arXiv:2602.18353v1 [math.DG] 20 Feb 2026

Kähler 双曲流形上霍奇拉普拉斯算子谱的尖锐下界及其应用

YE-WON LUKE CHO、YOUNG-JUN CHOI 和 KANG-HYURK LEE

Abstract. 本文建立了 K¨ahler 双曲流形上霍奇拉普拉斯算子谱的一个尖锐下界。该下界可用与 K¨ahler 双曲结构相关的 1-形式的上确界范数显式表示。作为应用，我们得到有界对称域的显式谱下界。

1. Introduction引言

设 X 是一个 n维完备 K¨ahler 流形， ω 是其 K¨ahler 形式。若存在实 1-形式 η 定义在 X 上，使得 ω 为 d-有界，则称其为 ω，

$$d\eta = \omega \quad \text{and} \quad \|\eta\|_{L^\infty} := \sup_X |\eta|_\omega < +\infty$$

其中 $|\eta|_\omega$ 表示 η 关于 ω测得的逐点长度。在 [Gro91], Gromov 证明，若 X 具有 d-有界的 K¨ahler 形式 ω，则

$$\dim \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(X) = 0 \quad \text{for } p+q \neq n, \tag{1.1}$$

其中，$\mathrm{H}^{p,q}{}_{(2)}(X)$ 是相对于 ω 的平方可积调和（p,q）形式空间。此外，他还证明，若 X 是单连通的，并覆盖一个紧致 K¨ahler 流形，且 ω 是商空间上 K¨ahler 形式的提升，则

$$\dim \mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(X) = \infty \quad \text{for } p+q = n.$$

此前，Donnelly 和 Fefferman 已证明，配备伯格曼度量的有界强伪凸域上的 L^2-上同调的消失定理 [DF83]。随后，Donnelly 运用 Gromov 的技巧，对 Donnelly-Fefferman 定理给出了另一种证明，并将结果推广到某些弱伪凸域类 [Don94]。

在 [Gro91], 消失定理（1.1）（在 [Gro91]中称为勒夫谢茨消失定理）通过 L^2-Lefschetz 同构定理得以证明。更确切地说，设 φ 是一个 L^2-调和 k-形式，且 $k < n$。那么 $\omega^{n-k} \wedge \varphi$ 是一个L^2-调和$(2n-k)$-形式，并且满足

$$\omega^{n-k} \wedge \varphi = d\left(\eta \wedge \omega^{n-k-1} \wedge \varphi\right), \tag{1.2}$$

2010 数学主题分类。 58J50, 32Q15, 53C55, 32M15.关键词与短语。 谱底，K¨ahler 双曲流形，有界对称域。第一作者获得 G-LAMP（RS-2023-00301974）资助。第二作者获得韩国政府资助的韩国国家研究基金会（NRF）项目（编号：NRF-2023R1A2C1007227）资助。第二和第三作者获得三星科学技术基金会项目资助，项目编号 SSTF-BA2201- 01。

此外， $\eta\wedge\omega^{n-k-1}\wedge\varphi$属于 L^2，因为 η的 L^∞-范数有界。由于 Lefschetz 映射 $L^k:\varphi\mapsto\omega^{n-k}\wedge\varphi$ 在 k-形式上是双射，因此 φ 消失。

另一方面，Gromov 也改进了消失定理的证明，这意味着他估计了 Hodge 拉普拉斯算子 $\Delta:=\Delta_d:=dd^*+d^*d$ 的谱的下界。更确切地说，

定理1.1 ([Gro91]). 设 (X,ω) 为维数 n 的完备 *K¨ahler* 流形，且 $\omega=d\eta$，其中 η 是 X 上的有界 1- 形式。则每一个满足 $k\neq n$ 的 k- 形式 $\varphi\in$ 定义域 $(\Delta)\cap L^k{}_{(2)}(X)$ 都满足不等式

$$\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\geq\frac{c_k}{\|\eta\|^2_{L^\infty}}\|\varphi\|^2,$$

其中 $c_k\geq0$ 是依赖于 k 与 n 的常数。

这里， $\cdot,\cdot$ 与 $\|\cdot\|$ 表示关于 ω 的体积形式 dV_ω 的 L^2 内积与范数，并且

$$\mathrm{Dom}\,(\Delta)=\left\{\varphi\in L^\bullet_{(2)}:\Delta\varphi\in L^\bullet_{(2)}\right\},$$

其中 $L^\bullet{}_{(2)}$ 表示具有有限 L^2-范数的可测●-形式空间。

本文首先显式地研究常数 c_k 。更确切地说，我们考虑作用于(p,q)-形式的拉普拉斯算子，并通过细致计算确定一个显式常数$c_{p,q}$，由此得到 c_k 的显式表达式。

在下文中，完备的K¨ahler流形称为$K¨ahler$双曲，如果其K¨ahler形式是 d-有界的（参见 [Gro91] 关于K¨ahler双曲性的原始定义）。

定理 1.2. 设(X,ω) 是一个$K¨ahler$双曲流形，带有有界的1-形式 η，使得 $d\eta=\omega$。设(p,q) 是满足 $k:=p+q\neq n$的一对非负整数。则

$$\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\geq\frac{c_{p,q}}{\|\eta\|^2_{L^\infty}}\|\varphi\|^2,\quad for\ all\ \varphi\in\mathrm{Dom}\,(\Delta)\cap L^{p,q}_{(2)}(X)$$

其中

$$c_{p,q}:=\begin{cases}\frac{(n-k)!^4}{4}\cdot\frac{(p+1)!^4}{(n-q)!^4}\ \ if\ k<n,\\ c_{n-p,n-q}\ \ if\ k>n.\end{cases}$$

这特别意味着

$$\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\geq\frac{c_k}{\|\eta\|^2_{L^\infty}}\|\varphi\|^2\quad for\ all\ \varphi\in\mathrm{Dom}\,(\Delta)\cap L^k_{(2)}(X)$$

其中

$$c_k:=\begin{cases}\frac{(n-k)!^4}{4}\cdot\frac{([k/2]+1)!^4}{(n-[k/2])!^4}\ \ if\ k<n,\\ c_{2n-k}\ \ if\ k>n.\end{cases}$$

与前面的论证一样，下界估计从 Lefschetz 映射 L^{n-k} 开始；实际上，它是从 k-形式空间到 $(2n-k)$-形式空间的拟等距映射。借助该映射，可以用 $\omega^{n-k}\wedge\varphi$ 来估计 φ 的范数，其中 $\omega^{n-k}\wedge\varphi$ 分解为

$$L^{n-k}\varphi=d\left(\varphi\wedge\eta\wedge\omega^{n-k-1}\right)-d\varphi\wedge\eta\wedge\omega^{n-k-1}.$$

通过应用莱夫谢茨分解定理，即可完成论证，并由此得出一个定量下界（见第 4节）。

在中间维情形 $k = n$，通常不存在消失定理，因此可能存在非平凡的 L^2-调和 n-形式。因此，在这种情形下， Δ 的谱不存在正下界。不过，将 Δ 限制在 L^2-调和 n-形式空间的正交补上，仍可得到谱下界。详见第 5节。

在 $k = 0$的情形下，对于作用在函数上的拉普拉斯算子，可以得到比一般情形更尖锐的下界（见注 4.4）。我们先回顾 拉普拉斯算子的谱底 Δ的定义。它由下式给出：

$$\lambda_0(X) := \inf\left\{\int_X |d\varphi|_\omega^2 \, dV_\omega : \varphi \in C_0^\infty(X), \ \int_X |\varphi|^2 \, dV_\omega = 1\right\}. \tag{1.3}$$

定理 1.3。如果 $\varphi \in$ 定义域$(\Delta) \cap L^{0\,(2)}(X)$，则

$$\langle\!\langle \Delta\varphi, \varphi \rangle\!\rangle \geq \frac{n^2}{4\,\|\eta\|_{L^\infty}^2} \|\varphi\|^2. \tag{1.4}$$

特别地，

$$\lambda_0(X) \geq \frac{n^2}{4\,\|\eta\|_{L^\infty}^2}.$$

值得注意的是，定理 1.3 中的这一估计是最优的，即当 X 为单位球 $\mathbb{B}^n$时等号成立。更确切地说，根据 [CLS25], 中的定理 1.1，存在一个势函数 φ，它对应于完备的 K¨ahler–Einstein 度量 ω，其里奇曲率为 $-(n+1) < 0$（即，Ric$(\omega) = -(n+1)\omega$），定义在单位球 $\mathbb{B}^n$ 中 $\mathbb{C}^n$，满足

$$|\partial\varphi|_\omega^2 = 1 \quad \text{equivalently} \quad |d^c\varphi|_\omega^2 = \frac{1}{2}.$$

通过 $\eta = d^c\varphi$，定理 1.3 表明

$$\lambda_0(\mathbb{B}^n) \geq \frac{n^2}{2}.$$

但已知，在 $\lambda_0(\mathbb{B}^n) = n^2/2$ 的归一化条件 Ric$(\omega) = -(n+1)\omega$(参见，例如 [Cha84、McK70]) 。

当 X 是紧流形时，拉普拉斯算子 Δ 的谱是离散的，并且满足

$$0 = \lambda_0(X) < \lambda_1(X) \leq \lambda_2(X) \leq \cdots.$$

在这种情况下，第一个正特征值 $\lambda_1(X)$在几何中起着基础性作用。其上界和下界以及它们与底层几何的关系已得到广泛研究；例如参见 [Lic58], [Oba62], [Che 70], [Che75], [Cha84],[Uda88], [Li93], 以及其他许多文献。

相比之下，当 X 为非紧时，谱不必是离散的，并且由(1.3)定义的 $\lambda_0(X)$可能并非 Δ的特征值，而只是 Δ的谱的下确界。尽管如此，它所起的作用类似于紧致情形中的第一正特征值。因此，在此情形下估计 $\lambda_0(X)$的问题引起了广泛关注。Li和Wang [LW05]得到了一个重要的上界。在K¨ahler流形(X, ω)的全纯双截曲率以 -1为下界的假设下，他们证明了 $\lambda_0(X) \geq n^2/2$。随后，Munteanu [Mun09] 在里奇曲率以 $-(n+1)$为下界的假设下证明了 $\lambda_0(X) \leq n^2/2$，即

Ric(ω) $\geq -(n+1)\omega$。这两个估计在如下意义下都是尖锐的：等号在如上所述的复双曲空间$(\mathbb{B}^n, \omega)$上达到，从而 $\lambda_0(\mathbb{B}^n) = n^2/2$。

关于下界，McKean [McK70] 在截面曲率被一个负常数从上方控制这一假设下，对完备黎曼流形建立了一个结果。随后，Setti [Set91] 推导出了一个更精确的下界，其中同时涉及截面曲率与里奇曲率。在 K¨ahler 情形下，据作者所知，目前尚无仅基于全纯截面曲率或里奇曲率的假设所得到的下界。这引出了以下问题。 λ_0

问题 1.4. 对于 K¨ahler 流形，是否存在一个仅取决于全纯截面曲率的谱底下界?

以下定理针对有界对称域的情形，对这个问题给出了肯定的回答。

定理1.5. 若$(\Omega\ \omega)$ 是配备完备 *K¨ahler–Einstein* 度量 ω 的有界对称域，且其全纯截面曲率从上方被 $-K < 0$控制，则

$$\lambda_0(\Omega) \geq \frac{n^2}{4} \cdot K.$$

注意，定理 1.5 不能由 [McK70]或 [Set91], 推出，因为除单位球以外的任何有界对称域都存在截面曲率为零的方向。在 [CLS25], 中，作者通过引入以秩和一般范数定义的 K¨ahler-爱因斯坦度量下的 K¨ahler 双曲长度，得到了有界对称域全纯截面曲率的尖锐上界。结合这一结果，定理 1.5 为由 ´E. Cartan 分类的不可约有界对称域的谱底给出了尖锐下界（见第 6.2节）。

本文安排如下。第 2 节回顾 K¨ahler 几何中的基本概念和结果，包括原始分解和 L^2-Hodge 理论。第 3节建立若干逐点恒等式，这些恒等式是证明主要定理的关键。第 4 节给出定理 1.3和定理 1.2的证明。第 5 节着重讨论中间维数情形下的谱底。最后，在第 6节中，我们考察有界对称域的谱底，证明定理 1.5 并为不可约有界对称域给出显式下界。

Contents

1. 引言 1
2. 预备知识 5
2.1. 厄米几何基础 5
2.2. L^2-霍奇理论 7
3. 辅助公式 8
4. 主要定理的证明 10
5. 中间维数情形 13
6. 有界对称域的谱 15
6.1. K¨ahler 双曲性长度 15
6.2. 不可约有界对称域上的谱底 17

参考文献 18

2. Preliminaries

本节回顾 K¨ahler 几何中的一些基本术语和结果，并重述本文将始终用到的 L^2-霍奇理论的基本结果。有关详情，请参阅 [Dem97,Huy05]。

2.1. 基本厄米几何。 设 X 是一个复维数为 n 的复流形，$T^*_{\mathbb{C}}X$ 是其复化余切丛。复化外代数 $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X := \oplus_k \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X$ 按类型自然分解为：

$$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{p,q=k} \bigwedge^{p,q} T^*X, \quad \text{for} \quad k = 0, \cdots, 2n, \tag{2.1}$$

其中 $\bigwedge^{p,\,q} T^*X := \bigwedge^p (T^*X)^{1,\,0} \otimes \bigwedge^q (T^*X)^{0,1}$。

假设 X 在 X 上具有厄米度量 g。相应的 K¨ahler 形式 $\omega := \omega_g$ 写作

$$\omega = \mathbf{i} \sum_{\alpha,\beta} g_{\alpha\bar{\beta}}\, dz^\alpha \wedge d\bar{z}^\beta,$$

在局部全纯坐标（z^1，...，z^n）下。它在每个 $\bigwedge^{p,\,q} T^*X$ 上诱导出一个典范的厄米（半双线性）乘积，因此在 $\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X$ 上也诱导出这样的乘积，我们将其记为 $\cdot,\cdot_\omega$，相应的逐点范数记为 $|\cdot|_\omega$。相应的整体内积（即关于 dV_ω 的 L^2-内积）及其诱导范数分别记为 $\cdot,\cdot_\omega$ 和 $\|\cdot\|_\omega$。若不致混淆，我们将省略下标 ω。

霍奇星算子 $*: \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X \to \bigwedge^{2n-k} T^*_{\mathbb{C}}X$ 由下式定义

$$\varphi \wedge *\overline{\psi} = \langle \varphi, \psi \rangle_\omega \, dV_\omega$$

对所有 φ，$\psi \in \bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X$ 成立，其中体积形式为 $dV_\omega := \omega^n/n!$。Lefschetz 算子 $L: \bigwedge^{p,\,q} T^*X \to \bigwedge^{p+1,\,q+1} T^*X$ 定义为

$$L\varphi = \omega \wedge \varphi,$$

而对偶 Lefschetz 算子 $\Lambda: \bigwedge^{p,q} T^*X \to \bigwedge^{p-1,q-1} T^*X$ 是 L 关于 $\cdot,\cdot_\omega$ 的伴随算子，事实上，它可表示为 $\Lambda = *^{-1} \bigcirc L \bigcirc *$。

令 $\Omega^k(X)$ 和 $\Omega^{p,q}(X)$ 分别表示 k-形式和 (p,q)-形式空间。外微分

$$d: \Omega^k(X) \to \Omega^{k+1}(X)$$

其形式伴随算子 d^* 定义为

$$d^* = - * \circ d \circ * : \Omega^{k+1}(X) \to \Omega^k(X).$$

二阶椭圆算子

$$\Delta := dd^* + d^*d : \Omega^k(X) \to \Omega^k(X),$$

¯被称为霍奇拉普拉斯算子。回想一下，$d = \partial + \bar{\partial}$ 在每个$\Omega^{p,q}(X)$上（因此在每个 $\Omega^k(X)$上）。那么

$$\partial^* := - * \circ \bar{\partial} \circ * : \Omega^{p+1,q}(X) \to \Omega^{p,q}(X), \quad \bar{\partial}^* = - * \circ \partial \circ * : \Omega^{p,q+1}(X) \to \Omega^{p,q}(X)$$

分别是 ∂ 和 ∂ 关于 $\cdot, \omega$ 的形式伴随。$\bar{}$ 与算子 ∂, ∂ 相关联的、$\Omega^{p,q}(X)$ 上的拉普拉斯算子 $\bar{}$ 为

$$\Delta_\partial = \partial\partial^* + \partial^*\partial, \quad \Delta_{\overline{\partial}} = \bar{\partial}\,\bar{\partial}^* + \bar{\partial}^*\bar{\partial}.$$

若 $(X,\ \omega)$ 是 K¨ahler，则有以下基本恒等式。

$$\Delta_\partial = \Delta_{\overline{\partial}} = \frac{1}{2}\Delta, \tag{2.2}$$

且 Δ 与 $*$，∂，$\bar{\partial}$，∂^*，$\partial^{*\bar{}}$，L，$\bar{}$ 以及 Λ 交换。

若元素 $\varphi \in \bigwedge^k T^*X$ 满足 $\Lambda\varphi = 0$，则称其为本原元素。所有本原元素构成的线性子空间 $\varphi \in \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X$ 记为 $P^k_{\mathbb{C}}X \subset \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X$。于是，$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X$ 的每个元素都可分解为如下形式的本原元素。

命题 2.1 (《 [Huy05]》中的命题 1.2.30)。 有如下结论。

(1) 存在如下形式的直和分解:

$$\bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X = \bigoplus_{i\geq 0} L^r\left(P^{k-2i}_{\mathbb{C}}X\right).$$

这就是莱夫谢茨分解。此外，关于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$，此分解是正交的。

(2) 若 $k > n$，则 $P^k_{\mathbb{C}}X = 0$。(3) 映射 $L^{n-k}: P^k_{\mathbb{C}} \to \bigwedge^{2n-k} T^*_{\mathbb{C}}X$ 在 $k \leq n$ 时是单射。(4) 映射 $L^{n-k}: \bigwedge^k T^*_{\mathbb{C}}X \to \bigwedge^{2n-k} T^*_{\mathbb{C}}X$ 在 $k \leq n$ 时是双射。(5) 若 $k \leq n$，则 $P^k_{\mathbb{C}} = \left\{u \subset \bigwedge^k T^k_{\mathbb{C}}X : L^{n-k+1}u = 0\right\}$。

以下命题对于计算外张量丛上的埃尔米特内积至关重要。

命题 2.2 ([Huy05]中的命题 1.2.31)。 对于 $\varphi \in P^k_{\mathbb{C}}X$，有

$$*L^r\varphi = \mathbf{i}^{k(k+1)}\frac{r!}{(n-k-r)!}\cdot L^{n-k-r}\mathbf{I}(\varphi),$$

其中

$$\mathbf{I} = \sum \mathbf{i}^{p-q}\Pi_{p,q},$$

且 $\Pi_{p,q}$ 表示到关于分解 (p,q)的 (2.1)中 分量的投影。

霍奇-黎曼配对 $Q: \bigwedge^k T^*X \times \bigwedge^k T^*X \to \bigwedge^{2n} T^*X$ 定义为

$$Q(\varphi,\psi) = \mathbf{i}^{k(k-1)}\omega^{n-k}\wedge\varphi\wedge\psi.$$

该配对可按 $\mathbb{C}$-线性方式扩展到 $\bigwedge^\bullet T^*_{\mathbb{C}}X$，仍记作 Q。下式称为霍奇-黎曼双线性关系。

命题 2.3 (推论 *1.2.36*于 [Huy05]). 对于 $\alpha, \beta \in P^{p,q}_{\mathbb{C}}X$, 有

$$\mathbf{i}^{p-q}Q(\alpha,\overline{\beta}) = (n-(p+q))!\,\langle\alpha,\beta\rangle_\omega\, dV_\omega.$$

2.2. **L^2-霍奇理论。** 设 (X,g) 为一个黎曼流形。如第 2.1 节所述，度量 g 在每个整数 $k\geq 0$ 下，在 $\Omega^k(X)$ 上诱导出内积 $\langle\!\langle\cdot,\cdot\rangle\!\rangle_g$，并且

$$L^k_{(2)}(X):=\{u:u\text{ 是定义在 }X\text{ 上、系数可测且 }\|u\|_g<+\infty\text{的 }k\text{-形式}\},$$

赋予 $\cdot,\cdot_g$ 后成为一个希尔伯特空间。由于由具有紧支撑的光滑 k-形式构成的集合 $\mathrm{D}^k(X)$ 在 $L^k{}_{(2)}(X)$ 中稠密，算子

$$d:\Omega^k(X)\to\Omega^{k+1}(X),\ d^*:\Omega^k(X)\to\Omega^{k-1}(X),\ \Delta:\Omega^k(X)\to\Omega^k(X)$$

可以按分布意义延拓为闭稠密定义无界算子

$$d:L^k_{(2)}(X)\to L^{k+1}_{(2)}(X),\ d^*:L^k_{(2)}(X)\to L^{k-1}_{(2)}(X),\ \Delta:L^k_{(2)}(X)\to L^k_{(2)}(X),$$

分别记 Dom d、Dom d^*、Dom Δ 为延拓后算子的定义域。又分别记 Im d、Im d^* 为 d 和 d^*的像。

著名的 L^2-Hodge 理论如下。

定理 2.4（第八章（3.2）定理，见 [定义域97]）。若 $(X,\ g)$ 是完备的黎曼流形，则下述结论成立。

（1）具有紧支撑的光滑 k-形式空间 $\mathcal{D}^k(X)$ 分别在图范数意义下稠密于定义域 d,定义域 d^* 和定义域 $d\cap$ 定义域 d^*

$$u\mapsto\|u\|_g+\|du\|_g,\quad u\mapsto\|u\|_g+\|d^*u\|_g,\quad u\mapsto\|u\|_g+\|du\|+\|d^*u\|_g.$$

（2） $d^*_{\mathcal{H}}=d^*, d^{**}_{\mathcal{H}}=d$ 作为希尔伯特伴随算子，其中 $d^*_{\mathcal{H}}$ 是希尔伯特（冯·诺伊曼）伴随算子。（3）对于每个 $u\in$ 定义域 Δ，都有 $\langle\!\langle u,\Delta u\rangle\!\rangle_g=\|du\|_g^2+\|d^*u\|_g^2$。特别地，

$$\mathrm{Dom}\,\Delta\subset\mathrm{Dom}\,d\cap\mathrm{Dom}\,d^*,\quad \ker\Delta=\ker d\cap\ker d^*,$$

且 Δ 是自伴的。

（4）存在正交分解

$$\begin{aligned}L^k_{(2)}(X)&=\mathcal{H}^k_{(2)}(X)\oplus\overline{\mathrm{Im}\,d}\oplus\overline{\mathrm{Im}\,d^*}\\ \ker d&=\mathcal{H}^k_{(2)}(X)\oplus\overline{\mathrm{Im}\,d}\end{aligned}$$

where $\mathcal{H}^k_{(2)}(X)=\left\{u\in L^k_{(2)}(X):\Delta u=0\right\}\subset\Omega^k(X)$ *is the space of* L^2*-harmonic* k*-forms.*

注 2.5。 我们将 Δ 在 $\Omega^k(X)$ 上的谱底 $\lambda^k_0(X)$ 定义为

$$\lambda^k_0(X)=\inf\left\{\|du\|_g^2+\|d^*u\|_g^2:u\in\mathcal{D}^k(X),\ \|u\|_g=1\right\}.$$

因此，定理 2.4 可推出

$$\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\geq\lambda^k_0(X)\,\|\varphi\|^2\quad\text{for all }\varphi\in\mathrm{Dom}\,d.$$

因此，定理 1.2可得

$$\lambda^k_0(X)\geq c_k.$$

谱底 $\lambda^{p,}{}_0{}^q(X)$ 的定义方式类似，在这种情况下同样有相同的结论。

注 2.6. 若（X,ω）是一个完备厄米流形，则对 ∂ 和 ∂ 也有类似结果，只需将 k-形式替换为（p,q）-形式。更确切地说，若以 $L^{p}{}_{,q}$ (2)(X) 表示 X 上具有可测系数且范数有限的（p,q）-形式集合，则对每个（p,q），赋予 $\cdot,\cdot_{g}$ 的集合 $L^{p}{}_{,q}$ (2)(X) 都是一个希尔伯特空间。由于 X 上具有紧支撑的光滑（p,q）-形式集合 $\mathrm{D}^{p,q}(X)$ 在 $L^{p}{}_{,q}$ (2)(X) 中稠密，算子

$$\bar{\partial}:\Omega^{p,q}(X)\to\Omega^{p,q+1}(X),\ \bar{\partial}^{*}:\Omega^{p,q}(X)\to\Omega^{p,q-1}(X),\ \Delta_{\bar{\partial}}:\Omega^{p,q}(X)\to\Omega^{p,q}(X)$$

exte并且在分布意义下，闭稠密定义的无界算子 s

$$\bar{\partial}:L^{p,q}_{(2)}(X)\to L^{p,q+1}_{(2)}(X),\ \bar{\partial}^{*}:L^{p,q}_{(2)}(X)\to L^{p,q-1}_{(2)}(X),\ \Delta_{\bar{\partial}}:L^{p,q}_{(2)}(X)\to L^{p,q}_{(2)}(X),$$

分别。因此，已知定理 2.4同样适用于扩展算 ¯ ¯子 $\partial,\partial^{*},\Delta_{\bar{\partial}}$.

此外，若 (X,ω) 是 K¨ahler，则相对于 $d,\partial,\bar{\partial}$的调和形式由（2.2）可知彼此相同。这导出了微分形式的霍奇分解：

$$\mathcal{H}^{k}_{(2)}(X)=\bigoplus_{p+q=k}\mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(X),$$

其中 $\mathcal{H}^{p}{}_{,q(2)}(X):=\{u\in$定义域 $\Delta_{\bar{\partial}}:\Delta_{\bar{\partial}}u=0,\ \|u\|_{g}<+\infty\}$。更多细节请参阅 [Dem97, Huy05]。

3. Auxiliary Formulae

本节将推导若干关于微分形式范数的公式。这些结果将在下一节的证明中发挥关键作用。

命题 3.1. 若 $\varphi,\ \psi\in P^{k}X$ 且 $k\le n$，则

$$\left\langle L^{j}\varphi,L^{j}\psi\right\rangle_{\omega}=\frac{j!(n-k)!}{(n-k-j)!}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_{\omega},$$

对任意 $j\in\{0,\ldots,n-k\}$ 均成立。特别地，若 $j=n-k$ 且 $j=n-k-1$，则

$$\left\langle L^{n-k}\varphi,L^{n-k}\psi\right\rangle_{\omega}=(n-k)!^{2}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_{\omega},$$

and

$$\left\langle L^{n-k-1}\varphi,L^{n-k-1}\psi\right\rangle_{\omega}=(n-k-1)!(n-k)!\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_{\omega},$$

分别成立。

注意，若 $j\ge n-k+1$，则 $L^{j}\varphi=L^{j}\psi=0$ 由 (5) 命题 2.1可知。

证明。 由于双次数分解关于内积 $\cdot,\ \omega,\varphi$ ，故可假设ψ和ψ的类型为（$p,\ q$），其中 $p+q=k$。首先注意到

$$\left\langle L^{j}\varphi,L^{j}\psi\right\rangle dV_{\omega}=L^{j}\varphi\wedge\overline{*L^{j}\psi}$$

根据.....的定义 $*$。由于 ψ 是本原的，命题2.2表明

$$*L^{j}\psi=\frac{j!}{(n-k-j)!}\mathbf{i}^{k(k+1)+p-q}L^{n-k-j}\psi.$$

由霍奇-黎曼双线性关系可知

$$\begin{aligned}\left\langle L^j\varphi, L^j\psi\right\rangle dV_\omega &= \frac{j!}{(n-k-j)!}L^j\varphi\wedge\overline{\mathbf{i}^{k(k+1)+p-q}L^{n-k-j}\psi}\\ &= \frac{j!}{(n-k-j)!}(-\mathbf{i})^{k(k+1)+p-q}\omega^{n-k}\wedge\varphi\wedge\overline{\psi}\\ &= \frac{j!}{(n-k-j)!}\mathbf{i}^{k(k-1)}\cdot\mathbf{i}^{p-q}\omega^{n-k}\wedge\varphi\wedge\overline{\psi}\\ &= \frac{j!}{(n-k-j)!}\mathbf{i}^{p-q}Q\left(\varphi,\overline{\psi}\right) = \frac{j!(n-k)!}{(n-k-j)!}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle dV_\omega.\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

引理 3.2. 设 $\varphi,\psi\in\Lambda^kX$ 满足 $k<n$。若 $\varphi=\sum_r L^r\varphi_r$, $\psi=\sum_r L^r\psi_r$分别是 φ 和 ψ 的本原分解，则有以下恒等式:

$$\begin{aligned}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_\omega &= \sum_r\frac{r!(n-k+2r)!}{(n-k+r)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle_\omega,\\ \left\langle L^{n-k}\varphi, L^{n-k}\psi\right\rangle_\omega &= \sum_r\frac{(n-k+r)!(n-k+2r)!}{r!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle_\omega,\ \ and\\ \left\langle L^{n-k-1}\varphi, L^{n-k-1}\psi\right\rangle_\omega &= \sum_r\frac{(n-k-1+r)!(n-k+2r)!}{(r+1)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle_\omega.\end{aligned}$$

证明。 由于相对于 $\langle\cdot,\cdot\rangle_\omega$ 和φ_r,ψ_r是本原 $(k-2r)$-形式，命题 3.1 推出

$$\left\langle\varphi,\psi\right\rangle = \sum_r\left\langle L^r\varphi_r, L^r\psi_r\right\rangle = \sum_r\frac{r!(n-k+2r)!}{(n-k+r)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle$$

其他不等式可以用与下式相似的推理得到

$$L^{n-j}\varphi=\sum_r L^{n-j+r}\varphi_r,\ \ L^{n-j}\psi=\sum_r L^{n-j+r}\psi_r$$

对于任意 $j\geq 0$，它们分别是 $L^{n-j}\varphi$ 和 $L^{n-j}\psi$ 的本原分解。 □

命题 3.3。 设 φ、ψ为光滑的(p,q)-形式，且满足 $k:=p+q<n$和 $p\leq q$。则

$$(n-k)!^2\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_\omega\leq\left\langle L^{n-k}\varphi, L^{n-k}\psi\right\rangle_\omega\leq\frac{(n-q)!^2}{p!^2}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_\omega,$$

and

$$(n-k-1)!(n-k)!\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_\omega\leq\left\langle L^{n-k-1}\varphi, L^{n-k-1}\psi\right\rangle_\omega\leq\frac{(n-q-1)!(n-q)!}{p!(p+1)!}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle_\omega.$$

证明。 设 $\varphi=\sum_{r\geq 0}L^r\varphi_r$， $\psi=\sum_{r\geq 0}L^r\psi_r$ 分别是 φ和ψ的原始分解，使得 φ_r, ψ_r是本原 $(p-r,\ q-r)$-形式。因此 $\varphi_r=\psi_r=0$若 $r>p$且引理3.2推出

$$\left\langle\varphi,\psi\right\rangle=\sum_{0\leq r\leq p}\left\langle L^r\varphi_r, L^r\psi_r\right\rangle=\sum_{0\leq r\leq p}\frac{r!(n-k+2r)!}{(n-k+r)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle,$$

and

$$\left\langle L^{n-k}\varphi, L^{n-k}\psi\right\rangle = \sum_{0\le r\le p}\left\langle L^{n-k+r}\varphi_r, L^{n-k+r}\psi_r\right\rangle = \sum_{0\le r\le p}\frac{(n-k+r)!(n-k+2r)!}{r!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle$$
$$= \sum_{0\le r\le p}\frac{(n-k+r)!^2}{r!^2}\cdot\frac{r!(n-k+2r)!}{(n-k+r)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle$$

于是我们有

$$(n-k)!^2\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle \le \left\langle L^{n-k}\varphi, L^{n-k}\psi\right\rangle \le \frac{(n-k+p)!^2}{p!^2}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle = \frac{(n-q)!^2}{p!^2}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle$$

如所期望。由引理 3.2 亦可得

$$\left\langle L^{n-k-1}\varphi, L^{n-k-1}\psi\right\rangle = \sum_{0\le r\le p}\left\langle L^{n-k-1+r}\varphi, L^{n-k-1+r}\psi\right\rangle$$
$$= \sum_{0\le r\le p}\frac{(n-k-1+r)!(n-k+2r)!}{(r+1)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle$$
$$= \sum_{0\le r\le p}\frac{(n-k-1+r)!(n-k+r)!}{r!(r+1)!}\cdot\frac{r!(n-k+2r)!}{(n-k+r)!}\left\langle\varphi_r,\psi_r\right\rangle.$$

因此，我们得出

$$(n-k-1)!(n-k)!\left\langle\varphi,\psi\right\rangle \le \left\langle L^{n-k-1}\varphi, L^{n-k-1}\psi\right\rangle \le \frac{(n-q-1)!(n-q)!}{p!(p+1)!}\left\langle\varphi,\psi\right\rangle.$$

□

4. Proof of Main Theorems

光滑流形上的微分形式是简单的，如果它可以表示为微分 1-形式的楔积。首先，我们回顾如下引理。

引理 4.1（见第 1.7.5 节，载于 [Fed69]）。对于 $\varphi\in\bigwedge^p X$ 与 $\psi\in\bigwedge^q X$，我们有 ve

$$|\varphi\wedge\psi|_\omega \le \begin{pmatrix} p+q \\ p\end{pmatrix}^{1/2}|\varphi|_\omega\cdot|\psi|_\omega.$$

如果 φ 或 ψ 是简单的，则

$$|\varphi\wedge\psi|_\omega \le |\varphi|_\omega\cdot|\psi|_\omega.$$

下列引理在定理1.2的证明中将起到重要作用。

引理 4.2. 如果(X,ω) 是*K¨ahler*流形，则

$$\lambda_0^k(X) = \min\{\lambda_0^{p,q}(X) : p+q=k\}$$

对任意整数 $k\ge 0$。这里，

$$\lambda_0^{p,q}(X) = \inf\{\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle : \varphi\in\mathcal{D}^{p,q}(X),\ \|\varphi\|=1\}.$$

证明。设 $\varphi\in\mathrm{D}^k(X)$，其中 $\|\varphi\|$=1。由（2.1）可知，存在一组正交形式 $\{\varphi^{p,q}\in\bigwedge^{p,q}X : p+q=k\}$，使得

$$\varphi = \sum_{p+q=k}\varphi^{p,q},\quad \|\varphi\|^2 = \sum_{p+q=k}\|\varphi^{p,q}\|^2 = 1.$$

由于 (X,ω) 是 K¨ahler，因此由（2.2）可知，每个 $\Delta\varphi^{p,q}$ 都是一个 (p,q) 形式。因此

$$\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle = \sum_{p+q=k} \langle\!\langle \Delta\varphi^{p,q},\varphi^{p,q}\rangle\!\rangle \geq \sum_{p+q=k} \lambda_0^{p,q}(X)\,\|\varphi^{p,q}\|^2 \geq \min\{\lambda_0^{p,q}(X) : p+q=k\}$$

由此可得 $\lambda_0^k(X) \geq \min\{\lambda^{p,q}_0(X) : p+q=k\}$。另外请注意，给定满足 $p+q=k$ 的一对 (p,q)，我们有

$$\lambda_0^{p,q}(X) = \inf\{\langle\!\langle \Delta\varphi^{p,q},\varphi^{p,q}\rangle\!\rangle : \varphi^{p,q}\in\mathcal{D}^{p,q}(X)\,\|\varphi^{p,q}\|=1\} \geq \lambda_0^k(X)$$

因为任意 (p,q)-形式都是 k-形式。 □

现在，我们给出主要结果，即定理 1.2 和 1.3 的证明。尽管这两个定理的基本论证本质上相同，但定理 1.3 是更为特殊的情形，因而更易证明。因此，我们将首先证明定理 1.3 ，然后再给出定理 1.2 的证明。

根据定理 2.4 （1），只需对具有紧支撑的光滑形式证明这些定理即可。

定理 *1.3* 的证明。选取 $\varphi\in C_0^\infty(X)$，并令 $\psi := L^n\varphi = \varphi\omega^n \in\Omega^{2n}(X)$。然后由命题 3.1，我们有 $\|\psi\| = n!\,\|\varphi\|$ 以及

$$\langle\!\langle \Delta\psi,\psi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle \Delta L^n\varphi, L^n\varphi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle L^n\Delta\varphi, L^n\varphi\rangle\!\rangle = n!^2\,\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle .$$

注意，莱布尼茨法则给出

$$\psi = \varphi\omega^n = \varphi d\eta\wedge\omega^{n-1} = d\left(\varphi\eta\wedge\omega^{n-1}\right) - d\varphi\wedge\eta\wedge\omega^{n-1} = d\theta - \psi', \tag{4.1}$$

其中 $\theta := \varphi\eta\wedge\omega^{n-1}$ 且 $\psi' := d\varphi\wedge\eta\wedge\omega^{n-1}$. 由于任意 1-形式都是本原的，由命题 3.1 和引理 4.1 可得

$$\|\theta\|^2 = \left\|L^{n-1}(\varphi\eta)\right\|^2 = (n-1)!^2\,\|\varphi\eta\|^2 \leq (n-1)!^2\,\|\eta\|_{L^\infty}^2\,\|\varphi\|^2,$$

$$\|\psi'\|^2 \leq \|\eta\|_{L^\infty}^2\left\|L^{n-1}(d\varphi)\right\|^2 \leq (n-1)!^2\,\|\eta\|_{L^\infty}^2\,\|d\varphi\|^2 \leq (n-1)!^2\,\|\eta\|_{L^\infty}^2\,\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle .$$

最后，由上述估计可得

$$\begin{aligned} n!^2\,\|\varphi\|^2 = \|\psi\|^2 &= \langle\!\langle \psi, d\theta-\psi'\rangle\!\rangle \leq |\langle\!\langle \psi,d\theta\rangle\!\rangle| + |\langle\!\langle \psi,\psi'\rangle\!\rangle| = |\langle\!\langle d^*\psi,\theta\rangle\!\rangle| + |\langle\!\langle \psi,\psi'\rangle\!\rangle| \\ &\leq \langle\!\langle \Delta\psi,\psi\rangle\!\rangle^{1/2}\cdot\|\theta\| + \|\psi\|\cdot\|\psi'\| \\ &\leq (n-1)!\,\|\eta\|_{L^\infty}\left(\langle\!\langle \Delta\psi,\psi\rangle\!\rangle^{1/2}\,\|\varphi\| + \|\psi\|\,\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle^{1/2}\right) \\ &= 2(n-1)!n!\,\|\eta\|_{L^\infty}\,\|\varphi\|\,\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle^{1/2} \end{aligned}$$

如所需。 □

注 4.3。Li 和 Tran 计算了赋予由定义函数诱导的 K¨ahler 度量的有界强伪凸域上拉普拉斯–贝尔特拉米算子的谱底 [LT10]。

定理 *1.2*的证明。取 $\varphi\in D^{p,\,q}(X)$，其中 $p\leq q$，$k := p+q<n$，并令 $\psi := L^{n-k}\varphi\in\Omega^{2n-k}(X)$。于是

$$(n-k)!^2\,\|\varphi\|^2 \leq \|\psi\|^2 \leq \frac{(n-q)!^2}{p!^2}\,\|\varphi\|^2,$$

and

$$(n-k)!^2\,\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle \leq \left\langle\!\!\left\langle L^{n-k}\Delta\varphi, L^{n-k}\varphi\right\rangle\!\!\right\rangle = \langle\!\langle \Delta\psi,\psi\rangle\!\rangle \leq \left(\frac{(n-q)!}{p!}\right)^2\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle$$

根据命题 3.3。另请注意，莱布尼茨法则给出

$$\psi = \varphi \wedge \omega^{n-k} = d\left(\varphi \wedge \eta \wedge \omega^{n-k-1}\right) - d\varphi \wedge \eta \wedge \omega^{n-k-1} = d\theta - \psi',$$

其中 $\theta := \varphi\wedge\eta\wedge\omega^{n-k-1}$ 且 $\psi' := d\varphi\wedge\eta\wedge\omega^{n-k-1}$。那么引理4.1 和命题3.3推出

$$\begin{aligned}
\|\theta\|^2 &\le \|\eta\|_{L^\infty}^2 \left\|L^{n-k-1}\varphi\right\|^2 \le \frac{(n-q-1)!(n-q)!}{p!(p+1)!}\|\eta\|_{L^\infty}^2\|\varphi\|^2 \le \|\eta\|_{L^\infty}^2 \frac{(n-q)!^2}{(p+1)!^2}\|\varphi\|^2,\\
\|\psi'\|^2 &\le \|\eta\|_{L^\infty}^2 \left\|L^{n-k-1}(d\varphi)\right\|^2 = \|\eta\|_{L^\infty}^2 \left(\left\|L^{n-k-1}(\partial\varphi)\right\|^2 + \left\|L^{n-k-1}(\bar\partial\varphi)\right\|^2\right)\\
&\le \|\eta\|_{L^\infty}^2 \left(\frac{(n-q)!^2}{(p+1)!^2}\|\partial\varphi\|^2 + \frac{(n-q-1)!^2}{p!^2}\left\|\bar\partial\varphi\right\|^2\right) \le \|\eta\|_{L^\infty}^2 \frac{(n-q)!^2}{(p+1)!^2}\|d\varphi\|^2\\
&\le \|\eta\|_{L^\infty}^2 \frac{(n-q)!^2}{(p+1)!^2}\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle.
\end{aligned}$$

因此我们得到

$$\begin{aligned}
(n-k)!^2\|\varphi\|^2 &\le \|\psi\|^2 = \langle\!\langle\psi, d\theta-\psi'\rangle\!\rangle \le \langle\!\langle\Delta\psi,\psi\rangle\!\rangle^{1/2}\|\theta\| + \|\psi\|\|\psi'\|\\
&\le \|\eta\|_{L^\infty}\frac{(n-q)!}{(p+1)!}\left(\langle\!\langle\Delta\psi,\psi\rangle\!\rangle^{1/2}\|\varphi\| + \|\psi\|\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle^{1/2}\right)\\
&\le 2\frac{(n-q)!^2}{(p+1)!^2}\cdot\|\eta\|_{L^\infty}\|\varphi\|\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle^{1/2}
\end{aligned}$$

这就是所需的估计。若 $k<n$ 且 $p\ge q$，则我们对φ 使用上述估计，从而得到相同的估计。若 $k>n$，则 $*\varphi\in \mathrm{D}^{n-p,\,n-q}(X)$ 是一个 $(2n-k)$-形式，且 $2n-k<n$，因此

$$\langle\!\langle\Delta*\varphi,*\varphi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle*\Delta\varphi,*\varphi\rangle\!\rangle = \langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle \ge \frac{c_{n-p,n-q}}{\|\eta\|_{L^\infty}^2}\|*\varphi\|^2 = \frac{c_{n-p,n-q}}{\|\eta\|_{L^\infty}^2}\|\varphi\|^2$$

这就完成了对任意满足 $p+q\ne n$ 的 $\mathrm{D}^{p,\,q}(X)$ 中形式的估计。

给定实数 x，我们用 $\lfloor x\rfloor$ 表示小于或等于x 的最大整数，用 $\lceil x\rceil$ 表示大于或等于 x 的最小整数。设 p，$q\ge 0$ 为满足 $p\le q$、$p+q=k<n$ 的整数，并令 $\alpha := q-p\ge 0$。那么

$$k = p+q = 2p+\alpha = 2q-\alpha,$$

and

$$\lceil k/2\rceil + 1 = p+1+\lceil\alpha/2\rceil,\ n-\lfloor k/2\rfloor = n-q-\lfloor-\alpha/2\rfloor = n-q+\lceil\alpha/2\rceil.$$

因此我们得到

$$\frac{(\lceil k/2\rceil+1)!}{(n-\lfloor k/2\rfloor)!} = \frac{(p+1+\lceil\alpha/2\rceil)!}{(n-q+\lceil\alpha/2\rceil)!} \le \frac{(p+1)!}{(n-q)!}$$

因为 $n-q\ge 1+p$。由此可得

$$\lambda_0^{p,q}(X) \ge \frac{(n-k)!^4}{4}\cdot\frac{(\lceil k/2\rceil+1)!^4}{(n-\lfloor k/2\rfloor)!^4}\cdot\frac{1}{\|\eta\|_{L^\infty}^2}.$$

将此估计与引理 4.2结合，可得到$k<n$的所需估计。如果 $k>n$，则利用引理 4.2 和霍奇星算子，可得

$$\lambda_0^k(X) = \lambda_0^{2n-k}(X) = \min\{\lambda_0^{p,q}(X) : p+q = 2n-k\} \ge \frac{c_{2n-k}}{\|\eta\|_{L^\infty}^2}.$$

至此证明完毕。 □

注4.4. 对 θ 与 ψ' 在定理1.2 中的更尖锐估计，当 $\varphi\wedge\eta$与 $d\varphi$ 为本原时成立，但对一般的 k-形式 φ （满足 $k\geq 1$）并不成立。若这些形式是本原的，则可按上文的做法得到

$$\|\theta\|^2=\left\|L^{n-k-1}(\varphi\wedge\eta)\right\|^2\leq(n-k-1)!^2\|\eta\wedge\varphi\|^2=(n-k-1)!^2\|\eta\|_{L^\infty}^2\|\varphi\|^2,$$

and

$$\|\psi'\|^2=\left\|L^{n-k-1}(d\varphi\wedge\eta)\right\|^2\leq\|\eta\|_{L^\infty}^2\left\|L^{n-k-1}(d\varphi)\right\|^2=(n-k-1)!^2\|\eta\|_{L^\infty}^2\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle$$

因此

$$\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\geq\frac{(n-k)^2}{4\|\eta\|_{L^\infty}^2}\|\varphi\|^2.$$

5. Middle dimension case

设 (X,ω) 是一个复维数为 n 的 K¨ahler 双曲流形，其中 $\omega=d\eta$，且 $\|\eta\|_{L^\infty}<+\infty$。若等距群 X 存在离散子群 Γ，使得商空间 X/Γ 紧致，则根据 [Gro91] 中的定理 2.5，有 $\mathrm{H}^n_{(2)}(X)\neq 0$。这意味着 $\lambda_0^\eta(X)=0$；然而，在本节中，我们将采用 [Gro91] 中的论证，为任意 K¨ahler 双曲流形上拉普拉斯算子在 $L^n_{(2)}(X)$ 中 $\mathrm{H}^n_{(2)}(X)$ 的正交补上的谱导出一个显式的一致下界。我们从以下定理开始。

定理5.1。 设(p,q) 是一对非负整数，满足 $p+q=n$。若$\varphi\in L^p_{,q\,(2)}(X)\cap$定义域$(\Delta)$与 $\mathcal{H}^p_{,q\,(2)}(X)$ 正交，则

$$\langle\!\langle\Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\geq\frac{\min(c_{p,q-1},c_{p,q+1})}{\|\eta\|_{L^\infty}^2}\|\varphi\|^2.$$

证明。 给定一对满足 $r+s\neq n$ 的整数 $(r,\ s)$，我们首先证明算子 $\bar\partial:L^r_{,\ s\,(2)}(X)\to L^r_{,\ s+1\,(2)}(X)$ 的像是闭的。设 $\{\bar\partial\varphi_m\}$ 是 $L^r_{,\ s+1\,(2)}(X)$ 中的一个收敛序列，其中某个 $\{\varphi_m\}$ 满足 $\subset L^r_{,\ s\,(2)}(X)$。由于

$$L^{r,s}_{(2)}(X)=\mathrm{Ker}(\bar\partial)\oplus\overline{\mathrm{Im}(\bar\partial^*)},$$

可以假设 $\partial^*\varphi_m=0$ 对每个 $m\geq 1$成立；参见 [Dem97]第364页。于是

$$\begin{aligned}\|\varphi_\ell-\varphi_m\|^2&\leq\frac{\|\eta\|_{L^\infty}^2}{c_{r,s}}\langle\!\langle\varphi_\ell-\varphi_m,\Delta(\varphi_\ell-\varphi_m)\rangle\!\rangle=\frac{\|\eta\|_{L^\infty}^2}{2c_{r,s}}\langle\!\langle\varphi_\ell-\varphi_m,\Delta_{\bar\partial}(\varphi_\ell-\varphi_m)\rangle\!\rangle\\&\leq\frac{\|\eta\|_{L^\infty}^2}{2c_{r,s}}\cdot\left\|\bar\partial\varphi_\ell-\bar\partial\varphi_m\right\|^2\end{aligned}$$

对任意 $\ell,m\geq 1$，由定理 1.2 和 (2.2) 可知。因此，$\{\varphi_m\}$ 在 $L^r,_s\,(2)(X)$ 中也收敛，由 $\bar\partial$ 的图的闭性可得 $\lim_{m\to\infty}\bar\partial\varphi_m\in\mathrm{Im}\,\bar\partial$，这说明 $\mathrm{Im}\ \bar\partial\subset L^r,_{s+1}\,(2)\,(X)$ 是闭的。类似地，可以证明对于 $r+s\neq n$，$\mathrm{Im}\ \bar\partial^*\subset L^r,_{s-1}\,(2)\,(X)$ 也是闭的。特别地，由注 2.6 可知，对于 $p+q=n$，我们有

$$L^{p,q}_{(2)}(X)=\mathcal{H}^{p,q}_{(2)}(X)\oplus\mathrm{Im}\,\bar\partial\oplus\mathrm{Im}\,\bar\partial^*.\tag{5.1}$$

设 φ 是 $L^{p}{}_{,q}(2)(X)\cap \mathrm{Dom}(\Delta)$ 中与 $\mathrm{H}^{p}{}_{,q}(2)(X)$ 正交的一个元素。由 (5.1)，存在 $\alpha \in L^{p}{}_{,q-1}\,(2)\,(X)$ 和 $\beta \in L^{p}{}_{,q+1}\,(2)\,(X)$，使得 $\varphi = \bar{\partial}\alpha + \bar{\partial}^{*}\beta$。对 $\bar{}\quad\quad\quad\quad\bar{}(r,s) \in \{(p,q-1),(p,q+1)\}$ 使用 (5.1)，可以进一步假设 $\partial^{*}\alpha = 0$ 且 $\partial\beta = 0$。因此

$$\langle\!\langle \varphi,\varphi\rangle\!\rangle = \left\langle\!\left\langle \bar{\partial}\alpha,\bar{\partial}\alpha\right\rangle\!\right\rangle + \left\langle\!\left\langle \bar{\partial}^{*}\beta,\bar{\partial}^{*}\beta\right\rangle\!\right\rangle = \langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\alpha,\alpha\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\beta,\beta\rangle\!\rangle\,,$$

$\bar{}\quad\quad\quad\quad\bar{}$其中 $\Delta_{\bar{\partial}}\alpha = \partial^{*}\varphi$ 且 $\Delta_{\bar{\partial}}\beta = \partial\varphi$。根据定理 1.2 以及柯西-施瓦茨不等式，我们有

$$\|\alpha\| \le \frac{2\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{c_{p,q-1}}\|\Delta_{\bar{\partial}}\alpha\|\,,\quad \|\beta\| \le \frac{2\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{c_{p,q+1}}\|\Delta_{\bar{\partial}}\beta\|$$

因此

$$\langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\alpha,\alpha\rangle\!\rangle \le \|\Delta_{\bar{\partial}}\alpha\|\,\|\alpha\| \le \frac{2\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{c_{p,q-1}}\langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\alpha,\Delta_{\bar{\partial}}\alpha\rangle\!\rangle\,,$$

$$\langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\beta,\beta\rangle\!\rangle \le \|\Delta_{\bar{\partial}}\beta\|\,\|\beta\| \le \frac{2\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{c_{p,q+1}}\langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\beta,\Delta_{\bar{\partial}}\beta\rangle\!\rangle\,.$$

由此我们得出

$$\begin{aligned}\langle\!\langle \varphi,\varphi\rangle\!\rangle &= \langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\alpha,\alpha\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\beta,\beta\rangle\!\rangle\\ &\le \frac{2\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{p,q-1},c_{p,q+1})}\left(\langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\alpha,\Delta_{\bar{\partial}}\alpha\rangle\!\rangle + \langle\!\langle \Delta_{\bar{\partial}}\beta,\Delta_{\bar{\partial}}\beta\rangle\!\rangle\right)\\ &= \frac{2\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{p,q-1},c_{p,q+1})}\left(\left\langle\!\left\langle \bar{\partial}^{*}\varphi,\bar{\partial}^{*}\varphi\right\rangle\!\right\rangle + \left\langle\!\left\langle \bar{\partial}\varphi,\bar{\partial}\varphi\right\rangle\!\right\rangle\right) = \frac{\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{p,q-1},c_{p,q+1})}\langle\!\langle 2\Delta_{\bar{\partial}}\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\\ &= \frac{\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{p,q-1},c_{p,q+1})}\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

正如所期望的。 □

定理5.2。 若 $\varphi \in$ 定义域$(\Delta)\cap L^{n}{}_{(2)}(X)$ 与 $\mathcal{H}^{n}{}_{(2)}(X)$正交，则

$$\|\varphi\|^{2} \le \frac{\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{n-1},c_{n+1})}\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\,.$$

证明。 首先注意到 $\varphi = \sum_{p+q=n}\varphi^{p,\ q}$ 其中每个 $\varphi^{p,\ q} \in L^{p,\ q}{}_{(2)}(X)$ 都与$\mathcal{H}_{2}^{p\ q}{}_{,}(X)$正交。于是由定理5.1，可得

$$\begin{aligned}\|\varphi\|^{2} = \sum_{p+q=k}\|\varphi^{p,q}\|^{2} &\le \sum_{p+q=k}\frac{\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{p,q-1},c_{p,q+1})}\langle\!\langle \Delta\varphi^{p,q},\varphi^{p,q}\rangle\!\rangle\\ &\le \sum_{p+q=k}\frac{\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{n-1},c_{n+1})}\langle\!\langle \Delta\varphi^{p,q},\varphi^{p,q}\rangle\!\rangle\\ &= \frac{\|\eta\|_{L^{\infty}}^{2}}{\min(c_{n-1},c_{n+1})}\langle\!\langle \Delta\varphi,\varphi\rangle\!\rangle\end{aligned}$$

当 $c_{p,q-1} \ge c_{n-1}$ 且 $c_{p,q+1} \ge c_{n+1}$ 时，对每个满足 $p+q=n$ 的 (p,q)。

□

6. 有界对称域的谱

6.1. K¨ahler 双曲长度。 设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的不可约有界对称域，特别地，它是相应的非紧型 Hermitian 对称空间的 Cartan/Harish-Chandra 嵌入，并设 N_Ω 为其一般范数。那么 Ω 的 Bergman核 K_Ω 具有如下形式

$$K_\Omega(z,w) = cN_\Omega(z,w)^{-c_\Omega}$$

其中， c 是由 Ω 的欧氏体积和 Ω 的亏格 c_Ω 确定的归一化常数，亏格是一个正整数。定义 (Ω ω) 的 K¨ahler 双曲长度 L_Ω 为

$$\mathsf{L}_\Omega = \sqrt{rc_\Omega}$$

其中 r 是 Ω 的秩，即 Ω 中极大全测地多圆盘的维数。如果有界对称域 Ω 不可约，则它双全纯等价于一个乘积

$$\Omega \cong \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_s$$

whe其中每个 Ω_i 都是不可约有界对称域。在这种情况下，我们定义 e

$$\mathsf{L}_\Omega = \left(\sum_{j=1}^{s} \mathsf{L}_{\Omega_j}^2\right)^{1/2} = \left(\sum_{j=1}^{s} r_j c_{\Omega_j}\right)^{1/2}$$

其中每个 r_j 和c_{Ω_j} 分别是 Ω_j的秩和亏格。

定理 *1.5*的证明。 设 ω 为 Ω 上完备的凯¨勒-爱因斯坦度量，其里奇曲率为 –K。根据 [CLS25], 中第4.1节的论证可知，Ω 的最大全纯截面曲率为 $-2\mathsf{K}/\mathsf{L}_\Omega^2$；因此有

$$\frac{2\mathsf{K}}{\mathsf{L}_\Omega^2} \geq K$$

对于 $-K < 0$ 而言，这是 (Ω ω)全纯截面曲率的任意上界。事实上，这由 Ω 的极大多圆盘中秩为 $r = r_1 + \cdots + r_s$ 的全测地全纯圆盘的高斯曲率给出。此外， [CLS25]中的定理1.1表明，存在一个势函数 φ ，使得 ω 成立

$$|d^c\varphi|_\omega^2 \equiv \frac{\mathsf{L}_\Omega^2}{2\mathsf{K}}. \tag{6.1}$$

这意味着 $\eta = d^c\varphi$ 满足 $\|\eta\|_{L^\infty}^2 = \mathsf{L}_\Omega^2/2\mathsf{K}$。结合定理 1.3，可得

$$\lambda_0(X) \geq \frac{n^2}{4\|\eta\|_{L^\infty}^2} = \frac{n^2}{4} \cdot \frac{2\mathsf{K}}{\mathsf{L}_\Omega^2} \geq \frac{n^2}{4} \cdot K,$$

至此，证明完毕。 □

我们以如下定理结束本小节，该定理讨论任意全局 1-形式 η 的 L^∞-范数，其中 $d\eta$ 为有界对称域上的伯格曼度量 ω 。注意，在有界对称域上，伯格曼度量是凯¨勒-爱因斯坦度量，其里奇曲率为 –1。

定理 6.1。 设 η 是有界对称域上的一个全局 *1*-形式。若 $d\eta$ 是伯格曼度量的 *K¨ahler* 形式，则

$$\|\eta\|_{L^\infty}^2 \geq \frac{\mathsf{L}_\Omega^2}{2}.$$

该定理在 [CLS25] 中是在附加假设 η 是d^c-闭的条件下证明的，但事实证明该假设在此处是多余的。

事实上，这个问题可以归结为单位圆盘的情形。下面的引理指出， η 的 L^∞ 范数可以由 Poincar´e 度量的高斯曲率给出下界。

引理 6.2。 设$(\mathbb{D},\omega)$ 为赋有 *Poincar´e* 度量、其高斯曲率为 $-\mathsf{K}$ 的单位圆盘。若 η 是一个全局1-形式，且 $d\eta=\omega$，则

$$\|\eta\|^2_{L^\infty}\geq\frac{1}{\mathsf{K}}.$$

*Pro*反之。 反设存在一个全局 1-形式 η 定义在 $\mathbb{D}$ 上，使得

$$d\eta=\omega \quad \text{and} \quad \|\eta\|^2_{L^\infty}=c<\frac{1}{\mathsf{K}}.$$

注意，$\mathsf{K}\omega$ 具有高斯曲率 -1 且$\mathsf{K}\eta$ 是一个全局 1-形式，满足$d(\mathsf{K}\eta)=\mathsf{K}\omega$。由定理 1.3 可得

$$\lambda_0(\mathbb{D},\mathsf{K}\omega)\geq\frac{1}{4c}>\frac{\mathsf{K}}{4}.$$

另一方面，众所周知， $\lambda_0(\mathbb{D},\mathsf{K}\omega)=1/4$（例如，参见 [McK70、Cha84]）。因此我们有

$$\frac{1}{4}=\lambda_0(\mathbb{D},\mathsf{K}\omega)=\frac{1}{\mathsf{K}}\lambda_0(\mathbb{D},\omega)>\frac{1}{\mathsf{K}}\cdot\frac{\mathsf{K}}{4}=\frac{1}{4},$$

从而得出矛盾。 □

定理的证明 *6.1*。 再次反设存在一个1-形式 η使得

$$\|\eta\|^2_{L^\infty}<\frac{\mathsf{L}^2_\Omega}{2}.$$

首先我们考虑不可约情形。设 Ω 为秩 r的不可约有界对称域，它通过 Cartan/Harish-Chandra 嵌入嵌入于 $\mathbb{C}^n$。于是存在维数 r 的极大多圆盘，以如下形式嵌入 Ω

$$\mathbb{D}^n=\left\{(z^1,\dots,z^r,0,\dots,0)\in\Omega\right\}.$$

且其 Bergman核 $K_{\mathbb{D}^r}$ 满足

$$K_\Omega(z,z)=d_1K_{\mathbb{D}^r}(z,z)^{c_\Omega/2} \quad \text{on } \mathbb{D}^r.$$

详见 [CLS25]。由于 Ric(ω) = −ω，由势函数 $(c_\Omega/2)\log K_{\mathbb{D}^r}$ 定义的完备 K¨ ahler-Einstein 度量 $\omega_{\mathbb{D}^r}$具有里奇曲率 $2/c_\Omega$。现在考虑由$z\to(z,\dots,z,0,\dots,0)$ 定义的最大秩全测地圆盘 $\iota:\mathbb{D}\hookrightarrow\mathbb{D}^r\subset\Omega$。则由 [CLS25] 中的命题 3.2 可知，拉回度量 $\omega_{\mathbb{D}}=\iota^*\omega_{\mathbb{D}^r}$ 具有常高斯曲率

$$\kappa=-\frac{2/c_\Omega}{r}=-\frac{2}{rc_\Omega}=-\frac{2}{\mathsf{L}^2_\Omega}.$$

由于 $d(\iota^*\eta)=\omega_{\mathbb{D}}$，引理 6.2 表明

$$\|\eta|_{\mathbb{D}}\|^2_{L^\infty}\geq\frac{\mathsf{L}^2_\Omega}{2}.$$

现在 $\iota:(\mathbb{D},\ \omega_{\mathbb{D}})\to(\Omega\ \omega)$ 是等距嵌入，因此我们有 $\|\eta\|^2_{L^\infty}\geq\|\iota^*\eta\|^2_{L^\infty}$。这就完成了不可约情形的证明。

对于一般有界对称域，同样的论证也适用。事实上，任意有界对称域 Ω 都可分解为

$$\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_s$$

对于具有不可约因子 Ω_j, $j = 1,\dots,s$ 的 Ω，其极大多圆盘为

$$\mathbb{D}^r = \mathbb{D}^{r_1} \times \cdots \times \mathbb{D}^{r_s}$$

其中每个 $\mathbb{D}^{r_j}$ 都是 Ω_j的极大多圆盘。接着，我们可以对 $\mathbb{D}^r$ 中秩最大的全测地圆盘应用相同的论证，该圆盘由每个 $\mathbb{D}^{r_j}$中的极大全测地圆盘给出。这得出的结论与前面相同，从而完成证明。详情请参见 [CLS25]中的第 4.1.2 节。□

6.2. **不可约有界对称域上的谱底**。不可约有界对称域由以下四类经典型域组成：

$$\begin{aligned}
\Omega_{p,q}^{\mathrm{I}} &= \left\{ Z \in M^{\mathbb{C}}(p,q) : I_p - ZZ^* > 0 \right\}, \\
\Omega_m^{\mathrm{II}} &= \left\{ Z \in M^{\mathbb{C}}(m,m) : I_m - ZZ^* > 0,\ Z^t = -Z \right\}, \\
\Omega_m^{\mathrm{III}} &= \left\{ Z \in M^{\mathbb{C}}(m,m) : I_m - ZZ^* > 0,\ Z^t = Z \right\}, \\
\Omega_m^{\mathrm{IV}} &= \left\{ Z = (z_1,\dots,z_m) \in \mathbb{C}^m : ZZ^* < 1,\ 0 < 1 - 2ZZ^* + |ZZ^t|^2 \right\},
\end{aligned}$$

以及两类例外型域：

$$\Omega_{16}^{\mathrm{V}}, \quad \Omega_{27}^{\mathrm{VI}}.$$

这里，$M^{\mathbb{C}}(p,q)$ 表示 $p \times q$复矩阵的集合，而 Z^* 表示矩阵 $Z \in M^{\mathbb{C}}(p,q)$ 的共轭转置。

设 Ω 是 $\mathbb{C}^n$ 中的一个不可约有界对称域。Bergman核K_Ω 具有如下形式

$$K_\Omega(z,z) = cN_\Omega(z,z)^{-c_\Omega}$$

其中，c 是某些正常数，c_Ω 是亏格，N_Ω 是一般范数。常数c_Ω、维数 n和秩 r 如下给出：

Table 1. 不变量

Ω	$\Omega_{p,q}^{\mathrm{I}}$	$\Omega_{m,m}^{\mathrm{II}}$	$\Omega_{m,m}^{\mathrm{III}}$	Ω_m^{IV}	Ω_{16}^{V}	$\Omega_{27}^{\mathrm{VI}}$
c_Ω	$p+q$	$2(m-1)$	$m+1$	m	12	18
n	pq	$\frac{m(m-1)}{2}$	$\frac{m(m+1)}{2}$	m	16	27
r	p	$\left[\frac{m}{2}\right]$	m	2	2	3

正如我们已知的，伯格曼度量 $\omega_\Omega = dd^c \log K_\Omega$ 与完备的 K¨ahler-爱因斯坦度量重合，其里奇曲率为 −1。那么，式（6.1）意味着存在一个全局势函数 $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ 使得

$$|d^c\varphi|_\omega^2 = \frac{\mathsf{L}_\Omega^2}{2}.$$

因此，定理1.3 给出了所有不可约有界对称域的下界，该下界以 K¨ahler 双曲长度表示。四种经典类型的下界如下：

$$\lambda_0(\Omega^{\mathrm{I}}_{p,q}) \geq \frac{(pq)^2}{2p(p+q)}, \quad \lambda_0(\Omega^{\mathrm{II}}_{m,m}) \geq \frac{m^2(m-1)}{16\,[m/2]},$$
$$\lambda_0(\Omega^{\mathrm{III}}_{m,m}) \geq \frac{m(m+1)}{8}, \quad \text{and} \quad \lambda_0(\Omega^{\mathrm{IV}}_{m}) \geq \frac{m}{4}.$$

两种例外类型的下界如下：

$$\lambda_0(\Omega^{\mathrm{V}}_{16}) \geq \frac{16}{3}, \quad \text{and} \quad \lambda_0(\Omega^{\mathrm{VI}}_{27}) \geq \frac{27}{4}.$$

关于 λ_0 在 Ω 的情形下$^{\mathrm{II}}_{m}$、$_{m}$、$\Omega^{\mathrm{III}}_{m}$、$_{m}$以及 Ω^{IV}_{m} 的精确下界和上界见 [LL19、LZLS 23]。他们得到的下界与上述相同。需要注意的是，他们采用的归一化与本文不同。例如，在 [LL19], 中，度量采用了如下全局势函数。

$$u = \frac{1}{m+1}\log K(z,z),$$

这意味着 Ric($dd^c u$) = –$(m+1)dd^c u$。他们还采用了是 Δ 两倍的拉普拉斯算子。这引出了如下问题：

问题 6.3. 能否在 K¨ahler 双曲流形上为 λ_0 得到一个精确上界，使其在有界对称域的情形下与已知下界一致?

References

[Cha84] 艾萨克·沙维尔。《黎曼几何中的特征值》，纯粹与应用数学第115卷。Academic Press, Inc., Orlando, FL, 1984。包括伯顿·兰多尔撰写的一章，并附有约瑟夫·多兹尤克的附录。[Che70] 杰夫·切格。拉普拉斯算子最小特征值的一个下界。载于《分析问题》（纪念萨洛蒙·博赫纳研讨会，普林斯顿大学，新泽西州普林斯顿，1969），第195–199页。Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1970。[Che75] 郑绍远。特征值比较定理及其几何应用。Math. Z., 143(3):289–297, 1975。[CLS25] YOUNG-JUN CHOI、KANG-HYURK LEE 和徐雅玲。关于有界对称域的 K¨ahler-双曲性，2025。[Dem97] 让-皮埃尔·德马伊。《复解析与微分几何》。Citeseer，1997。[DF83] 哈罗德·唐纳利和查尔斯·费弗曼。伯格曼度量的 L^2-上同调与指标定理。Ann. of Math. (2), 118(3):593–618, 1983。[Don94] 哈罗德·唐纳利。具有完备 K L_2 ähler 度量的伪凸域的上同调。Michigan Math. J., 41(3):433–442, 1994。[Fed69] 赫伯特·费德勒。《几何测度论》，数学科学基础丛书第153卷。Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1969。[Gro91] M. 格罗莫夫。K¨ahler 双曲性与 L_2-霍奇理论。J. Differential Geom., 33(1):263–292, 1991。[Huy05] 丹尼尔·惠布雷希茨。《复几何》。大学文本丛书。施普林格出版社，柏林，2005。入门读物。[Li93] Peter Li。《几何分析讲义》，讲义系列第6卷。首尔国立大学数学研究所全球分析研究中心，首尔，1993。[Lic58] Andr´e Lichnerowicz。《变换群几何》，数学研究丛书第III卷。杜诺出版社，巴黎，1958。

[LL19] Sujuan Long 和 Kezan Li。伯格曼度量下经典有界对称域上拉普拉斯-贝尔特拉米算子谱的下确界。*J. Math. Res. Appl.*, 39(1):43–50, 2019。[LT10] Song-Ying Li 和 My-An Tran。伯格曼型 K¨ahler 度量下有界伪凸域上拉普拉斯-贝尔特拉米算子谱的下确界。*Comm.Anal. Geom.*, 18(2):375–395, 2010。[LW05] Peter Li 和 Jiaping Wang。K¨ahler 流形的比较定理与谱的正性。*J. Differential Geom.*, 69(1):43–74, 2005。[LZLS23] Sujuan Long、Qiqi Zhang、Guijuan Lin 和 Conghui Shen。Cartan III型和IV型经典域上拉普拉斯-贝尔特拉米算子h的谱的下确界。*AIMS Math.*, 8(8):19582–19594, 2023。[McK70] H. P. McKean。负曲率流形上 Δ 的谱的一个上界。*J. Differential Geometry*, 4:359–366, 1970。[Mun09] Ovidiu Munteanu。K¨ahler 流形上拉普拉斯算子谱底的一个精确估计。*J. Differential Geom.*, 83(1):163–187, 2009。[Oba62] Morio Obata。黎曼流形与球面等距的若干条件。*J. Math. Soc. Japan*, 14:333–340, 1962。[Set91] Alberto G. Setti。以截面曲率与里奇曲率表示的拉普拉斯算子谱下界。*Proc. Amer. Math. Soc.*, 112(1):277–282, 1991。[Uda88] Seiichi Udagawa。紧致 K¨ahler 流形与拉普拉斯算子的特征值。*Colloq.Math.*, 56(2):341–349, 1988。

Research Institute of Molecular Alchemy, Gyeongsang National University, Jinju, Gyeongnam, 52828, Republic of Korea电子邮箱地址: ywlcho@gnu.ac.kr

Department of Mathematics and Institute of Mathematical Science, Pusan National University, 2, Busandaehak-ro 63beon-gil, Geumjeong-gu, Busan, 46241, Re-public of Korea

电子邮箱地址: youngjun.choi@pusan.ac.kr

Department of Mathematics and Research Institute of Natural Science, Gyeongsang National University, Jinju, Gyeongnam, 52828, Republic of Korea电子邮箱地址: nyawoo@gnu.ac.kr