\mathrm{Pr}^L, \otimes)$ 中的交换代数对象由可表对称幺半 ∞-范畴 $(\mathrm{C}, \otimes)$ 给出，其中给定的张量积分别对两个变量都保持余极限。在 Pr^L 中，具有全忠实右伴随的函子 $F\colon \mathrm{C} \to \mathrm{D}$ 称为 Bousfield 局部化。注意，对于任意其他可表 ∞-范畴 E，前复合 F 诱导全忠实函子，当且仅当 F 是 Bousfield 局部化

$$\mathrm{Fun}^L(\mathcal{D}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}^L(\mathcal{C}, \mathcal{E}),$$

参见 [Lur12, 命题 5.5.4.20]。利用张量-Hom 伴随，显然 Bousfield 局部化在 Pr^L 中对张量积封闭。

我们偶尔会用到一些初等的 2-范畴技术。如果 $\mathcal{C}$ 是一个 $(\infty,2)$-范畴，那么讨论对象 c, d之间的内部伴随 是有意义的，

$$c \underset{g}{\overset{f}{\rightleftarrows}} d$$

其定义方式与 ∞-范畴之间伴随的定义类似，参见例如 [GR19，第 12] 章。若内部左伴随 f 的单位 $id_d \Rightarrow gf$ 是一个等价，则称其为内部嵌入 。若余单位 $fg \Rightarrow id_c$ 是一个等价，则称其为内部商 。请注意，这些概念仅取决于$\mathcal{C}$的底层同伦 2-范畴。以下引理有时会派上用场。

引理 2.1. 若 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $(\infty,2)$-范畴之间的一个 2-函子，则它保内部伴随、内部嵌入和内部商。

这个引理的证明归结为以下观察：内部伴随、内部嵌入和内部商都可刻画为等价于从基本 2-范畴图形状出发的 2-函子，而 2-函子的复合仍是 2-函子。我们有时会用到以下标准引理。

引理 2.2。 假设 $\mathcal{C}$ 是一个（∞，2）-范畴，且图表

$$\begin{array}{ccc} & \overset{f_1^L}{\curvearrowleft} & \\ c_1 & \xrightarrow[f_1]{} & d_1 \\ {\scriptstyle i_c^L}\big(\dashv\big){\scriptstyle i_c} & & {\scriptstyle i_d^L}\big(\dashv\big){\scriptstyle i_d} \\ c_0 & \xrightarrow[f_0]{} & d_0 \end{array}$$

是 $\mathcal{C}$ 中的一个图表，其中 i_c^L 和 i_d^L 是内部商，且涉及 i_c、 i_d、 f_0 和 f_1 的方块是交换的。那么 f_0 有一个左伴随，给定为 $i_c^L f_1^L i_d\colon d_0 \to c_0$。

证明直接由普通 2-范畴情形下的同一结论推出，这是一个标准事实。当然，对偶版本也成立，即要求 i_c^L 和 i_d^L 是内部嵌入。

2.1. 紧组合的 ∞-范畴。紧组合的 ∞-范畴这一概念是本文的核心。我们注意到，若将其专门应用于 1-范畴论，紧组合的范畴对应于另一种称为连续范畴的概念。

定义 2.3（另见 [Lur18] 第 21.1 节2, [Efi25a] 定义 1.9 和 1.10）。设 $\mathcal{C}$ 是一个可达∞-范畴。若典范包含映射 $y:\mathcal{C} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$ 存在另外两个左伴随 $\hat{}y \dashv k \dashv y$，则称$\mathcal{C}$ 为紧组合的。

$$\mathcal{C} \underset{y}{\overset{\hat{y}}{\underset{\leftarrow k -}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Ind}(\mathcal{C}).$$

函子 $F:\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 称为强连续，如果该交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{y} & \mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \\ {\scriptstyle F}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}(F)} \\ \mathcal{D} & \xrightarrow[y]{} & \mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \end{array}$$

是二次左可伴随的，即所得的自然变换 $k\mathrm{Ind}(F) \to Fk$ 与 $\hat{}yF \to \mathrm{Ind}(F)\hat{}y$ 均为等价。

由紧组合的 ∞-范畴与强连续函子给出的 $\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 中大 ∞-范畴的所得子范畴记为 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{ca}}$。此外，我们将可表现且紧组合的 ∞-范畴以及它们之间的强连续左伴随函子所构成的 ∞-范畴记为 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{ca}}$，它是 $\widehat{\mathrm{Cat}}_\infty$ 的一个（非全）子范畴。

注意，$y:\ \mathcal{C} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{C})$是全忠实的，因此总存在一个自然变换

$$\hat{y} \to y.$$

定义 2.4. 设 $\mathcal{C}$ 为紧组合的 ∞-范畴。$\mathcal{C}$ 中的映射 $f:\ c \to d$ 称为紧，如果$y(f):\ y(c) \to y(d)$通过自然映射 $\hat{}y(d) \to y(d)$ 分解。

注 2.5. 定义 2.3 中，对函子 $F:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 的方块具有左伴随性，恰好表示 F 保滤过余极限。若 F 本身还有一个右伴随 F^R，那么 F 强连续这一说法等价于 F^R 保滤过余极限。

例 2.6. 若$\mathcal{C}$ 是一个具有滤过余极限的 ∞-范畴，记$\mathcal{C}^\omega$ 为紧对象构成的全子范畴，即由满足 $\mathrm{Map}_{\mathcal{C}}(c,-)$ 保滤过余极限的那些 $c \in \mathcal{C}$ 组成。若$\mathcal{C}$ 满足$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Ind}(\mathcal{C}^\omega)$，则称其为紧生成。此时，<style id='C 特别是紧组合的，其中 $\hat{}y$ 由对包含映射$\mathcal{C}^\omega \hookrightarrow \mathcal{C}$应用 Ind 得到。

定理 2.7 ([Lur18], 第 21.1.2 节)。一个具有滤过余极限的 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 是紧组合的，当且仅当它是某个紧生成 ∞-范畴在保滤过余极限函子下的缩回。特别地，若 $\mathcal{C}$ 是某个紧组合的 ∞-范畴 $\mathcal{D}$ 在保滤过余极限函子下的缩回，则 $\mathcal{C}$ 也紧组合。

我们指出定理 2.7 的两个特例。

- 如果我们有一个伴随

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

其中 R 是全忠实的，并且二者 L, R 都保持滤过余极限，那么 $\hat{}y_{\mathcal{C}}$ 可直接由引理 2.2 得到，即为复合函子 $\mathrm{Ind}(L)\hat{}y_{\mathcal{D}}R$。

- 如果我们有一个伴随

$$\mathcal{C} \underset{R}{\overset{L}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

其中 L 是全忠实的，并且二者 L，R 都保留滤过余极限，那么复合函子 $\hat{}y_{\mathcal{D}}L$可经由 Ind(L)分解，从而得到函子 $\hat{}y_{\mathcal{C}}$。具体而言，这意味着对于每个 $c \in \mathcal{C}$，形式图表 $\hat{}y_{\mathcal{D}}L(c)$ ="余极限"$_{i\in I}d_i$ 具有一个对象的共尾系统 $L(c_j)$ $j \in J$，其位于L的本质像中，进而得到图表 $\hat{}y_{\mathcal{C}}(c)$ ="余极限"$_{j\in J}c_j$。在实践中，这通常难以明确计算，但我们指出，$\mathcal{C}$ 中的映射 $f\colon\ c \to c'$ 是紧的，当且仅当 $L(f)$ 在$\mathcal{D}$中是紧的，参见 [Aok25b，引理 3.26]。

紧组合的可呈现 ∞-范畴在张量积下也封闭。

定理2.8 ([KNP24]命题 2.12.2.)。 ***Lurie*** 张量积 $\otimes$ 将对称幺半结构限制在$\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{ca}}$上，且该结构是闭的。

最后，以下引理有助于判定强连续函子 .

引理2.9 ([KNP24], 引理 2.12.1)。 设 $F:\mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是 $\mathbf{Pr}^L$ 中的一个左伴随函子。那么， F 是强连续的，当且仅当 $\mathbf{Pr}^L$ 中存在一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \xrightarrow{F} & \mathcal{D} \\ {\scriptstyle L_{\mathcal{C}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle L_{\mathcal{D}}} \\ \mathcal{C}' & \xrightarrow{F'} & \mathcal{D}' \end{array}$$

使得 $F'\colon \mathcal{C}' \to \mathcal{D}'$ 是一个保紧对象的左伴随函子，在紧生成的可呈现 ∞-范畴 $\mathcal{C}'$，$\mathcal{D}'$之间，且 $L_{\mathcal{C}}$ 和 $L_{\mathcal{D}}$ 是 $\mathbf{Pr}^L$ 中的内部嵌入，即它们都是全忠实的，且其右伴随保余极限。

2.2. **可对偶稳定 ∞-范畴与局部化不变量**。 我们来回顾可对偶 ∞-范畴的一些基本性质。标准参考文献为 [Efi25a], [KNP24]和 [Ram24a]。

定义 2.10。 称紧组合的可呈示 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 为可对偶的 ，若它也是稳定的。用 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{dual}} \subset \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{ca}}$ 表示由可对偶 ∞-范畴构成的全子范畴。一列

$$\mathcal{C} \xrightarrow{F} \mathcal{D} \xrightarrow{G} \mathcal{E}$$

由可对偶 ∞-范畴 $\mathcal{C}$、$\mathcal{D}$、$\mathcal{E}$ 以及强连续左伴随 F、G 组成的序列，若它是 $\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$中的余纤维序列，且 F 是全忠实的，则称其为正合的，也称为***Verdier***序列。若 ∞-范畴 $\mathcal{E}$ 是可达稳定的，则函子 $F\colon \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{dual}} \to \mathcal{E}$称为局部化不变量，若 $F(0) = 0$ ，且 F 将正合序列映射为$\mathcal{E}$中的纤维序列。若$\mathcal{E}$ 还是可呈示的，则若 F 保留滤过余极限， F 称为有限性保持的。

定理2.11 （参见 [Efi25a] 命题 1.65，以及 [KNP24] 命题 2.12.9）。 包含映射$\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}$ 保余极限且创造余极限。此外，***Lurie*** 张量积 $\otimes$ 限制为$\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$上的对称幺半结构，该结构是闭的；稳定化函子 $-\otimes \mathrm{Sp}\colon \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{ca}} \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 是强幺半的，且是$\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 到$\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{ca}}$的包含映射的左伴随。

令 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 表示由稳定、幂等完备的 ∞-范畴构成的 ∞-范畴。函子 $\mathbf{Ind}\colon \mathbf{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathbf{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 的本质像称为紧生成 稳定 ∞-范畴。在 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 上已经存在局部化不变量的概念，参见 [BGT10], ；其中包括例如代数 K 理论函子或拓扑 Hochschild 同调 THH。Efimov 指出，$\mathbf{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 上任一局部化不变量的取值，都由其沿 Ind 的限制唯一确定。

定理 2.12 （Efimov，参见 [Efi25a] 定理 0.1）。 沿.....的限制 Ind

$$\mathrm{Fun}(\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}, \mathcal{E}) \to \mathrm{Fun}(\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}, \mathcal{E})$$

在有限型局部化不变量的全子范畴上诱导出一个等价。

我们将把由函子 F 定义在 $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$ 上的局部化不变量 F^{cont}的逆像记为。下面是一个简单但有时很有用的观察。

引理 2.13. 设 $F^{\mathrm{cont}}:\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}\to\mathcal{E}$ 为一个有限型局部化不变量，且 $\mathcal{D}$ 为一个可对偶的 ∞-范畴。则 $F^{\mathrm{cont}}(-\otimes\mathcal{D})$ 仍是一个有限型局部化不变量。

证明。 $-\otimes\mathcal{D}$ 这一运算保持零范畴与滤过余极限。此外，它还保持余纤维序列。尚需论证：若 $F:\mathcal{C}\to\mathcal{E}$ 是全忠实的强连续左伴随，则 $F\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ 也是全忠实的。这由如下观察得出：在可对偶的 ∞-范畴之间，强连续左伴随的右伴随 F^R还具有进一步的右伴随 F^{RR}。换言之，F 是 Pr^L 中的一个内部嵌入，并且在 2-函子 $-\otimes\mathcal{D}$ 的像之下将被映为一个内部嵌入。 □

2.3. **拓扑斯**。 下面介绍一些关于高阶拓扑斯的一般概念。我们所遵循的（高阶）拓扑斯参考文献是 [Lur12]。本文中，拓扑斯一词指通常所称的 ∞-拓扑斯，即形如 $\mathrm{Fun}(C^{\mathrm{op}},\mathrm{An})$ 的 ∞-范畴的左正合可达局部化，其中 C 是某个小型 ∞-范畴。若 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$是两个 ∞-拓扑斯，则几何态射 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$由其拉回部分 $f^*:\mathcal{X}\leftarrow\mathcal{Y}$定义，该部分须为保有限极限的左伴随函子。其右伴随记作 $f_*:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$，称为 f 的直接像 部分。拓扑斯与几何态射构成的 ∞-范畴记作 RTop；其中 R 表示我们将映射视为沿右伴随直接像函子定向。

若$\mathcal{X}$ 是一个拓扑斯，则存在唯一的几何态射$\mathcal{X}\to$An，其直接像部分和逆像部分记作

$$\mathcal{X}\underset{\mathcal{X}_*}{\overset{\mathcal{X}^*}{\leftrightarrows}}\mathrm{An}.$$

若$\mathcal{X}=\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})$是某个拓扑空间或局部 X上的层 ∞-范畴，我们也使用记号 $X^*\dashv X_*$。

定义 2.14. 设$\mathcal{X}$ 为一个拓扑斯，$\mathcal{E}$ 为一个可呈示的 ∞-范畴。我们称 ∞-范畴

$$\mathcal{X}\otimes\mathcal{E}=\mathrm{Fun}^R(\mathcal{X}^{\mathrm{op}},\mathcal{E})$$

为$\mathcal{X}$上的$\mathcal{E}$值层 ∞-范畴。（参见例如 [Vol25，第 2.2] 节。）位于

$$\mathcal{E}\xrightarrow{\mathcal{X}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{E}}}\mathcal{X}\otimes\mathcal{E}$$

的本质像中的对象称为常值 $\mathcal{E}$值层。若 $E\in\mathcal{E}$，且上下文清楚，我们将使用记号 E表示值为 E的相应常值层。我们将$\mathcal{X}^*\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 的右伴随记作

$$\Gamma(\mathcal{X};-):\mathcal{X}\otimes\mathcal{E}\to\mathcal{E}$$

并称其为 全局截面函子。

定义 2.15。 设 $f:\mathcal{X}\to\mathcal{Y}$ 是一个几何态射。我们称：

- f 若 f^* 是全忠实的，则称其为可缩的 。[3]
- f 若 f^* 有进一步的左伴随 $f_!$，则称其为本质的 。函子 $f_!$ 称为相对形状 ，即$\mathcal{X}$ 在$\mathcal{Y}$上的相对形状。

拓扑斯 $\mathcal{X}$ 称为可缩的 ，当且仅当唯一的几何态射$\mathcal{X}\to$ An 可缩；称为局部可缩 ，当且仅当$\mathcal{X}\to$ An 是本质的。对于局部可缩的拓扑斯$\mathcal{X}$，态射$\mathcal{X}_!$ 有时也记作 $\Pi^{\mathcal{X}}_\infty$。值 $\Pi_\infty(\mathcal{X})=\Pi^{\mathcal{X}}_\infty(1)$ 称为形状 的$\mathcal{X}$。

[3]这等价于如下说法：根据 [Vol25, 定义 3.1]的意义，$\mathcal{X}$ 在$\mathcal{Y}$ 上的相对形状是平凡的。

关于 topos 的形状理论，更多信息请参阅 [Lur17, 附录 A]以及[Hoy18]。我们将用到以下关于可缩的几何态射和本质几何态射的简单引理。

引理 2.16。设 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 是一个几何态射，且 $\mathcal{E}$ 是一个可呈示的 ∞-范畴。那么 $f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 保持取值于$\mathcal{E}$ 的常值层。此外，如果 f 是一个可缩且本质的几何态射，那么 $f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 的右伴随也保持常值层。

证明。关于 $f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 的断言是显然的。现在假设 f可缩且本质，换言之，我们有如下形式的伴随

$$\mathcal{X} \underset{f_*}{\overset{f_!}{\underset{\leftarrow f^* \rightarrowtail}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}}}} \mathcal{Y}$$

with f^* 全忠实。由于 $- \otimes \mathcal{E}$ 是 Pr^L 上的 2-函子，同样的结论也适用于图表

$$\mathcal{X} \otimes \mathcal{E} \underset{(f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})_*}{\overset{f_! \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}}{\underset{\leftarrow f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}} \rightarrowtail}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}}}} \mathcal{Y} \otimes \mathcal{E}$$

其中 $(f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})_*$表示 $f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 的右伴随，而 $f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}$ 是全忠实的。因此我们看到

$$(f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})_*(\mathcal{X}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}) \simeq (f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})_*(f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})(\mathcal{Y}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}) \simeq (\mathcal{Y}^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}}),$$

换言之，$(f^* \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{E}})_*$保持常值对象。 □

例 2.17. 若 X 是具有 CW 复形同伦型的仿紧拓扑空间，则X 是局部可缩的，且其形状 $\Pi_\infty(X)$与 X的同伦型一致，[Lur17, RemarkA.1.4]。特别地，若 $I = [0, 1]$ 是闭区间，且 $X = I^S$ 是某个集合 S的希尔伯特立方体，则 $\mathrm{Sh}(I^S)$ 是可缩且局部可缩的拓扑斯的一个例子。

此外，若 N 是 S的子集，则典范投影 $I^S \to I^N$ 由典范映射 $I^{S \setminus N} \to$单点空间与 I^N的乘积给出，因此所诱导的几何态射 $\mathrm{Sh}(I^S) \to \mathrm{Sh}(I^N)$ 是可缩且本质的。

2.4. **locale.** 我们将采用例如在 [PP12] 与 [Joh82]中所发展的框架与 locale 的概念。locale 应被视为拓扑空间概念的一种适当推广，[4] 用以修正拓扑空间概念所具有的若干病态缺陷。locale 可理解为拓扑斯的 0-范畴类比。（事实上，通过取层，locale 全忠实地嵌入拓扑斯。）让我们回顾一些基本概念并固定记号。

框架是一个完备格 $(F, \leq)$，其中二元交对任意并满足分配律。[5] 若左伴随$f^* \colon F \to F'$与二元交相容，则称其为部分框架同态。若它还保持最大元（等价地，保持所有有限交），则进一步称其为框架同态。与几何态射类似，我们用 f_*表示相应的右伴随。我们用 $\mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$ 和 Frm 分别表示以部分框架同态和框架同态为态射的框架范畴，并将 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{part}} = (\mathrm{Frm}^{\mathrm{part}})^{\mathrm{op}}$ 和 $\mathrm{Loc} = \mathrm{Frm}^{\mathrm{op}}$ 定义为局部及其间（部分）连续映射所成的范畴。存在一个伴随

$$\mathrm{Top} \underset{\mathrm{pts}}{\overset{\mathcal{O}}{\underset{\leftarrow}{\overset{\curvearrowright}{\underset{\curvearrowright}{}}}}} \mathrm{Loc}$$

[4]虽然严格来说，并非所有拓扑空间都能全忠实地嵌入 locale，但在实际应用中，通常只考虑能够嵌入其中的清醒空间并不会损失任何数学内容。[5]或者用范畴论的语言来说，就是一个作为偏序集的笛卡尔闭可呈范畴。

其中，左伴随将拓扑空间 X 映至其框架$\mathcal{O}(X)$，并将局部 L 映至空间 pts(L)；该空间的底集为 $\mathrm{Map}_{Loc}($pt L)，其中 pt 是由单点空间得到的局部，其框架为[1]。这个伴随是幂等的，并将谱拓扑空间的子范畴与空间局部的全子范畴对应起来。谱性是一种较弱的分离条件，它蕴含 $\mathrm{T_0}$，且被 $\mathrm{T_2}$ 蕴含，参见 [PP12，第一章。1]为简洁起见，我们有时也将表示局部的相应框架记作$\mathcal{O}(L)$，并称其为 L的开集帧。部分框架同态的概念对应于部分连续映射 $f\colon X \to Y$，其域 U 是 X中的开集。注意，$\mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$ 和 Frm 自然构成 (1，2)-范畴，因为它们的同态集自然构成偏序集。

例 2.18. 若 F 是一个框架，且 $U \in F$ 是开集，则 $F_{/U} = \{V \in F \mid V \leq U\}$ 仍是一个框架，称为与 U 相关联的开子局部 。包含映射 $F_{/U} \subset F$ 是一个部分框架同态。它有一个右伴随 $- \wedge U\colon F \to F_{/U}$，这是一个框架同态（因而也是 $\mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$ 中的内部右伴随），在拓扑上对应于开子局部的包含映射。

任何其他部分框架同态 $f^*\colon F \to F\prime$都自然分解为

$$F \xrightarrow{f^*} F'_{/f^*(1)} \to F'$$

其中左侧的函子是一个框架同态。在拓扑上，这意味着每个局部的部分映射都有一个开定义域 f^*(1)，在该定义域上它是一个局部的实际映射。

构造 2.19 （非豪斯多夫单点紧化）。（宽）子范畴 Frm $\to$Frm^{part} 的包含映射有一个左伴随：它将框架 F 映到框架 $F_\top$，后者由添加一个新的最大元得到。在拓扑上，这相当于添加一个新点 $+$，由框架同态 $+^*\colon F_\top \to [1]$ 给出，其中 $+^*(U) = 0$ 对所有 $U \in F$ 都成立。这个点是一个余泛闭 点，意即它唯一的开邻域是最大元 1。这个伴随

$$\mathrm{Frm} \underset{}{\overset{(-)^+}{\underset{}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Frm}_{\mathrm{part}}$$

出于形式上的原因提升为一个伴随

$$\mathrm{Frm}_{/[1]} \underset{\mathrm{coim}}{\overset{(-)^+}{\underset{}{\rightleftarrows}}} \mathrm{Frm}_{\mathrm{part}}$$

其中右伴随将框架同态 $f^*\colon F \to [1]$映射为框架余像(f^*) $=(f^*)^{-1}(0) \subset F$，而左伴随 $(-)_\top$ 变为全忠实。拓扑上，这对应于将 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{part}}$ 全忠实嵌入$L \mapsto L^+$ 带基点局部 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{pt}/}$。其左伴随将一个带基点局部映射为所选基点的（最大）开补集。我们注意到，对于 L^+的情形，新添加的点 $+$ 在L^+中是闭的，其开补集由原来的最大元 $\mathcal{O}(L)$给出。

给定一个局部 L，其 ∞-层范畴 Sh(L) $=$ Sh(L,An) 由 Fun($\mathcal{O}(L)^{\mathrm{op}}$,An) 的全子范畴给出，该全子范畴由满足以下条件的函子 $\mathcal{F}$ 组成：

- $\mathcal{F}(0) \simeq 1$.

对于所有 $U, V \in \mathcal{O}(L)$，都有

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(U \vee V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(V) & \longrightarrow & \mathcal{F}(U \wedge V) \end{array}$$

是一个拉回方块。

• 对于所有有向集 $U_i,\ i \in I$，典范映射

$$\mathcal{F}(\bigvee_{i\in I} U_i) \to \lim_{i\in I} \mathcal{F}(U_i)$$

是一个等价。

∞-范畴 Sh(L) 是 Fun(O(L)^{op},An) 的左正合可达局部化，因此是一个拓扑斯，[Lur12，推论 6.2.1.7 和引理 6.2.2.7]。此外，若 $f: L \to L'$ 是局部的部分映射，很容易看出，前复合 F $\mapsto$(U $\mapsto$F(f^*(U))) 保持层条件，因此定义了一个良定义的函子 f_* : Sh(L) $\to$ Sh(L')。由此可知，f_* 有一个左伴随 f^*，它由左 Kan 延拓后接层化给出。若 f 是局部空间的实际映射，即 f^*: O(L') $\to$O(L) 保持最大元，则诱导的层 ∞-范畴上的左伴随 f^* 保持有限极限，也就是说，f_* : Sh(L) $\to$ Sh(L') 是一个几何态射。对于局部的部分映射 $f: L \to L'$，我们有分解 $L \supset f^*(1) \xrightarrow{f} L'$，这意味着左伴随 f^*: Sh(L') $\to$Sh(L) 可分解为

$$\mathrm{Sh}(L') \to \mathrm{Sh}(L)_{/y_{f^*(1)}} \to \mathrm{Sh}(L)$$

因此不保留终对象，但保留拉回和二元积。[6] 我们将此记录为以下陈述：存在函子

$$\mathrm{Sh} : (\mathrm{Loc}_{\mathrm{part}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Pr}^L \text{ and } \mathrm{Sh} : \mathrm{Loc} \to \mathrm{RTop} \hookrightarrow (\mathrm{Pr}^L)^{\mathrm{op}}.$$

RTop 中 Loc 的本质像里的拓扑斯称为局部化 *topos*。

函子 Sh 有一个左伴随。给定任意拓扑斯$\mathcal{X}$，由 1 的子对象构成的子范畴$\mathcal{X}_{\leq 0}$ =Sub($1_{\mathcal{X}}$)是一个框架，[Lur12，命题 6.4.5.4。]。赋值$\mathcal{X} \mapsto \mathcal{X}_{\leq 0}$ 实际上是层函子的左伴随，[Lur12，命题 6.4.5.7。], 即我们有伴随[7]

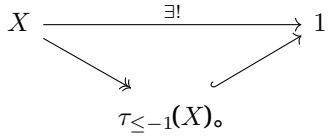
$$\mathrm{Loc} \underset{\mathrm{Sh}}{\overset{(-)_{\leq 0}}{\leftrightarrows}} \mathrm{RTop}.$$

这个伴随的单位由几何态射 $\mathcal{X} \to$Sh($\mathcal{X}_{\leq 0}$) 给出，其拉回部分由沿包含映射 $y : \mathcal{X}_{\leq 0} \hookrightarrow \mathcal{X}$ 作左 Kan 延拓给出。函子 y 有一个左伴随 $\tau_{\leq -1}$，其主要性质概述如下。

命题 2.20. 设$\mathcal{X}$ 是一个拓扑斯。则存在一个伴随

$$\mathcal{X}_{\leq 0} \underset{y}{\overset{\tau_{\leq -1}}{\leftrightarrows}} \mathcal{X}$$

其中，左伴随将 $X \in \mathcal{X}$ 映为其支撑，该支撑由规范的有效满射-单态射分解给出



$\tau_{\leq -1}(X)$。

包含映射 y 保留滤过余极限，且 $\tau_{\leq -1}$ 保留有限积。

[6]遗忘函子从逗号范畴保持可缩极限的陈述见 [GHK20], 中的引理 2.2.7，另见 [Lur12, 命题 4.4.2.9]。在此情形下二元积也得以保持，这是因为 $y_U \in$Sh(L) 是 1 的子对象。[7]我们指出，这个伴随是通过限制从 Aoki 给出的更一般的层-余幂等元伴随导出的，该伴随见定理 1.7。

证明。 我们引用 [Lur12]中的相关部分。左伴随的存在性由命题5.5.6.18给出。 $\tau_{\leq -1}$ 保留有限积这一陈述见 [Lur12，引理6.5.1.2]。 y 保留滤过余极限这一结论，源于在 ∞-拓扑斯中滤过余极限是正合的这一陈述（例7.3.4.7.），因此单态射在滤过余极限下封闭。□

设 (P,τ) 为偏序集 P 上的格罗滕迪克拓扑 τ。将偏序集 $F(P,\tau)$ 定义为所有向下闭且与筛相容的 $U \subset P$ 所成的集合，其含义是：若 $S \subset \{q \in P \mid q \leq p\}$ 是 $p \in P$ 的覆盖筛，则对所有 $q \in S$， $p \in U$ 当且仅当 $q \in U$。

命题 2.21. 设 (P,τ) 为一个站点，且 P 为偏序集。则 $F(P,\tau)$ 是一个框架。若 P 在二元交下闭，则有

$$\mathrm{Sh}(P,\tau) \simeq \mathrm{Sh}(F(P,\tau)).$$

证明。 偏序集 $F(P,\tau)$ 可看作与 $\mathrm{Sh}(P,\tau)$ 的局部反射一致，该局部反射由 $\mathrm{Sub}(1) \simeq \mathrm{Sh}(P,\tau;\ [1])$ 给出，办法是把 $\mathcal{F}\colon P_{\mathrm{op}} \to [1]$ 送到向下闭集合 $\mathcal{F}^{-1}(1)$。该断言的其余部分是 [Lur12], 中引理 6.4.5.6 的特例，该引理表明：若 P 在二元交下闭，则 $\mathrm{Sh}(P,\tau)$ 是局部的。□

警告 2.22. </style}一般而言，不能省略要求对二元交封闭。举例来说，上的平凡格洛滕迪克拓扑会导出框架 Fun(, [1]，它同构于 Alexandroff 拓扑的开集集合。然而，一般而言，$\mathrm{Fun}(P^{\mathrm{op}}, \mathrm{An})$ 并不等价于 $\mathrm{Sh}(P_{\mathrm{Alex}})$。相反，前者经过超完备化后才与后者一致，相关讨论见 [Aok23b, 附录 A] 。

2.5. **子局部**。 下面汇总一些关于子局部的基本概念。

定义 2.23. </style}设 : 是局部之间的连续映射。若是单射，我们称为商映射。若 f^* 是满射，我们称 f 为嵌入。此时， L 也称为 M 的子局部。

注 2.24. 将定义 2.23 扩展到 $f\colon L \to M$ 是部分映射的情形，并讨论部分商和部分嵌入，是合理的。不过，部分嵌入这一概念并未带来新内容：若部分框架同态 f^* 使得 f^* 是满射，那么它会自动保持 1，因为 1 是 M 中所有开集的上确界。

我们注意到，由于框架特别是偏序集，因此 f 是嵌入，当且仅当右伴随 f_* 是单射。子局部的概念可以用多种不同形式来表述。

命题 2.25 ([PP12], 第三章，另见 [Joh82], 第二章第 2 节)。 设 L 是一个局部。以下偏序集彼此同构。

(1) 嵌入的同构类集合 $\{S \to L\}$。(2) 正则单态射的同构类集合 $\{S \to L\}$，即作为映射对 $f,g\colon L \to M$ 的等化子而得到的映射 $S \to L$ 。(3) 子集 $S \subset \mathrm{O}(L)$ 的集合，其中的元素对任意交封闭，并且对于每个 $V \in S, U \in \mathrm{O}(L)$，海廷蕴涵 $U \to V \in S$ 满足相应条件。(4) L 的框架同余集合，即 $\mathrm{O}(L)$ 上的等价关系，它们是 $\mathrm{O}(L) \times \mathrm{O}(L) = \mathrm{O}(L \amalg L)$ 的子框架。(5) L的核集合，即函子 $N : \mathrm{O}(L) \to \mathrm{O}(L)$，使得对于所有 $U, V \in \mathrm{O}(L)$，都有$U \leq N(U)$， $N^2 = N$以及 $N(U \wedge V) = N(U) \wedge N(V)$。

此外，嵌入所成的偏序集实际上是一个余框架；对偶地，按逐点序排列的核所成的偏序集是一个框架。

我们只提及几个关于如何在这些描述之间转换的关键事实。嵌入$i\colon S, \to L$ 导出核 $N = i_*i^*$。相应的同余可以理解为商$p\colon L \amalg L \to L \amalg_S L$。这里， $L \amalg_S L$ 的框架定义为

$$\{(U,V) \in \mathcal{O}(L) \times \mathcal{O}(L) \mid i^*(U) = i^*(V)\} \subset \mathcal{O}(L) \times \mathcal{O}(L),$$

且 S可恢复为自然映射 i_1, $i_2\colon L \to L \amalg_S L$ 的等化子，其中 $(i_1)^*$ 和 $(i_2)^*$ 分别由投影到第一或第二个变量给出，而 $(i_1)_*(U) = (U, N(U))$。我们在此也指出，推前 p_* 由以下公式给出

$$p_*(U,V) = (U \wedge N(V), V \wedge N(U)),$$

这一事实将在后文证明很有用。

引理 2.26。设 $i : S, \to L$ 为一个子局部的嵌入，且$\mathcal{C}$ 为一个可表示的 ∞-范畴。那么，诱导函子

$$i_* : \mathrm{Sh}(S, \mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}(L, \mathcal{C})$$

是全忠实的。

证明。取预层是一个 2-函子，因此会将内部商映射

$$\mathcal{O}(S) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathcal{O}(L)$$

到伴随

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{O}(S)^{\mathrm{op}}, \mathcal{C}) \underset{i_*}{\overset{i^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}(\mathcal{O}(L)^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$$

具有全忠实右伴随。于是， i_* 在层的层面上只需限制到子范畴，因此仍然是全忠实的。□

我们来着重介绍子局部的两个主要例子。

例 2.27. 设 L 是一个局部，且 U 是 L的一个开集。则 $i^*\colon - \wedge U : \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(L)_{/U}$ 是一个满框架同态。相应的子局部称为由 U给出的 L 的**开子局部**。函子 i^* 还有一个左伴随 $i_! : \mathcal{O}(L)_{/U} \to \mathcal{O}(L)$，它由包含映射给出。这是一个部分框架同态。在 ∞-层范畴的层面上，我们得到诱导的伴随

$$\mathrm{Sh}(U, \mathcal{C}) \underset{i_*}{\overset{i_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sh}(L, \mathcal{C}) \quad (i^* \dashv -)$$

其中 i^* 由与 $i_!$前复合给出，而 i_* 由与 i^*前复合给出。此外， $i_!$ 是全忠实的。我们指出，$\mathrm{Sh}(U, \mathrm{An})$ 可以识别为 $\mathrm{Sh}(L; \mathrm{An})_{/y_U}$，而 $i_!$对应于遗忘函子， [Lur12，第 6.3 节。5]。

例 2.28. 设 L 为一个局部， U 为 L 的一个开集。则 $j^*\colon - \vee U : \mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(L)^{U/}$ 是一个满框架同态。相应的子局部称为 L 的与 U 互补的闭子 *locale* 。

下面这个简单的陈述在后文中会非常有用，因此我们想特别强调一下。我们注意到，子局部的交通过拉回来计算，而开子局部和闭子局部在拉回下封闭[PP12, Section 6.3]。

命题 2.29（locale 的第二同构定理）。设 L 是一个局部，$S, \to L$ 是一个子局部，且$C, \to L$ 是一个闭子局部。那么包含映射 $S \wedge C, \to S$ 和 $C, \to S \vee C$ 是闭的，而包含映射

$$S \hookrightarrow S \vee C$$

在各自的开补集上诱导出一个同胚。

证明。包含映射 $S \wedge C \hookrightarrow S$ 和 $C \hookrightarrow S \vee C$ 由沿闭包含$C \hookrightarrow L$的拉回得到，因此它们本身也是闭的。现在令 U 表示 C的开补集，并令对应于 S的核为 N。那么，对应于 $S \vee C$的核由 $N \wedge (- \vee U)$ 给出。我们可以验证，包含映射的左伴随

$$S \hookrightarrow S \vee C$$

仅由 N 给出，因为对于 V 开集，我们有

$$N(N(V) \wedge (V \vee U)) = N(V) \wedge N(V \vee U) = N(V),$$

因为 $N(V \vee U) \geq N(V)$。这意味着开补集上的诱导伴随由 a 给出 s

$$\mathcal{O}(S)_{/N(U)} \underset{-\wedge U}{\overset{N}{\leftrightarrows}} \mathcal{O}(S \vee C)_{/U}$$

我们只需验证这两个伴随实际上互为逆。为此，我们验证以下内容:

- 设 $V \in \mathcal{O}(S)_{/N(U)}$，即 $V = N(V)$ 和 $V \leq N(U)$。那么，
  由于 $V \leq N(U)$ 蕴含 $N(V) \leq N(U)$，$N(V) \wedge N(U) = N(V) = V$

- 设 $W \in \mathcal{O}(S \vee C)_{/U}$，即 $W = N(W) \wedge (W \vee U)$，且 $W \leq U$。那么
  $$W = N(W) \wedge (W \vee U) = (N(W) \wedge W) \vee (N(W) \wedge U) = W \vee (N(W) \wedge U)$$
  因此 $N(W) \wedge U \leq W$。但 $W \leq U$和 $W \leq N(W)$ 也蕴含 $W \leq N(W) \wedge U$，因此 $W = N(W) \wedge U$。

□

局部上的层的一个核心性质，是开闭分解的存在性。[8]

命题 2.30（开闭分解）。设 L 为一个局部，$i : U \hookrightarrow L$为一个开子局部，且$j : U^c \hookrightarrow L$ 为其闭补。设 $\mathcal{C}$ 为一个可表示的 ∞-范畴。那么序列

$$\mathrm{Sh}(U, \mathcal{C}) \underset{i^*}{\overset{i_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sh}(L, \mathcal{C}) \underset{j_*}{\overset{j^*}{\rightleftarrows}} \mathrm{Sh}(U^c, \mathcal{C})$$

i是 Pr^L 中的一个余纤维序列。如果 $\mathcal{C}$ 还是稳定的，那么它就是 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}$ 中的一个正合序列。

证明。函子 i^* 是通过与包含映射 $\mathcal{O}(L)_{/U}$ 前复合得到的，而函子 j_* 是通过与 $- \vee U$ 前复合得到的: $\mathcal{O}(L) \to \mathcal{O}(L)^{U/}$，因此显然，复合函子 $i^* j_*$（通过与常值部分框架同态 $\mathcal{O}(L)_{/U} \to \mathcal{O}(L)^{U/}$ 前复合得到）与由终对象给出的常值函子一致。我们需要证明，j_* 的本质像实际上与 i^* 的核一致。

[8]另请参阅 [Lur17，附录 A。8] 以获取更多信息。

假设 F 是 L 上的一个层，满足 $i^*\mathrm{F} \simeq 1$；换言之，对所有 $V \leq U$，都有 $\mathrm{F}(V) \simeq 1$。定义 F' 为 F 在 $\mathrm{O}(L)^{U/}$ 上的限制。我们声称这是一个层。由于包含映射$i : \mathrm{O}(L)^{U/} \to \mathrm{O}(L)$ 保持非空上确界，因此非空覆盖的层条件得以满足。此外，始对象由 $U \in \mathrm{O}(L)^{U/}$ 给出，而根据假设，$\mathrm{F}(U) \simeq 1$，因此在这种情况下层条件也成立。接下来我们说明存在自然等价 $\mathrm{F} \simeq j_*\mathrm{F}'$；换言之，对所有 $W \in \mathrm{O}(L)$，限制映射 $\mathrm{F}(W \vee U) \to \mathrm{F}(W)$ 都是等价。但请注意，我们有如下拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(W \vee U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(W) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \mathcal{F}(U) & \longrightarrow & \mathcal{F}(W \wedge U)。 \end{array}$$

根据假设，底部两项都是终对象，因此顶部映射是等价。□

推论 2.31. 设 $j : C \hookrightarrow L$ 为 locale 的闭包含，并设 $\mathcal{C}$ 为可呈 ∞-范畴。则 $j_* : \mathrm{Sh}(C, \mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}(L, \mathcal{C})$ 保持滤过余极限。

证明。 这是直接的，因为 $\mathrm{Sh}(C, \mathcal{C})$ 可等同于 L 上满足 $i^*(\mathcal{F}) \simeq 1$ 的层 $\mathcal{F}$ 的全子范畴。函子 i^* 保持余极限，且取常值为终对象的滤过余极限仍为终对象。□

推论 2.32. 设 L 为一个局部，并假设 $\mathcal{C}$ 是可呈稳定 ∞-范畴。若 $\mathrm{Sh}(L, \mathcal{C})$ 是可对偶 ∞-范畴，则对 L 的任意开集 U，命题 2.30 中给出的序列是可对偶 ∞-范畴的正合序列。

给定任意连续景映射 $f : L \to M$，我们可以将 f 唯一地（在显然的同构意义下）分解为

$$L \twoheadrightarrow \mathrm{im}(f) \hookrightarrow M$$

其中映射 $f : L \twoheadrightarrow \mathrm{im}(f)$ 是商映射，而映射 $\mathrm{im}(f) \to M$ 是对应于核 f_*f^* 的子局部的包含映射，参见 [PP12, IV.1.4.]。这个像分解的存在带来了以下令人欣喜的结果。

引理 2.33 （参见 [Joh02]A.1.3.1。）。 设 L 是一个局部。包含映射

$$\mathrm{Sub}(L) \hookrightarrow \mathrm{Loc}_{/L}$$

有一个左伴随，定义为 $(f : M \to L) \mapsto \mathrm{im}(f)$。

特别地，子局部的有向交与在范畴 Loc 中计算的极限一致；这一事实对以下推论很有用。

推论 2.34. 设 L 是一个局部，$S_i,\ i \in I$ 是 L 的子局部的一个余滤族，且 $\mathcal{C}$ 是一个可表示的∞-范畴。记 S_i 这些子局部的交为 $S = \bigwedge_{i \in I} S_i$。那么

$$\mathrm{Sh}(S, \mathcal{C}) \simeq \mathrm{colim}_{i \in I} \mathrm{Sh}(S_i, \mathcal{C}),$$

其中余极限是在范畴 Pr^L 中取的。

证明。 由于 Lurie 张量积对每个变量都保持 Pr^L-余极限，我们不妨假设$\mathcal{C} = \mathrm{An}$。现在结论直接由引理 2.33 得出。函子

$$\mathrm{Sh}(-, \mathrm{An}) : (\mathrm{Loc}^{\mathrm{op}}) = \mathrm{Frm} \to \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L)$$

由定理 1.7 可知是左伴随，而 $\mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^L)$ 中的滤过余极限是按 Pr^L 中的滤过余极限计算的。□

3. 稳定局部紧性

在接下来的章节中，我们将讨论稳定局部紧空间及其上的层。首先引入更一般的稳定局部紧拓扑斯概念会更为方便。

3.1. **稳定局部紧拓扑斯**。

定义 3.1. 设$\mathcal{X}$ 为一个拓扑斯。若 $1 \in \mathcal{X}$ 是一个紧对象，则称$\mathcal{X}$ 为紧的。若$\mathcal{X}$ 是一个紧组合的 ∞-范畴，则称$\mathcal{X}$ 为局部紧的。局部紧拓扑斯之间的几何态射 $f : \mathcal{X} \to \mathcal{Y}$ 若 f^* 强连续，则称其为完美的。若$\mathcal{X}$ 是局部紧的，且对角态射 $\Delta : \mathcal{X} \to \mathcal{X} \otimes \mathcal{X}$ 是完美几何态射，则称$\mathcal{X}$ 为稳定局部紧的，或称拟分离的。若$\mathcal{X}$ 稳定局部紧且紧，则称其为稳定紧的。[9]

拓扑斯$\mathcal{X}$ 具有局部紧性是一项很好的性质。Anel 和 Lejay [AL18], [AL], 以及 Lurie [Lur18, 第 21.1 节6]分别证明了：拓扑斯$\mathcal{X}$ 局部紧，当且仅当$\mathcal{X}$是 RTop 中的一个可指数化对象，即函子$\mathcal{X} \otimes -$ 有一个右伴随。此外，显然，若拓扑斯$\mathcal{X}$ 局部紧，且$\mathcal{C}$ 是一个可对偶的稳定 ∞-范畴，则层 ∞-范畴 $\mathrm{Sh}(\mathcal{X}, \mathcal{C}) = \mathcal{X} \otimes \mathcal{C}$是可对偶的。因此，局部紧拓扑斯为我们提供了丰富的可对偶稳定 ∞-范畴，供我们研究。稳定性应被视为一种分离条件，类似于概形的拟分离性，并且可以用不同的方式表述。

Pr命题 3.2. 设 $\mathcal{X}$ 为局部紧拓扑斯。则下列条件等价。

(1) $\mathcal{X}$ 是稳定局部紧的。(2) 函子 $\hat{}y : \mathcal{X} \to \mathrm{Ind}(\mathcal{X})$ 保持二元积。(3)
若 f, g是 $\mathcal{X}$中的两个紧映射，则它们的积 $f \times g$ 也是紧映射。

下面的引理将会有用。

引理 3.3 ([Aok25b], 命题 3.32)。 设 $\mathcal{C}$, $\mathcal{D}$, $\mathcal{E} \in \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{ca}}$，且 $F : \mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$是一个在两个变量上都保持余极限的函子。则诱导的左伴随函子 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 连续，当且仅当对 $\mathcal{C}$中任意紧映射 f与 $\mathcal{D}$中任意紧映射 g，映射 $F(f, g)$ 是 $\mathcal{E}$ 中的紧映射。

我们将对引理 3.3 作一处细微改动。注意

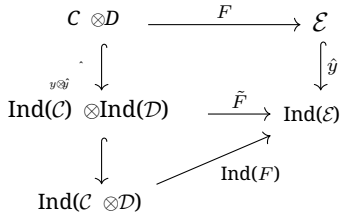
$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \otimes \mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \simeq \mathrm{Ind}(\mathcal{C} \otimes^{rex} \mathcal{D})$$

其中 $\mathcal{C} \otimes^{rex} \mathcal{D}$ 是具有有限余极限的 ∞-范畴的张量积， [Lur17，第 4.8 节1]。由于$\mathcal{C} \otimes^{rex} \mathcal{D} \to \mathcal{C} \otimes \mathcal{D}$ 全忠实地嵌入，我们看到

$$\mathrm{Ind}(\mathcal{C}) \otimes \mathrm{Ind}(\mathcal{D}) \hookrightarrow \mathrm{Ind}(\mathcal{C} \otimes \mathcal{D})$$

[9]我们指出，准分离性远弱于拓扑斯 $\mathcal{X}$ 在 [Aok23a，定义 6.1.], 意义下为分离 的概念，后者要求对角态射是适当的。例如，Sierpiński 空间上的层拓扑斯是拟分离的，但不是分离的。

是一个全忠实的强连续左伴随。现在，若 $F\colon \mathcal{C}\times\mathcal{D}\to\mathcal{E}$ 如上所述，我们可以考虑该图表



其中 $\tilde{F}$ 定义为复合函子 $\mathrm{Ind}(F)i$。由此可立即得到以下结论。

引理 3.4. 函子 F 强连续，当且仅当 $F(\hat{}y\otimes\hat{}y)\simeq\hat{}yF$。

命题 *3.2* 的证明。 这是引理 3.3 和引理 3.4 应用于 $\times$ 的特例：$\mathcal{X}\otimes\mathcal{X}\to\mathcal{X}$。 □

例 3.5. ∞-拓扑斯 An 是稳定紧的，因为 $\hat{}y\colon \mathrm{An}\to\mathrm{Ind}(\mathrm{An})$ 是将 Ind 应用于包含映射 $\mathrm{An}^{\omega}\hookrightarrow\mathrm{An}$ 得到的，而该包含映射对有限积封闭。更一般地，若 $X\in\mathrm{An}$，则 ∞-拓扑斯 $\mathrm{An}_{/X}\simeq\mathrm{Fun}(X,\mathrm{An})$ 总是局部紧的。当且仅当 $X\in\mathrm{An}^{\omega}$ 时，它是紧的。不过，稳定性常常会失效：考虑 $X=S^1$。此时，$\hat{}y$ 由将 Ind 应用于包含映射 $\mathrm{An}^{\omega}_{/S^1}\hookrightarrow\mathrm{An}_{/S^1}$ 得到。该包含映射不对二元积封闭：在 An 中，单点空间 $\mathrm{pt}\to S^1$ 的包含映射与其自身的拉回是 $\mathbb{Z}$，它不是紧的 anima。

例 3.6. 设 D 是一个具有二元积的小型 ∞-范畴。那么，$\mathrm{PSh}(D)=\mathrm{Fun}(D^{\mathrm{op}},\mathrm{An})$ 是稳定局部紧的。在恒等式 $\mathrm{PSh}(D)\otimes\mathrm{PSh}(D)\simeq\mathrm{PSh}(D\times D)$ 下，对角态射 Δ^* 由积函子 $\times\colon D\times D\to D$ 的左 Kan 延拓给出，因此是强连续的。

定义 3.7. 若几何态射 $i\colon\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ 满足 i_* 全忠实，则称其为 $\mathcal{X}$ 的子拓扑斯。此外，若 i_* 保持滤过余极限，则称其为完美 子拓扑斯。

命题 3.8. 设 $\mathcal{X}$ 是一个拓扑斯，且 $i\colon\mathcal{Y}\to\mathcal{X}$ 是一个完美子拓扑斯。

- 若 $\mathcal{X}$ 是紧的，则 $\mathcal{Y}$ 也是紧的。
- 若 $\mathcal{X}$ 是局部紧的，则 $\mathcal{Y}$ 也是局部紧的。
- 若 $\mathcal{X}$ 是稳定局部紧的，则 $\mathcal{Y}$ 也是稳定局部紧的。

证明。 如果 $1\in\mathcal{X}$ 是紧的，那么 $i^*(1)=1\in\mathcal{Y}$也是紧的，从而证明了第一个断言。第二个断言由定理 2.7 得出。特别地，$\hat{}y_{\mathcal{Y}}$ 存在，且由 $\mathrm{Ind}(i^*)\hat{}y_{\mathcal{X}}i_*$ 给出。这蕴含了最后一个断言，因为如果 $\mathcal{X}$ 是稳定局部紧的，那么函子 $\hat{}y_{\mathcal{Y}}$ 是由保持二元积的函子复合而成的。□

稳定局部紧拓扑斯在取开子拓扑斯时也保持闭合。

命题 3.9。 设 $\mathcal{X}$ 是一个拓扑斯，且 $U\in\mathcal{X}$ 是 1 的一个子对象。

- 如果 $\mathcal{X}$ 是局部紧的，那么 $\mathcal{X}_{/U}$也是局部紧的。
- 如果 $\mathcal{X}$ 是稳定局部紧的，那么 $\mathcal{X}_{/U}$也是稳定局部紧的。
- 如果 $\mathcal{X}$ 是紧的，且 U 是一个紧对象，那么 $\mathcal{X}_{/U}$ 是紧的。

证明。 注意到遗忘函子 $\mathcal{X}_{/U}\hookrightarrow\mathcal{X}$ 是全忠实的，因为 U 被假定为 1 的子对象，并且具有保余极限的左伴随 $-\times U$，由此可直接推出定理 2.7。请注意，定理 2.7 后的注记还指出，$\mathcal{X}_{/U}$ 中的对象/态射是紧的，当且仅当将其视为对象/态射时是紧的。遗忘函子保二元积，因此稳定局部紧性的结论随之成立。根据同样的推理，关于$\mathcal{X}_{/U}$ 的紧性的结论显然成立。□

注记 3.10。 显然，紧性并不会在传递到任意开子拓扑斯时得到继承。

3.2. **稳定局部紧空间**。 现在来定义本文关注的主要拓扑空间类：所谓的稳定局部紧空间。 关于稳定局部紧空间理论的标准参考文献有 [Gie+03，第 VI 节；6], [Gou13，第 9] 节；以及 [Law11]。[10]

定义 3.11。 设 F 是一个框架。我们称 F 为

- 局部紧，如果将 F 视为一个 ∞-范畴时，它是紧组合的，
- 稳定局部紧，如果此外 $\hat{}y : F \to \mathrm{Ind}(F)$ 是一个部分框架同态，并且
- 稳定紧，如果 $\hat{}y : F \to \mathrm{Ind}(F)$ 是一个框架同态。

局部紧框架之间的部分框架同态 $f^* : F \to F\prime$ 若为强连续，则称为完美 。我们定义以下范畴：

- SLCFrm^{p} ，其对象为稳定局部紧框架，态射为部分完美框架同态。
- SCFrm，其对象为稳定紧框架，态射为完美框架同态。

定义 3.12。 若谱拓扑空间 X 所对应的框架 $\mathcal{O}(X)$ 是（稳定）（局部）紧的，则称该空间为（稳定）（局部）紧空间。[11] 具有开支撑的部分定义连续映射 f 若其对应的部分框架同态 f^{-1} 是完美的，则称为完美。我们定义以下范畴：

- SLC^{p} ，其对象为稳定局部紧空间，态射为部分定义的完美 连续映射。
- 稳定紧空间与完美连续映射的稳定紧性。

我们可以将定义 3.11 和 3.12 改述为以下更为经典的术语。回顾框架 F 的开集之间的 远小于 关系：若 $U \le V \in F$ 是两个开集，我们称 U 远小于 V，记作 $U \ll V$，如果对于每个有向开元族 $W_i,\ i \in I$，都有

$$V \le \bigvee_{i \in I} W_i \text{ implies } \exists i \in I : U \le W_i.$$[12]

若 U 是紧开集 ，则称其为紧开集，当且仅当 $U \ll U$。框架／空间是紧的，当且仅当 1 是紧开集。

命题 3.13. 设 F 是一个框架。

- F 是局部紧的，当且仅当对于所有开集 $U \in F$，都有 $U = \bigvee_{V : V \ll U} V$
- F 是稳定局部紧的，当且仅当它是局部紧的，并且只要 $U \ll V_1$ 且 $U \ll V_2$ ，就有 $U \ll V_1 \wedge V_2$。
- F 是稳定紧的，当且仅当 F 是稳定局部紧的，且 $1 \in F$ 是紧开集。

设 $f^* : F \to F\prime$ 是一个部分框架同态。那么， f^* 是完美的，当且仅当它保持远小于关系 $\ll$；等价地说，它的右伴随 f_* 保持有向上确界。

这些事实的证明很直接，可以在 [Aok25b 的命题 4.4 和 4.6] 所给的证明中找到（略有不同）。

注 3.14. 人们可能会想把完美映射称为适当映射；然而，文献中真映射这一术语通常还默认满足闭性。

---

[10] 我们提醒读者注意术语上的冲突。在参考文献 [Gou13] 和 [Gie+03] 中，相干作为空间的一种性质，指的是远小于关系在交下稳定；而 [Leh25a] 中所用的相干空间，指的是通常也称为谱空间的性质，这与 [Joh82] 中使用的术语相干局部一致。按照 [Lur18，附录 A]，这种术语与相干拓扑斯这一更一般的概念相符。[11] 我们注意到，文献中有时将空间的局部紧性称为核紧性，这比朴素地要求每个点都有一个紧邻域更强。[12] 这就是说，当把 F 视为一个范畴时， $U \le V$ 是一个紧态射。

命题 3.15. 清醒的局部紧空间 X 是稳定局部紧的，当且仅当对角态射

$$\Delta : X \to X \times X$$

是一个完美映射。此外， X 是紧的，当且仅当典范映射 $X \to$单点空间是完美的。

证明。 逆像部分 $\Delta^* : \mathcal{O}(X) \otimes \mathcal{O}(X) \to \mathcal{O}(X)$由将 $U \otimes V$映到 $U \wedge V$给出。明白这一点后，我们看到第一个断言是引理 3.3 的一个特例。关于紧性的陈述可通过如下观察得出：$\mathcal{O}$(单点空间) $= \{\emptyset \subset$单点空间$\}\}$ 只有一个非平凡紧元，因此 $p :\ X \to$ 单点空间是完美的，当且仅当 p^{-1}(单点空间)是紧开集。□

根据定义，稳定（局部）紧空间的概念仅涉及其对应的框架。由于我们还假设了清醒性，因此稳定（局部）紧空间范畴的反范畴全忠实地嵌入稳定（局部）紧框架。伯克霍夫完备性定理的一个变体保证这是一个范畴等价。

定理 3.16 （[Joh82],第 311 页）。 局部紧标架是空间的。

推论 3.17。 存在范畴等价

$$(\mathrm{SLC}_p)^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{SLCFrm}_p \text{ and } (\mathrm{SC})^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{SCFrm},$$

在对象上由 $X \mapsto \mathcal{O}(X)$ 给出。

我们想讨论几种遗传性质。稳定局部紧空间在完美子空间、部分完美商和不交并下封闭。

定义 3.18。 设 L 是一个局部。 L 的一个部分商 由一个部分映射 $p\colon\ L \to S$ 给出，使得p^* 是全忠实的。如果此外 f_* 保持有向上确界，则称部分商是完美的。一个部分商 $p :\ L \to S$，若 p 是一个（全局定义的）景映射，则简称为商。

命题 3.19。 设 X 是一个局部，且 $p\colon\ X \to S$ 是一个部分商。

- 如果 X 是局部紧的，那么 S也是。
- 如果 X 是稳定局部紧的，那么 S也是。
- 如果 X 是局部紧的，且域 p^*(1) 是紧开集，那么 S 也紧。

证明。 这是定理 2.7 的直接应用。 □

例 3.20。 考虑局部紧框架 F 的一个开集 U，即可得到一个具体例子。包含映射 $F_{/U} \hookrightarrow F$ 实际上是一个部分完满商的逆像部分，因为它有保余极限的左伴随 $- \wedge U$。由此可知，开子局部 $F_{/U}$ 是局部紧的，而包含映射$F_{/U} \hookrightarrow F$ 是一个部分完美框架同态。如果 F 是稳定局部紧的，那么 $F_{/U}$ 也是；不过，只有当 U 是 F 的紧开集时，才能保证其紧性。

If f^* : 如果 $F \to F\prime$ 是部分完美框架同态，那么在自然分解中

$$F \xrightarrow{f^*} F'_{/f^*(1)} \to F'$$

左侧的函子也是完美的，因为其右伴随由 f_* 给出：$F'_{/f^*(1)} \to F$，且上方框架中的上确界按 F' 中的上确界计算。因此，与局部的部分映射的情形类似，我们可以将部分完美映射视为定义在某个开定义域 f^*(1) 上的完美映射。

定义 3.21. 设 L 是一个 locale。子局部 $i\colon\ S \hookrightarrow L$ 称为完美的，若 i_* 保持有向上确界。

命题 3.22. 设 X 是一个 locale，且 $i\colon\ S \hookrightarrow L$ 是一个完美子局部。

- 如果 X 是局部紧的，那么 S也是如此。

- 如果 X 是稳定局部紧的，那么 S也是如此。
- 若 X 是紧的，则 S 也是紧的。

证明。 其证明与命题 3.8 的证明完全类似。 □

例 3.23。 设 X 是一个局部， U 是一个开集。与 U 的闭补相对应的子局部 C 由 i_* 给出：$\mathcal{O}(X)^{U/} \hookrightarrow \mathcal{O}(X)$, 显然是完美的。（该包含映射保持非空上确界，特别是有向上确界。）

现在我们来讨论对余积的封闭性。

引理 3.24。 设 X 是一个局部，且 $U_i, i \in I$ 是一个开覆盖，其中所有 U_i 都是局部紧的。那么X 是局部紧的。

证明。 包含映射 $\mathcal{O}(X)_{/U_i}$ 、$\to \mathcal{O}(X)$ 是强连续偏标架同态，因而保持远小于关系。令 V 为 X的一个开集。于是

$$V \wedge U_i = \bigvee_{W \ll V \wedge U_i} W$$

因为 U_i 是局部紧的。因此

$$V = \bigvee V \wedge U_i = \bigvee_{i \in I, W \ll V \wedge U_i} W$$

是 V的远小于元的并。 □

备注 3.25。 我们不能期待稳定局部紧性的类似陈述成立。考虑由 $[0,1] \amalg_{(0,1)} [0,1]$得到的局部 L。那么 L 可由两个稳定局部紧开集覆盖，因而是局部紧的。然而， L 不是稳定局部紧的。

命题 3.26。 令 X_i、 $i \in I$ 为一族局部，并令 $X = \coprod_{i \in I} X_i$。

- 若所有 X_i 都是局部紧的，那么 X也是局部紧的。
- 若所有 X_i 均为稳定局部紧，则 X亦然。
- 若 I 有限，且所有 X_i 均为紧，则 X亦然。

我们指出，框架$\mathcal{O}(X)$是作为诸框架$\mathcal{O}(X_i)$的积得到的。该陈述应用于有限指标集的情形亦可参见 [Gou13, 命题 9.2.1]。

证明。典范包含 $j_i : X_i \hookrightarrow X$ 是开的，并对应于由投影给出的框架同态

$$\prod_{i \in I} \mathcal{O}(X_i) \to \mathcal{O}(X_i)$$

其左伴随将 X_i 的开集 U 映为序列$(j_i)_!(U)$，该序列在值 i处为 U ，否则为0。局部 X 具有由诸 X_i 在 j_i下的像给出的开覆盖。因此，由引理 3.24， X 的局部紧性可由 X_i 的局部紧性推出。

为看出稳定局部紧性，注意 $V \ll V'$ 在 X 中成立，仅当 V 包含于有限多个包含映射 j_i的像之中，因为 V' 可被开集 $V' \wedge X_i$穷尽。因此，若 $V \ll V_1$ 与 $V \ll V_2$成立，我们可限于支撑在 X_i的某个有限并上，此时该陈述是清楚的。同样的推理适用于关于紧性的最后一点。□

让我们给出一些稳定局部紧 locale 的具体例子。

例 3.27. 每个局部紧豪斯多夫空间 X 都是稳定局部紧的。此外，在局部紧豪斯多夫空间之间，可以看出，（部分）完美映射恰好就是（部分）真映射。

例 3.28 （有向区间）。 以下给出一个重要的稳定紧空间例子。通过赋予实区间 $I = [0,1]$ 由某些 $a \in [0,1]$ 所对应的开集 $[0,a)$ 以及开集 I 自身构成的拓扑，便得到<杰 style id='5'>有向区间 $I_{\leq}$ 。另一个稳定局部紧空间的例子是开子空间 $[0,1)_{\leq}$，它与引言中提到的空间 $\overrightarrow{[0,\infty)}$ 同胚。

备注 3.29。 可以赋予实数 $\mathbb{R}$ 如下拓扑：开集取为某些 $a \in \{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}$ 所对应的形式 $(-\infty, a)$，从而得到空间 $\mathbb{R}_{\leq}$。框架 $(\{-\infty\} \sqcup \mathbb{R} \sqcup \{+\infty\}\ \leq)$ 实际上是稳定局部紧的，但 $\mathbb{R}_{\leq}$ 并非 清醒的，因此不是稳定局部紧空间。非空开集的交始终非空，因此清醒化会添加额外的点 $\{-\infty\}$，它包含于每个非空开集中。所得空间自然与 $[0,1)_{\leq}$ 同胚。

例 3.30 （有限空间）。 任意有限框架 F都自动是稳定紧的，因为此时 $\mathrm{Ind}(F) \simeq F$，因此所有结构映射都等于恒等映射。有限框架，或等价地，有限分配格，总是对应于赋予 Alexandroff 拓扑的有限偏序集，并称为有限空间。（摘要参见 [Leh25a，第 3.4] 节。）它们也等价地描述为有限且为 $\mathrm{T_0}$ 的拓扑空间。值得一提的特例有单点空间 pt 和 Sierpiński 空间 $\mathbf{2}$，即由偏序集 $[1] = \{0 \leq 1\}$得到的空间。

此外，任何映射 $f : X \to Y$，若 X 是有限空间且 Y 稳定局部紧，则自动是完美映射。我们注意到，对于到有限空间的映射，情况并非如此，正如我们刚才在命题 3.15 中所见。

例3.31 （局部相干空间）。 我们进一步讨论 X 稳定局部紧，且框架$\mathcal{O}(X)$ 紧生成的情形。在这种情况下，X 称为局部相干空间。如果 X 进一步是紧的， X 也称为相干空间，这等价于 X 是某个环的谱。（摘要参见 [Leh25a，第 3] 节。）空间 X 是局部相干的，当且仅当它是清醒的、 X 的拓扑由紧开集生成，且紧开集构成一个有下界分配格。事实上，Stone 对偶给出一个范畴等价

$$\mathrm{LocCohSp}_p^{\mathrm{op}} \simeq \mathrm{DLatt}_{\mathrm{lb}}$$

其中 $\mathrm{LocCohSp}_p$ 是 SLC_p 的全子范畴，其对象为局部相干空间；局部相干空间映射到其紧开集所构成的有下界分配格。逆映射则将有下界分配格 D 映射到稳定局部紧框架 $\mathrm{Ind}(D)$。这一等价关系限制为相干空间与有界分配格之间的经典 Stone 对偶。局部相干空间范畴对于稳定局部紧空间范畴的重要性体现在以下方面。自然伴随

$$F \underset{y}{\overset{\hat{y}}{\leftarrows}} \mathrm{Ind}(F)$$

对于任意稳定局部紧框架 F，这意味着每个稳定局部紧空间都是某个相干空间的（部分）缩回，并且稳定局部紧空间之间的每个部分完美映射，都是相干空间之间某个部分完美映射的缩回。我们还指出，相干空间恰好是带有 Alexandroff 拓扑的有限偏序集的逆极限，这与前面的例子相呼应。

局部相干空间的豪斯多夫性这一附加性质也值得加以阐述。一个局部相干空间是豪斯多夫的，当且仅当它是全不连通的。这一情形成立，当且仅当紧开集格构成一个布尔环。全不连通局部紧豪斯多夫空间也称为 td-空间。该

关于 X 为紧的附加假设对应于紧开集构成布尔代数这一要求。在这种情况下， X 称为拟有限空间。有限拓扑空间恰好作为有限离散集的逆极限出现。让我们在下表中总结这一图景。

空间	**紧开集**	**紧生成情形**
局部紧	连接半格	
稳定局部紧	有下界分配格	局部相干
稳定紧	有界分配格	相干
局部紧豪斯多夫	布尔环	td-空间
紧豪斯多夫	布尔代数	拟有限空间

稳定（局部）紧框架的定义并非偶然。注意，对于一个框架 F，偏序集 $\mathrm{Ind}(F)$ 仍然是一个框架。事实上，Ind 给出一个自函子 $\mathrm{Frm}_{\mathrm{part}} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$。我们注意到，存在自然变换 $k_F\colon \mathrm{Ind}(F) \to F$和 $\mathrm{Ind}(y)_F\colon \mathrm{Ind}(F) \to \mathrm{Ind}^2(F)$，它们赋予 Ind 以 $\mathrm{Frm}_{\mathrm{part}} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$ 上余单子的结构。此外，一个或许不寻常的特点是，$\mathrm{Ind}(y)_F$ 是 $k_{\mathrm{Ind}(F)}$ 的左伴随。在 Frm 上而非 $\mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$ 上定义的 Ind 也具有同样的性质。这种结构称为松弛幂等余单子，也称为 KZ 余单子。

2-范畴上的松弛幂等（余）单子理论十分丰富，最初由 Kock [Koc95] 和 Zöberlein [Zöb76]发展起来。[13] 2-范畴$\mathcal{C}$ 上的松弛幂等余单子 T 的独特之处在于，对于给定对象 $c \in \mathcal{C}$， c 具有余代数结构的方式本质上是唯一的，其依据是余单位 $T(c) \to c$存在左伴随。类似地，代数的同态由映射 $f : c \to d$ 给出，并满足可伴随性条件。我们对稳定（局部）紧框架和完美（部分）框架同态所作的定义是有意如此表述的，因为这突显出它们只是松弛幂等余单子的余代数及余代数态射定义的特例。（参见 [Koc95] 定义 2.1 和 2.4。）从这一视角看，下面的命题纯属形式上的结果，因为它是如下陈述的一个特例：对于$\mathcal{C}$ 上的余单子 T，存在一个诱导的伴随

$$\mathrm{CoAlg}(\mathcal{C}, T) \underset{T}{\overset{forget}{\rightleftarrows}} \mathcal{C}$$

命题 3.32([Koc95] 命题 3.3)。 考虑余单子 $\mathrm{Ind} : \mathrm{Frm}_{\mathrm{part}} \to \mathrm{Frm}^{\mathrm{part}}$。存在一个
2-范畴的等价 类

$$\mathrm{CoAlg}(\mathrm{Frm}_{\mathrm{part}}, \mathrm{Ind}) \simeq \mathrm{SLCFrm}_p.$$

对 Frm 和 SCFrm，类似的陈述也成立。

推论 3.33 （稳定（局部）紧空间的吉洪诺夫定理）。 遗忘函子 $\mathrm{SLC}_p \to \mathrm{Loc}^{\mathrm{part}}$ 存在左伴随 γ，其在框架上的定义为 $F \mapsto \mathrm{Ind}(F)$。特别地，$\mathrm{SLC}^p$ 存在所有极限，且到 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{part}}$ 的遗忘函子保留这些极限。对 Frm 和 SCFrm，类似的陈述也成立。

注 3.34. 类似地，紧组合的 ∞-范畴、紧组合的可呈现 ∞-范畴以及可对偶 ∞-范畴的定义，也都可纳入松余单子的框架，只需将 Ind 视为定义在 Cat^{ω} （由具有滤过余极限的可达 ∞-范畴及保滤过余极限函子构成的 ∞-范畴）、Pr^L 和 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{st}}$ 上，并忽略显然的集合论问题。事实上，所有这些例子都来自更简单的松弛幂等单子，它们分别定义在 Cat、Cat^{rex} 和 $\mathrm{Cat}_{\mathrm{st}}$ 上。2-范畴

[13]另请参见 [Joh02，第 B1 节。1]

$\mathbf{Frm}^{\mathrm{part}}$ 和 $\mathbf{Frm}$ 则来自考察 $\mathbf{DLatt}_{\mathrm{lb}}$ 和 $\mathbf{DLatt}_{\mathrm{bd}}$，它们是由下有界（分别为有界）分配格构成的 2-范畴。

目前，松弛幂等单子的 $(\infty, 2)$-范畴版本仍在研究中，Abellán–Blom [AB26] 即将公布相关结果。尽管如此，对这些类比的探究一直是本文的重要推动力。

例 3.35（有向希尔伯特立方体）。若 S 是一个集合，我们称乘积 $I^S_{\leq}$ 为基数为 S的有向希尔伯特立方体，它是一个稳定紧空间。

我们将讨论饱和紧子集。下面再给出一个定义。

定义 3.36。设 F 是一个框架。称非空子集 $\mathcal{F} \subset F$ 为斯科特开滤子，如果：

- $\mathcal{F}$ 是向上闭的，
- $\mathcal{F}$ 对有限交封闭，并且
- $\mathcal{F}$ 是斯科特开的，这意味着，如果 $U_i, i \in I$ 是一个有向开元族，且 $\bigvee U_i \in \mathcal{F}$，那么存在$i \in I$ 存在 $i \in I$ 使得 $U_i \in \mathcal{F}$。

请注意，斯科特开性的定义当然抽象地模仿了紧子集的开邻域滤子的性质。以下定理证实了这一点。若 X 是一个拓扑空间，且 $K \subset X$ 是一个子集，我们称 K 为饱和的，若 K 可表示为开集的交。用 $Q(X)$ 表示 X 的饱和紧子集所构成的集合。

定理 3.37 (Hofmann-Mislove，见 [Gie+03] 定理 II-1.20。)。设 X 是一个凝聚空间。存在一个偏序集同构

$$Q(X)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{OFilt}(\mathcal{O}(X)),$$

其中一个饱和紧子集 $K \subset X$ 被映射到包含 K的 X 的开集的斯科特开滤子.

这使我们能够在拓扑观点和框架论观点之间切换。

例 3.38. 设 X 是一个凝聚空间，$x \in X$ 是一个点。那么，开邻域滤子 $\mathcal{U}_x = \{V \subset X \text{ 开集 } \mid x \in V\}$ 是一个斯科特开滤子。它对应于一个饱和紧集 S_x，该集合包含 x，并且包含于 x的每一个开邻域中；x是饱和紧闭包 $\{x\}$。注意，这意味着对于每个开集 U 和点 $x \in U$，都存在一个饱和紧集 S，使得$x \in S \subset U$。如果 X 是豪斯多夫空间，那么 $S_x = \{x\}$。

定理 3.39 (稳定紧空间的乌雷松引理，参见 [Gou13] 定理 9.4.11)。设 X 是一个稳定紧空间。对于 X 的每个紧饱和子集 S 和闭子集 C，若满足 $S \cap C = \emptyset$，则存在一个真映射 $f\colon X \to I_{\leq}$，使得 f 在 S 上恒取值为0，在 C上恒取值为1。

让我们以更范畴论的方式来表述乌雷松引理。

定理 3.40. 设 X 为一个稳定紧空间。存在一个完美嵌入

$$i : X \hookrightarrow I^S_{\leq}$$

对于某个集合 S。

证明。令 S 为完美映射 $X \to I_{\leq}$的集合。于是，根据吉洪诺夫定理，存在一个典范诱导的完美连续映射 $i\colon X \to I^S_{\leq}$。对于每个 $f \in S$，记 $p_f\colon I^S_{\leq} \to I_{\leq}$ 为相应的投影。为证明 i 是嵌入，我们需要证明 i^* 是满射。令 U 为X中的一个开集。记 C 为其闭补。对于每个点 $x \in U$，取一个饱和紧邻域$x \in S_x \subset U$，以及一个完美映射 $f_x\colon X \to I_{\leq}$，使其在 S_x上为 0，在 C上为 1。于是 $[0, 1)$ 是开集，且包含于

$I_{\leq}$，因此 $f_x^*([0,1)) = i^*(p_{f_x})^*([0,1)) \subset U$属于 i^*的像，而且还包含点 x。 i^*的像在上确界运算下封闭，因此我们看到 $U = \bigvee f_x^*([0,1))$ 也属于 i^*的像。$\square_{x\in U}$

备注 3.41. 定理 3.40 的证明有一个值得注意之处：应用于$X = P_{\mathrm{Alex}}$ 有限偏序集 P的情形时，该证明构造了一个单调嵌入，将 $(P,\leq)$ 嵌入有限维立方体 $(I^n,\leq)$。

推论 3.42 （稳定紧空间的乌雷松引理，范畴表述）。 有向区间 $I_{\leq}$ 在极限下生成范畴 SC。[14]

证明。 设 X 是稳定紧的。取一个完美嵌入 $i\colon X \hookrightarrow I_{\leq}^S$，其中 S。那么 X 可表示为其同余关系 $I_{\leq}^S \rightrightarrows I_{\leq}^S \amalg_X I_{\leq}^S$的等化子；该关系是稳定紧空间中的一个图表。再将后者完美嵌入到某个 S'对应的 $I_{\leq}^{S'}$ 中。于是 X 等于 $I_{\leq}^S \rightrightarrows I_{\leq}^{S'}$ 的等化子。$\square$

注 3.43. 可以证明，当将 $I_{\leq}$ is ω_1视为 SCFrm 中的对象时，它是紧的，其中 ω_1 是任意选取的不可数正则基数。由此可知，SCFrm 是一个可呈范畴。这或许令人惊讶，因为框架范畴 Frm并非 可呈范畴。此处给出的证明与 Efimov 在 [Efi25a 附录 C], 中给出的 Ramzi 定理证明完全类似，该定理指出， ∞-范畴 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 是可呈的。

现在我们来讨 论稳定局部紧空间的一点紧化。回顾在构造 2.19 中讨论的伴随 n

$$\mathrm{Loc}_{\mathrm{part}} \underset{(-)^+}{\overset{\mathrm{coim}}{\rightleftarrows}} \mathrm{Loc}_{\mathrm{pt}/}$$

在构造 2.19 中讨论。

命题 3.44. 给定的 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{part}}$ 与 $\mathrm{Loc}^{\mathrm{pt}/}$ 之间的伴随下降为一个伴随 n

$$\mathrm{SLC}_p \underset{(-)^+}{\overset{\mathrm{coim}}{\rightleftarrows}} \mathrm{SC}_{\mathrm{pt}/}$$

具有全忠实右伴随。

证明。 我们注意到以下事实。

- 若 F 是稳定局部紧框架，则 $F_{\top}$也是如此。此外，新添加的最大元无法由下方的任意并到达，因此特别是紧的，故 $F_{\top}$ 是稳定紧的。（另见 [Gou13，命题 9.1。10]。）
- 左伴随余像 coim 将带基点的稳定紧致空间 $x:\ \mathrm{pt} \to X$ 映射为补集 U 的内部$\{x\}$ （表示为$(x^*)^{-1}(0) \subset \mathcal{O}(X)$的并，或等价地表示为 $x_*(0)$）。空间 U 作为稳定紧空间的开子空间，同样是稳定局部紧的。
- 给定一个部分框架同态 $f^*\colon F \to F\prime$则相应的单点紧化上的推前由 $(f_*)_{\top}\colon (F\prime)_{\top} \to (F)_{\top}$ 给出；它在 $F\prime$上与 f_*一致，并且保留新添的最大元。如果 f_* 保有向上确界，则 $(f_*)_{\top}$也保有向上确界，这可通过验证两种情形来确认。

[14]我们提醒读者，这一概念严格弱于如下说法：由 $I_{\leq}$ 在 $\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}$ 中张成的全子范畴是稠密的，即 $\mathrm{SC}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Fun}(\{I_{\leq}\},\mathrm{Set})$ 是全忠实的，参见 [Lan98，第 X 章。6]。

- 若 (F, x) 和 (F', x') 是两个带点框架，其余像分别为 $U = x_*(0)$ 和 $U' = x'_*(0)$，那么这两个带点框架之间的带点框架同态 $f^*\colon F' \to F$ 满足 $f_*(x_*(0)) = x'_*(0)$，因此由此诱导的右伴随余像 $\mathrm{coim}(f)_*\colon F_{/U} \to F'_{/U'}$ 恰由 f_* 给出。若 f_* 保有向有确界，则 $\mathrm{coim}(f)_*$ 也保有向有确界。

□

例3.45. 假设 X 是稳定局部紧的，并考虑一点紧化 X^+。那么，任意斯科特开滤子 $\mathcal{F} \subset \mathcal{O}(X)$，通过添加最大元，都会产生一个 $\mathcal{O}(X^+)$ 的斯科特开滤子。除了 $\{1\}$ 之外，$\mathcal{O}(X^+)$ 的所有斯科特开滤子都具有这种形式。因此，我们看到 $Q(X^+)$ 是通过自由添加一个底元从 $Q(X)$ 得到的。

推论3.46（稳定局部紧空间的乌雷松引理）**.** 设 X 是稳定局部紧的。

- 设 $S \subset X$ 是饱和紧的，且 $C \subset X$ 是闭的，并满足 $S \cap C = \emptyset$。那么存在一个部分完美映射 $f\colon X \to [0,1]_\leq$，它在 S 上恒为0，且其定义域是包含于 C^c 的开定义域。
- 存在一个完美嵌入 $X \hookrightarrow [0,1]_\leq^S$，其中 S 是某个集合。

特别地，范畴 $\mathbf{SLC}_\mathcal{P}$ 由 $[0,1]_\leq$ 在极限下生成。

证明。 设 $S \subset X$ 为饱和紧，且给定闭集 $C \subset X$，使得 $S \cap C = \emptyset$。那么 $S \subset X \subset X^+$ 仍为饱和紧。集合 $C' = C \cup \{\infty\}$ 在 X^+ 中是闭集，并且有 $S \cap C' = \emptyset$ 作为 X^+ 的子集。应用稳定紧空间的乌雷松引理，可得一个完美映射 $f\colon X^+ \to I_\leq$，它在 S 上恒为 0，在 C' 上恒为 1。特别地，它是一个带点映射，因此对应于一个部分完美映射 $f\colon X \to [0,1]_\leq$，其开定义域由 $f^*([0,1))$ 给出，且包含于 C^c。

其余两个断言现在完全类似于稳定紧空间所给出的相同结论。□

注记 3.47. 作为补丁拓扑函子（我们将在第 3.5 节介绍）的一个应用，我们重新得到经典结论：任意紧豪斯多夫空间都能嵌入某个希尔伯特立方体 $[0,1]^S$，其中 S 是某个集合，并赋予通常的（欧几里得）拓扑。由此还可直接推论出一个鲜为人知的事实：任意局部紧豪斯多夫空间 X 都能作为闭子集嵌入某个半开立方体 $[0,1)^S$。

注记 3.48. 稳定紧空间理论的发展在若干环节需要使用选择公理，而稳定紧框架/局部格的概念则不然；它有一套稳健的构造性理论，这一点在点自由拓扑发展的早期就已得到注意，[Joh83]。这番话并非只是哲学性的：任何构造性有效的定理，都会给出在任意 1-拓扑斯内部成立的陈述——重要的特例包括在给定基空间上进行研究，或相对于某个固定群 G 进行等变研究。这些例子对于代数与几何拓扑至关重要。关于在代数几何中运用构造性技术能够走多远，可参见 Ingo Blechschmidt [Ble21] 的研究。

不过，出于纯粹实用的原因，本文中我们不会坚持这一区分。首先，截至撰写本文时，无论是高阶范畴理论，还是 K-大范畴理论，都还没有成熟的构造性版本。其次，我们在本文中采用的定理 6.1 的证明策略高度依赖于足够多的点的存在性，因此仅在经典意义下有效。

3.3. **稳定局部紧空间上的层**。 现在让我们来讨论空间的稳定局部紧性这一概念如何与拓扑斯的稳定局部紧性这一概念相互作用。回顾一下，任意拓扑斯 $\mathcal{X}$ 都有一个相应的框架 $\mathcal{X}_{\leq 0}$，它由 1 的子对象集合给出。

定理 3.49。 设 X 为一个拓扑斯。考虑框架 $X_{\leq 0}$。

- 若 X 是局部紧的，则 $X^{\leq 0}$ 是局部紧的。
- 若 X 是稳定局部紧的，则 $X^{\leq 0}$ 是稳定局部紧的。
- 若 X 是紧的，则 $X^{\leq 0}$ 是紧的。

证明。 由命题 2.20，我们有一个伴随

$$\mathcal{X}_{\leq 0} \underset{i}{\overset{\tau_{\leq -1}}{\rightleftarrows}} \mathcal{X}$$

其中包含映射 i 保持滤过余极限。因此，左伴随 $\tau_{\leq -1}$ 保持紧对象，从而证明了（3）。(1) 和 (2) 可由引理 2.2 应用得到：若伴随 $\hat{}y_{\mathcal{X}}$ 存在，则 $\hat{}y_{\mathcal{X}_{\leq 0}}$也存在，并由 $\mathrm{Ind}(\tau_{\leq -1})\hat{}y_{\mathcal{X}} i$给出；若假设 $\hat{}y$ 与二元积交换，则它也与二元积交换。□

现在让我们来讨论逆向问题。

定理 3.50. 设 X, Y 是稳定局部紧空间，且 $f\colon X \to Y$ 是部分完美映射 .

- 拓扑斯$\mathrm{Sh}(X)$ 是稳定局部紧的。
- 若 X 是紧的，则$\mathrm{Sh}(X)$ 也是紧的。
- 诱导函子 $f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是强连续的。

证明。 将 Sh(–) 应用于部分框架同态的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}(X) & \overset{\hat{y}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X)) \\ {\scriptstyle f^*}\uparrow & \overset{k}{\twoheadleftarrow} & \uparrow{\scriptstyle \mathrm{Ind}(f^*)} \\ \mathcal{O}(Y) & \overset{\hat{y}}{\hookrightarrow} & \mathrm{Ind}(\mathcal{O}(Y)) \end{array}$$

表明 $f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是 $\mathrm{Ind}(f^*)$ 的诱导函子 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Ind}(\mathcal{O}(Y))) \to \mathrm{Sh}(\mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X)))$ 的 Pr^L-缩回。框架 $\mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X))$ 是相干框架，因此 $\mathrm{Sh}(\mathrm{Ind}(\mathcal{O}(X)))$ 是紧生成∞-范畴，参见例3.31 和 [Leh25a，推论 3.17]。$\mathrm{Ind}(\mathcal{O}(Y))$ 也同理。由 $\mathrm{Ind}(f^*)$ 在层上诱导的左伴随函子按构造保持紧生成元，因此是强连续的。应用引理 2.9可知，$f^* : \mathrm{Sh}(Y) \to \mathrm{Sh}(X)$ 是紧组合的 ∞-范畴之间的强连续函子。特别地，Sh(–) 将稳定局部紧空间之间的完美映射映为完美几何态射。我们可以直接应用这一点来得到其余两个关于开集的断言：由命题 3.15，对角态射 $\Delta\colon X \to X \times X$ 是完美映射，因此 $\Delta_* : \mathrm{Sh}(X) \to \mathrm{Sh}(X) \otimes \mathrm{Sh}(X)$ 是完美几何态射，这表明稳定性。关于紧性的陈述可通过考虑映射 $X \to \mathrm{pt}$ 以同样方式得到。□

注3.51。 遗憾的是，对于局部紧的清醒空间 X，相应的陈述——层拓扑斯 $\mathrm{Sh}(X)$ 也是局部紧的——并不成立。这一失败在 1-拓扑斯的层面上就已存在，参见 [JJ82，例 5.5]。Johnstone-Joyal 将满足以下条件的空间 X 刻画为紧组合的：$\mathrm{Sh}(X, \mathrm{Set})$ 是紧组合的，当且仅当这些空间是亚稳定局部紧的。一个有趣的问题是，对于将 $\mathrm{Sh}(X, \mathrm{An})$ 替换进去的类似问题，是否也存在类似的判据。

推论 3.52。 函子 $\mathrm{Sh} : \mathrm{Frm}_{\mathrm{part}} \to \mathrm{Pr}^L$ 下降为一个定义良好的函子

$$\mathrm{Sh} : \mathrm{SLCFrm}_p \to \mathrm{Pr}^L_{\mathrm{ca}}.$$

注3.53. 将此结论限制到稳定紧框架的情形，Aoki 已在 [Aok25b 的定理 4.29] 中证明。此处给出的证明与 Aoki 所给的论证完全类似。

对于稳定紧空间上的层，还存在进一步的结构。

定理 3.54 ([Aok25b],推论 5.13)。 存在一个伴随

$$\mathrm{SCFrm} \underset{\mathrm{Sm}^{con}}{\overset{\mathrm{Sh}}{\rightleftarrows}} \mathrm{CAlg}(\mathrm{Pr}^{L}_{\mathrm{ca}}).$$

3.4. **稳定紧空间的 de Groot-Verdier 对偶**。 稳定紧空间存在一种非常有用的对偶，它可以理解为交换开性与（余）紧性的角色。注意，饱和紧集的偏序集 $Q(X)^{\mathrm{op}} \cong \mathrm{OFilt}(\mathcal{O}(X))$，或等价地说斯科特开滤子的偏序集，总是具有有向余极限（按各自滤子的并计算），并且具有有限交。然而，当 X 是稳定紧空间时，情况更进一步：它本身成为一个框架。

定理 3.55 (de Groot 对偶，参见 [Gou13] 定理 9.1.38)。 设 X 是一个稳定紧空间。饱和紧子集的补集所构成的集合在 X上给出一个拓扑。将由此得到的拓扑空间记为 $X^{\vee}$。空间 $X^{\vee}$ 仍然是稳定紧的，并且有 $(X^{\vee})^{\vee} = X$。此外，完美映射$f\colon X \to Y$在考虑余紧拓扑时仍是一个完美映射 $f\colon X^{\vee} \to Y^{\vee}$。

换言之，我们得到一个对合 $(-)^{\vee} : \mathrm{SC} \to \mathrm{SC}$。注意，$(-)^{\vee}$ 在 1-态射上是协变的，但会反转 2-态射。

例 3.56. 当 $X = I_{\leq}$ 是有向区间时，$(I_{\leq})^{\vee} = I_{\geq}$ 是向下有向区间，其拓扑反转。

例 3.57. 对于一个在 Stone 对偶下对应于有界分配格 D 的相干空间 X，其对偶 $X^{\vee}$ 仍是相干的，并且对应于 D^{op}。de Groot 对偶在相干空间子范畴上的限制也称为*Hochster* 对偶。[15]

例 3.58. 若 X 是紧豪斯多夫的，那么一个标准事实是，子集 $K \subset X$ 是紧饱和的，当且仅当它是闭的。因此，对于紧豪斯多夫空间，有 $X^{\vee} = X$。

下述定理至关重要，它阐明了 de Groot 对偶与相应的 ∞层范畴之间的相互作用。

定理 3.59 （见 [Aok25b], 定理 4.46。）。 设 X 是一个稳定紧空间，且 $\mathcal{C}$ 是一个可呈稳定 ∞范畴。那么存在一个典范等价

$$\mathrm{VD} : \mathrm{Sh}(X, \mathcal{C}) \to \mathrm{Cosh}(X^{\vee}, \mathcal{C})$$

逐点定义为

$$\mathrm{VD}(\mathcal{F})(X \setminus K) = \mathrm{colim}_{U \supset K \text{ open}} \mathrm{fib}(\mathcal{F}(X) \to \mathcal{F}(U))$$

其中， K 是 X的一个紧饱和子集。

定理 3.59 有一个相关版本，不需要假设$\mathcal{C}$稳定，也不要求 X 是紧的。在豪斯多夫情形下，该版本以“层 $=\mathcal{K}$-层”的表述为人所知，见 [Lur17,第 7.3 节。4]。

定义 3.60. 设 X 是一个稳定局部紧空间。取值于可呈∞范畴$\mathcal{C}$ 的$\mathcal{K}$-层 是定义在 X 上的函子$\mathcal{F} : Q(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$，满足

- $\mathcal{F}(\emptyset) = 1$

[15]de Groot 对偶实际上可以理解为 Hochster 对偶的一种形式扩展，采用的是 lax-幂等单子的视角。

- 对于每个 $C, C\prime \in Q(X)$，这个方块

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(C \cup C') & \longrightarrow & \mathcal{F}(C') \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{F}(C) & \longrightarrow & \mathcal{F}(C \cap C') \end{array}$$

  是一个拉回方块。
- 每当 $C = \bigcap C_i$ 是饱和紧集的滤过交时，自然映射$_{i\in I}$

$$\mathrm{colim}_{i\in I}\mathcal{F}(C_i) \xrightarrow{\sim} \mathcal{F}(C)$$

  是一个等价。

我们将 $\mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(X, \mathcal{C})$ 定义为 $\mathrm{Fun}(Q(X)^{\mathrm{op}}, \mathcal{C})$ 中由$\mathcal{K}$-层所张成的全子范畴。

定理 3.61 ([Aok25b], 命题 4.36)**.** 设 X 是一个稳定紧空间，且 $\mathcal{C}$ 是一个可呈现的∞-范畴，其中滤过余极限是正合的。那么存在一个 ∞-范畴的等价

$$(-)_{\mathcal{K}} : \mathrm{Sh}(X, \mathcal{C}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(X, \mathcal{C})$$

该等价在对象上的作用为 $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}(K) =$ 余极限$_{U\supset K \text{ 开集}}\mathcal{G}(U)$。

注 3.62. 即使 X 仅为稳定局部紧，定理 3.61 仍然成立，其证明与 Aoki 给出的证明实质相同。不过，这里我们不需要如此一般的结论。

观察 3.63. 设 X 是稳定紧的，且$\mathcal{G}$ 是 X上的一个层。

- 如果 $x \in X$ 是一个饱和点，那么按照定义，$\mathcal{G}_{\mathcal{K}}$ 在饱和紧集 $\{x\}$ 上的取值与茎 $\mathcal{G}_x$一致。注意，如果 X 是豪斯多夫的，那么任意点都是饱和的。

  取值 $\mathcal{G}_{\mathcal{K}}(X) = \mathcal{G}(X) = \Gamma(X;\mathcal{G})$ 就是$\mathcal{G}$的整体截面的取值。

注记 3.64. 定理 3.59 实际上可直接由定理 3.61 得出：注意到，若$\mathcal{F}$ 是 X 上的一个$\mathcal{K}$-层，且目标$\mathcal{C}$ 是稳定的，则$\mathcal{F}(X)^{\mathrm{const}} \to \mathcal{F}$ 的纤维本身就是 $X^{\vee}$上的一个余层。取这些纤维的过程构成一个等价，这同样是因为假设$\mathcal{C}$ 是稳定的。此处，$\mathcal{F}(X)^{\mathrm{const}}$ 指的是取值为$\mathcal{F}(X)$的常值函子 $Q(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{C}$ 。

注记 3.65. 在定理 3.61 中代入$\mathcal{C} = [1]$ ，即可得到 $X = (X^{\vee})^{\vee}$ 在框架层面的表述，其中 X 是稳定紧的。对于稳定局部紧空间，这给出了 de Groot 对偶的推广。注意，在缺少紧性时， $Q(X)^{\mathrm{op}}$ 不是框架，因为它缺少一个底元；不过，这只是唯一的缺陷。

我们需要对定理 3.59 和定理 3.61 稍作加强，即这两个定理中提到的等价实际上在完美映射下是自然的。首先我们指出，对紧子集的定义取对偶，可得 de Groot 对偶蕴含以下引理。

引理 3.66. 设 X 为稳定紧空间，且 $K = \bigcap K_i$ 是饱和紧集的一个滤过交$_{i\in I}K_i$。若 U 是 X 的开子集，满足 $K \subset U$，则存在 $i \in I$，使得 $K_i \subset U$。

若 $f\colon X \to Y$ 是完美映射，我们可以看到，对于饱和紧子集 $K \subset Y$， $f^{-1}(K) \subset U \subset X$ 仍是饱和紧的。因此我们得到一个函子

$$f^{-1} : Q(Y) \to Q(X)$$

保持任意交和有限并。

引理3.67。 设 $f\colon X \to Y$ 是完美映射， $C \subset Y$ 是饱和紧子集。那么对于 X 中的所有开集 $U \supset f^{-1}(C)$，都存在 Y 中的开集 $V \subset C$，使得 $U \supset f^{-1}(V) \supset f^{-1}(C)$。

证明。 对于饱和紧 C'，记作 $C = \bigcap C'$，其中 $C \ll C'$ 表示存在一个开 V，使得 $C \subset V \subset C' C \ll C'$。应用 f^{-1}，我们得到 $f^{-1}(C) = \bigcap f^{-1}(C')$。如果 $U \supset f^{-1}(C)$，由引理 3.66，因而 $C \ll C'$ 存在 $C \subset V \subset C'$，其中 V 开， C' 饱和紧，使得 $U \supset f^{-1}(C') \supset f^{-1}(V) \supset f^{-1}(C)$。

□

通过前复合，我们看到存在一个诱导函子

$$f_+ : \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(X, \mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(Y, \mathcal{C}),$$

由 $f_*(\mathcal{G})(K) = \mathcal{G}(f^{-1}(K))$ 给出。

命题 3.68。 设 $f\colon X \to Y$ 是稳定紧空间之间的完美映射。定理 3.61 所给出的等价关于 f 是自然的，即交换图

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}(X, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(X, \mathcal{C}) \\ {\scriptstyle f_*}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_+} \\ \mathrm{Sh}(Y, \mathcal{C}) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Sh}_{\mathcal{K}}(Y, \mathcal{C}) \end{array}$$

是交换的。

我们注意到，由定理 3.59 给出的 Verdier 对偶的类似陈述也可立即得出。

证明。 追溯定义可知，这归结为如下问题：对于给定的层 $\mathcal{F}$ 在 X 上，以及 $C \subset Y$ 紧饱和，以下自然映射

$$\mathrm{colim}_{V \supset C \text{ open in } Y} \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \to \mathrm{colim}_{U \supset f^{-1}(C) \text{ open in } X} \mathcal{F}(U)$$

是一个等价。但根据引理3.67，左侧图表余终地映入右侧图表。□

注记3.69。 命题3.67的陈述非常特定于完美映射，对于更一般的连续映射并不成立。在局部紧豪斯多夫空间上的六函子形式体系中，参见例如 [Vol25], ；它对应于这样一个事实：对于真映射 f，存在一个等价 $f_! \simeq f_*$。

注记3.70。 从更宏观的视角看 Verdier 对偶，可以观察到它关乎这样一个陈述：$(\infty,2)$-范畴 SC 和 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 都带有对偶 $(-)^\vee$，且这些对偶与如下函子相容：该函子将稳定紧空间 X 映至其以谱为值的层 ∞范畴。这两种对偶都是 2-函子，对 1-态射协变、对 2-态射反变，并且都是对合。借助松弛幂等单子的理论，Verdier 对偶的证明可归约为对分配格的一项简单计算。

3.5. **补片拓扑**。 存在一种普适方法，可以为稳定局部紧空间 X 的拓扑添加开集，使其成为豪斯多夫空间，同时保留局部紧性。这称为 X的补丁拓扑。下面简要概述如何使用这种拓扑。一般参考文献是 Escardó 的文章 [Esc01], ，不过 [Gie+03] 和 [Gou13]中也能找到相关信息。由于 Escardó 的工作完全采用 locale 的语言，而较早的文献使用拓扑空间，我们需要简要讨论如何在这两种表述之间转换。

定义 3.71。 设 L 是一个局部。若核 N 在 L 上保有有向上确界，则称其为完美 。

引理 3.72。 设 $S \hookrightarrow X$ 是稳定局部紧空间 X的一个子局部。则以下条件等价:

(1) S 是一个完美子局部。(2) X 上的诱导核 $N = i_* i^*$ 是完美的。(3) S 由 X的一个子集 S' 得到，使得诱导子空间拓扑是稳定局部紧的，且嵌入 S' ，$\to X$ 是一个完美映射。(4) 与 S 的框架同余相对应的关联商映射 $p\colon X \amalg X \twoheadrightarrow E$ 是完美映射。

特别地，关联的框架同余 E 本身是稳定局部紧的。

证明。我们首先指出，若 S 是稳定局部紧空间 X的一个完美子局部，那么它本身也是稳定的由 P 局部紧 命题 3.22。

（1）与（3）的等价现可直接由稳定局部紧 y空间与 推论 3.17 给出的稳定局部紧框架范畴之间的等价得出。

看出(1)与(2)的等价同样是直接的。若 i_* 保持滤过上确界，则$i_* i^*$亦然，因为 i^* 是左伴随。反之，若给定 X 的核 N ，则相应的子局部 S 作为开集帧$\{U \in \mathcal{O}(X) \mid N(U) = U\} \subset \mathcal{O}(X)$得到，而 i_*仅由包含映射给出。我们只需证明， N 保持有向上确界蕴含该子集在有向上确界下是闭的。设 $U_i, i \in I,$为开集的有向集合，使得 $U_i = N(U_i)$，且 $U = \bigvee_{i\in I} U_i$。则

$$N(U) = N(\bigvee_{i\in I} U_i) = \bigvee_{i\in I} N(U_i) = \bigvee_{i\in I} U_i = U,$$

从而即告完成。

为看出(4)如何与其余各项等价，首先注意到，若(4)成立，则 $S \hookrightarrow L$ 作为稳定局部紧空间与完美映射的等化子得到，因而其本身是完美的。反之，若 S 是子局部，则商映射 $p\colon X \amalg X \twoheadrightarrow E$ 由如下公式给出

$$p_*(U, V) = (U \wedge N(V), V \wedge N(U)).$$

因此若 核 N 是完美的，则此映射保持有向上确界，从而 p 是完美的。 □

我们现在来到本节的核心概念：与稳定局部紧空间相关联的补片拓扑。记LCH$_p$ 为由局部紧豪斯多夫空间张成的SLC$_p$ 的全子范畴。我们将简单地用LCH和SLC表示仅考虑全局定义的完美映射所给出的相应宽子范畴。此外，对于给定的稳定局部紧空间 X，我们用$\mathcal{K}(X)$表示经由完美嵌入得到的 X 的子集的集合。注意，$\mathcal{K}(X)$同构于 X上完美核的偏序集的相反偏序集。

定理 3.73（补片拓扑， [Esc01], 定理5.8）。 局部紧豪斯多夫空间的全子范畴到稳定局部紧空间中的包含映射具有一个右伴随，

$$\mathrm{LCH} \underset{\text{patch}}{\overset{\hookrightarrow}{\twoheadleftarrow}} \mathrm{SLC}$$

其作用是把稳定局部紧空间 X 送到 X上完美核的稳定局部紧框架$K(X)^{\mathrm{op}}$。

注 3.74. 由于单点空间 pt 是有限空间，因此从 pt 到 $\to X$ 的每个连续映射都是完美的。（参见例 3.30。）它也是豪斯多夫的，因此我们看到

$$X = \mathrm{Map}(\mathrm{pt}, X) \cong \mathrm{Map}(\mathrm{pt}, X^{\mathrm{patch}}),$$

因此， X^{patch} 的底层点集与 X 的相同。 X 上的新拓扑称为 X 的补丁拓扑 。根据引理 3.72，这个拓扑是什么也显而易见。 X^{patch} 的闭子集恰好由完美嵌入的像所成的集合$\mathcal{K}(X)$ 给出。

注 3.75. 稳定紧空间上的补片拓扑给出一个紧豪斯多夫空间。观察到完美映射 $X \to$pt 被映射为完美映射 $X^{\mathrm{patch}} \to$ pt，即可看出这一点。

例 3.76. 对于有向区间 $I_{\leq}$，有 $I_{\leq}^{\mathrm{patch}} = I$ 是赋予 I 上通常度量拓扑的区间，参见 [Gou13, 例 9.1.33]。更一般地，由于 $patch$ 保持极限，若 S 是一个集合，我们也可得出，对于有向希尔伯特立方体 $I_{\leq}^{S}$，有 $(I_{\leq}^{S})^{\mathrm{patch}} = I^{S}$。更一般地，任意完美子空间 $K \hookrightarrow I_{\leq}^{S}$ 都可表示为稳定紧空间之间完美映射的等化子，因此，当把 K 视为 I^{S} 的子集时， K^{patch} 与诱导子空间拓扑一致。

例 3.77. 若 X 是一个相干空间，对应于有界分配格 D，则 X^{patch} 是一个原有限集，对应于通过布尔化得到的布尔代数 Bool(D)， [Esc01, 第 3] 节。此处的补片拓扑也称为 X 上的可构造拓扑 ，参见 [Leh25a, 第 3.2] 节。

例 3.78. 令 P 为一个偏序集，当将其视为 ∞-范畴时，它是紧组合的。Gie+03] 将这一概念称为域 ，Efimov [Efi25a] 也称之为连续偏序集 。 P上有两种值得注意的拓扑：一种是斯科特拓扑，其开集是 P 的斯科特开上闭子集，见 [Gie+03，第二章], ；另一种是劳森拓扑，它由斯科特拓扑加上下拓扑生成，见 [Gie+03，第三章]。如果 P 在劳森拓扑下是紧的，那么赋予斯科特拓扑的 P 是稳定紧的，其 de Groot 对偶由下拓扑给出，而其补丁拓扑则由劳森拓扑给出，见 [Gie+03，命题 VI-6.24]。域 P 为紧的条件可以从多种不同角度来理解，见 [Gie+03，第三章-5]。

虽然用完美嵌入来描述补片拓扑十分优雅，但我们还需要一种具体的构造方法。对于给定的稳定局部紧空间 X，我们来重点介绍两类特殊的完美嵌入。

- 任意闭子集 $C \subset X$ 都是完美的。
- 任意饱和紧子集 $S \subset X$ 都是完美的。

例3.79。对于有向区间 $I_{\leq}$，饱和紧集具有 $[0, a]$ 的形式，其中$a \in I$；而闭集具有 $[b, 1]$的形式，其中 $b \in I$。

定义3.80。设 X 是一个稳定局部紧空间。若子集 $E \subset X$ 具有如下形式，则称其为初等紧： $C \cup S$，其中 $C \subset X$ 闭，且 $S \subset X$ 饱和紧。将$\mathcal{E}(X) \subset \mathcal{K}(X)$记为初等紧子集的集合。

初等紧子空间在有限并运算下封闭。此外，它们以下述意义生成补片拓扑。

引理3.81 ([Esc01, 引理 5.4])。 设 X 为稳定局部紧空间。初等紧子空间的集合 $\mathcal{E}(X)$ 在交运算下生成 $\mathcal{K}(X)$。

换言之，在考虑反向包含时，初等紧集构成框架$\mathcal{K}(X)^{\mathrm{op}} \cong \mathcal{O}(X^{\mathrm{patch}})$的一个基。从层论的角度来看，这意味着——至少原则上——要处理补片拓扑上的层，只需理解偏序集$\mathcal{E}(X)$及其诱导的格罗滕迪克拓扑。

注 3.82。 </style}当 X 为稳定紧空间时，显然，对 de Groot 对偶 $X^\vee$ 应用补片拓扑也会得到 X^{patch}。这是因为 de Groot 对偶只是互换闭集与饱和紧子集的角色，从而得到相同的初等紧子空间。

例 3.83. 对于 $X = I_\leq$ 有向区间，不难看出，$(I_\leq)^{\mathrm{patch}} = I$ 是标准实区间。由于取补片拓扑保持极限，因此我们由此得出，对于任意有向希尔伯特立方体 $I_\leq^S$，都有$(I_\leq^S)^{\mathrm{patch}} = I^S$。据此可知，稳定紧版本的乌雷松引理可以推出紧豪斯多夫空间上的经典乌雷松引理。

作为本节的最后一部分，我们注意到，补片拓扑对部分完美映射甚至也是函子性的。从核的层面来看，这一点最容易理解。若 N 是 X上的完美核，且 $f: X \to Y$ 是一个部分完美映射，则 $f_* N f^*$是 Y上的完美核。我们声称，定理 3.73 中给出的伴随也推广到了这种函子性。原则上，可以重新梳理 Escardó 给出的证明，分析部分框架同态会发生什么变化；然而，我们将借助一点紧化来避开这些麻烦。首先，回顾局部紧豪斯多夫空间的（经典）一点紧化X^* 的概念：在 $X \amalg \{*\}$ 上取由开集$U \subset X$ 及紧子集的补集 $K \subset X$ 构成的拓扑。以下是关于局部紧豪斯多夫空间的一个标准事实。

命题 3.84 ([Bun21], 引理 5.2)**.** 存在一个范畴等价

$$\mathrm{LCH}_p \simeq \mathrm{CH}_{\mathrm{pt}/},$$

在对象上由将局部紧豪斯多夫空间 X 映为其一点紧化给出。

推论 3.85. 存在一个伴随

$$\mathrm{LCH}_p \underset{(-)^*}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \mathrm{CH}$$

其左伴随由紧豪斯多夫空间与连续映射到 $\mathbf{LCH}_p$ 中的包含映射给出，右伴随由一点紧化给出。

引理 3.86. 设 X 为稳定局部紧。则包含映射 $X^{\mathrm{patch}} \hookrightarrow (X^+)^{\mathrm{patch}}$ 是开的。

证明. 首先注意 $\{+\}$ 在 $(X^+)^{\mathrm{patch}}$ 中是闭的，因此作为补集的 X，配备诱导子空间拓扑后，是开的。回顾例 3.45， X^+ 的饱和紧集的集合由 $X \subset X \amalg \{+\}$ 的饱和紧集的集合连同整个集合 $X \amalg \{+\}$ 给出。由于 $(X^+)^{\mathrm{patch}}$ 上的拓扑由 X^+ 上开集的交与饱和紧集的补集生成，我们看到集合 X 上的诱导子空间拓扑由 X 中开集的交与 X中饱和紧集的补集生成。但这恰好与 X上的补丁拓扑一致。□

推论 3.87. 设 X 为稳定局部紧。则存在一个自然等价 e

$$(X^{\mathrm{patch}})^* \cong (X^+)^{\mathrm{patch}}.$$

证明。 由开定义域 X^{patch} 上的恒等给出的部分完美映射$(X^+)^{\mathrm{patch}} \to X^{\mathrm{patch}}$，通过应用推论 3.85 中的伴随，给出连续映射

$$(X^+)^{\mathrm{patch}} \to (X^{\mathrm{patch}})^*.$$

这显然是一个双射。但紧豪斯多夫空间之间的连续双射是同胚，因此得证。

□

推论 3.88. 局部紧豪斯多夫空间的全子范畴到稳定局部紧空间与部分完美空间的包含映射有一个右伴随,

$$\mathrm{LCH}_p \underset{\text{patch}}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \mathrm{SLC}_p$$

在对象上的定义为 $X \mapsto X^{\mathrm{patch}}$。

证明。 首先注意，将命题 3.44 中的伴随应用于稳定紧空间和紧豪斯多夫空间，可将其提升为一个伴随

$$\mathrm{CH}_{\mathrm{pt}/} \underset{(-)^{\mathrm{patch}}}{\overset{\longleftarrow}{\longrightarrow}} \mathrm{SC}_{\mathrm{pt}/}.$$

左伴随构成的交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{SLC}_p & \longleftarrow & \mathrm{SC}_{\mathrm{pt}/} \\ \uparrow & & \uparrow \\ \mathrm{LCH}_p & \longleftarrow & \mathrm{CH}_{\mathrm{pt}/} \end{array}$$

根据引理 2.2，可得包含映射 $\mathrm{LCH}_p \to \mathrm{SLC}_p$ 存在一个右伴随，它将稳定局部紧 X 映至 $(X^+)^{\mathrm{patch}}$ 中 $+$ 的开补集。但根据引理 3.86，这与 X^{patch} 一致。□

注 3.89。 注意，特化序 赋予相干空间 X 的底层集合以偏序集结构。（这不过是 locale 范畴通过偏序集富集而自然成为一个 2-范畴的一个实例。）若 X 是稳定紧空间，则关系 $\leq$ 作为 $X^{\mathrm{patch}} \times X^{\mathrm{patch}}$ 的子集是闭的。配备了这种闭偏序结构的紧豪斯多夫空间称为紧偏序空间。给定一个紧偏序空间 $(Y, \leq)$，向下闭开集构成了 Y 上的一个稳定紧拓扑。这两个过程导出一个范畴等价

$$\mathrm{SC} \simeq \mathrm{CompPO},$$

例如参见 [Gou13, 命题 9.4.10]。我们有如下对应表 .

稳定紧空间	**紧偏序空间**
完美子空间	闭子集
饱和紧	闭且向下闭
闭	闭且向上闭
de Groot 对偶	反序 $\leq^{\mathrm{op}}$
补丁拓扑	忘掉序关系

4. 局部化不变量的 Nisnevich 型下降

在本节中，我们关注将有限局部化不变量应用于稳定（局部）紧空间上层时的下降陈述。这在一定程度上受到概形的 K-理论背景下众所周知的 Nisnevich-下降概念的启发。我们在全文中固定如下约定： $F : \mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathcal{E}$ 表示一个局部化不变量。我们指出，鉴于引理 2.13 （它表明 $F^{\mathrm{cont}}(- \otimes \mathcal{C})$ 仍是一个局部化不变量），本节中关于 Sh(X,Sp) 的所有陈述在将 Sp 替换为任意可对偶 ∞-范畴 $\mathcal{C}$ 时均可立即推广。在开始之前，我们希望记录以下关于稳定范畴中拉回方块的简单引理。

引理 4.1. 设$\mathcal{E}$ 为一个稳定 ∞-范畴。则一个方块，

$$\begin{array}{ccc} A_0 & \xrightarrow{f_A} & A_1 \\ \downarrow & & \downarrow \\ B_0 & \xrightarrow{f_B} & B_1 \end{array}$$

当且仅当诱导的水平纤维映射 $\mathrm{fib}(f_A) \to \mathrm{fib}(f_B)$ 是等价时，它是一个拉回方块。证明。 考虑图表

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{fib}(f_A) & \longrightarrow & A_0 & \longrightarrow & B_0 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle f_A} & & \downarrow{\scriptstyle f_B} \\ 0 & \longrightarrow & A_1 & \longrightarrow & B_1. \end{array}$$

如果右侧方块是拉回，那么总方块也是拉回，因此 $\mathrm{fib}(f_A) \to \mathrm{fib}(f_B)$ 是等价。反过来，如果映射 $\mathrm{fib}(f_A) \to \mathrm{fib}(f_B)$ 是等价，我们就知道左侧方块和总方块都是拉回。利用 $\mathcal{E}$ 的稳定性，这两个方块也都是推出，因此我们可以使用推出的粘贴引理， [Lur12，引理 4.4.2.1], 从而得出右侧方块是推出。□

命题 4.2 （完美 Nisnevich 下降）。 设 $f : Y \to X$ 是稳定局部紧空间之间的完美映射，且 $C \subset X$ 是一个闭子空间。假设 f 在 $f^{-1}(C)$ 与 C 的开补集上诱导出一个同胚。那么方块

$$\begin{array}{ccc} F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X, \mathrm{Sp})) & \longrightarrow & F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(C, \mathrm{Sp})) \\ \downarrow{\scriptstyle f^*} & & \downarrow{\scriptstyle f^*} \\ F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(Y, \mathrm{Sp})) & \longrightarrow & F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(f^{-1}(C), \mathrm{Sp})) \end{array}$$

是一个拉回。

证明。 显然：由命题 2.30 可知，两行的水平纤维等价，然后应用引理 4.1。□

主要应用是适当包含映射的简单情形，它可直接由第二同构定理（命题 2.29）得出。

推论 4.3。 设 X 为稳定局部紧， $K \subset X$ 为完美包含映射，且 $C \subset X$ 为闭包含映射。那么我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(K \cup C, \mathrm{Sp})) & \longrightarrow & F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(C, \mathrm{Sp})) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(K, \mathrm{Sp})) & \longrightarrow & F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(K \cap C, \mathrm{Sp})). \end{array}$$

我们的目标是将推论 4.3 的陈述推广到允许 C 为任意完美子空间 K'的情形。事实上，如果定理 1.3 的公式成立，那么这种形式的完美下降必然成立。我们将分步完成这一工作。首先使用 Verdier 对偶。注意，$(-)^\vee = \mathrm{Fun}^L(-, \mathrm{Sp})$ 是 $\mathrm{Pr}^L_{\mathrm{dual}}$ 上的自等价，因此保持 Verdier 序列。这一点对下面的观察至关重要。

命题 4.4。设 X 稳定紧，$K \subset X$ 是完满含入，$C \subset X$ 是饱和紧含入。那么我们有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(K \cup C, \mathrm{Sp})) & \longrightarrow & F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(C, \mathrm{Sp})) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(K, \mathrm{Sp})) & \longrightarrow & F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(K \cap C, \mathrm{Sp})). \end{array}$$

证明。该命题通过应用 Verdier 对偶（定理 3.59），以与推论 4.3 类似的方式得出。所讨论的层范畴方块等价于

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Cosh}(K^\vee \cup C^\vee; \mathrm{Sp}) & \longrightarrow & \mathrm{Cosh}(C^\vee; \mathrm{Sp}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cosh}(K^\vee; \mathrm{Sp}) & \longrightarrow & \mathrm{Cosh}(K^\vee \cap C^\vee; \mathrm{Sp}) \end{array}$$

该方块是通过对涉及对偶空间之层的相应方块应用 $(-)^\vee$ 而得到的。饱和紧含入 $C \to X$ 在对偶下被映为闭包含 $C^\vee \to X^\vee$，并且我们可以直接由命题 2.29 验证该层范畴方块的水平纤维彼此等价。□

注记 4.5。更具体地说，

$$\mathrm{Sh}(K \cup C, \mathrm{Sp}) \to \mathrm{Sh}(C, \mathrm{Sp})$$

的纤维由 Cosh(U,Sp) 给出，其中 U 是 $X^\vee$ 中对应于紧饱和集 C的斯科特开滤子的开子集。由于 U 一般并非稳定紧，而只是稳定局部紧，Verdier 对偶会更为微妙。注意，这正是注记 3.65 中所提到的同一问题。

警告 4.6。对于完美嵌入 K, L，X 的方块并不一定是 Pr中的拉回方块，

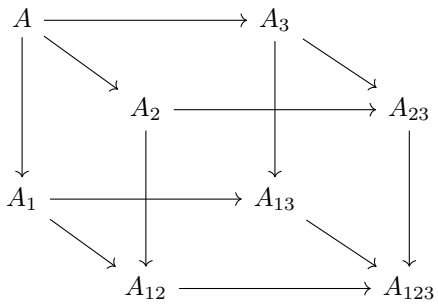
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Sh}(K \cup L; \mathrm{Sp}) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}(L; \mathrm{Sp}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Sh}(K; \mathrm{Sp}) & \longrightarrow & \mathrm{Sh}(K \cap L; \mathrm{Sp}) \end{array}$$

这与 X 是豪斯多夫空间时的情况不同。作为反例，考虑 $K = [0, a]_\leq, L = [b, 1]_\leq$，其中 $a < b$属于 $I_\leq$。它们的交为空，但 Sh($([0, a] \cup [b, 1])_\leq$; Sp) 并不分解为乘积。

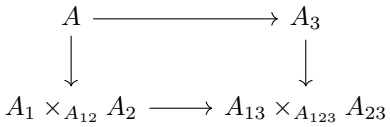
总之，如果两个完美嵌入中至少有一个是闭嵌入或饱和紧嵌入，那么局部化不变量满足切除性质。接下来我们需要证明这蕴含真下降。在此之前，我们将引入一个技术性引理，以简化下降型条件的归纳法。

4.1. 层条件关于 D_3。我们将需要一条技术性引理，它使我们能把关于三个生成元的层条件归结为关于拉回的陈述。该引理的概念性原因在于，由 Sierpiński 空间的三个副本之积给出的空间 $X = \mathbf{S}^3$ 表示 locale 上选取三个开集的函子。有些同义反复的是，任意局部上三个开集情形的层条件总可以通过推前到 $\mathbf{S}^3$ 来检验。空间 $\mathbf{S}^3$ 不过是配备了 Alexandroff 拓扑的组合立方体，其开集帧为 D_3，即由三个元素生成的自由分配格。

引理 4.7. 设$\mathcal{D}$ 是具有有限极限的 ∞-范畴。则



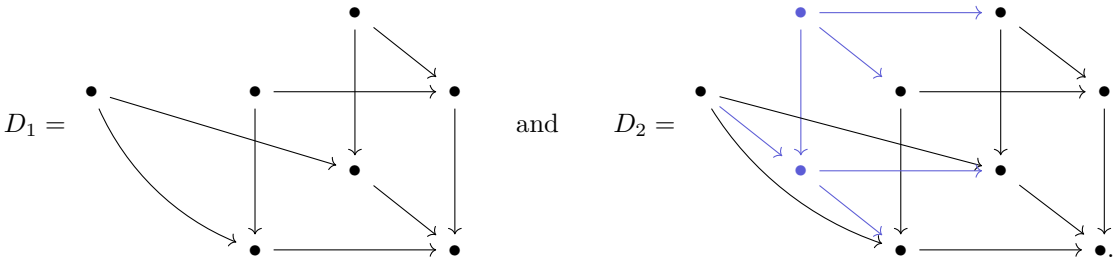
i是一个极限图，即 A 是该图底部部分的极限，当且仅当这个方 e



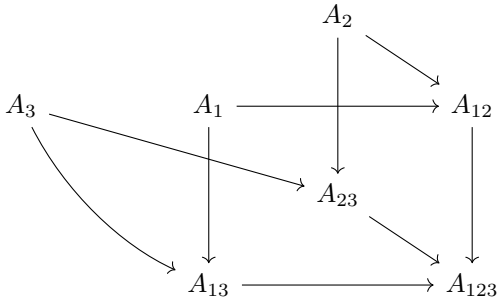
是一个拉回方块。

注记4.8。 引理 4.7 中的立方图表在 Goodwillie演算的语境中称为笛卡尔立方体，例如参见 [Ane+18]。我们预计引理 4.7 是众所周知的，但未能找到直接的参考文献，因此将其列出。附录 A 中给出了向 n维立方体的显然推广。

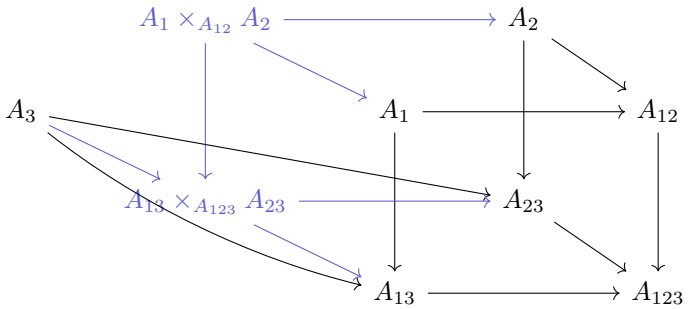
证明。 我们定义两种图形状，即



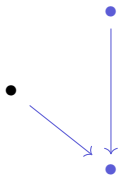
二者都表示为偏序集的实现。 D_1 的偏序集全忠实地嵌入 D_2，其像为黑色顶点的集合。现在，若我们有以下图表 $A_\bullet$的初始数据，它由 D_1索引，位于$\mathcal{D}$ 中，如下所示：



那么到 D_2 的右 Kan 延拓由下式给出：



根据右 Kan 延拓的一般公式。两个图表上的极限一致。最后，注意到脊的包含映射 S



在 D_2 中是终对象，因此我们得到极限 $\lim_{D_1} A_\bullet$ 的公式，即拉回

$$\begin{array}{ccc} \lim_F A_\bullet & \longrightarrow & A_1 \times_{A_{12}} A_2 \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ A_3 & \longrightarrow & A_{13} \times_{A_{123}} A_{23}. \end{array}$$

□

4.2. **延拓切除性**。 有了引理 4.7，我们便可以从闭与饱和紧下降推广到初等紧集的下降。

命题 4.9 （初等紧下降）。 设 $F\colon \mathsf{SC}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ 是一个函子，其中 $\mathcal{D}$ 是一个具有有限极限的 ∞-范畴，并且对于所有稳定紧 X, K ， X 的一个紧子集、 X 的一个闭子集，以及 X 的一个饱和紧子集 C , S ，这些方块

$$\begin{array}{ccc} F(K \cup C) & \longrightarrow & F(C) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(K) & \longrightarrow & F(K \cap C) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(K \cup S) & \longrightarrow & F(S) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(K) & \longrightarrow & F(K \cap S). \end{array}$$

都是拉回方块。那么，对于任何形如 $E = S \cup C$ 的紧子集 $E \subset X$ ，其中 S 是饱和紧的且 C 是闭的，该方块也成立

$$\begin{array}{ccc} F(K \cup E) & \longrightarrow & F(K) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(E) & \longrightarrow & F(K \cap E) \end{array}$$

是一个拉回方块。

证明。 证明只需反复应用引理 4.7。注意，根据假设，我们有以下拉回

$$\begin{array}{ccc} F(S\cup C) & \longrightarrow & F(C) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(S) & \longrightarrow & F(S\cap C) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F((K\cap S)\cup(K\cap C)) & \longrightarrow & F(K\cap C) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(K\cap S) & \longrightarrow & F(K\cap S\cap C) \end{array}$$

因为 $S\subset S\cup C$ 和 $K\cap S\subset (K\cap S)\cup(K\cap C) = K\cap(S\cup C)$ 是饱和紧子集。应用引理 4.7，这意味着该方块

$$\begin{array}{ccc} F(K\cup S\cup C) & \longrightarrow & F(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(S\cup C) & \longrightarrow & F(K\cap(S\cup C)) \end{array}$$

是一个拉回方块，当且仅当 $F(K\cup S\cup C)$ 是由 $F(K)$ $F(S)$ 和 $F(C)$ 构成的相应立方体的极限；根据引理 4.7，若这些方块

$$\begin{array}{ccc} F(K\cup C\cup S) & \longrightarrow & F(S) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(K\cup C) & \longrightarrow & F\left((K\cap S)\cup(C\cap S)\right) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} F(K\cup C) & \longrightarrow & F(C) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(K) & \longrightarrow & F(K\cap C) \end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc} F((K\cap S)\cup(C\cap S)) & \longrightarrow & F(C\cap S) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(K\cap S) & \longrightarrow & F(K\cap C\cap S) \end{array}$$

是拉回。三个方块都满足这一点，因为：

- $S\subset K\cup C\cup S$ 是饱和紧的。
- $C\subset K\cup C$ 是闭的。
- $C\cap S\subset (K\cap S)\cup(C\cap S) = (K\cup C)\cap S$ 是闭的。

因此，在所有这些情况下，我们都可以对闭含入或饱和紧含入应用切除，从而得出该结论。□

现在假设我们有一个函子 $F\colon \mathsf{SC}^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$，如命题 4.9 中所述，并且 $\mathcal{D}$ 还具有稳定性。由于在此情境下，推出方块与拉回方块恰好一致，因此我们看到， F 限制在初等紧集上时满足初等紧集上的余层 条件（覆盖由交给出！）。我们声称，这一点加上与滤过交的相容性，足以在由所有完美子空间构成的框架 $\mathcal{O}(X^{\mathrm{patch}})$ $\cong \mathcal{K}(X)^{\mathrm{op}}$ 上构造一个余层。唯一的问题是， $F(1)\neq 0$ 通常并不成立，这个问题可以通过取余纤维来解决。

命题 4.10。 设 X 是一个稳定紧空间，设 $\mathcal{D}$ 具有稳定性且对余极限封闭，并设$F:\mathcal{O}(X^{\mathrm{patch}}) \cong \mathcal{K}(X)^{\mathrm{op}}\to\mathcal{D}$ 是一个满足以下两个条件的函子：

(1) 对于所有的 $K\subset X$ 紧对象和 $E\subset X$ 初等紧，我们都有一个推出方形

$$\begin{array}{ccc} F(K\cup E) & \longrightarrow & F(K) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F(E) & \longrightarrow & F(E\cap K). \end{array}$$

(2) 每当 $K = \bigcap_{i\in I} K_i$ 是紧对象的有向交时，我们就有

$$F(K) \simeq \mathrm{colim}_{i\in I} F(K_i).$$

那么，由 $F_\#(K) = \mathrm{cofib}(F(1) \to F(K))$ 定义的函子 $F^\#$ 是 X^{patch} 上的余层 .

在我们 开始证明之前，先引用一个关于使用格罗滕迪克拓扑的标准引理。

引理 4.11 （比较引理，参见 [Hoy14], 引理 C.3）. 设 (P, τ) 是一个配备了格罗滕迪克拓扑的偏序集，且 $P_0 \subset P$ 是 P 的一个子集，满足：

- P 中的每个对象都可以由 P_0 中的对象覆盖。
- P_0 在 P中对交封闭。

令 τ_0 为通过限制在 P_0 上诱导的格罗滕迪克拓扑。那么限制 n

$$\mathrm{Sh}(P, \tau) \to \mathrm{Sh}(P_0, \tau_0)$$

是 ∞-范畴之间的等价，其逆由右 Kan 延拓给出。

值得指出的是，同一结论也适用于余层，不过其逆由左 Kan 延拓给出。

命题 *4.10* 的证明。 显然，将 $F^\#$ 限制到初等紧集$\mathcal{E}(X)^{\mathrm{op}}$ 后，它是由$\mathcal{O}(X^{\mathrm{patch}})$通过限制诱导的格罗滕迪克拓扑下的余层。利用引理 4.11，我们只需证明自然映射

$$\eta : \mathrm{LanRes} F^\# \to F^\#$$

是一个等价；我们只需对所有紧 $K \subset X$逐个对象验证这一结论。分两步进行:

(a) 我们首先通过归纳法证明，对于形如 $K = E_1 \cap \cdots \cap E_n$ 且 E_i 为初等紧对象的 K， η_K 是一个等价。归纳起点成立，因为初等紧对象到所有紧对象的包含映射是全忠实的。现在假设我们已知，对于 $n-1$ 个初等紧对象的交， η 是一个等价。由于 Res$F^\#$ 的左 Kan 延拓在 $\mathcal{O}(X^{\mathrm{patch}})$ 上是一个余层，LanRes$F^\#$ 在 K 上的取值由以下推出给出

$$\begin{array}{ccc} F^\#((E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}) \cup E_n) & \longrightarrow & F^\#(E_n) \\ \downarrow & & \downarrow \\ F^\#(E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1}). & \longrightarrow & \mathrm{LanRes} F^\#(E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n) \end{array}$$

但根据第 (1) 点的假设，这个推出与 $F^\#(E_1 \cap \cdots \cap E_{n-1} \cap E_n)$ 一致。

(b) 对于任意的 K，我们只需将 K 写成有限个初等紧对象之交的一个有向交，并结合 (a) 和假设 (2)，即可得出 η_K 也是一个等价。

□

5. 稳定紧空间上的下降

本节将介绍 Clausen 提出的以下定理的一个推广。

定理 5.1 (Clausen，参见 [KNP24]定理 3.6.15)。 设 D 是一个紧组合的可呈现 ∞-范畴，并设 $F : \mathrm{CH}^{\mathrm{op}} \to D$ 是一个函子，满足：

(1) $F(\emptyset) = 1$.

(2) 闭下降：每当 K、$L \subset X$ 是两个闭嵌入时，则

$$\begin{array}{ccc} F(K \cup L) & \longrightarrow & F(K) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(L) & \longrightarrow & F(K \cap L) \end{array}$$

是一个拉回。

(3) 前有限下降：每当 $X_i, i \in I$ 是 CH 中的一个余滤过系统时，则

$$F(\lim_{i \in I} X_i) \simeq \mathrm{colim}_{i \in I} F(X_i).$$

于是存在函子的自然等价

$$F \simeq \Gamma(-, F(\mathrm{pt})),$$

对于给定的紧豪斯多夫空间 X，表达式 $\Gamma(X, F$(单点空间) 表示值为 F(单点空间) $\in D$ 的常值层的整体截面。

此扩张　　稳定紧空间的情形可通过将闭下降替换为真下降得到　　.

定理 5.2。设 D 是一个紧组合的 ∞-范畴，且设 F : 稳定紧$^{\mathrm{op}} \to D$ 是一个函子，满足：

(1) $F(\emptyset) = 1$.

(2) 完美下降：每当 $K, L \subset X$ 是两个完美嵌入时，

$$\begin{array}{ccc} F(K \cup L) & \longrightarrow & F(K) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ F(L) & \longrightarrow & F(K \cap L) \end{array}$$

是一个拉回。

(3) 余滤过下降：每当 $X_i, i \in I$ 是 稳定紧中的一个余滤过系统时，

$$F(\lim_{i \in I} X_i) \simeq \mathrm{colim}_{i \in I} F(X_i).$$

那么存在函子的自然等价

$$F \simeq \Gamma((-)^{\mathrm{patch}}; F(\mathrm{pt})).$$

下面给出定理 5.2 的证明所需的设置。在本节余下部分，固定一个满足定理 5.2 条件的函子F : 稳定紧 $^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$。对于给定的稳定紧空间 X，将 F限制到完美嵌入集合 $K \subset X$ 上，会得到一个 K-层

$$F_X : \mathcal{K}(X)^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}.$$

在 X^{patch} 上，因为 X 的完美子集集合与 X^{patch} 的紧子集集合相同。在 K-层与层的等价下，F_X 对应于一个层 $F^X \in \mathrm{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D})$。利用观察 3.63 中给出的事实，我们得到以下结论。

- 由构造可得等价 $\Gamma(X_{\mathrm{patch}}\, F^X) = F^X(X) \simeq F_X(X) = F(X)$。
- 对每个点 $x \in X$，茎可计算为 $F^X_x \simeq F(\{x\}) \simeq F$(单点空间)。
- 唯一映射 $X \to$ 单点空间产生一个典范映射 F(单点空间) $\to F(X)$，并借助伴随给出一个自然变换

$$\alpha_X : \underline{F(\mathrm{pt})} \to F^X$$

$\mathrm{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D})$ 中层的。

- 自然变换 α_X 对所有点 $x \in X$ 都是茎态等价。

因此，我们得到如下简单结论。

观察 5.3. 设 X 为稳定紧空间。若 α_X 是等价，则陈述$F(X) \simeq \Gamma(X^{\mathrm{patch}}; F(\text{单点空间}))$成立。

回忆：一个拓扑斯$\mathcal{X}$ 被称为具有足够多的点，如果对$\mathcal{X}$ 的所有点 x ，茎函子族 $x^* : \mathcal{X} \to \mathrm{An}$是联合保守的，即等价可以逐茎检测。当把紧组合的 ∞-范畴$\mathcal{D}$作为目标来考虑时，为得到同样的陈述，我们引用如下引理。

引理 5.4 ([Hai22], 引理 2.12)**.** 设$\{p_i^* : T \to S_i\}_{i\in I}$ 是可表现 ∞-范畴之间保有限极限的左伴随函子的一个联合保守族，并设$\mathcal{E}$ 是一个紧组合的可表现 ∞-范畴。则左伴随族$\{p_i^* \otimes \mathcal{E} : T \otimes \mathcal{E} \to S_i \otimes \mathcal{E}\}_{i\in I}$是联合保守的。

以下内容是直接的。

引理 5.5。 对于所有满足 $\mathrm{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathrm{An})$ 具有足够多点的稳定紧空间 X，命题 $F(X) \simeq \Gamma(X^{\mathrm{patch}}; F(\text{单点空间}))$成立。

我们注意到，对于例如$X = I^S_{\leq}$ 无限维的有向希尔伯特立方体 S，$\mathrm{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathrm{An})$ 具有足够多点这一条件并不成立。尽管如此，由于以下两个定理，我们现在有了一大类满足定理 5.2 的例子。

定理 5.6 （[Lur12] 推论 7.2.1.17）。设 X 为一个拓扑空间。假设对于某个整数 n，$\mathrm{Sh}(X, \mathrm{An})$ 局部具有 $\leq n$ 同伦维数。那么，$\mathrm{Sh}(X, \mathrm{An})$ 具有足够多点。

定理 5.7 （[Lur12]推论 7.2.3.7。）。设 X 为一个仿紧拓扑空间。以下条件等价。

(1) X 的覆盖维数为 $\leq n$。*(2)* $\mathrm{Sh}(X,\mathrm{An})$ 的同伦维数为 $\leq n$。*(3)* 对于每个闭子集 $A \subset X$、每个 $m \geq n$ 以及每个连续映射 $f_0 : A \to S^m$，都存在$f : X \to S^m$ ，使其延拓 f_0。

由此可知，定理 5.2 对满足以下条件的稳定紧 X 成立： X^{patch} 作为某个有限 N的闭子集嵌入其中，因为 I^N是仿紧的，且覆盖维数为 N。此时我们似乎陷入了困境，因为对于任意稳定紧 X，我们无法通过茎来论证。对于紧豪斯多夫空间，Clausen 给出的证明论证利用了这样一个事实：每个紧豪斯多夫空间都是有限维多面体的逆极限，然后应用前有限下降。我们的证明在这里会稍有不同，因为我们将直接论证，对于每个稳定紧空间 X， α_X 都是等价。这样做之前，我们应当补充一些关于赋值 $X \mapsto \alpha_X$自然性的说明。

构造 5.8。 给定一个完美映射 $f : X \to Y$，我们看到存在一个 Y 上的 K-层的自然变换，

$$F_Y \to f_+ F_X$$

给定 $K \subset Y$完美映射 $F(K) \xrightarrow{F(f|_{f^{-1}(K)})} F(f^{-1}(K))$。根据命题 3.68 所给出的自然性，这对应于一个层的自然变换 $F^Y \to f_* F^X$. 极端情形 $X \to$单点空间，给出映射 $F(\text{单点空间}) \to X_* F^X$，它与 α_X 互为伴随。

若 $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$ 是两个完美映射，显然我们有一个关于 Z 上的层的自然变换的交换三角形，

$$\begin{array}{ccc} F^Z & \longrightarrow & g_*F^Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & (gf)_*F^X. \end{array}$$

在 g_* over 上添加后，得到交换三角形

$$\begin{array}{ccc} g^*F^Z & \longrightarrow & F^Y \\ & \searrow & \downarrow \\ & & f_*F^X. \end{array}$$

此外，映射 $g^*F^Z \to f_*F^X$ 自然地分解为交换三角形

$$\begin{array}{ccc} g^*F^Z & & \\ \downarrow & \searrow & \\ f_*f^*g^*F^Z & \longrightarrow & f_*F^X. \end{array}$$

通过拼接三角形，我们得到 Y 上层的自然交换方块，

$$\begin{array}{ccc} g^*F^Z & \longrightarrow & F^Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ f_*f^*g^*F^X & \longrightarrow & f_*F^X. \end{array}$$

$Z = \mathrm{pt}$ 的特例给出一个从 $\alpha_Y \to f_*\alpha_X$ 出发的箭头映射。

理解这一点后，我们可以通过以下观察去掉有限维假设：任意有向希尔伯特立方体 $I_{\leq}^S \cong \lim_{N\subset S \text{ 有限}} I_{\leq}^N$ 都可表示为补丁拓扑有限维的稳定紧空间的逆极限。这将由下述引理所提供的（强）同伦不变性推出。

引理 5.9. 设 X 是稳定紧空间，且对某个有限M， X^{patch} 嵌入为 $[0,1]^M$ 的闭子集，并设 S 是任意基数的集合。那么

$$F(X) \simeq F(X \times I_{\leq}^S)$$

经由典范投影 $X \times I_{\leq}^S \to X$。

证明。 利用余滤过下降，我们看到

$$F(X \times I_{\leq}^S) \simeq \mathrm{colim}_{N\subset S \text{ finite}} F(X \times I_{\leq}^N).$$

空间 $X \times I_{\leq}^N$ 还满足 $(X \times I_{\leq}^N)^{\mathrm{patch}} \cong X^{\mathrm{patch}} \times I^N \subset I^{M \amalg N}$ 是仿紧且具有有限覆盖维数，因此引理 5.5 与 I^N 的可缩性表明，余极限图表实际上是取值为 $F(X)$ 的常值图表。□

作为直接应用，我们得到以下结论。

引理 5.10. 设 $N \subset S$ 是一个有限子集，并用 $p^N \colon I^S_{\leq} \to I^N_{\leq}$ 表示有向希尔伯特立方体之间相应的投影。那么存在一个层的自然等价

$$F^{I^N_{\leq}} \simeq p^N_* F^{I^S_{\leq}}$$

在 I^N 上。

证明. 相应的 $F^{I^N_{\leq}}$ 的 K-层由 $F_{\underline{I^N_{\leq}}}$ 给出，并且相应的 $p^N_* F^{I^S_{\leq}}$ 的 K-层由

$$(K \subset I^N_{\leq}) \mapsto F_{\underline{I^S_{\leq}}}(K \times I^{S\setminus N}_{\to}) = F(K \times I^{S\setminus N}_{\to}).$$

我们可以看出，它们的值自然等价，因为根据引理 5.9，我们有 $F(K \times I^{S\setminus N}_{\to}) \simeq F(K) \simeq F_X(K)$。□

命题 5.11. 对于任意集合 S，当 $X = I^S_{\leq}$ 是有向希尔伯特立方体时，自然变换 α_X 是一个等价。

证明。 由于 $I^S_{\leq} =$ 极限$_{N\subset S \text{ 有限}} I^N_{\leq}$，取补丁拓扑，并利用取值于$\mathcal{D}$ 的层将稳定紧空间的余滤过极限映射为 $\mathbf{Pr}^L$中的滤过余极限这一事实，我们有

$$\mathrm{Sh}(I^S, \mathcal{D}) \simeq \mathrm{colim}_{N\subset S \text{ finite}} \mathrm{Sh}(I^N, \mathcal{D}),$$

其中余极限取自 $\mathbf{Pr}^L$，也就是说，它是沿右伴随函子对 ∞-范畴取极限。因此，该映射

$$\alpha_{\underline{I^S_{\leq}}} : \underline{F(\mathrm{pt})} \to F^{I^S_{\leq}}$$

对应于有限 $N \subset S$ 的 $p^N_*(\alpha_{I^S_{\leq}})$ 映射族。我们断言， $p^N_*(\alpha_{I^S_{\leq}})$ 与 $\alpha_{I^N_{\leq}}$ 作为自然变换等价。根据引理 5.10，我们已经知道 $F^{I^N_{\leq}} \simeq p^N_* F^{I^S_{\leq}}$。我们还知道，映射 p^N 在应用补丁拓扑函子后诱导出一个可缩且本质的几何态射（见例 2.17），因此根据引理 2.16， p^N_* 保持常值对象。□

引理 5.12. 若 $i : K \hookrightarrow X$ 是稳定紧空间之间的完美嵌入，且 α_X 是一个等价，则 α_K 也是一个等价。

证明. 自然变换的映射 $\alpha_X \to i_* \alpha_K$ 通过伴随产生一个映射 $i^* \alpha_X \to \alpha_K$。我们断言，该映射是自然变换之间的等价；这等价于说，自然变换 $i^* X^*(F(\text{单点空间})) \to Y^*(F(\text{单点空间}))$ 和 $i^*(F^X) \to F^K$ 都是等价。前者显然成立，因为 i^* 保持常值层。后者可由以下观察得出：相应的 K-层 $i^*(F^X)$ 是通过将 F_X 限制到 $\mathcal{K}(K)$ 得到的。此限制由与包含映射预合成给出

$$\mathcal{K}(K) \cong \mathcal{K}(X)_{/K} \hookrightarrow \mathcal{K}(X)$$

它保持非空下确界和任意上确界，因此前复合保持 K-层。 □

现在我们可以完成定理 5.2 的证明。

定理 *5.2* 的证明。 如果 X 是一个稳定紧空间，则利用定理 3.40，将 X 嵌入有向希尔伯特立方体中。命题 5.11 和引理 5.12 的结合意味着， α_X 是一个等价。□

注 5.13. 在本证明中，唯一用到茎来论证的地方，是证明对于 $X = I^N_{\leq}$ 有向的有限维立方体， α_X是一个等价。不幸的是，如果不假设$\mathcal{D}$ 是紧组合的，那么在这种情况下茎函子的联合满射性并不成立，参见 [KNP 24],第 3.6 节的讨论，尤其是推论 3.6.16。

注 5.14. 在构造自然变换$\Gamma((-)^{\mathrm{patch}}, F(\text{单点空间})) \to F$时，我们的实际做法有些不够严谨。下面来回应可能的疑虑。[16]

考虑函子 $\mathsf{Sh}((-)^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D})\colon \mathsf{SC} \to \widehat{\mathsf{Cat}}_\infty$，其函子性由 f 给出：将 $X \to Y$ 映射到 $f_*\colon \mathsf{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D}) \to \mathsf{Sh}(Y_{\text{补丁}}, \mathcal{D})$。单点空间 $\mathrm{pt} \to \mathsf{SC}$ 的包含映射是终对象，因此存在一个诱导自然变换 $\mathsf{Sh}((-)^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D}) \Rightarrow \mathcal{D}$，其中 $\mathcal{D}\colon \mathsf{SC}^{\mathrm{op}} \to \widehat{\mathsf{Cat}}_\infty$ 是取值为 $\mathcal{D}$ 的常值函子。逐点来看，它就是通过构造整体截面给出的。

应用反直化后，我们得到笛卡尔纤维化之间的一个诱导函子

$$\begin{array}{ccc} \int_{\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Sh} & \xrightarrow{\quad\Gamma\quad} & \int_{\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}} \overline{D \simeq \text{稳定紧}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}} \\ & {\scriptstyle p}\searrow \quad \swarrow{\scriptstyle q} & \\ & \mathrm{SC}^{\mathrm{op}} & \end{array}$$

其中，∞-范畴 $\int_{\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}} \mathsf{Sh}$ 在对象上由有序对 $(X \in \mathsf{SC}, \mathcal{F} \in \mathsf{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D}))$ 给出，而态射 $(Y, \mathcal{G}) \to (X, \mathcal{F})$ 由一个完美映射 $f\colon X \to Y$ 以及 $\mathsf{Sh}(Y_{\text{补丁}}, \mathcal{D})$ 中的一个自然变换 $\mathcal{G} \Rightarrow f_*(\mathcal{F})$ 组成。函子 Γ 在给定稳定紧空间 X 上的纤维中由 $X_*\colon \mathsf{Sh}(X^{\mathrm{patch}}, \mathcal{D}) \to \mathcal{D}$ 给出。

函子 Γ 相对于稳定紧空间有左伴随^{op}，这可以通过 [Lur17, 命题 7.3.2.6],直接验证，标签为

$$\mathcal{E} = \mathrm{SC}^{\mathrm{op}}, \mathcal{C} = \mathrm{SC}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}, \mathcal{D} = \int_{\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Sh} \text{ and } G = \Gamma.$$

取截面后，得到伴随

$$\mathrm{Fun}_{/\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}, \int_{\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}} \mathrm{Sh}) \underset{\Gamma}{\overset{}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}_{/\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}}(\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}, \mathrm{SC}^{\mathrm{op}} \times \mathcal{D}) \quad \simeq \quad \mathrm{Fun}(\mathrm{SC}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D})$$

构造 5.8 的要点在于，它提供了一个沿着 Γ提升 $F\colon$稳定紧空间$^{\mathrm{op}} \to \mathcal{D}$ F^-。将上述伴随的余单位应用于 F^-，对每个稳定紧空间 X 逐点恢复自然变换$\alpha_X\colon F(\text{单点空间}) \to F^X$。应用 Γ时，这给出自然变换 $\Gamma((-)^{\mathrm{patch}}, F(\text{单点空间})) \Rightarrow F$。

注 5.15. 定理 5.1 和定理 5.2 可以用更具结构性的方式表述为：存在以下 ∞-范畴之间的等价

$$\mathrm{Fun}^{desc}(\text{稳定紧空间}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}) \underset{\text{补丁}^*}{\overset{res}{\rightleftarrows}} \mathrm{Fun}^{desc}(\mathrm{CH}^{\mathrm{op}}, \mathcal{D}) \underset{}{\overset{\Gamma(-;-)}{\rightleftarrows}} \mathcal{D}$$

其中，Fun^{desc} 表示满足定理 5.1 或定理 5.2 中任一下降条件的函子。从这个意义上说，定理 5.2 实际上将定理 5.1 包含为一个特例，因为将满足闭下降和前有限下降的函子与 patch 函子 $patch\colon \mathsf{SC} \to \mathsf{CH}$ 复合，得到的函子满足完美下降和余滤过下降。

[16]感谢 Maxime Ramzi 提出了这一论证。

6. 主定理

定理 6.1. 设 X 是一个稳定紧空间，$\mathcal{C}$ 是一个可对偶的 ∞-范畴，且 $F:\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}} \to E$ 是一个取值于可对偶 ∞-范畴 E 的有限型局部化不变量。存在一个自然等价

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq H^{\bullet}(X^{\mathrm{patch}}, F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})),$$

其中 $H^{\bullet}(X^{\mathrm{patch}}, F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})) = \Gamma(X^{\mathrm{patch}}, F_{\text{连续}}(\mathcal{C})^{sh})$ 是 X^{patch} 取值于与 $F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})$相关联的常值层的 E 值层上同调。

证明。 我们将定理 5.2 应用于函子 $F_{\mathcal{C}} = F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(-,\mathcal{C})) : \text{稳定紧}^{\mathrm{op}} \to \mathcal{E}$。 为此，我们需要验证以下三个条件：

(1) 命题 $F_{\text{连续}}(\mathrm{Sh}(\emptyset,\mathcal{C})) \simeq F^{\mathrm{cont}}(0) \simeq 0$ 显然。(2) $F_{\mathcal{C}}$ 的余滤过下降可由以下事实推出： F 被假设为有限性保持的不变量，并结合推论 2.34。(3) $F_{\mathcal{C}}$ 的完美下降可由以下结果依次推出：

- 推论 4.3 表明闭切除成立。
- 命题 4.4 表明，饱和紧切除成立。
- 结合这两个结果，利用命题 4.9 可推出初等紧下降。
- 最后，利用命题 4.10，初等紧下降与余滤过下降共同推出完美下降。

□

将定理 6.1 的结果推广到稳定局部紧空间的情形是直接的。我们回顾一下，对于一个局部紧豪斯多夫空间 X，以及$\mathcal{E}$ 某个可对偶 ∞-范畴， X 取值于某个 $E \in \mathcal{E}$ 的紧支撑上同调 $H^{\bullet}_{cs}(X,E)$定义为下述映射的纤维：

$$H^{\bullet}(X^{*},E) \to H^{\bullet}(\mathrm{pt},E) \simeq E,$$

该映射由无穷远点到 X的一点紧化 X^{*} 的包含映射诱导。（更多信息参见例如[Vol25，定义 5.6。]）

定理 6.2。 </style}设为一个稳定局部紧空间，C 为一个可对偶-范畴，且: $\mathbf{Cat}^{\mathrm{perf}} \to E$ 是一个取值于可对偶 ∞-范畴 E 的有限型局部化不变量。存在一个自然等价

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq H^{\bullet}_{cs}(X^{\mathrm{patch}}, F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})).$$

证明。 X^{+} 的开闭分解为开子空间 X 及其闭补 $\{\infty\}$ ≅ 单点空间，从而给出纤维序列

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \longrightarrow F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X^{+},\mathcal{C})) \longrightarrow F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}).$$

现在，定理 6.1 与推论 3.87 一起表明，中间项可计算为 $F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X^{+},\mathcal{C})) \simeq H^{\bullet}((X^{\mathrm{patch}})^{*}, F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C}))$，因此我们得到

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq H^{\bullet}_{cs}(X^{\mathrm{patch}}, F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})).$$

□

推论 6.3. 设 X 为稳定局部紧，设 F 为有限型局部化不变量 $\mathbf{Cat}^{\mathrm{perf}} \to \mathcal{E}$ ，且$\mathcal{E}$ 可呈稳定，并设 $\mathcal{C}$ 为可对偶的 ∞-范畴。则

$$F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) \simeq F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Cosh}(X,\mathcal{C})).$$

证明. 关于$\mathcal{E}$ 可对偶的陈述，对稳定紧空间 X 可借助 Verdier 对偶（定理 3.59）直接得出，因为我们有如下之字形

$$\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C}) \to \mathrm{Sh}(X^{\mathrm{patch}},\mathcal{C}) \leftarrow \mathrm{Sh}(X^{\vee},\mathcal{C}) \simeq \mathrm{Cosh}(X,\mathcal{C}),$$

根据定理 6.1，其中所有映射在有限局部化不变量上都是等价。（de Groot 对偶 $X^{\vee}$ 的补片拓扑与 X^{patch}一致，见注 3.82。）请注意，这一串 zig-zag 本身在稳定紧空间之间的真映射下是自然的。因此，对于 X 仅为稳定局部紧的情形，我们有

$$\begin{aligned} F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X,\mathcal{C})) &\simeq \mathrm{fib}(F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Sh}(X^{+},\mathcal{C})) \to F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})) \\ &\simeq \mathrm{fib}(F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Cosh}(X^{+},\mathcal{C})) \to F^{\mathrm{cont}}(\mathcal{C})) \simeq F^{\mathrm{cont}}(\mathrm{Cosh}(X,\mathcal{C})), \end{aligned}$$

由此完成论证。对于$\mathcal{E}$ 不一定可对偶的情形，我们可以利用这样一个事实： F 可经由万有有限局部化不变量$\mathcal{U}$: $\mathrm{Cat}^{\mathrm{perf}}$ →Mot分解，并使用 Efimov 的结果：Mot 是可对偶的[Efi25c]。□

附录 A。 任意有限秩自由分配格上的层条件

尽管本文实际上并不需要这一结果，但将引理 4.7 推广到任意维数的立方图表情形仍可能有用。主要论证完全相同，不过我们需要先给出一些定义。定义如下偏序集：

- 我们将脊 $S = [1] \amalg_{[0]} [1]$ 定义为形状

$$\begin{array}{ccc} & & b \\ & & \downarrow \\ a & \longrightarrow & c \end{array}$$

沿最大元粘合两个 $[1]$ 副本所得的对象。我们用 a, b, c 表示其元素，如图所示。

- 设 N 是一个含有 n 个元素的集合。用$\mathcal{C}(N)$ 表示由$\mathcal{P}(N) \setminus \{\emptyset\}$构成的偏序集，其为去掉底角的立方体，偏序由子集的包含关系给出。注意， $[1]^n \cong \mathcal{P}(N)$ 是$\mathcal{C}(N)$ 的锥。固定一个指标 $i \in N$。那么在$\mathcal{C}(N)$ 中有$\mathcal{C}(N \setminus \{i\})$ 的两个副本，分别为

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_0 &= \{A \subset N \mid A \neq \emptyset \text{ and } A \cap \{i\} = \emptyset\} \\ \mathcal{C}_1 &= \{A \subset N \mid A \neq \emptyset, A \neq \{i\} \text{ and } A \cap \{i\} = \{i\}\}. \end{aligned}$$

由$\mathcal{C}_0$ 与$\mathcal{C}_1$ 的并给出的全子偏序集同构于$\mathcal{C}(N \setminus \{i\})$ × [1]，并且与$\mathcal{C}(N)\setminus\{i\}$相同。

- 此外，回顾一下，两个偏序集 $(P, \leq_P)$ 和 $(P\prime \leq_{P\prime})$ 的并 $P \star P\prime$由集合$P \amalg P\prime$ 连同序关系 $\leq_\star$构成。该序关系是满足以下条件的最小序关系：限制在 P 和 $P\prime$上时，分别与序关系 $\leq_P$ 和 $\leq_{P'}$一致；并且对所有 $p \in P$ 和 $p\prime \in P\prime$，满足 $p \leq_\star p\prime$。[17]

引理 A.1. 设 $\mathcal{D}$ 是一个具有有限极限的范畴，且 $F : [1]^n \to \mathcal{D}$ 是一个图表。那么 F 是极限图，当且仅当方块

$$\begin{array}{ccc} F(\emptyset) & \longrightarrow & F(\{i\}) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \lim_{\mathcal{C}_0} F|_{\mathcal{C}_0} & \longrightarrow & \lim_{\mathcal{C}_1} F|_{\mathcal{C}_1} \end{array}$$

是一个拉回方块。

[17]这与 Lurie [Lur12, 1.2.8], 所说的单纯集合的并这一概念相符，也就是说， P和 $P\prime$的神经的单纯并由偏序连接 $P \star P'$的神经给出。

证明。 考虑将$\mathcal{C}(N)$包含到 $S \star (\mathcal{C}(N)\backslash\{i\})$中的包含映射，该映射将$\{i\}$ 发送到元素 $b \in S$。现在，我们沿此包含映射对 F 进行右 Kan 延拓。于是， S 处的条目为

$$\begin{array}{ccc} & & F(\{i\}) \\ & & \downarrow \\ \lim\limits_{\mathcal{C}_0} F|_{\mathcal{C}_0} & \longrightarrow & \lim\limits_{\mathcal{C}_1} F|_{\mathcal{C}_1} \end{array}$$

由于右 Kan 延拓保持极限，右 Kan 延拓图表的极限与 $\lim\limits_{\mathcal{C}(N)} F$一致。 S 到 $S \star (\mathcal{C}(N)\backslash\{i\})$的包含映射是终对象，因此我们得到拉回方块

$$\begin{array}{ccc} \lim\limits_{\mathcal{C}(N)} F & \longrightarrow & F(\{i\}) \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ \lim\limits_{\mathcal{C}_0} F|_{\mathcal{C}_0} & \longrightarrow & \lim\limits_{\mathcal{C}_1} F|_{\mathcal{C}_1}, \end{array}$$

这就证明了该断言。 □

参考文献

[AB26] Fernando Abellán 与 Thomas Blom。“同伦论中的松幂等单子”。待发表。2026。[AL] Mathieu Anel 与 Damien Lejay。可指数化 ∞-拓扑斯，第2版。url： http://mathieu.anel.free.fr/mat/doc/Anel-Lejay-Exponentiable-topoi.pdf。[AL18] Mathieu Anel 与 Damien Lejay。可指数化高阶拓扑斯。2018。arXiv：1802 . 10425[math.CT]。url： https://arxiv.org/abs/1802.10425。[Ane+18] M. Anel 等。“Goodwillie 函子演算与高阶托普斯理论”。载于：《拓扑学杂志》11.4（2018），第1100–1132页。[Aok23a] Ko Aoki。“Verdier 对偶成立的偏序集”。载于：《数学精选》29.5（2023年10月）。issn：1420-9020。doi： 10.1007/s00029-023-00887-2。url： http://dx.doi.org/10.1007/s00029-023-00887-2。[Aok23b] Ko Aoki。“滤过对象与层的张量三角几何”。载于：《数学杂志》303.3（2023年2月）。issn：1432-1823。doi： 10 . 1007 / s00209 - 023 - 03210 - z。url：http://dx.doi.org/10.1007/s00209-023-03210-z。[Aok25a] Ko Aoki。层–谱伴随。2025。arXiv： 2302 . 04069 [math.CT]。url： https://arxiv.org/abs/2302.04069。[Aok25b] Ko Aoki。非常 Schwartz 余幂等元与连续谱。2025。arXiv：2505 .04817[math.CT]。url： https://arxiv.org/abs/2505.04817。[Bar+00] Gottfried Barthel 等。“扇的组合交叉上同调”。载于：《东北数学杂志》54（2000年3月）。doi： 10.2748/tmj/1113247177。[BGT10] Andrew Blumberg、David Gepner 与 Goncalo Tabuada。“高阶代数 K 理论的泛刻画”。载于：《几何与拓扑》17（2010年1月）。doi： 10.2140/gt.2013.17.733。[Ble21] Ingo Blechschmidt。在代数几何中使用拓扑斯的内语言。2021。arXiv：2111.03685 [math.AG]。url： https://arxiv.org/abs/2111.03685。[Bra06] Tom Braden。“关于扇的组合交叉上同调的注记”。载于：《纯粹与应用数学季刊》2.4（2006），第1149–1186页。doi： 10.4310/PAMQ.2006.v2.n4.a10。url： https://doi.org/10.4310/PAMQ.2006.v2.n4.a10。

[Bru+15] Erwan Brugallé 等。热带几何简要引言。2015 1502 . 05950 。arXiv：。url：。[math.AG] https://arxiv.org/abs/1502.05950
[Bun21] Ulrich Bunke。关于 C^*-代数与 C^*-范畴的讲义课程。讲义。未出版讲义课程。2021。url：https://bunke.app.uni-regensburg.de/VorlesungCastcats-1.pdf。[Efi25a] Alexander I. Efimov。大范畴的 K 理论与局部化不变量。2025 2405.。arXiv：。url：。12169 [math.KT] https://arxiv.org/abs/2405.12169
[Efi25b] Alexander I. Efimov。逆极限的局部化不变量。2025。arXiv： 2502.04123 [math.KT]。url：https://arxiv.org/abs/2502.04123。[Efi25c] Alexander I. Efimov。局部化动机范畴的刚性。2025 2510.17010。arXiv：。url：。[math.KT] https://arxiv.org/abs/2510.17010
[Esc01] Martín Hötzel Escardó。“稳定局部紧局部的正则局部紧余反射”。载于：纯粹与应用代数杂志157.1（2001），第41–55页。issn：0022-4049。doi：https://doi.org/10.1016/S0022-4049(99)00172-3。url：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0022404999001723。[GHK20] David Gepner、Rune Haugseng 与 Joachim Kock。作为解析单子的 ∞-算畴。2020。arXiv：1712.06469 [math.AT]。url：https://arxiv.org/abs/1712.06469。[Gie+03] G. Gierz 等。连续格与域。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，2003。[Gou13] Jean Goubault-Larrecq。非豪斯多夫拓扑与域论：点集拓扑专题选讲。新数学专著。剑桥大学出版社，2013。[GR19] D. Gaitsgory 与 N. Rozenblyum。导出代数几何研究：第一卷：对应与对偶。数学综述与专著。美国数学会，2019。isbn：9781470452841。url：https://books.google.de/books?id=gnUjEAAAQBAJ。[Hai22] Peter J. Haine。从非阿贝尔基变换到带系数基变换。2022 2108.。arXiv：。03545 [math.CT] https://arxiv.org/abs/2108.03545
url：。[Hoy14] Marc Hoyois。“格罗滕迪克–勒夫谢茨–韦尔迪耶迹公式的二次精化”。载于：代数与几何拓扑14（2014年12月），第3603–3658页。doi： 10.2140/agt.2014.14.3603。[Hoy18] Marc Hoyois。“高阶伽罗瓦理论”。载于：纯粹与应用代数杂志222.7（2018），第1859–1877页。issn：0022-4049。doi：https://doi.org/10.1016/j.jpaa.2017.08.010。url：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S002240491730186X。[JJ82] Peter Johnstone 与 André Joyal。“连续范畴与可指数化托普斯”。载于：纯粹与应用代数杂志 25 3 1982 255 296 0022 4049 https://doi.。（），第–页。org/10.1016/0022-4049(82)90083-4 https://www.sciencedirect.com/science/article/ issn：-。doi：。url：pii/0022404982900834。[Joh02] P.T. Johnstone。大象素描：托普斯理论纲要：第1卷。牛津逻辑指南。克拉伦登出版社，2002。isbn：9780198534259。url： https://books.google.de/books?id=Q2WgxwEACAAJ。[Joh82] P.T. Johnstone。斯通空间。剑桥高等数学研究。剑桥大学出版社，1982。isbn：9780521337793。url： https://books.google.de/books?id=CiWwoLNbpykC。[Joh83] Peter T. Johnstone。“无点拓扑的要点”。载于：美国数学会通报（新辑）8.1（1983），第41–53页。[Kar04] Kalle Karu。“非有理多胞体的硬勒夫谢茨定理”。载于：数学新进展157.2（2004），第419–447页。doi：10.1007/s00222-004-0358-3。url： https://doi.org/10.1007/s00222-004-0358-3。[KL05] Klaus Keimel 与 Jimmie Lawson。“T_0空间的测度延拓定理”。载于：拓扑学及其应用149（2005年4月），第57–83页。doi：10.1016/j.topol.2004.02.019。

[KNP24] Achim Krause、Thomas Nikolaus 和 Phil Pützstück。《流形上的层》。2024 https:// 。网址：。[Koc95] Anders www.uni-muenster.de/IVV5WS/WebHop/user/nikolaus/Papers/sheaves-on-manifolds.pdf
Kock。《结构与单位伴随的单子》。载于：《纯粹与应用代数杂志》104 1 1995 41 59 0022 4049 https://doi.org/10.1016/0022-4049(94)。（），第 – 页。ISSN：-。
00111-U https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002240499400111U
DOI：。网址：。[KS02] M. Kashiwara 和 P. Schapira。《流形上的层：简史》。《层论的开端》，Christian Houzel 著。数学科学基础丛书。Springer Berlin Heidelberg，2002。ISBN：9783540518617。网址： https://books.google.com.br/books?id=qfWcUSQRsX4C。[KS17] Masaki Kashiwara 和 Pierre Schapira。《持久同调与微局部层论》。载于：《应用与计算拓扑学杂志》2 2017 83 113 https://api.（），第 – 页。
semanticscholar.org/CorpusID:119628740
网址：。[Lan98] S.M. Lane。《工作数学家的范畴论》。数学研究生教材。Springer New York，1998 9780387984032 https : 。ISBN：。网址：。[Law11]
//books.google.de/books?id=eBvhyc4z8HQC
Jimmie Lawson。《稳定紧空间》。载于：《计算机科学中的数学结构》21.1（2011），第 125–169 页。DOI：10.1017/S0960129510000319。[Leh25a] Georg Lehner。相干空间的代数 K理论。2025。arXiv： 2507.00221 [math.KT]。网址：https://arxiv.org/abs/2507.00221。[Leh25b] Georg Lehner。通过 locale 进行测度论。2025 https: 。arXiv：
//arxiv.org/abs/2510.08826
2510.08826 [math.GN]。网址：。[Lur12] Jacob Lurie。《高阶托普斯理论》。2012。[Lur17] Jacob Lurie。《高阶代数》。2017。[Lur18] Jacob Lurie。《谱代数几何》。预印本。2018 https://www.math.ias.edu/ 。网址：。[Nik23] Thomas
~lurie/papers/SAG-rootfile.pdf
Nikolaus。《几何拓扑中的代数 K 理论》。YouTube 视频，高等科学研究所。2023年7月。网址：https://www.youtube.com/watch?v=ad_Q8BQ-uAU。[PP12] Jorge Picado 和 Aleš Pultr。《框架与局部：无点拓扑》。第2012卷。2012年1月。ISBN：978-3-0348-0153-9。DOI： 10.1007/978-3-0348-0154-6。[Ram24a] Maxime Ramzi。可对偶的可呈现 ∞范畴。2024。arXiv： 2410.21537 [math.CT]。网址：https://arxiv.org/abs/2410.21537。[Ram24b] Maxime Ramzi。局部刚性的 ∞ 2024 https: 范畴。 。
//arxiv.org/abs/2410.21524
arXiv： 2410.21524 [math.CT]。网址：。[Sch19] Peter Scholze。《凝聚数学讲义》。https://www.math.uni-bonn.de/。见
people/scholze/Condensed.pdf
https://www.math.uni-bonn.de/people/。 。[Vol25] Marco Volpe。《拓 scholze/Condensed.pdf 2019
扑中的六种运算》。2025 https: 。arXiv：
//arxiv.org/abs/2110.10212
2110.10212 [math.AT]。网址：。[Zha25] Bingyu Zhang。《关于连续K理论与傅里叶-佐藤变换的一点说明》。2025。arXiv：2506.02329 [math.AT]。网址： https://arxiv.org/abs/2506.02329。[Zöb76] Volker Zöberlein。《2-范畴上的教义》。载于：《数学杂志》148（1976），第267–280页。网址： http://eudml.org/doc/172368。