arXiv:2602.18316v1 [math.CO] 20 Feb 2026

低次数半代数关系的拉姆齐理论

Azem Adibelli*和 Istv´an Tomon*

摘要

我们证明，由低次数多项式不等式定义的超图包含较大的齐次子集。具体而言，设 H 是一个具有 N 个顶点的 r 均匀超图，它是描述复杂度为常数的半代数超图，且每个定义多项式的次数至多为 D。那么 H 包含一个大小为 n 的团或独立集，其中 $N \leq \mathrm{tw}_{3D^3}(n)$。

1 引言

拉姆齐定理是组合学和逻辑学中的一项基本结果，它指出，对于每个 n ，都存在一个最小数 $N = R_r(n)$，使得每个具有 r 个顶点的 N 均匀超图都包含一个大小为 n 的团或独立集。理解 $R_r(n)$ 的增长率，并研究该函数在受限超图类中的表现，是极值组合学的核心课题。

Ramsey 的原始证明 [20] 对 $R_r(n)$ 给出了极差的界。但不久之后，Erd˝os 与 Szekeres [15] 以及 Erd˝os [12] 确定了图情形下的正确阶： $R_2(n) = 2^{\Theta(n)}$。寻找最优常数因子是一个著名的开放问题，近期已有若干令人振奋的进展 [6, 18],参见 Morris [19] 的综述以作进一步讨论。对于 $r \geq 3$, Erd˝os 与 Rado [14] 以及 Erd˝os、Hajnal 与 Rado [13] 证明了

$$\mathrm{tw}_{r-1}(\Omega(n^2)) < R_r(n) < \mathrm{tw}_r(O(n)),$$

其中塔函数 $\mathrm{tw}_k(n)$ 由 $\mathrm{tw}_1(x) := x$ 与 $\mathrm{tw}_k(x) := 2^{\mathrm{tw}_{k-1}(x)}$ 递归定义。确定塔的正确高度仍是开放问题，但该问题的多色版本表明上界可能更接近真实情形。关于超图拉姆齐数的更多近期进展，请读者参阅 [10]。

这些结果描绘出一幅清晰的图景：尽管我们可以保证存在规模不断增大的齐性集（即团或独立集），但有些超图中这类集合却小得惊人。这限制了一般 Ramsey 结果的应用，因为人们关心的是高度结构化超图中齐次子集的规模。这类应用的典型例子见于几何学。例如，Erd˝os-Szekeres 定理 [15] 指出，任意实数序列 N real numbers$a_1, \ldots, a_N$都包含一个长度至少为 $\sqrt{N}$的单调子序列。注意，根据结果 $R_2(n) = 2^{\Theta(n)}$，可以得到一个较弱的 $\Omega(\log N)$ 界：考虑顶点集为$[N]$的图 G_{mon}，其中当 $a_i < a_j$时，$i < j$ 之间以一条边相连；注意，在这个图中，齐次子集就是一个单调子序列。然而，这个图的特殊结构保证了规模大得多的齐性集。另一个经典例子是快乐结局问题 [15], ，它询问最小的数 $N = K(n)$ 是多少，使得平面上任意 N 个点都包含 n 个处于凸位置的点。通过考虑一个有 N个顶点的 3-均匀超图 H_{cup}，可以简单证明 $K(n) \leq R_3(n)$；该超图的超边对应于所谓的杯形构型。这给出了 $K(n)$ 的双指数上界，而如今已知 [21] $K(n) = 2^{n+o(n)}$。

这引出了如下问题：对于哪些自然超图族，塔式界 $R_r(n) \leq \mathrm{tw}_r(O(n))$能够被显著改进？半代数超图 提供了一个统一框架，能够

*于默奥˚大学， *e-mail*: **azem.adibelli@umu.se, istvantomon@gmail.com**

刻画广泛的几何定义结构。我们定义 r-一致超图H为描述复杂度(d, D, m)的半代数超图，若其顶点是 $\mathbb{R}^d$ 中的点，且其边关系由 m 个次数至多为 D 的多项式不等式的布尔组合所确定（正式定义见预备知识）。例如，前面讨论的图 G_{mon}是复杂度为(1,1, 1)的半代数图，而 H_{cup} 是复杂度为(2,2, 1)的半代数结构。在描述复杂度固定的假设下，许多对一般超图而言困难的问题会变得更易处理。

令 $R^{d,D,r}_{\quad m}(n)$ 表示满足以下性质的最小 N：任何复杂度为 (d, D, m) 的 r-均匀、具有 N 个顶点的半代数超图，都包含一个大小为 n 的团或独立集。显然，$R^{d,D,r}_{\quad m}(n) \le R_r(n)$。对于图，函数 $R^{d,D,2}_{\quad m}(n)$ 最早在 Alon、Pach、Pinchasi、Radoi˘ci´c 和 Sharir 的奠基性论文 [2]，中得到研究，他们证明了 $R^{d,D,2}_{\quad m}(n) \le n^{O(1)}$。此处及下文中，$O(.)$ 和 $\Omega(.)$ 中隐含的常数可能依赖于 r, d, D, m，但不依赖于其他参数。最近，Tidor 和 Yu [22] 证明了指数的紧确界。请注意，与平凡界 $R^{d,D,2}_{\quad m} \le R_2(n) = 2^{\Theta(n)}$ 相比，这些界带来了指数型改进。通过改造 Erd˝os 和 Rado [14]，的归纳方法，Conlon、Fox、Pach、Sudakov 和 Suk [9] 证明，这一改进同样适用于超图情形：

$$R_r^{d,D,m}(n) \le \mathrm{tw}_{r-1}(n^{O(1)}).$$

更值得注意的是，他们还证明了这个界是紧的：对于每个均匀度 $r \ge 2$，都存在参数 (d, D, m)，使得 $R^{d,D,r}_{\quad m}(n) \ge \mathrm{tw}_{r-1}(\Omega(n))$。因此，半代数结构所带来的改进仅为单个指数，而由均匀度 r 导致的根本性塔式依赖依然存在。规避这一问题的一个自然方向，是考察描述复杂度的具体参数如何影响 $R^{d,D,r}_{\quad m}(n)$ 的增长率。

一个 方向上的一个优美结果由 Bukh 和 Matou˘sek [5], 得出，他们证明了 t

$$R_r^{1,D,m}(n) \le 2^{2^{O(n)}}$$

对于某个 $c = c(r, D, m)$。也就是说，在一维实空间上定义、复杂度为常数的 N 顶点半代数超图，总是包含大小为 $\Omega(\log\log N)$ 的齐性集，且与均匀度无关。这个界也是紧的 [5, 9]。一个引人关注的开放问题是，类似现象是否也适用于 $d \ge 2$；具体而言，是否存在 $t = t(d)$，使得 $R^{d,D,r}_{\quad m}(n) \le \mathrm{tw}_t(O(n))$。为得到下界，Eli´a˘s、Matou˘sek、Rold´an-Pensado 和 Safernov´a [11] 给出了一种构造，证明了 $R^{d,D,d+3}_{\quad m}(n) \ge \mathrm{tw}_{d+2}(\Omega(n))$。

另一个方向是对参数 D 进行界定，该参数表示定义多项式的次数。近年来，由线性不等式定义的超图，或者等价地，复杂度为 $(d, 1, m)$ 的半代数超图，受到了广泛关注。这主要是因为 Basit、Chernikov、Starchenko、Tao 和 Tran [4], 的一项研究结果表明，这类超图在 Zarankiewicz 型问题方面呈现出有趣的性质；此后，这一主题取得了显著进展 [7, 8,16]。作者还为这一类超图创造了术语半线性超图 。Tomon 研究了半线性图的 Ramsey 型问题 [23]，；而对于半线性超图，Jin 和 Tomon [17] 证明了最优界

$$R_r^{d,1,m}(n) \le 2^{n^{O(1)}}.$$

因此，将次数限制为 $D = 1$ 对 Ramsey 数的影响，与将维数限制为 $d = 1$ 类似。本文的主要结果表明，对于任意固定的次数 D，Ramsey 数 $R^{d,D,r}_{\quad m}(n)$ 可以用 $\mathrm{tw}_t(O(n))$ 作为上界，其中塔高 $t = t(D)$ 仅取决于D。对于由低次多项式定义的超图，这比 $R^{d,D,r}_{\quad m}(n) \le \mathrm{tw}_{r-1}(O(n))$ 的上界有了显著改进。

定理 1.1。 设 H 是一个定义在N个顶点上的 r-均匀半代数超图，其描述复杂度为(d, D, m) ，其中 $N \gg d, D, m, r$。那么， H 包含一个大小为 n 的团或独立集，其中

$$N \leq \mathrm{tw}_{3D^3}(n).$$

在第 5.3 小节中，我们从一个更一般的结果推导出定理 1.1，该结果适用于范围更广的一类超图。定理 1.1 中的塔高 $O(D^3)$ 很可能远非最优，但无法将其替换为小于 $D-1$ 的值。这是因为，任何描述复杂度为 (d, D, m) 的 r-均匀半代数超图，对于某个 d'，也具有描述复杂度 (d', r, m)，其中 d' 仅取决于 r, d, D。这可由 Veronese 映射的标准应用得到。已知存在一些构造可达到界 $R^{d,m}_{D}(n) \geq \mathrm{tw}_{r-1}(\Omega(n))$；因此，令 $D = r$ ，也可得出 $R^{d',m}_{D,D}(n) \geq \mathrm{tw}_{D-1}(\Omega(n))$，其中 d' 和 m 取适当值。

结构安排。 在下一节中，我们将介绍所用符号以及一些简单的辅助结果。在第 3 节中，我们将概述定理 1.1 的证明。随后，在第 4 节中，我们将给出 $D = 2$ 情形的证明，以较为简明的方式展示我们的关键新思路。定理 1.1 的详细证明将在第 5 节中给出。

2 预备知识

首先，我们介绍本文使用的术语。我们主要采用标准的图论和集合论记号。我们记作$[n] := \{1, \ldots, n\}$。为简化记号，我们将某些变量视为常数，此时 $O(.)$ 和 $\Omega(.)$ 记号中隐藏的因子可能依赖于这些常数，但不依赖于其他变量。此外，若我们说某个量足够大，指的是它相对于这些常数而言足够大。

塔函数 $\mathrm{tw}_k(x)$ 定义为 $\mathrm{tw}_1(x) := x$ 且 $\mathrm{tw}_k(x) := 2^{\mathrm{tw}_{k-1}(x)}$ ，其中 $k \geq 2$。我们强调以下简单恒等式：$\mathrm{tw}_k(\mathrm{tw}_\ell(x)) = \mathrm{tw}_{k+\ell-1}(x)$。

有序集 指其元素带有全序的任意集合。我们将这个全序简单记作 $<$。给定一个有序集 A和整数 k，我们（非惯常地）记作

$$A^{(k)} := \{(a_1, \ldots, a_k) \in A^k : a_1 < \cdots < a_k\}.$$

此外，记作

$$A^{(\leq k)} := \bigcup_{0 \leq \ell \leq k} A^{(\ell)},$$

其中我们约定 $A^{(0)} = \{()\}$。给定 $a = (a_1, \ldots, a_k) \in A^k$和 $I \subset [k]$,

$$a_I := ((a_i)_{i \in I}).$$

稍微滥用一下记 法，若 $a \in A^k$和 $b \in A^m$，我们用 (a, b) 表示 $(a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_m) \in A^{k+m}$

2.1 半代数超图

我们给出描述复杂度为 (d, D, m) 的半代数超图的形式化定义，其中 d指环境空间的维数， D 是定义多项式（总）次数的上界，而 m 是定义多项式个数的上界。

定义 1 （半代数超图）。 设 $V \subset \mathbb{R}^d$为一个有序集。设 $f_1, \ldots, f_m : (\mathbb{R}^d)^r \to \mathbb{R}$为次数至多为 D的多项式，并设 $\Gamma : \{\text{假}, \text{真}\}^m \to \{\text{假}, \text{真}\}$ 为一个布尔公式。定义 r- 均匀超图 H，其顶点集为 V，其中 $x \in V^{(r)}$ 构成一条超边，当且仅当

$$\Gamma(f_1(x) \leq 0, \ldots, f_m(x) \leq 0) = \texttt{true}.$$

那么， H以及任何与 H同构的超图，都是一个描述复杂度为 **半代数超图**（d， D， m）。

我们指出，文献中出现了几种彼此密切相关的半代数超图定义。例如，Conlon、Fox、Pach、Sudakov 和 Suk [9] 将复杂度定义为一对（d, t），其中 t 是 m 和 D的共同上界。相比之下，Tidor 和 Yu [22]将复杂度定义为（d, D），其中 D是 m 多项式 f_1, ……, f_m的次数之和。此外，他们采用无序顶点集 V，但相应地必须假设边关系是对称的。我们选择（d, D, m）是为了更精细地描述复杂度，因为我们主要关注次数 D。不过，我们的定义并未改变半代数关系这一核心概念。

2.2 指数序列

我们的主定理证明的核心部分是研究指数子序列，本节将对此进行详细讨论。

定义 2（指数序列）。一个实数序列$\{a_i\}_{i=1, \ldots, n}$ 称为

- **指数型的**，如果 $0 \le 2a_{i-1} \le a_i$ 对于 $i = 2, \ldots, n$;
- **类型为**的弱指数型

  T1 如果 $\{a_i\}_{i=1, \ldots, n}$ 是指数型的,
  T2 如果$\{a_i\}_{i=n, \ldots, 1}$ 是指数型的,
  T3 如果$\{-a_i\}_{i=1, \ldots, n}$ 是指数型的,
  T4 如果 $\{-a_i\}_{i=n, \ldots, 1}$ 是指数型的;

- **平移指数型**，类型为 $\tau \in \{$**T1**、**T2**、**T3**、**T4**$\}$，如果存在 $t \in \mathbb{R}$ 使得 $\{a_i - t\}_{i=1、\ldots\ldots、n}$ 是类型为 τ 的弱指数型。

平移指数序列的优势在于，任意由 n 个实数组成的序列都包含一个长度为 $\Omega(\log n)$ 的平移指数子序列，而且这个界是紧的 [17]。这可以看作著名的 Erd˝os-Szekeres 定理 [15], 的一个类比；该定理保证，任意长度为 n 的序列都包含一个长度为$\lceil\sqrt{n}\rceil$. 的单调子序列。Jin 和 Tomon [17], 的工作中也有一个发挥关键作用的重要思想：借助三元组着色可以找到平移指数子序列。这启发了以下定义。

定义 3。三个实数 $(a$、b、$c)$ 的类型为

T1 if $0 \le b - a \le c - b$,

T2 if $b - a \ge c - b \ge 0$,

T3 if $0 \le a - b \le b - c$,

T4 if $a - b \ge b - c \ge 0$,

T0 if a, b, c is not monotone.

如果一个三元组或序列有不止一种类型，我们就任意指定一种类型 y.

引理 2.1. 设 $\{a_i\}_{i=1,\ldots,n}$ 是一个实数序列。若每个三元组 (a_i, a_j, a_k) 对于 $1 \le i < j < k \le n$ 都具有类型 $\tau \in \{$**T1**、**T2**、**T3**、**T4**$\}$，则 $\{a_i\}_{i=1,\ldots,n}$ 是类型为 τ 的平移指数型。此外，若每个三元组的类型都是 **T0**，则 $n \le 4$。

证明. 容易证明，任意一个由 5 个数构成的序列都包含一个大小为 3 的单调子序列，因此，一个序列只有在至多包含 4 个元素时才可能是类型**T0**。

现在假设 $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ 具有非**T0** 类型。我们只考虑类型**T1**，其余三种情形可以类似处理。我们证明 $\{a_i - a_1\}_{i=1,\dots,n}$ 是指数型的，从而推出 $\{a_i\}_{i=1,\dots,n}$ 是类型为 **T1** 的平移指数型。事实上，(a_1, a_i, a_{i+1}) 属于类型**T1**，这意味着 $0 \le a_i - a_1 \le a_{i+1} - a_i$，进而推出 $0 \le 2(a_i - a_1) \le a_{i+1} - a_1$。 □

一般地，给定一个函数 $\phi: A \to \mathbb{R}$ （或实数序列），该函数的平移 是指对某个 $t \in \mathbb{R}$ 而言形如 $\phi - t$ 的任意函数。我们还将指数序列的松弛推广到一般实函数。这一概念将用于作用在 D-元组上的函数，即 ϕ: $A^{(D)} \to \mathbb{R}$。

定义 4. 函数 $\phi : B \to \mathbb{R}$ 若对每个$b \in B$， $\phi(b)$的符号都相同，并且对于任意两个不同的 $b \neq b'$，都有，则称其为**指数分离**的

$$|\phi(b)| \ge 2|\phi(b')| \text{ or } |\phi(b')| \ge 2|\phi(b)|.$$

我们以类似方式定义指数分离序列。

等价地， ϕ: 当且仅当存在 $b_1, \dots, b_n$的元素的一个枚举，使得 $\{\phi(b_i)\}_{i=1,\dots,n}$ 是指数型的（或弱指数型的）， $B \to \mathbb{R}$ 才是指数分离的。

2.3 极值组合学

我们介绍一些关于超图的简单或众所周知的辅助结果。首先，我们陈述具有常数个颜色的着色的拉姆齐定理的定量版本，该版本最初由 Erd˝os 和 Rado [14]证明。

定理 2.2. 设 r、 s 为正整数常数。设 H 为具有N 个顶点的完全 r-一致超图，其超边用 s 种颜色着色。则 H 包含一个大小为 n的单色团，其中 $N \le \mathrm{tw}_r(O(n))$。

我们还利用如下引理，它可以视为巴拜所谓反拉姆齐定理的一个推广 [3],另见 [1]。

引理 *2.3.* 设 r、 s、 q 为正整数常数。设 H 为N 个顶点上的完全 r-一致超图，并设 γ： $E(H) \to \mathbb{R}^s$ 满足如下性质。对每条超边 f，至多存在 q条超边 f'，使得 $|f \cap f'| = r - 1$且 $|\gamma(f)_i - \gamma(f')_i| < 1$对某个 $i \in [s]$成立。则存在一个完全子超图 H'，它含有$\Omega(N^{1/(2r-1)})$个顶点，使得 $|\gamma(f)_i - \gamma(f')_i| \ge 1$对每一对不同的超边$f$、 $f' \in E(H')$以及 $i \in [s]$成立。

证明。设

$$S = \{(f, f') \in E(H) : f \neq f', \exists i \in [s], |\gamma(f)_i - \gamma(f')_i| < 1\},$$

因此， S 是“冲突”的集合。固定 $f \in E(H)$，然后

$$\#\{f' : (f, f') \in S, |f \cap f'| = k\} \le 2^r qs N^{r-k-1}.$$

事实上，对于每个大小为 k的 $g \subset f$，满足$(f, f') \in S$且 $g = f \cap f'$的f'的数目至多为qsN^{r-k-1}。这源于如下观察： g 所包含的$(r-1)$-元组的数目至多为 N^{r-k-1}，并且每个$(r-1)$-元组至多能被包含在 qs 条这样的超边 f'中。

$^{2r-2}$证明的其余部分是概率删除法的一个标准应用。设 $p = cN^{-2r-1}$满足 $c = 1/(2^{r+1}rqs)$，并以概率 p对一 H 的顶点进行抽样，其中 U 表示被抽样顶点的集合。设 X为满足 $f, f' \subset U$的对$(f, f') \in S$的数目。则

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{(f,f')\in S} p^{|f\cup f'|} = \sum_{k=0}^{r-1} p^{2r-k} \cdot \#\{(f,f') \in S : |f \cap f'| = k\}$$
$$\leq \sum_{k=0}^{r-1} p^{2r-k} N^r \cdot (2^r qs N^{r-k-1}) = 2^r qs \sum_{k=0}^{r-1} c^{2r-k} N^{\frac{2r-k}{2r-1}-1} < 2^r rqsc^{r+1} N^{\frac{1}{2r-1}} < \frac{c}{2} N^{\frac{1}{2r-1}}.$$

对于每个满足 $f, f' \subset U$ 的 $(f, f') \in S$，从 U 中删除一个顶点 $f \cup f'$，并令 U' 为所得集合。于是 $\mathbb{E}(|U'|)$ $\geq \mathbb{E}(|U| - X) \geq cN^{1/(2r-1)}/2$。固定一个满足 $|U'| \geq_{cN^{1/(2r-1)}/2}$ 的抽样结果，则 $H[U']$ 满足所需性质。 □

3 证明概要

我们粗略概述定理 1.1 的证明。首先，我们讨论 Jin 和 Tomon 对[17] 情形的 $D = 1$ 证明，然后通过考察 $D = 2$ 情形来介绍我们的新关键思路。为进一步简化，我们假设定义多项式的个数为 $m = 1$，因为一般情形的分析不会显著增加复杂度。

首先，设 H 是一个具有 N 个顶点、 r-一致且描述复杂度为 $(d, 1, 1)$ 的半代数超图。则存在一个线性函数 $f : (\mathbb{R}^d)^r \to \mathbb{R}$ ，使得 $x \in V(H)^{(r)}$ 是一条超边当且仅当$f(x) \leq 0$。利用 f 是线性的，我们可以借助适当的函数 $\phi_i : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}, i \in [r]$，将 $f(x)$ 写成 $= \sum_{i=1}^r \phi_i(x_i)$。关键想法是考虑对应于 $i \in [r]$ 的序列 $\{\phi_i(x_i)\}_{x\in V(H)}$，并找到一个大小为 $(\log N)^{\Omega(1)}$ 的集合 $S \subset V(H)$，使得全部 r 个序列 $\{\phi_i(x_i)\}_{x\in S}$ 都是平移指数型的。经过平移后，我们得到函数 $\sigma_i : S \to \mathbb{R}$ 以及一个常数 C，使得 $f(x) = C + \sum_{i=1}^r \sigma_i(x_i)$，并且每个序列 $\{\sigma_i(x_i)\}_{x\in S}$ 都是弱指数型的。这样做的好处在于，对于一个“一般”的 r-元组 $x \in S^{(r)}$，和式 $C + \sum_{i=1}^r \sigma_i(x_i)$ 由绝对值最大的那一项所主导，因此其符号由该项的符号决定。为完成该证明，我们找到大小为 $|S|^{\Omega(1)}$ 的 $T \subset S$，使得每个 $x \in T^{(r)}$ 都是一般的，并且 $(C, |\sigma_1(x_1)|, \ldots, |\sigma_r(x_r)|)$ 中最大元素的下标不依赖于 x 的选取。这保证了 $f(x)$ 对每个 $x \in T(r)$ 都具有相同的符号，因此 T 在 H 中要么是一个团，要么是一个大小为 $(\log N)^{\Omega(1)}$ 的独立集。

接下来，令 H为一个有 N个顶点、 r均匀且描述复杂度为 $(d, 2, 1)$ 的半代数超图。于是存在次数至多为 2 的 $f : (\mathbb{R}^d)^r \to \mathbb{R}$ ，使得 $x \in V(H)^{(r)}$ 是一条超边，当且仅当 $f(x) \leq 0$。利用 f的次数至多为 2 这一点，我们可以用适当的函数 $\phi_I : (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}, I \in [r]^{(2)}$ 将 $f(x) = \sum_{I\in[r]^{(2)}} \phi_I(x_I)$ 写成这种形式。现在， ϕ_I作用于 $V(H)$ 的一对顶点，因此 $\{\phi_I(x_I)\}_{x\in V(H)}$对应的是完全图的边权重，而不是一个序列。因此，若要将我们的方法改用于 $D = 1$ 情形，就需要一个适用于图的边权重的平移指数序列类比。我们的最终目标是找到一个大的子集 S，使得对于每个 $I \subset [r]^{(2)}$， $\sigma_I : S^{(2)} \to \mathbb{R}$ 都是指数分离的，其中 σ_I 是 ϕ_I 的一个略作修改的版本。遗憾的是，仅允许平移不足以实现这一目标。

事实上，考虑以下示例。设 $\phi : [n]^{(2)} \to \mathbb{R}$ 定义为 $\phi(a, b) = n^a + b$。容易看出， ϕ 的任何平移在 $[n]$ 的超过 3 个元素上都不可能是指数分离的。问题在于，对于某个仅依赖于 a 的函数 ρ ，$\phi(a, b) \approx \rho(a)$。为解决这一问题，我们允许使用形如 $\sigma(a, b) = \phi(a, b) - \rho_1(a) - \rho_2(b)$ 的函数 σ ，并将所有此类函数 σ记为 $\phi \sim \sigma$。这解决了该问题：我们证明存在 $S \subset V(H)$ 和 $\sigma_I : S^{(2)} \to \mathbb{R}, I \in [r]^{(2)}$，使得 $N \leq \mathrm{tw}_8(O(|S|^3))$， $\phi_I \sim \sigma_I$

并且 σ_I 是指数分离的。现在，我们可以重写

$$f(x) = \sum_{I\in[r]^{(2)}} \sigma_I(x_I) + \sum_{i\in[r]} \phi_i(x_i)$$

其中函数 $\phi_i : S \to \mathbb{R}$ 取适当的形式。

我们进一步取一个大小为 $(\log|S|)^{\Omega(1)}$ 的子集 $T \subset S$，使得对每个 $i \in [r]$，$\{\phi_i(x_i)\}_{x\in T}$ 都是平移指数型，并改写为

$$f(x) = C + \sum_{I\in[r]^{(2)}} \sigma_I(x_I) + \sum_{i\in[r]} \sigma_i(x_i), \tag{1}$$

其中取适当的 $C \in \mathbb{R}$ 和 σ_i，$i \in [r]$，它们各自在 T 上都是弱指数型。证明的其余部分与 $D = 1$ 情形非常相似。我们注意到，对于一个“一般的” $x \in T^{(r)}$，等式 (1) 右侧的和由其中一项主导，因此 f 的符号与这个主导项的符号相同。为了完成证明，我们找出 $U \subset T$，使得 $|T| \le \mathrm{tw}_4(O(|U|))$ 中的每个 $x \in U^{(r)}$ 都是一般的，并且 $(C, (|\sigma_i(x_i)|)^{i\in[r]}, (\sigma_I(x_I))^{I\in[r]^{(2)}})$ 中最大元素的下标不依赖于 x 的取值。这保证了对每个 $x \in U_{(r)}$，$f(x)$ 的符号都相同，因此 U 在 H 中要么是一个团，要么是一个独立集。

证明中最困难的部分是找到所需的集合 S 和函数 σ_I。为简单起见，考虑某个有限有序集 A上的单个函数 ϕ：$A^{(2)} \to \mathbb{R}$。我们将 ϕ 的求值定义为作用于 A 的4 元组的函数 ψ_ϕ，使得对于$(a, b, c, d) \in A^{(4)}$,

$$\psi_\phi(a, b, c, d) = \phi(a, c) - \phi(a, d) - \phi(b, c) + \phi(b, d).$$

这里，ψ_ϕ 的优点在于对每个 $\phi \sim \sigma$都有 $\psi_\phi \equiv \psi_\sigma$。分两轮，我们借助 ψ_ϕ先在 S 的5元组上、再在其4元组上定义某些着色，并利用拉姆齐定理找到一个大的单色集 B。该集合 B 使得能够构造某个在 B上指数分离的 $\sigma \sim \phi$。

4 热身：二次半代数超图

在本节中，我们证明 $(D, m) = (2,1)$ 这一子情形（定理 1.1），并以某种简化的方式进行。这用于说明一般证明的关键思想，同时避开更为技术性的细节。

给定有序集 A，在函数空间 $\{\phi : A^{(2)} \to \mathbb{R}\}$ 上按如下方式定义等价关系。记 $\phi \sim \phi'$，如果存在函数 $\rho_1, \rho_2 : A \to \mathbb{R}$ 使得

$$\phi(a, b) = \phi'(a, b) - \rho_1(a) - \rho_2(b)$$

对每一个 $(a, b) \in A^{(2)}$. 给定函数 $\phi : A^{(2)} \to \mathbb{R}$，我们定义求值 $\psi_\phi : A^{(4)} \to \mathbb{R}$，使得

$$\psi_\phi(a, b, c, d) = \phi(a, c) - \phi(a, d) - \phi(b, c) + \phi(b, d).$$

ψ_ϕ 的优点在于它在 ϕ 的等价类上不变，也就是说，若 $\phi \sim \phi'$，则 $\psi_\phi \equiv \psi_{\phi'}$。若 ϕ 从上下文中显而易见，我们简单地写 ψ 而不是 ψ_ϕ。下面是我们的主要技术引理。

引理 4.1. 设 $\phi: [N]^{(2)} \to \mathbb{R}$。则存在大小为 n 的 $S \subset [N]$，对某个 $N \le \mathrm{tw}_8(O(n^3))$ 以及$\sigma : S^{(2)} \to \mathbb{R}$，使得 $\sigma \sim \phi$ 在 S 上且 σ 是指数分离的。

证明。定义一种着色，将 $[N]^{(5)}$ 中的元素染上来自 $\{\mathbf{T0}, \ldots, \mathbf{T4}\}$的颜色。我们根据 $X = \psi(a, b, d, e)$ 与 $Y = \psi(b, c, d, e)$ 的关系来为 (a, b, c, d, e) 着色，其中 $\psi = \psi_\phi$。我们使用颜色

T1 若 $0 \le X \le Y$,

T2 if $0 \le Y \le X$,

T3 if $0 \le (-X) \le (-Y)$,

T4 if $0 \le (-Y) \le (-X)$,

T0 若 X 和 Y 符号不同。

运用拉姆齐定理的定性形式（定理 2.2），存在一个单色的 $S_1 \subset [N]$使得 $N \le \mathrm{tw}_5(O(|S_1|))$。令 τ_1 表示 S_1的颜色。假设 N 足够大，则有$\tau_1 \neq$**T0**，因为任何完全着色为 **T0** 的集合大小至多为 6。

为方便记号，重新标记 S_1 中的元素，使得 $S_1 = [N_1]$。固定某个 $d \le N_1 - 1$，并考虑序列

$$x_a^{(d)} = x_a = \phi(a, d+1) - \phi(a, d)$$

对于 $a = 1, \dots, d-1$。我们有 $\psi(a, b, d, d+1) = x_b - x_a$，因此，由 S_1 是颜色为 τ_1的单色的这一事实可知，$\{x_a\}_{a=1,\dots,d-1}$ 由引理 2.1 可知是类型为 τ_1 的平移指数序列。因此，存在 t_d 使得 $\{x_a^{(d)} - t_d\}_{a=1,\dots,d-1}$ 是类型为 τ_1的弱指数型。令 $u_d = \sum_{i<d} t_i$ 并定义$\phi_1 \colon S_1^{(2)} \to \mathbb{R}$，由于 $\phi_1(a, d) = \phi(a, d) - u_d$，于是 $\phi_1 \sim \phi$ 且 $x_a - t_d = \phi_1(a, d+1) - \phi_1(a, d)$。因此，我们得到

$$\{\phi_1(a, d+1) - \phi_1(a, d)\}_{a=1,\dots,d-1}$$

是类型为 τ_1 的弱指数型。现在注意到，对于 $a < d < e$，我们有

$$\begin{aligned}
\phi_1(a, e) - \phi_1(a, d) &= \phi(a, e) - \phi(a, d) - (u_e - u_d) \\
&= \sum_{d_0=d}^{e-1} \phi(a, d_0 + 1) - \phi(a, d_0) - t_{d_0} \\
&= \sum_{d_0=d}^{e-1} \phi_1(a, d_0 + 1) - \phi_1(a, d_0).
\end{aligned}$$

由于相同类型的弱指数型序列之和仍是弱指数型的，因此对于每个 $d < e \le N_1$，序列

$$\{\phi_1(a, e) - \phi_1(a, d)\}_{a=1,\dots,d-1}$$

是类型为 τ_1的弱指数型。

接下来，我们用 5 种颜色对 $S_1^{(4)}$ 着色。给定 $I = (a, b, c, d) \in S_1^{(4)}$，将 I 赋予三元组 $(\phi_1(a, b)\ \phi_1(a, c)\ \phi_1(a, d))$ 的类型作为颜色。根据定理 2.2，存在一个单色的 $S_2 \subset S_1$，使得$|S_1| \le \mathrm{tw}_4(O(|S_2|))$。此外，如果 $|S_2| > 5$，那么 S_2 的颜色不是 T0 型。为简化记号，重新标记 S_2 中的元素，使得 $S_2 = [N_2]$。那么， S_2 是单色的这一点意味着，对于每个 $a \in [N_2]$，序列 $\{\phi_1(a, b)\}_{b=a+1,\dots,N_2}$ 是某个 $\tau_2 \in [4]$ 对应的类型为 τ_2 的平移指数型。因此，存在 w_a，使得 $\{\phi_1(a, b) - w_a\}_{b=a+1,\dots,N_2}$ 是类型为 τ_2 的弱指数型。定义 $\sigma \colon S_2^{(2)} \to \mathbb{R}$，使得

$$\sigma(a, b) = \phi_1(a, b) - w_a,$$

并注意，对于每个 $a < d < e$， $\sigma(a,\ e) - \sigma(a,\ d) = \phi_1(a,\ e) - \phi_1(a,\ d)$。为方便起见，我们汇总 σ的重要性质：

- $\sigma \sim \phi_1 \sim \phi$ 关于 S_2,

对于每个 $a \in S_2$, • $\{\sigma(a,\ b)\}_{b=a+1,\ \dots\dots,\ N_2}$ 是类型为 τ_2 的弱指数型,

- $\{\sigma(a,\ e) - \sigma(a,\ d)\}_{a=1,\ \dots\dots d-1}$ 对每个 $d < e \le N_2$ 都是类型为 τ_1 的弱指数型。

为简便起见，我们假设 $(\tau_1, \tau_2) = (\mathbf{T1}, \mathbf{T1})$。其他情形也可类似处理，我们将在更一般的引理 5.2 的详细证明中说明。令 S_3 为 $S_2 = [N_2]$ 中偶数构成的子集。我们证明 S_3 满足以下性质：

4. $\{\sigma(a, b)\}_{a \in S_3:\ a<b}$ 对每个 $b \in S_3$ 都是指数型。

只需证明，对每个满足 $a+2<b$ 的 $(a, b) \in S_3^{(2)}$，都有 $0 \le 2\sigma(a, b) \le \sigma(a+2, b)$。注意到 $(a, a+2, b-1, b) \in S_2^{(4)}$，因此，利用 2. 和 3.，

(i) $0 \le 2\sigma(a, b-1) \le \sigma(a, b)$,

(ii) $0 \le 2\sigma(a+2, b-1) \le \sigma(a+2, b)$,

(iii) $0 \le 4(\sigma(a,b) - \sigma(a,b-1)) \le \sigma(a+2,b) - \sigma(a+2,b-1)$.

合并这些不等式，得到

$$0 \le 2\sigma(a,b) \le 4(\sigma(a,b) - \sigma(a,b-1)) \le \sigma(a+2,b) - \sigma(a+2,b-1) \le \sigma(a+2,b),$$

其中，第一个和第二个不等式由 (i) 得出，第三个不等式由 (iii) 得出，最后一个不等式由 (ii) 得出。由此可见，$0 \le 2\sigma(a, b) \le \sigma(a+2, b)$，从而证实了这一断言。

最后，我们应用引理 2.3，找到一个大小为 $\Omega(|S_3|^{1/3})$ 的子集 $S \subset S_3$，使得 σ 在 S 上指数分离。具体而言，定义函数 $\gamma: S_3^{(2)} \to \mathbb{R}$，满足 $\gamma(a,b) = \log_2 \sigma(a,b)$。由性质 3 和 4 可知，$\gamma$ 满足：对于每个 $(a,b) \in S_3^{(2)}$，至多存在另外 4 个 $(c,d) \in S_3^{(2)}$，使得 $|\gamma(a,b) - \gamma(c,d)| < 1$，且 $|\{a,b\} \cap \{c,d\}| = 1$。因此，引理 2.3 保证存在一个大小为 $\Omega(|S_3|^{1/3})$ 的集合 $S \subset S_3$，使得对于任意一对不同的 (a,b)、(c,d)，都有 $|\gamma(a,b) - \gamma(c,d)| \ge 1$。等价地，$\sigma$ 在 S 上指数分离。

通过界定 S 的大小，我们完成证明。我们有 $N \le \mathrm{tw}_5(O(|S_1|))$、$|S_1| \le \mathrm{tw}_4(O(|S_2|))$、$|S_3| = O(|S_2|)$ 和 $|S| = O(|S_3|^3)$。由此，$N = \mathrm{tw}_8(O(n^3))$，因此集合 S 和函数 σ 满足所需条件。 □

我们需要加强这个引理，使其适用于一个较小的函数集合 Φ ϕ，并且 $A^{(2)} \to \mathbb{R}$同时成立。其证明与前一个证明基本相同，但技术细节略多。我们省略证明，因为稍后会证明一个更一般的结论，即引理5.2。

引理 4.2。设 s 是一个正整数常数，并设 $\phi_1, \dots, \phi_s: [N]^{(2)} \to \mathbb{R}$。那么存在大小为 n 的 $S \subset [N]$，其中某个 $N \le \mathrm{tw}_8(O(n^3))$，以及 $\phi_1', \dots, \phi_s': S^{(2)} \to \mathbb{R}$，使得 $\sigma_i \sim \phi_i$ 在 S 上成立，并且 σ_i 对 $i \in [s]$ 指数分离。

现在我们可以给出主定理在特殊情形 $(d, D, m) = (d, 2, 1)$下的证明。

定理 4.3. 设 r 为一个正整数常数。设 H 为一个定义在 N个顶点上的 r均匀半代数超图，其描述复杂度为$(d,2,1)$。那么 H 包含一个大小为n的团或独立集，其中 $N \le \mathrm{tw}_{12}(O(n))$。

证明。设 $f: (\mathbb{R}^d)^r \to \mathbb{R}$ 是一个次数至多为 2 的多项式，使得当$f(x) \le 0$时，$x \in V(H)^{(r)}$ 是一个超边。注意，我们可以写成

$$f(x) = \sum_{I \in [r]^{(2)}} \phi_I(x_I),$$

其中，对每个 $I \in [r]^{(2)}$，$\phi_I: (\mathbb{R}^d)^2 \to \mathbb{R}$ 是次数至多为 2 的多项式。需要指出的是，$(\phi_I)^{I \in [r]^{(2)}}$ 的选取并不唯一，但我们固定任意一种选取。接下来，我们不会用到 ϕ_I 是多项式这一点，只关心 ϕ_I 作用于 $V(H)^{(2)}$。

利用引理 4.2，存在 $S_1 \subset V(H)$ 和 $\sigma_I : S_1^{(2)} \to \mathbb{R}$，使得 $N \le \mathrm{tw}_8(O(|S_1|^3))$，$\sigma_I \sim \phi_I$在 S_1 上，并且 σ_I 对 $I \in [r]^{(2)}$ 指数分离。这意味着存在 $\rho_{I,1}, \rho_{I,2} : S_1 \to \mathbb{R}$，使得

$$\phi_I(a,b) = \sigma(a,b) + \rho_{I,1}(a) + \rho_{I,2}(b).$$

对于 $i \in [r]$ 和 $a \in S_1$，定义

$$\phi_i(a) = \sum_{(i,j)\in[r]^{(2)}} \rho_{(i,j),1}(a) + \sum_{(j,i)\in[r]^{(2)}} \rho_{(j,i),2}(a),$$

then

$$f(x) = \sum_{I\in[r]^{(2)}} \phi_I(x_I) = \sum_{I\in[r]^{(2)}} \sigma_I(x_I) + \sum_{i\in[r]} \phi_i(x_i).$$

接下来，我们引用 [17] 中的引理 12，找出一个子集 $S \subset S_1$ 和若干数 w_i，使得令 $\sigma_i(a) = \phi_i(a) - w_i$后，序列 $\{\sigma_i(a)\}_{a\in S}$ 是弱指数型的，并且 $|S_1| \le 2^{|S|^{O(1)}}$。令 $\sigma_\emptyset = \sum_{i\in[r]} w_i$，则

$$\sum_{I\in[r]^{(2)}} \phi_I(x_I) = \sum_{I\in[r]^{(\le 2)}} \sigma_I(x_I).$$

接下来，按如下方式对 S 上的完全 4-均匀超图进行着色。给定一个 4 元组$a \in S^{(4)}$，考虑所有满足 $I \in [r]^{(\le 2)}$和 $J \subset [4]^{(|I|)}$的数 $|\sigma_I(a_J)|$。将这些 $R = 6\binom{r}{2} + 4r + 1$数按升序排列，并记录这些数的签名。这里，$|\sigma_I(a_J)|$的签名是 (I, J)。此外，若 a，则称其为坏的，如果

$$\frac{1}{10r^2}|\sigma_I(a_J)| < |\sigma_{I'}(a_{J'})| < 10r^2|\sigma_I(a_J)|$$

对于某些（I，J）和（I'，J'），其中 $J \ne J'$。若 a是坏的，则将其染为颜色 0；否则用 R 个签名组成的序列为其着色。这定义了 $S^{(4)}$ 的一个着色，所用颜色数至多为 $R! + 1 = O(1)$。应用定理 2.2，存在单色的 $T \subset S$，使得 $|S| \le \mathrm{tw}_4(O(|T|))$。

首先注意到 T 不可能是颜色 0，假设 N 足够大。事实上，利用 σ_I 对每个 $I \in [r]^{(\le 2)}$都是指数分离这一点，很容易证明颜色为 0 的团大小为 $O(1)$。因此，T 是一个不含坏 4 元组的单色团。考虑 $x \in T^{(r)}$，它是 H的一条超边，当且仅当

$$\sum_{I\in[r]^{(\le 2)}} \sigma_I(x_I) \le 0.$$

左侧的和包含 $\binom{r}{2} + r + 1$ 个数；若 z和 z'是其中两个数，则$|z|/|z'| \notin (1/10r^2, 10r^2)$，这是利用了 $T^{(4)}$ 中没有元素是坏的这一性质。但这意味着该和的符号与绝对值最大的数的符号相同。利用 T 是单色的这一点可知，存在 $I_0 \subset [r]^{(\le 2)}$，使得 $|\sigma_{I_0}(x_{I_0})|$ 始终是绝对值最大的数，因为数$\{|\sigma_I(x_I)| : I \in [r]^{(\le 2)}\}$的顺序由 T的颜色唯一确定。但由于对于所有选择 $x \in T^{(r)}$，$\sigma_{I_0}(x_{I_0})$的符号都相同，我们得出结论：T 要么是 H中的团，要么是独立集。

我们通过界定 S 的大小来完成证明。我们有 $N \le \mathrm{tw}_8(O(|S_1|^3))$、$|S_1| \le 2^{|S|^{O(1)}}$ 和 $|S| \le \mathrm{tw}_4(O(|T|))$。因此，$N \le \mathrm{tw}_{12}(O(|T|))$。 □

5 低次数半代数超图

本节将详细证明定理1.1。证明分为三个小节。第一节讨论形如 $\phi : A^{(D)} \to \mathbb{R}$的函数的性质，并定义求值 ψ的自然扩张。第二小节证明我们的主要技术引理，它推广了引理4.1 对 D元组的情形。最后，我们在第三小节完成证明。

5.1 定义在元组上的函数

给定一个有序集 A，在函数空间 $\{\phi: A^{(D)} \to \mathbb{R}\}$ 上定义如下等价关系。若存在 D 个函数 $\rho_J: A^{(D-1)} \to \mathbb{R}$，使得对于 $J \in [D]^{(D-1)}$，每个$a \in A^{(D)}$都有.....，则记作 $\phi \sim \phi'$

$$\phi(a) = \phi'(a) - \sum_{J \in [D]^{(D-1)}} \rho_J(a_J).$$

给定一个函数 $\phi: A^{(D)} \to \mathbb{R}$，我们将 $\psi_\phi: A^{(2D)} \to \mathbb{R}$ 定义为

$$\psi_\phi(a) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^D} (-1)^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_D} \phi((a_{2i-\varepsilon_i})_{i=1,\ldots,D}).$$

我们将 ψ_ϕ 称为 ϕ 的 超立方体求值。例如，在 $D = 1$ 的情况下，我们有 $\psi_\phi(a) = \phi(a_2) - \phi(a_1)$，而 $D = 2$ 情况则与上一节中的定义一致。一般来说，我们可以将输入看作 D 对 (a_1, a_2)、(a_3, a_4)、...、(a_{2D-1}, a_{2D})，然后将 ϕ 在 D 维超立方体 $\{a_1, a_2\} \times \{a_3, a_4\} \times \cdots \times \{a_{2D-1}, a_{2D}\}$ 上的取值相加（并采用适当的符号）。

我们总结 ψ 的一些简单性质。我们称 $\phi: A^{(D)} \to \mathbb{R}$ 不依赖于坐标 i，如果对于每个 a，$a' \in A^{(D)}$，只要 a 和 a' 仅在第 i 个坐标上不同，就有 $\phi(a) = \phi(a')$。

(1) 给定 $(a_1, a_2, b) \in A^{(2D)}$ 满足 $a_1, a_2 \in A$ 且 $b \in A^{(2D-2)}$，我们有

$$\psi_\phi(a_1, a_2, b) = \psi_{\phi(a_2,.)}(b) - \psi_{\phi(a_1,.)}(b).$$

(2) 如果 ϕ 不依赖于某个坐标，那么 $\psi_\phi \equiv 0$。

(3) 对每个 ϕ_1，ϕ_2：$A^{(D)} \to \mathbb{R}$，

$$\psi_{\phi_1} + \psi_{\phi_2} \equiv \psi_{\phi_1 + \phi_2}.$$

(4) 给定 $(a, b_1, b_2, b_3, c) \in A^{(2D+1)}$ 满足 $a \in A^{(2k)}$ 且 b_1，b_2，$b_3 \in A$ 且 $c \in A^{(2D-2k+1)}$，我们有

$$\psi_\phi(a, b_1, b_2, c) + \psi_\phi(a, b_2, b_3, c) = \psi_\phi(a, b_1, b_3, c).$$

(5) ψ_ϕ 在 ϕ的等价类上不变，也就是说，如果 $\phi \sim \phi'$，那么 $\psi_\phi \equiv \psi_{\phi'}$。

(6) 假设 $A = [N]$。对于每个 $a \in A^{(2D)}$，

$$\psi_\phi(a) = \sum_{b_1=a_1}^{a_2-1} \sum_{b_2=a_3}^{a_4-1} \cdots \sum_{b_D=a_{2D-1}}^{a_{2D}-1} \psi_\phi(b_1, b_1+1, b_2, b_2+1, \ldots, b_D, b_D+1).$$

事实上，(1)-(4)很容易由定义得出，(5)由 2. 和 3. 的结合得出，而(6)由反复应用(4)得出。下面的技术引理稍后会用到。

引理 5.1. 令 ρ: $A^{(D)} \to \mathbb{R}$ 并定义函数 $\pi: A^{(2D)} \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $a \in A^{(2D)}$，

$$\pi(a) = \sum_{a_1 \le \alpha_1 < a_2} \sum_{a_3 \le \alpha_2 < a_4} \cdots \sum_{a_{2D-1} \le \alpha_D < a_{2D}} \rho(\alpha_1, \ldots, \alpha_D).$$

那么存在 ϕ: $A^{(D)} \to \mathbb{R}$，使得 $\psi_\phi \equiv \pi$。

证明。 定义 ϕ，使得对于每个 $b \in A^{(D)}$,

$$\phi(b) = \sum_{\beta_1 < b_1} \sum_{\beta_2 < a_2} \cdots \sum_{\beta_D < b_D} \rho(\beta_1, \ldots, \beta_D).$$

我们通过对 D 进行归纳法证明， ϕ 就足够了。在 $D = 1$ 的情况下，我们有

$$\pi(a_1, a_2) = \sum_{a_1 \le \alpha < a_2} \rho(\alpha) = \sum_{\alpha < a_2} \rho(\alpha) - \sum_{\alpha < a_1} \rho(\alpha) = \phi(a_2) - \phi(a_1) = \psi_\phi(a_1, a_2),$$

因此该结论成立。现在假设 $D \ge 2$。不失一般性，假设 $A = [N]$。对于$t \in [N]$，定义 $\pi_t \colon [t+2, N]^{(2D-2)}$ 如下。令 $a \in [t+2, N]^{(2D-2)}$，然后设

$$\pi_t(a) := \pi(t, t+1, a) = \sum_{a_1 \le \alpha_1 < a_2} \cdots \sum_{a_{2D-3} \le \alpha_{D-1} < a_{2D-2}} \rho(t, \alpha_1, \ldots, \alpha_{D-1}).$$

那么对于每个满足 $t,\ u \in [N]$ 的 $(t,\ u,\ a) \in [N]^{(2D)}$，我们有

$$\pi(t, u, a) = \sum_{t \le \alpha < u} \pi_\alpha(a).$$

考虑函数 $\rho_t \colon [t+2, N]^{(D-1)} \to \mathbb{R}$，定义为 $\rho_t(b) \colon = \rho(t,\ b)$，其中 $b \in [t+2, N]^{(D-1)}$。那么对于 $a \in [t+2, N]^{(2D-2)}$,

$$\pi_t(a) = \sum_{a_1 \le \alpha_1 < a_2} \cdots \sum_{a_{2D-3} \le \alpha_{D-1} < a_{2D-2}} \rho_t(\alpha_1, \ldots, \alpha_{D-1}).$$

因此，我们可以应用归纳假设，推出函数 $\phi_t \colon [t+2, N]^{(D-1)}$ 定义为

$$\phi_t(b) = \sum_{\beta_1 < b_1} \sum_{\beta_2 < b_2} \cdots \sum_{\beta_{D-1} < b_{D-1}} \rho_t(\beta_1, \ldots, \beta_{D-1})$$

满足 $\pi_t \equiv \psi_{\phi_t}$。注意，对于 $(t,\ b) \in [N]^{(D)}$ 且 $t \in [N]$，我们有

$$\phi(t, b) = \sum_{\alpha < t} \phi_\alpha(b).$$

因此，对于 $(t,\ u,\ a) \in [N]^{(2D)}$ 且 $t,\ u \in [N]$，我们有

$$\psi_\phi(t, u, a) = \psi_{\phi(u,.)}(a) - \psi_{\phi(t,.)}(a) = \psi_{\phi(u,.) - \phi(t,.)}(a) = \sum_{t \le \alpha < u} \psi_{\phi_\alpha}(a) = \sum_{t \le \alpha < u} \pi_\alpha(a) = \pi(t, u, a).$$

在第一个等式中，我们使用了(1)；在第二个和第三个等式中，我们使用了 (3)。至此，证明完成。 □

对于 $k \in \{0, \ldots, D\}$，我们还定义求值 $\psi_\phi^{(k)} \colon A^{(2D-k)} \to \mathbb{R}$ 如下。设 $(a,\ b) \in A^{(2D-k)}$为一个输入，其中 $a \in A^{(k)}$ 且 $b \in A^{(2D-2k)}$，则

$$\psi_\phi^{(k)}(a, b) := \psi_{\phi(a,.)}(b) = \sum_{\varepsilon \in \{0,1\}^{D-k}} (-1)^{\varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_{D-k}} \phi(a, (b_{2i-\varepsilon_i})_{i \in [D-k]}).$$

这些求值在 ψ_ϕ 和 ϕ 之间进行插值，因为我们有 $\psi_\phi^{(0)} \equiv \psi_\phi$ 和 $\psi^{(D)} \equiv \phi$。此外，我们还有以下容易验证的性质：

(7) 如果 $\phi \colon A^{(D)} \to \mathbb{R}$ 不依赖于第 ℓ 个坐标，那么 $\psi_\phi^{(k)} \equiv 0$ 对每个 $k < \ell$ 都成立。

(8) 如果存在 $(a, a_{k+1}, a_{k+2}, b) \in A^{(2D-k)}$，使得 $a \in A^{(k)}, a_{k+1}, a_{k+2} \in A$，且 $b \in A^{(2D-2k-2)}$，那么

$$\psi_\phi^{(k)}(a, a_{k+1}, a_{k+2}, b) = \psi_\phi^{(k+1)}(a, a_{k+2}, b) - \psi_\phi^{(k+1)}(a, a_{k+1}, b).$$

这里，(7) 由(2)得出，且(8)可由定义直接得出。

5.2 超图上的指数分离函数

在本节中，我们给出支撑定理1.1之证明的主要技术引理。该引理指出，给定 $\phi\colon\ [N]^{(D)}\to\mathbb{R}$，我们可以找到 $\sigma\sim\phi$，使其在某个较大子集 $S\subset[N]$上指数分离。此外，该陈述也可推广到一个小集合 Φ中的函数 $\phi\colon\ [N]^{(D)}\to\mathbb{R}$。

引理 5.2. 设 D、s 为正整数常数，且 $K=3D^2/2+D/2+1$。设 Φ 为一个由 s 个函数 $\phi\colon[N]^{(D)}\to\mathbb{R}$组成的集合。则存在一个大小为 n 的 $S\subset[N]$，其中某个 $N\leq\mathrm{tw}_K(n^{O(1)})$，并且对每个$\phi$，都存在 $\sigma\colon S^{(D)}\to\mathbb{R}$，使得 $\sigma\sim\phi$ 在 S 上，且 σ 是指数分离的。

证明。我们假设 N 相对于 D 和 s充分大。设 $S_0=[N]$，并对每个 $\phi\in\Phi$令 $\phi_0=\phi$。如果 $S_\ell\subset[N]$ 和 $\phi_\ell\colon$ 对于某个 $\ell<D$，$S_\ell^{(D)}\to\mathbb{R}$ 已经定义，我们按如下方式定义子集 $S_{\ell+1}$和 $\phi_{\ell+1}$。

构造 $S_{\ell+1}$。如下定义 $S_\ell^{(2D+1-\ell)}$ 的着色。设 $F\in S_\ell^{(2D+1-\ell)}$，并将 $F=$写作（a，b_1，b_2，b_3，c），其中 $a\in S_\ell^{(\ell)}$、b_1，b_2，$b_3\in S_\ell$，且 $c\in S_\ell^{(2D-2-2\ell)}$。然后，我们用某些$\chi\in\{\mathbf{T0},\ldots\ldots,\mathbf{T4}\}^\Phi$给 F着色，具体如下。对每个 $\phi\in\Phi$，我们比较这两个数

$$X:=\psi_{\phi_\ell}^{(\ell)}(a,b_1,b_2,c)\quad\text{and}\quad Y:=\psi_{\phi_\ell}^{(\ell)}(a,b_2,b_3,c),$$

并将 χ_ϕ 设为

T1 if $0\leq X\leq Y$,

T2 if $0\leq Y\leq X$,

T3 if $0\leq(-X)\leq(-Y)$,

T4 if $0\leq(-Y)\leq(-X)$,

T0 当 X 与 Y 符号不同时。

这给出了一个 $S_\ell^{(2D+1-\ell)}$ 的着色，至多使用 $5^s=O$种（1）颜色，因此根据定理 2.2，S_ℓ 包含一个单色集 T，其颜色为 χ，满足 $|S_\ell|\leq\mathrm{tw}_{2D+1-\ell}(O(|T|)$。如果 $\chi_\phi=\mathbf{T0}$ 对某个 ϕ成立，则$|S_{\ell+2}|\leq 2D+2$，因此我们可以假设 **T0** 未在 χ中使用。

在下文中，fi x $\phi\in\Phi$。固定 $a\in T^{(\ell)}$和 $c\in T^{(2D-2-2\ell)}$，并对带有 $a_\ell<b<c_1$的 $b\in T$，记为e

$$z_b(a,c)=z_b:=\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c).$$

那么该序列

$$\{z_b\}_{b\in T:a_\ell<b<c_1}$$

是类型为 χ_ϕ的平移指数型。事实上，若 $b<b'$，则根据 (8) 我们可以写成

$$z_{b'}-z_b=\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b',c)-\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)=\psi_{\phi_\ell}^{(\ell)}(a,b,b',c),$$

因此，T 为颜色χ_ϕ 的单色的，这意味着对于每个 $b_1<b_2<b_3\in B$，三元组（z_{b_1}，z_{b_2}，z_{b_3}）的类型都是χ_ϕ。因此，$\{z_b\}_b$ 确实是类型为χ_ϕ的平移指数型，这意味着存在 t（a，c）$\in\mathbb{R}$使得

$$\left\{\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)-t(a,c)\right\}_{b\in T:a_\ell<b<c_1}$$

是类型为χ_ϕ的弱指数型。我们令 $S_{\ell+1}:=T$。

构造 $\phi_{\ell+1}$。我们的目标是构造一个函数 $\phi_{\ell+1}$，使其具有以下两个性质：

(i) 该序列

$$\left\{\psi_{\phi_{\ell+1}}^{(\ell+1)}(a,b,c)\right\}_{b\in S_{\ell+1}:a_\ell<b<c}$$

对于 $a\in T(\ell)$ 和 $c\in T^{(2D-2-2\ell)}$ 的每一种可能取值，它都是类型为 χ_ϕ 的弱指数型；

(ii) $\psi_{\phi_{\ell+1}}^{(k)}\equiv\psi_{\phi_k}^{(k)}$ on $S_{\ell+1}$ for every $k\le\ell$.

我们证明，通过考察 $t(a,c)$ 在 c 的各种特殊取值下的值，可以利用 ψ 的加性性质构造出这样的 $\phi_{\ell+1}$。

固定 $a\in T^{(\ell)}$，为简便起见记 $q=D-1-\ell$。此外，重新标记后，不妨设对某个整数 M 有 $T=[M]$。给定满足 $d_i<d_{i+1}-1$ 和 $d_q<M$ 的 $d\in[M]^{(q)}$，记

$$d^+=(d_i,d_i+1)_{i=1,\dots,q}\in[M]^{(2q)}.$$

我们考察 $t(a,d^+)$ 的值，以便构造 $\phi_{\ell+1}$。定义函数 $\rho_a\colon\ [M]^{(q)}\to\mathbb{R}$，使得当 $\rho_a(d)$ 有定义时，$=t(a,d^+)$，否则 $\rho_a(d)=0$。回顾序列

$$Z_{a,d}:=\left\{\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,d^+)-\rho_a(d)\right\}_{b:a_\ell<b<d_1}$$

是类型 χ_ϕ弱指数型。对于 $b\in[a_\ell+1,M]$，定义函数 $\phi^*=\phi_\ell(a,b,.)$。由 (6)，对于任意 $c\in[b+1,M]^{(2q)}$，我们有

$$\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)=\psi_{\phi^*}(c)=\sum_{c_1\le d_1<c_2}\sum_{c_3\le d_2<c_4}\cdots\sum_{c_{2q-1}\le d_s<c_{2q}}\psi_{\phi^*}((d_1,\dots,d_q)^+).$$

这启发了如下定义 $\pi_a\colon\ [a_\ell+1,M]^{(2q)}\to\mathbb{R}$ 使得

$$\pi_a(c)=\sum_{c_1\le d_1<c_2}\sum_{c_3\le d_2<c_4}\cdots\sum_{c_{2q-1}\le d_s<c_{2q}}\rho_a(d_1,\dots,d_q),$$

因为这样我们就可以写成

$$\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)-\pi_a(c)=\sum_{c_1\le d_1<c_2}\sum_{c_3\le d_2<c_4}\cdots\sum_{c_{2q-1}\le d_s<c_{2q}}\left[\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,(d_1,\dots,d_q)^+)-\rho_a(d_1,\dots,d_q)\right]$$

这意味着序列

$$Z_{a,c}:=\left\{\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)-\pi_a(c)\right\}_{b:a_\ell<b<c_1}$$

是序列 $Z_{a,d}$ 对 (a,d) 的集合之和。但每个 $Z_{a,d}$ 都是类型为 χ_ϕ 的弱指数型，因此 $Z_{a,c}$ 也同样是类型为 χ_ϕ 的弱指数型。函数 π_a 的优点在于，我们可以应用引理 5.1 找到 $\xi_a\colon\ [a_\ell+1,M]^{(q)}\to\mathbb{R}$ 使得 $\psi_{\xi_a}\equiv\pi_a$。最后，定义 $\theta\colon\ [M]^{(D)}\to\mathbb{R}$使得 $\theta(a,b,d):=\xi_a(d)$（因此特别地，θ 不依赖于 b，即第 $(\ell+1)$ 个坐标），并令$\phi_{\ell+1}:=\phi_\ell-\theta$。根据此定义，我们有

$$\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)-\pi_a(c)=\psi_{\phi_\ell}^{(\ell+1)}(a,b,c)-\psi_\theta^{(\ell+1)}(a,b,c)=\psi_{\phi_{\ell+1}}^{(\ell+1)}(a,b,c).$$

因此，序列

$$Z_{a,c}=\left\{\psi_{\phi_{\ell+1}}^{(\ell+1)}(a,b,c)\right\}_{b:a_\ell<b<c_1}$$

是类型 χ_ϕ的弱指数型。此外，由于 $\theta(a,b,c)$ 不依赖于第 $(\ell+1)$ 个坐标，我们对每个 $\psi_\theta^{(k)}\equiv0$ 都有 $k\le\ell$，根据 (7)，因此 $\psi_{\phi_k}^{(k)}\equiv\psi_{\phi_{\ell+1}}^{(k)}$。这也确保了 $\phi_{\ell+1}\sim\phi_\ell\sim\phi$。因此，(i) 和 (ii) 均成立。

指数分离邻域。令 $U = S_D$，并对每个 $\phi \in \Phi$，设 $\sigma = \phi_D$。我们的下一个目标是找到一个较大的 $V \subset U$，使得对于任意 $k \in [D]$、$\phi \in \Phi$，以及满足 $a \in V^{(k-1)}$ 和 $c \in V^{(D-k)}$ 的 $(a, c) \in V^{(D-1)}$，序列

$$\{\sigma(a, b, c)\}_{b \in V : a_{k-1} < b < c_1}$$

其为弱指数型，类型仅取决于 k 和 ϕ。换句话说，对于任意 $k \in [D]$，固定除第 k 个坐标外的所有坐标所得到的任何序列都是弱指数型的。

在证明的其余部分，我们固定 $\phi \in \Phi$ 并简写为 $\psi^{(k)}$，而不写 $\psi_\sigma^{(k)}$。我们记录如下：对于每个 $1 \le k \le D$，$(a, c) \in U^{(2D-k-1)}$，其中 $a \in U^{(k-1)}$ 且 $c \in U^{(2D-2k)}$，序列

$$\{\psi^{(k)}(a, b, c)\}_{a_{k-1} < b < c_1}$$

是某种类型 τ_k的弱指数型序列。我们称集合 $W \subset U$ 具有 (k, m)-性质，其中 $1 \le m \le k \le D$，如果对于每个 $(a, c) \in W^{(2D-k-1)}$，满足 $a \in W^{(m-1)}$ 且 $c \in W^{(2D-k-m)}$，序列

$$\{\psi^{(k)}(a, b, c)\}_{b \in W : a_{m-1} < b < c_1}$$

是某种类型 $\tau_{k,m}$ 的弱指数型。因此，U（以及 U 的每个子集）都具有 (m, m)-性质，其中$m \in [D]$。我们的目标可以重新表述为：找到 $V \subset U$，使得 V 对每个$m \in [D]$都具有 (D, m)-性质。这一点足以满足要求，因为回想一下 $\psi^{(D)} \equiv \sigma$。

接下来，我们定义一个集合序列 $U = U_0 \supset U_1 \supset \cdots \supset U_{D-1}$，使得对每个$\ell \in \{0, \dots, D-1\}$，$U_\ell$ 都具有 $(\min\{D, m + \ell\}, m)$-性质，其中 $m \in [D]$。当 $\ell = 0$时，这成立。假设 U_ℓ 已经定义并满足所需条件，那么我们通过移除 U_ℓ中的首项、末项以及每隔一项，来定义 $U_{\ell+1}$。

断言 5.3. $U_{\ell+1}$ 足够。

证明。固定某个 $m < D - \ell$并记作 $k = m + \ell$。考虑 $\psi^{(k+1)}$，并将此函数的输入写成如下形式

$$(a, b, c, d, e) \text{ where } a \in U_\ell^{(m-1)}, b \in U_\ell, c \in U_\ell^{(\ell)}, d \in U_\ell, e \in U_\ell^{(2(D-k-1))}.$$

令 $b < b'$ 和 $d < d'$，并使用 (8) 来表示这些恒等式

$$\psi^{(k)}(a, b, c, d, d', e) = \psi^{(k+1)}(a, b, c, d', e) - \psi^{(k+1)}(a, b, c, d, e)$$

and

$$\psi^{(k)}(a, b', c, d, d', e) = \psi^{(k+1)}(a, b', c, d', e) - \psi^{(k+1)}(a, b', c, d, e).$$

为方便记号，记作

$$X_1 = \psi^{(k)}(a, b, c, d, d', e), Y_1 = \psi^{(k+1)}(a, b, c, d', e), Z_1 = \psi^{(k+1)}(a, b, c, d, e)$$

and

$$X_2 = \psi^{(k)}(a, b', c, d, d', e), Y_2 = \psi^{(k+1)}(a, b', c, d', e), Z_2 = \psi^{(k+1)}(a, b', c, d, e),$$

那么 $X_1 = Y_1 - Z_1$ 和 $X_2 = Y_2 - Z_2$。利用 U_ℓ 具有 $(k,\ k)$-性质，可得对于 $i = 1,\ 2$,

$$\begin{aligned}
&0 \le 2Z_i \le Y_i && \text{if } \tau_k = \mathbf{T1},\\
&0 \le 2Y_i \le Z_i && \text{if } \tau_k = \mathbf{T2},\\
&0 \le (-2Z_i) \le (-Y_i) && \text{if } \tau_k = \mathbf{T3},\\
&0 \le (-2Y_i) \le (-Z_i) && \text{if } \tau_k = \mathbf{T4}.
\end{aligned}$$

因此，

$$X_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] Y_i \quad \text{if } \tau_k \in \{\mathbf{T1}, \mathbf{T3}\},$$
$$X_i \in -\left[\frac{1}{2}, 1\right] Z_i \quad \text{if } \tau_k \in \{\mathbf{T2}, \mathbf{T4}\}.$$

接下来，注意到 U_ℓ 具有（k， m）-性质。因此，假设 b 和 b' 不是相继元素，我们有

$$\begin{aligned}
&0 \le 4X_1 \le X_2 && \text{if } \tau_{k,m} = \mathbf{T1},\\
&0 \le 4X_2 \le X_1 && \text{if } \tau_{k,m} = \mathbf{T2},\\
&0 \le (-4X_1) \le (-X_2) && \text{if } \tau_{k,m} = \mathbf{T3},\\
&0 \le (-4X_2) \le (-X_1) && \text{if } \tau_{k,m} = \mathbf{T3}.
\end{aligned}$$

我们根据（τ_k， $\tau_{k,\ k}$）的取值分析这些不等式。这一分析分为 16 种情况，其中 8 种不可能出现，后文将对此加以说明。我们只详细分析其中几种情况，因为大多数论证几乎完全相同。

(T1,T1) 我们有 $X_i \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] Y_i$和 $0 \le 4X_1 \le X_2$。因此，

$$0 \le 2Y_1 \le 4X_1 \le X_2 \le Y_2.$$

特别地， $0 \le 2Y_1 \le Y_2$。由于每个非相继的 $b < b'$都满足这一情况，我们得到序列

$$\left\{\psi^{(k+1)}(a, b, c, d', e)\right\}_{b \in U_{\ell+1} : a_{m-1} < b < c_1}$$

是类型为 $\tau_{k+1,\ \ell}$ =**T1** 的弱指数型。此外，由于这对 $d < d'$ 的任意取值都成立，我们可以将 d' 选为 c 与 e 之间除 U_ℓ中 c 的后继以外的任意元素。特别地，若 a， c， e 都是 $U_{\ell+1}$中的元组，则 U_ℓ 中 c 的后继不属于 $U_{\ell+1}$。总之，序列

$$\left\{\psi^{(k+1)}(a, b, c')\right\}_{b \in U_{\ell+1} : a_{m-1} < b < c'_1}$$

对于每一种选择（a， c'） $\in U_{\ell+1}^{(2D-k-2)}$，只要满足 $a \in U_{(m-1)\ell+1}$，就是类型为 **T1** 的弱指数型。因此$U_{\ell+1}$ 具有性质（$m + \ell + 1$， m）。

(T1,T2) 我们有 $0 \le 2Y_2 \le 4X_2 \le X_1 \le Y_1$。因此，我们推得

$$\left\{\psi^{(k+1)}(a, b, c')\right\}_{b \in U_{\ell+1} : a_{m-1} < b < c'_1}$$

是类型为**T2**的弱指数型。

(T1,T3) 这种情况不可能发生。事实上，我们有 $Y_i > 0$ 和 $X_i \in [1/2, 1]Y_i$，所以 $X_i > 0$ 也成立。但这与 $\tau_{k,\ m}$ =**T3**矛盾。此后所有“不可能”的情况都基于类似的原因。

(T1,T4) 不可能。

(T2,T1) 不可能。

(T2,T2) 不可能。

(T2,T3) 我们有 $0 \le 2Z_1 \le (-4X_1) \le (-X_2) \le Z_2$，因此

$$\left\{\psi^{(k+1)}(a,b,c,d,e)\right\}_{b\in U_{\ell+1}:a_{m-1}<b<c_1}$$

是类型为 $\tau_{k+1,\ell} = \mathbf{T1}$ 的弱指数型。由于这对每个 $d < d'$ 都成立，我们唯一不能选择的 d 是 e_1 的前驱。由此可得

$$\left\{\psi^{(k+1)}(a,b,c')\right\}_{b\in U_{\ell+1}:a_{m-1}<b<c'_1}$$

对于每个 $(a,c') \in U_{\ell+1}^{(2D-k-2)}$，若 $a \in U_{(m-1)\ell+1}$，则为类型 $\tau_{k+1,\ell} = \mathbf{T1}$ 的弱指数型。因此 $U_{\ell+1}$ 具有性质 $(m+\ell+1, m)$。

(T2,T4) $0 \le 2Z_2 \le (-4X_2) \le (-X_1) \le Z_1$, so $\tau_{k+1,\ell} = \mathbf{T2}$.

(T3,T1) 不可能。

(T3,T2) 不可能。

(T3,T3) $0 \le (-2Y_1) \le (-4X_1) \le (-X_2) \le (-Y_2)$，所以 $\tau_{k+1,\ell} =$ T3。**(T3,T4)** $0 \le (-2Y_2) \le (-4X_2) \le (-X_1) \le (-Y_1)$，所以 $\tau_{k+1,\ell} =$ T4。**(T4,T1)** $0 \le (-2Z_1) \le 4X_1 \le X_2 \le (-Z_1)$，所以 $\tau_{k+1,\ell} =$ T3。**(T4,T2)** $0 \le (-2Z_2) \le 4X_2 \le X_1 \le (-Z_1)$，所以 $\tau_{k+1,\ell} =$ T4。
(T4,T3) 不可能。**(T4,T4)** 不可能。

□

令 $V := U_{D-1}$，则 $|V| = \Omega(|U|)$，且对每个 $m \in [D]$，V 都具有 (D, m)-性质。等价地，对于任意 $k \in [D]$ 和 $(a, c) \in V^{(D-1)}$，若 $a \in V^{(k-1)}$ 且 $c \in V^{(D-k)}$，则序列

$$\{\sigma(a,b,c)\}_{b\in V:a_{k-1}<b<c_1}$$

是弱指数型的。我们将此称为弱分离性质。

指数分离一切。我们几乎完成了，剩下的只是找到一个大的子集 $S \subset V$，使得 σ 在 $S^{(D)}$ 上指数分离。根据引理 2.3，几乎可以立即得到这样一个大小为 $|S| = \Omega(|V|^{1/(2D-1)})$ 的 S 的存在性。事实上，考虑函数 $\gamma\colon V^{(D)} \to \mathbb{R}^{\Phi}$，定义为 $\gamma(a)_\phi := \log_2 |\sigma(a)|_\phi$。那么 γ 满足以下性质。给定 $a \in V^{(D)}$，记作 $\langle a\rangle = \{a_1, \dots, a_D\}$。那么对每个 $a \in V^{(D)}$ 和 $\phi \in \Phi$，至多有 $2D^2$ 个其他 $b \in V^{(D)}$ 满足 $|\langle a\rangle \cap \langle b\rangle| = D-1$ 且 $|\gamma(a)_\phi - \gamma(b)_\phi| < 1$。这是因为若 $I, J \in [D]^{(D-1)}$，则根据弱分离性质，至多有两种这样的 b 选择，使得 $a_I = b_J$。因此，我们可以对 $s = 2D^2$ 应用引理 2.3，得到一个大小为 $|S| = \Omega(|V|^{1/(2D-1)})$ 的集合 S，使得任意两个不同的 $a, b \in S^{(D)}$ 对每个 $\phi \in \Phi$ 都满足 $|\gamma(a)_\phi - \gamma(b)_\phi| \ge 1$。但这意味着对每个 $\phi \in \Phi$，σ 在 $S^{(D)}$ 上指数分离。

为完成证明，我们给出 S 的大小上界。我们有 $|S_0| = N$ 和 $|S_\ell| \le \mathsf{tw}_{2D+1-\ell}(O(|S_{\ell+1}|))$，对于 $\ell = 0, \dots, D-1$。因此，$U = S_D$ 满足 $N \le \mathsf{tw}_K(O(|U|))$，其中

$$K = \left(\sum_{\ell=0}^{D-1} 2D+1-\ell\right) - (D-1) = 3D^2/2 + D/2 + 1.$$

此外，$|V| = \Omega(|U|)$ 且 $|S| = \Omega(|V|^{1/(2D-1)})$。因此，$N \le \mathsf{tw}_K(|S|^{O(1)})$，证明完毕。 □

5.3 主定理的证明

本节中，我们证明定理 1.1。具体而言，我们将证明一个更一般的结果，并通过两个定义为此做准备。

定义5. 若存在函数 $\phi_I: A^{(D)} \to \mathbb{R}$，对于$I \in [r]^{(D)}$，使得对每个 $a \in A^{(r)}$，都有.....则函数 $f: A^{(r)} \to \mathbb{R}$ 是 ***D*-依赖的**

$$f(a) = \sum_{I \in [r]^{(D)}} \phi_I(a_I).$$

换句话说，若 $f: A^{(r)} \to \mathbb{R}$ 是由至多依赖于 D 个输入变量的函数的线性组合，则称其为 D-依赖的。这将次数为 D的多项式这一类函数推广了。

断言5.4. 若 $f:(\mathbb{R}^d)^r \to \mathbb{R}$ 是次数至多为 D的多项式，且 $V \subset \mathbb{R}^d$ 是一个有序集，则将 f限制在 $V^{(r)}$ 上后，它是 D-依赖的。

证明。 任意固定 $[r]^{(D)}$中各元素的一个排列。令 $x \in (\mathbb{R}^d)^r$，则 $f(x)$中的每个单项式都具有如下形式

$$c \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{d} x_{i,j}^{\alpha_{i,j}}$$

其中 $\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{d} \alpha_{i,j} \leq D$。对于 $I \in [r]^{(D)}$，若 I是排列中第一个包含所有满足$\alpha_{i,1} + \cdots + \alpha_{i,d} \geq 1$的 D元组，则将该单项式加到函数 $f_I: (\mathbb{R}^d)^r \to \mathbb{R}$ 中。由于 f的次数至多为 D，每个单项式都会被加到某个 f_I中，因此

$$f(x) = \sum_{I \in [r]^{(D)}} f_I(x).$$

此外，若 $j \notin I$，则 f_I 不依赖于x_j，因此我们可以用适当的函数ϕ_I 表示为 $f_I(x) = \phi_I(x_I): V^{(D)} \to \mathbb{R}$，$x \in V^{(r)}$。至此，证明完成。 □

接下来，利用 D-依赖函数的概念，我们以如下自然方式扩展复杂度为（d, D, m）的半代数超图类。

定义 6. 设 A为一个有序集，设 $f_1, \ldots, f_m: A^{(r)} \to \mathbb{R}$ 为 D-依赖函数，并设$\Gamma: \{假, 真\}^m \to \{假,真\}$ 为一个布尔公式。定义顶点集为 A 的 r-均匀超图 H，其中$a \in A^{(r)}$ 是超边当且仅当

$$\Gamma\left(f_1(a) \leq 0, \ldots, f_m(a) \leq 0\right) = \texttt{true}.$$

于是 H，以及任何与 H同构的超图，都是复杂度为（D, m）的**拟代数**超图。

显然，复杂度为（d, D, m）的半代数超图也是复杂度为（D, m）的拟代数超图。因此，以下定理蕴含定理 1.1。本节余下部分将用于证明该定理。

定理5.5. 设 r、D、m 为正整数常数。设 H是一个复杂度为(D, m) 、具有 N 个顶点的 r-一致拟代数超图。则 H 包含一个大小为 n的团或独立集，其中

$$N \leq \mathrm{tw}_K(O(n)) \text{ for } K = \frac{D(D^2 + 6D + 1)}{2}.$$

证明. 设 A 为 H的顶点集，设 F 为一组大小为 m的 D-依赖函数 $f\colon A^{(r)} \to \mathbb{R}$，并设 $\Gamma\colon \{$假,真$\}^F \to \{$假, 真$\}$ 为一个布尔表达式，使得 $a \in A^{(r)}$ 是H 的超边当且仅当

$$\Gamma\left[(f(a) \le 0)_{f\in F}\right] = \texttt{true}.$$

固定某个 $f \in F$。利用 f 是 D-依赖的这一点，对于每个 $I \in [r]^{(D)}$，都存在一个函数 $\phi_{f,\,I}\colon A^{(D)} \to \mathbb{R}$，使得对于每个 $a \in A^{(r)}$，我们有

$$f(a) = \sum_{I\in[r]^{(D)}} \phi_{f,I}(a_I).$$

接下来，我们递归地定义一个集合序列 $A = S_0 \supset S_1 \supset \cdots \supset S_D$，并且对于每个 $f \in F$ 和 $I \in [r]^{(\le D)}$，定义两个函数 $\sigma_{f,\,I}$，$\phi_{f,\,I}\colon A^{(|I|)} \to \mathbb{R}$，使其满足以下性质。对于每个 $f \in F$ 和 $k \in \{0,\dots,D\}$，

1. $f(a) = \displaystyle\sum_{I\in[r]^{(D-k)}} \phi_{f,I}(a_I) + \sum_{\ell=D-k+1}^{D} \sum_{I\in[r]^{(\ell)}} \sigma_{f,I}(a_I)$,

2. 若 $k \ge 1$ 和 $I \in [r]^{(D-k+1)}$，则 $\sigma_{f,\,I}$ 在 S_{k+1} 上指数分离。

假设对于某个 $k \in \{0,\dots,D-1\}$，S_k 和函数 $\phi_{f,\,I}$ 已经针对 $I \in [r]^{(D-k)}$ 定义。接下来，我们按如下方式定义 $\sigma_{f,\,I}$（针对 $I \in [r]^{(D-k)}$），$\phi_{f,\,J}$（针对 $J \in [r]^{(D-k-1)}$），以及 S_{k+1}。令

$$\Phi = \{\phi_{f,I} : f \in F, I \in [r]^{(D-k)}\},$$

并应用引理5.2，取至多为 $s = m\binom{r}{D-k}$ 个作用于 $S_k^{(D-k)}$ 上的函数 Φ。于是存在 $S_{k+1} \subset S_k$，使得 $|S_k| \le \mathsf{tw}_K(|S_{k+1}|^{O(1)})$，其中 $K = 3(D-k)^2/2 + (D-k)/2 + 1$；并且对每个 $\phi_{f,\,I} \in \Phi$，都存在 $\sigma_{f,\,I}$，使得 $\phi_{f,\,I} \sim \sigma_{f,\,I}$，且 $\sigma_{f,\,I}$ 在 S_{k+1} 上指数分离。特别地，存在函数 $\rho_{f,\,I,\,J}\colon S_{k+1}^{(D-k-1)} \to \mathbb{R}$，对于 $J \in I^{(D-k-1)}$，使得对每个 $a \in S_{k+1}^{(r)}$,

$$\phi_{f,I}(a_I) = \sigma_{f,I}(a_I) + \sum_{J\in I^{(D-k-1)}} \rho_{f,I,J}(a_J).$$

于是对于 $J \in [r]^{(D-k-1)}$，我们定义

$$\phi_{f,J} = \sum_{I\in[r]^{(D-k)}, J\subset I} \rho_{f,I,J}.$$

至此完成了 S_{k+1} 以及函数 $\sigma_{f,\,I}$ 和 $\phi_{f,\,J}$ 的定义。容易通过归纳法证明，1. 和 2. 均成立。注意，$\phi_{f,\,\emptyset}$ 表示一个常数，我们将其视为函数 $\phi_{f,\,\emptyset}()$，并简单地令 $\sigma_{f,\,\emptyset} := \phi_{f,\,\emptyset}$。

Set $S = S_D$，那么以下两个性质成立：对于每个 $f \in F$ ，

1. $f(a) = \displaystyle\sum_{I\in[r]^{(\le D)}} \sigma_{f,I}(a_I)$,

2. $\sigma_{f,\,I}$ 在 S 上对每个 $I \in [r]^{(\le D)}$都是指数分离的。

接下来，按如下方式定义 $S^{(2D)}$ 的着色。给定 $a \in S^{(2D)}$，令 Q_a 为所有满足条件的数 $|\sigma_{f,\,I}(a_J)|$ 的序列，其中 $f \in F$、$I \in [r]^{(\le D)}$ 和 $J \subset [2D]^{(|I|)}$。若存在 f，且 $(I,\ J)$ 和 $(I',\ J')$ 满足 $J \ne J'$，则将超边 a 染为颜色 0，使得

$$2r^{-D}|\sigma_{f,I}(a_J)| < |\sigma_{f,I'}(a_{J'})| < 2r^{D}|\sigma_{f,I}(a_J)|.$$

若 a 未染为颜色 0，则按递增顺序排列 Q_a 的元素，并令 R_a 为所得序列。对每一项 $R_{a,i}$，写下满足 $R_{a,i} = |\sigma_{f,I}(a_J)|$ 的三元组 (f, I, J)，由此得到所有可能三元组 (f, I, J) 的一个排序 χ。将 a 染为颜色 χ。这样便得到 $S^{(2D)}$ 的一个着色，共有 $O(1)$ 种颜色。应用定理 2.2，存在单色的 $T \subset S$，使得 $|S| \le \mathsf{tw}_{2D}(O(|T|))$。

断言 5.6. 假设 $|T|$ 足够大，则 T 不会被染成颜色 0。

证明。令 $u = \lceil 10D\log_2 r \rceil$。反设 T 是颜色 0 的单色的。那么，在假设 $|T|$ 足够大的条件下，我们可以找到大小为 $2Du$ 的 $T_0 \subset T$，以及一对三元组 (f, I, J) 和 (f, I', J')，满足 $J \ne J'$，使得对每个 $a \in T_0^{(2D)}$ 都有 $2r^{-D}|\sigma_{f,I}(a_J)| < |\sigma_{f,I'}(a_{J'})| < 2r^D|\sigma_{f,I}(a_J)|$。这可由拉姆齐定理的一个简单应用得出。重新标记 T_0 中的元素，使得 $T_0 = [2Du]$，并令 $a = (u, 2u, \dots, 2Du) \in T^{(2D)}$。无需失去一般性，设 $|J| \ge |J'|$，则存在 $j \in J \setminus J'$。将 a 中的 a_j 替换为 $a_j - p$ 所得元素记作 $a^{(p)} \in T^{(2D)}$，则对每个 $0 \le p < u$，都有 $|\sigma_{f,I'}(a^{(p)}_{J'})| = |\sigma_{f,I'}(a_{J'})|$。另一方面，序列 $(|\sigma_{f,I}(a^{(p)}_J)|)_{p=0,\dots,u-1}$ 是指数分离的，因此其中有两个元素的比值大于 $2^{u-1} > 4r^{2D}$。但这样就存在 p，使得 $2r^{-D}|\sigma_{f,I}(a^{(p)}_J)| \ge |\sigma_{f,I'}(a^{(p)}_{J'})|$，或 $2r^D|\sigma_{f,I}(a^{(p)}_J)| \le |\sigma_{f,I'}(a^{(p)}_{J'})|$，矛盾。 □

因此，我们可以假设 T 是某种颜色 $\chi \ne 0$ 的单色的。令 $f \in F$ 和 $x \in T^{(r)}$，并考虑

$$f(x) = \sum_{I \in [r]^{(\le D)}} \sigma_{f,I}(x_I).$$

假设 $I^f_0{}^x = I_0 \in [r]^{(\le D)}$ 使 $|\sigma_{f,I}(x_I)|$ 达到最大值，那么利用 T 不是颜色 0 这一事实，可得

$$r^{2D}|\sigma_{f,I}(x_I)| \le |\sigma_{f,I_0}(x_{I_0})|$$

对每个 $I \ne I_0$ 都成立。但由于这个和包含 $|[r]^{(\le D)}| < 2r^D$ 个元素，这意味着 $f(x)$ 的符号与 $\sigma_{f,I_0}(x_{I_0})$ 的符号相同。关键的观察是，I_0 不依赖于 x 的选择。这可由以下更一般的结论推出：序列 $(\sigma_{f,I}(x_I))_{I \in [r]^{(\le D)}}$ 中元素的顺序完全由颜色 χ 决定。事实上，令 $I, I' \in [r]^{(\le D)}$ 满足 $I \ne I'$，并选取一个 $(2D)$-元组 $a \in T^{(2D)}$，其前 $|[I] \cup [I']|$ 个元素是 $[I] \cup [I']$ 中的元素。那么，对于某个仅依赖于 I 和 I' 的 $J \ne J' \subset [2D]$，有 $\sigma_{f,I}(x_I) = \sigma_{f,I}(a_J)$，且 $\sigma_{f,I'}(x_{I'}) = \sigma_{f,I'}(a_{J'})$。由于 a 被赋予颜色 χ，$|\sigma_{f,I}(a_J)|$ 与 $|\sigma_{f,I'}(a_{J'})|$ 的相对顺序完全由 χ 决定。

总之，我们已经证明，对于每个 $f \in F$，都存在 $I^f_0 \in [r]^{(\le D)}$，使得 $f(a)$ 的符号与 $\sigma_{f,\,I_0}(a_{I_0})$ 的符号相同。此外，利用 $\sigma_{f,\,I_0}$ 在 T 上指数分离这一事实，我们可以得知，对于 a 的任意取值，$f(a)$ 的符号都相同。因此，

$$\{f(a) \le 0\}_{f \in F} \in \{\mathtt{false}, \mathtt{true}\}^F$$

在 T 上为常数，这意味着 $H[T]$ 是一个团或独立集。

我们通过给出 T 的大小上界来完成证明。我们有 $|S_0| = N$，并且 $|S_k| \le \mathsf{tw}^{K_k}(|S_{k+1}|^{O(1)})$，其中 $K_k = 3(D-k)^2/2 + (D-k)/2 + 1$ 对于 $k = 0, \dots, D-1$ 成立。因此，$N \le \mathsf{tw}_L(|S|^{O(1)})$，其中

$$L = -(D-1) + \sum_{k=0}^{D-1} \frac{3(D-k)^2}{2} + \frac{D-k}{2} + 1 = \frac{D(D+1)^2}{2} + 1.$$

最后，我们有 $|S| \le \mathsf{tw}_{2D}(O(|T|))$，由此得到 $N \le \mathsf{tw}_K(O(|T|))$，其中 $K = {}^{D}{}_{(D^2+6D+1)\,2}$。 □

我们注意到界 $K = {}^{D}{}_{(D^2+6D+1)\,2}$ 满足 $K \le 3D^3$ 当 $D \ge 2$ 时。对于 $D = 1$，我们知道更强的界 $N \le 2^{n^{O(1)}}$ 来自 [17], ，因此定理 1.1 对 D 的所有取值均成立。

致谢

两位作者感谢瑞典研究理事会项目 VR 2023-03375 的支持。我们感谢 Zhihan Jin 和 J´anos Pach 富有价值的讨论。

参考文献

[1] N. Alon、T. Jiang、Z. Miller 和 D. Pritikin。具有局部约束的边染色中的恰当染色子图和彩虹子图。《随机结构与算法》23.4（2003）：409–433。[2] N. Alon、J. Pach、R. Pinchasi、R. Radoiˇci´c 和 M. Sharir。半代数集合的交叉模式。《组合理论杂志 A 辑》111（2005）：310–326。[3] L. 巴拜。反拉姆齐定理。《图与组合》1（1985）：23–28。[4] A. Basit、A. Chernikov、S. Starchenko、T. Tao 和 C. Tran。半线性超图的扎兰凯维奇问题。《数学论坛：Sigma》9（2021）：E59。[5] B. Bukh 和 J. Matouˇsek。Erd ˝os-Szekeres 型命题：一维中的拉姆齐函数与可判定性。《杜克数学杂志》163(12)（2014）：2243–2270。[6] M. Campos、S. Griffiths、R. Morris 和 J. Sahasrabudhe。对角拉姆齐数的指数型改进。《数学年刊》，即将出版。[7] T. M. Chan 和 S. Har-Peled。几何情形下避免诱导完全二部图时的关联数。载于《离散算法研讨会论文集》（2023）：1398–1413。美国工业与应用数学学会，2023。[8] T. M. Chan、C. Keller 和 S. Smorodinsky。几何对象的交超图的扎兰凯维奇问题。预印本，arXiv:2412.06490（2025）。[9] D. Conlon、J. Fox、J. Pach、B. Sudakov 和 A. Suk。半代数关系的拉姆齐型结果。《美国数学会汇刊》366（2014）：5043–5065。[10] D. Conlon、J. Fox 和 B. Sudakov。超图拉姆齐数。《美国数学会杂志》23（1）（2010）：247–266。[11] M. Eli´aˇs、J. Matouˇsek、E. Rold´an-Pensado 和 Z. Safernov´a。几何拉姆齐函数的下界。《美国工业与应用数学学会离散数学杂志》28(4)（2014）：1960–1970。[12] P. Erd˝os。关于图论的一些评论。《美国数学会通报》53（4）（1947）：292–294。[13] P. Erd˝os、A. Hajnal 和 R. Rado。基数的分割关系。《匈牙利科学院数学学报》16（1965）：93–196。[14] P. Erd˝os 和 R. Rado。关于给定集合子集分类的组合定理。《伦敦数学会会刊》3（1）（1952）：417–439。[15] P. Erd˝os 和 G. Szekeres。几何中的一个组合问题。《组合数学》2（1935）：463–470。[16] Z. Hunter、A. Milojevi´c、B. Sudakov 和 I. Tomon。具有几何应用的高次数 C_4-自由子图。预印本，arXiv:2506.23942（2025）。[17] Z. Jin 和 I. Tomon。半代数与半线性超图的拉姆齐数。《组合理论杂志 B 辑》163（2023）：54–82。[18] J. Ma、W. Shen 和 S. Xie。拉姆齐下界的指数型改进。预印本，arXiv:2507.12926（2025）。[19] R. Morris。拉姆齐理论的一些近期结果。预印本，arXiv:2601.05221（2026）。[20] F. P. Ramsey。关于数理逻辑中的一个问题。《伦敦数学会会刊》s2–30（1）（1930）：264–286。

[21] A. Suk. 关于 *Erd˝os-Szekeres* 凸多边形问题。《美国数学会杂志》30（4）：1047–1053。[22]J. Tidor 和 H.-H. H. Yu。 多层多项式划分与半代数超图：正则性、*Tur´an* 及扎兰凯维奇结果。预印本, arXiv:2407.20221（2024）。[23] I. Tomon。 半线性图的拉姆齐性质。《以色列数学杂志》254（2023）：113–139。