arXiv:2602.18361v1 [math.OA] 20 Feb 2026

一般情形下的量子关系：复合与邻接算子

Matthew Daws

2026年2月23日

摘要

Weaver 意义下的量子关系是冯·诺依曼代数 M 的 M'-双模；当 $M = \ell^\infty(X)$ 时，它们推广了集合 X 上的实际关系。类似地，两个集合之间的关系可以推广为两个代数的交换子上的双模。我们对这一想法进行了明确研究，并发展了一些工具来检验构造是否良定义。动机来自 Kornell 的量子集概念（针对作为矩阵代数之和的代数），我们发现 $*$-同态对应于某些量子关系，从而推广了 Kornell 未发表的工作。我们找到一个从完全正映射到量子关系的函子，这与将噪声通信信道约化为其底层“关系”的想法相关。与量子图一样，至少在有限维情形下，量子关系对应于“邻接算子”，即依赖于代数上忠实泛函选取的某些完全正映射。我们发展了一些工具来处理非 Schur 幂等情况，并展示了它与我们从完全正映射出发的函子以及 Verdon 的工作之间的联系。我们显式计算了 $*$-同态的邻接算子。

1 引言

非交换，也称量子，图是对有限简单图（可能含有自环）的一种非交换形式化，采用算子代数的语言（因此，当底层代数是有限维交换代数时，我们恰好能还原通常的有限图概念）。这一概念源于量子信息论中的平行发展， [8, 9] 例如 Weaver 的工作 [26, 27]，其更直接地采用“非交换”框架；也源于范畴论量子力学， [16, 24] 例如相关例子。这些方法本质上等价，参见我们的综述， [6,第 5]节。

在 Weaver 的表述中，量子图是量子关系的特殊类型，不过其始终定义在单个冯·诺依曼代数 M之上。我们不难设想如何将 Weaver 的定义推广到两个冯·诺依曼代数之间的量子关系；事实上，文献中已有隐含的相关表述，例如未发表的 [10]。本文将更明确地研究这一概念，并将其与有限维冯·诺依曼代数的现有概念联系起来， [11, 12, 24], 同时说明量子图的不同“图景”均有相应的量子关系版本。

冯·诺依曼代数 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ 上的量子关系是一个弱*闭的、 M'-双模 $V \subseteq \mathcal{B}(H)$, [26, 第 2]节。我们所说的 “ 双模 ”，仅仅是指 $x \in V, a, b \in M' \implies axb \in V$；这不应与希尔伯特 C^*-模混淆，后者构成

稍后会自然出现。我们在交换子上有一个双模，并且 V似乎取决于希尔伯特空间 H在该空间上 M 作用，这两者之间的联系是：若 $M \subseteq \mathcal{B}(H_1)$，则在 $\mathcal{B}(H)$内以及在 $\mathcal{B}(H_1)$内的量子关系之间存在一个保序双射，见 [27, 定理 2。7]。因此，实际上并不依赖于 H，但下定义时必须谨慎，确保定义良定义（参见第 2 节末尾的讨论）：这是本文关注的一个重要问题。

为了表述两个代数之间量子关系的概念， M 和 N，我们可以考察 $M \oplus N$ 上的关系，并要求其支撑位于一个“角”中（定义2.4）；也可以更直接地考察 N'-M'-双模 $\mathcal{B}(H, K)$，其中 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$， $N \subseteq \mathcal{B}(K)$，定义2.1。不难看出，这两种方式是等价的，但我们不太确定能否从表示希尔伯特空间立即得到所需的“不变性” H， K。我们在第2节核查必要的细节，并进一步给出一些结果，以检验一般情形下的“定义良好性”。Kornell 在 [11] 及其后续工作中研究了量子集，它们可以实现为（可能无限多个）矩阵代数直和构成的冯·诺依曼代数。这也是我们最初的动机：第2 节从矩阵情形出发，引出一般情形。

一项中心结果出自 [11] ，它表明某些量子关系（余单射的那些）对应于 $*$-同态，即相应矩阵冯·诺依曼代数之间的同态。我们希望给出一个纯冯·诺依曼代数的证明；事实上，这已在未发表的 [10], 中完成，其中非常简要地指出了希尔伯特 C^*-模理论如何给出该结果。我们认为稍加详述是有用的，并在第3节中这样做，随后发展必要的理论，以便依据量子关系完整刻画例如一个 $*$-同态何时是保单位的或单射的，见定理3.12。这表明，对所有冯·诺依曼代数，量子关系范畴包含 $*$-同态的范畴。

受量子图论的启发，现在或许可以考虑是否存在与“量子混淆图”或“量子邻接算子”相关的概念。事实证明它们密切相关，这一点或许已由 Verdon 在 [24]中预见（此处 Verdon 使用图示演算以及2-范畴，因此与本文的交汇点是有限维情形；更完整的论述见第5.1 节）。在第4 节中，我们推广取通信信道的“支撑”以实现一个关系这一概念（例子4.1），从而给出一种将酉完全正映射 θ 与量子关系 V^θ相关联的程序，事实上这是一个函子，见命题4.9。与量子图一样， [27], 存在沿完全正映射对关系作“拉回”的概念，并且这可以在关系范畴中得到很好的表述，见第4.1节。同期发布的预印本 [12] 探讨了 Kornell 意义下量子集的一些等价思想。

在第5节中，我们转而讨论邻接算子。对于量子图而言，邻接算子是图的邻接矩阵的一种推广。这里同样可以自然地将其推广到两个代数之间的算子。我们采用 [7, 25] 中的约定，并考察完全正（或“实”）邻接算子。对于量子图，我们只考察舒尔幂等邻接算子（等价地，代数 $M \bar{\otimes} M^{op}$中的投影）。然而，此处考虑更一般的算子至关重要，我们也沿着这一方向发展了一些理论。这样一来，与 [24]的联系就更加明晰了。我们证明，第 $\theta \mapsto V^\theta$ 4节中的函子以及邻接算子 A 与量子关系 V之间的对应几乎相同，见命题5.11。

现在，我们可以阐述 Verdon 的构造 [24, 命题 3。12]该构造表明，所有（有限维）量子图都可作为酉完全正映射的混淆图出现（这是对矩阵情形的推广， [8]）。我们完全以算子代数语言给出这一结果，见命题5.19；随后给出一项新结果，刻画由完全正映射产生的对称量子关系S （当 $1 \in S$时，对应于酉完全正映射的情形），见定理5.21；这里我们使用了本文前文发展出的计算技巧。

量子关系的复合在邻接算子层面体现为（通常乘积下的）复合，而这通常不保持舒尔幂等性，因此促使我们开展了此前关于非幂等算子的研究。我们简要考察关系上的自然序如何反映在邻接算子层面（这似乎颇为复杂），随后说明如何显式计算量子函数（即 V^θ 由 $*$同态 θ导出）的邻接算子。在非迹情形下，这一计算出人意料地复杂。在多个地方，我们举例说明一些开放问题：这些问题大多探讨哪些关系 $V = V^\theta$ 可由某些类别的完全正映射 θ导出。

1.1 记号

我们采用冯·诺依曼代数的标准记号，遵循 [23]例如。我们的内积对右变量线性。给定一个代数 M，令 M^{op} 为 M的相反代数，记其典型元素为 x^{op} ，其中 $x \in M$，乘法为 $x^{\mathrm{op}} y^{\mathrm{op}} = (yx)^{\mathrm{op}}$。我们有限度地使用狄拉克符号：对于 $\xi \in H$ ，记 $\langle \xi|$ 为线性映射 $H \to \mathbb{C}$; $\eta \mapsto \langle \xi|\eta\rangle$，而 $|\xi\rangle$ 表示其伴随，即线性映射 $\mathbb{C} \to H$； $\lambda \mapsto \lambda\xi$。因此， H上的任意秩一算子都具有 $|\xi\rangle\langle\eta|$的形式。给定一个希尔伯特空间 H，令 H 为其共轭希尔伯特空间。根据里斯–弗雷歇定理，对于任意 $\mu \in H^*$（即巴拿赫空间对偶），存在 $\xi \in H$ 使得 $\mu = \langle \xi|$，于是诱导映射 $\mu \mapsto \xi$ 给出一个等距同构 $H^* \to H$。用 $HS(H)$ 表示 H上的希尔伯特–施密特算子；它是一个希尔伯特空间，与 $H \otimes H$ 同构，同构映射为$|\xi\rangle\langle\eta| \mapsto \xi \otimes \eta$；我们常常不加说明地作此识别。算子 $T^\top \in \mathcal{B}(H)$ （其中 $T \in \mathcal{B}(H)$）的“转置”概念见第2节。

1.2 致谢

感谢 Andre Kornell、Dominic Verdon 和 Makoto Yamashita 就本工作的相关方面进行了有益的交流。

2 量子集与一般量子关系

我们简要概述 [11] 中量子集的概念。按照 [11, 第 2] 节， $\mathcal{X}$ 量子集是由一组 $\mathrm{At}(\mathcal{X})$ 索引的有限维希尔伯特空间族，其中 $\mathrm{At}(\mathcal{X})$ 是 $\mathcal{X}$ 的原子。用 $X \propto \mathcal{X}$ 表示 X 是 $\mathcal{X}$ 的一个原子。从更偏向“非交换几何”的视角来看，我们也可以将 $\mathcal{X}$ 认作冯·诺依曼代数

$$L^\infty(\mathcal{X}) = \ell^\infty\text{-}\bigoplus_{X \propto \mathcal{X}} \mathcal{B}(X) \cong \ell^\infty\text{-}\bigoplus_{X \propto \mathcal{X}} \mathbb{M}_{\dim(X)},$$

有限维矩阵代数的冯·诺依曼代数。

按照 [11, 第 3], 节的定义，从一个量子集 $\mathcal{X}$ 到另一个量子集 $\mathcal{Y}$的二元关系 R ，是为每个 $X \propto \mathcal{X}$、 $Y \propto \mathcal{Y}$指定一个子空间 $R(X, Y) \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$。将 $\mathbf{Rel}(\mathcal{X}; \mathcal{Y})$ 记作

从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$的（二元）关系集合。两个关系的复合定义为

$$(S \circ R)(X, Z) = \lin\{sr : \exists Y \propto \mathcal{Y}, s \in S(Y, Z), r \in R(X, Y)\}.$$

恒等关系是 $1_{\mathcal{X}}$，当 $X = Y$时其分量为 $1_{\mathcal{X}}(X, Y) = \mathbb{C}1_X$，否则为 $\{0\}$。存在自然序：当对所有 X、Y有 $R(X, Y) \subseteq S(X, Y)$ 时，$R \leqslant S$。

存在两种伴随型运算。本文使用泛函分析语言，因此我们遵循此处的记号规范，遗憾的是它们与 [11]相冲突。用X^* 表示 X的巴拿赫空间对偶，我们可以将其等同于共轭希尔伯特空间 X，见第1.1节。照例，对 $T: X \to Y$，令 T^*为希尔伯特空间伴随，并用 T^t表示由对 $f \in Y^* = \mathcal{B}(Y, \mathbb{C})$的 $T^t(f) = f \circ T$所定义的巴拿赫空间伴随。将 $f \in Y^*$ 等同于y_0，从而对 $y \in Y$有 $f(y) = (y_0|y)$。于是对 $x \in X$有 $(T^t(f))(x) = f(T(x)) = (y_0|T(x)) = (T^*(y_0)|x)$，因此 $T^t(f)$ 等同于 $T^*(y_0) = T^\top y_0$，故 T^t 等同于 $T^\top: Y \to X$。

给定一个从 $\mathcal{X}$ 到 $\mathcal{Y}$的关系 R，定义一个从 $\mathcal{Y}$ 到 $\mathcal{X}$ 的关系 R^*，使其满足 $R^*(Y, X) = \{r^* : r \in R(X, Y)\}$。定义 $\overline{\mathcal{X}}$ 为 $\{\overline{X} : X \propto \mathcal{X}\}$，然后将 R 定义为由 $R(\overline{Y}, \overline{X}) = \{r^\top : r \in R(X, Y)\}$ 给出的从 $\overline{\mathcal{Y}}$ 到 $\overline{\mathcal{X}}$ 的关系。根据前面的说明，也可以利用巴拿赫空间对偶来定义。

由此我们得到一个（dagger 紧）范畴 qRel，见定理 3.6] [11,。

我们希望用一种更抽象的泛函分析语言重新表述这个范畴的（某些元素），尤其是采用一种只使用代数 $L^\infty(\mathcal{X})$ 的“坐标无关”方式。显而易见的做法是，将 Weaver 的量子关系概念推广到两个代数的情形。文献中已有这一思路的迹象，例如 Kornell 的工作，但我们不知道有何处明确阐述了其中一些关键细节，因此我们在此着手完成这项工作。仿照定义 2.1], [26, ，我们作如下定义。

定义 2.1. 设 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$、$N \subseteq \mathcal{B}(K)$ 为冯·诺依曼代数。从 M 到 N 的量子关系是一个弱*闭子空间 $V \subseteq \mathcal{B}(H, K)$，它是一个 N'-M' 双模：若 $x \in V, a \in N' \subseteq \mathcal{B}(K), b \in M' \subseteq \mathcal{B}(H)$，则 $axb \in V$。

对于量子集 $\mathcal{X}$，定义 $L^2(\mathcal{X}) = \bigoplus\{HS(X) : X \propto \mathcal{X}\}$，即希尔伯特空间直和。再定义 $\ell^2(\mathcal{X}) = \bigoplus\{X : X \propto \mathcal{X}\}$，同样是希尔伯特空间直和。对于 $X \propto \mathcal{X}$，由于 $\mathcal{B}(X)$ 自然作用于 X 和 $HS(X)$，我们看到 $L^\infty(\mathcal{X})$ 可以视为 $\mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{X}))$ 和 $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{X}))$ 中的冯·诺依曼代数。空间 $L^2(\mathcal{X})$ 是 $L^\infty(\mathcal{X})$ 上任意忠实正泛函的 GNS空间，因此我们认为它比 $\ell^2(\mathcal{X})$ 更为典范。

我们将 $\ell^2(\mathcal{X})$ 上的算子视为（无限）矩阵 $(T_{X,Y})$，其中 $T_{X,\,Y} \in \mathcal{B}(Y, X)$ 对于 $X, Y \propto \mathcal{X}$。那么 $L^\infty(\mathcal{X})$ 由对角矩阵组成（且这样的矩阵定义有界算子当且仅当 $\sup_X \|T_{X,\,X}\| < \infty$）。对于 $X \in \mathcal{X}$，令 1_X 表示 $L^\infty(\mathcal{X})$ 中的极小中心投影，它在 X 因子上是恒等元，在其他地方为 0。令 $T = (T_{X,Y}) \in L^\infty(\mathcal{X})'$，于是对于每个 X都有 $1_X T = T 1_X$，因此可知 T 是对角的。于是 $T_{X,\,X}$ 与 $\mathcal{B}(X)$的每个成员都可交换，因此对于某个标量 t_X，有 $T_{X,\,X} = t_X 1_X$。由此我们得出$L^\infty(\mathcal{X})' \cong \ell^\infty(\mathrm{At}(\mathcal{X}))$。

引理2.2。令 $\mathcal{X}$，$\mathcal{Y}$ 为量子集，并将 $L^\infty(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{X}))$ 视为……，$\mathcal{Y}$也同理。从 $L^\infty(\mathcal{X})$到 $L^\infty(\mathcal{Y})$ 的量子关系具有如下形式

$$V = \lin\{V_{X,Y}\}^{-w^*} \tag{2.1}$$

其中，对于每个 $X \in \mathcal{X}$，$Y \in \mathcal{Y}$，我们有 $V_{X,\,Y} \subseteq \mathcal{B}(X, Y)$ 是一个子空间，并以显然的方式看待 $V_{X,\,Y} \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{X}), \ell^2(\mathcal{Y}))$。任何这样的子空间集都能以这种方式导出一个量子关系。

证明。我们刚刚观察到 $L^\infty(\mathcal{X})' \cong \ell^\infty(\mathrm{At}(\mathcal{X}))$，对于 $\mathcal{Y}$ 也同样如此。因此，从 $L^\infty(\mathcal{X})$ 到 $L^\infty(\mathcal{Y})$ 的量子关系是一个弱 *-闭子空间 V，它是一个 $\ell^\infty(\mathrm{At}(\mathcal{Y}))$-$\ell^\infty(\mathrm{At}(\mathcal{X}))$-双模。给定这样的一个 V，令 $V_{X,Y} = 1_Y V 1_X \subseteq \mathcal{B}(X,Y) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{X}), \ell^2(\mathcal{Y}))$。由双模性质，$V_{X,Y} \subseteq V$，因此 $V_{X,Y}$ 的弱 *-闭线性张成也是 V 的子空间。令 $\mathrm{At}(\mathcal{X})_{00}$ 为 $\mathrm{At}(\mathcal{X})$ 的有限子集，并按包含映射排序，从而构成一个有向集。对于 $\alpha \in \mathrm{At}(\mathcal{X})_{00}$，令 $1_\alpha = \sum_{X\in\alpha} 1_X$，并注意到它在 $L^\infty(\mathcal{X})$ 中弱 $1_\alpha \to 1$ σ-收敛。因此，对于任意 $x \in V$，我们有 $1_\alpha x 1_\beta$ 弱 *-逼近 x，且显然 $1_\alpha x 1_\beta \in \mathrm{lin}\{V_{X,Y}\}$。由此得到等式 (2.1)。反过来，若 V 具有形式 (2.1)，则 V 是弱 *-闭的，且为双模，因此是一个量子关系。 □

推论 2.3。设 $\mathcal{X}$、$\mathcal{Y}$ 为量子集。$\mathbf{Rel}(\mathcal{X};\mathcal{Y})$ 与从 $L^\infty(\mathcal{X}) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{X}))$ 到 $L^\infty(\mathcal{Y}) \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(\mathcal{Y}))$ 的（Weaver）量子关系之间存在一个典范双射。

注意，我们将 $V_{X,\,Y} \subseteq \mathcal{B}(X,Y)$ 写成这样，是为了与关系 R 的分量 $R(X,Y)$ 的记号保持一致，但这与（算子值）矩阵的记号并不一致。

让我们看看范畴结构对应于什么：

- 恒等元 $1_{\mathcal{X}}$ 自然地与 $\ell^\infty(\mathrm{At}(\mathcal{X}))$ 相对应，因此对应于关系 $L^\infty(\mathcal{X})'$。
- 复合就是算子复合：$V \circ W = \mathrm{lin}\{v \circ w : v \in V, w \in W\}^{w^*}$。
- 序就是包含映射。
- 伴随对应于 $V^* = \{v^* : v \in V\}$。
- 由于 $\mathcal{B}(\overline{X}) \cong \mathcal{B}(X)^\top$ 是反同态，我们可以看到 $L^\infty(\mathcal{X})$ 可以被典范地认作 $L^\infty(\mathcal{X})^{\mathrm{op}}$，即相反代数。于是 $R^\top$ 对应于运算 $V^\top = \{v^\top : v \in V\}$。

接下来，我们来看看如何将这些广义关系视为 Weaver 意义下的一种特殊关系。给定两个冯·诺伊曼代数 M，N 考虑它们的直和 $M \oplus N$。若 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$，$N \subseteq \mathcal{B}(K)$ 则 $M \oplus N \subseteq \mathcal{B}(H \oplus K)$ 可视为“对角矩阵”，其中我们以通常的方式将 $\mathcal{B}(H \oplus K)$ 视为一个由 2×2 矩阵构成的代数。注意，此时 $(M \oplus N)' = M' \oplus N'$。于是 $\mathcal{B}(H,K)$ 可以认作该矩阵表示中的左下角，而这又与 $1_K \mathcal{B}(H \oplus K) 1_H$ 相对应。由于 $1_H = 1_M \in M \cap M'$，且 N 也类似，我们由此引出以下定义；不难看出，它等价于定义 2.1。

定义 2.4. 从 M 到 N 的量子关系，是 $M \oplus N$ 上的一个量子关系，记作 V，其中 $1_N V 1_M = V$。

注意，我们给出的推论 2.3 是针对 $L^\infty(\mathcal{X})$ 作用于 $\ell^2(\mathcal{X})$ 的情形。其他选择又如何呢？例如，$L^2(\mathcal{X})$？对于单个代数，Weaver 在 [26, 定理 2.7] 中表明，量子关系本质上不依赖于代数所作用的希尔伯特空间的选择。对于我们来说，尚不能立即看出这对两个代数上的关系是否也成立，因此我们接下来会核查细节。本文后续的大部分内容也将广泛用到以下关于 $*$-同态的构造。

我们不直接沿用 Weaver 的论证（但请参见命题 2.9），而是按照我们的处理方式，比较 [6, 引理 7.3、7.4]。固定 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$，$N \subseteq \mathcal{B}(K)$，并令 $V \subseteq \mathcal{B}(H \oplus K)$

是 $M\oplus N$ 上的一个量子关系。给定一个希尔伯特空间 L，定义正规保单位单射 $*$-同态 $\pi\colon M\oplus N\to\mathcal{B}((H\oplus K)\otimes L)$；$x\mapsto x\otimes 1_L$，并设 $V_\pi = V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L) = \{v\otimes x : v\in V,\ x\in\mathcal{B}(L)\}^{w^*}$。那么 $V\mapsto V_\pi$ 是 $M\oplus N$ 上的量子关系与 $\pi(M\oplus N)$上的量子关系之间的保序双射，[6, 引理 7。3]。

引理 2.5。映射 $V\mapsto V_\pi$ 保持性质 $V = 1_N V 1_M$。

证明。由于 V 是 $M'\oplus N'$上的双模，因此 $V = 1_N V 1_M$ 等价于 $V\subseteq 1_N V 1_M$，因为另一侧的包含关系可由双模性质推出。显然，$V\subseteq 1_N V 1_M$ 蕴含$V_\pi\subseteq 1_N V_\pi 1_M$。

对于反向结论，首先注意，映射 $x\mapsto 1_N x 1_M$ 是幂等的、弱*连续的，并且限制为作用于 $V\otimes\mathcal{B}(L)$（即代数张量积）上的映射。由此可得 $1_N V_\pi 1_M = 1_N V 1_M\bar{\otimes}\mathcal{B}(L)$，例如参见 [5, 引理 5.5]。假设 $V_\pi = 1_N V_\pi 1_M$，但为了导出矛盾，假设 $1_N V 1_M$ 是 V 的真子空间。根据 Hahn-Banach 定理，存在 $\omega\in\mathcal{B}(H\oplus K)_*$ 和 $v\in V$，使得 $\langle v、\ \omega\rangle = 1$，但对每个 $u\in V$ 都有 $\langle 1_N u 1_M、\ \omega\rangle = 0$。于是 $(\omega\otimes\mathrm{id})(1_N V 1_M\otimes\mathcal{B}(L)) = \{0\}$，因此由弱* 连续性以及前面的说明可知，$(\omega\otimes\mathrm{id})(1_N V_\pi 1_M) = \{0\}$。然而，这样一来 $\{0\} = (\omega\otimes\mathrm{id})(V_\pi) = \omega(V)\mathcal{B}(L)$，这与$\langle v、\ \omega\rangle = 1$矛盾。 □

现在设 $\theta\colon M\oplus N\to\mathcal{B}(L)$ 是一个正规保单位 $*$-同态，因此利用此类映射的结构理论，可比较前文引理 7 之前的内容。例如，存在 L_0，以及一个等距算子 $u\colon L\to(H\oplus K)\otimes L_0$，使得对于 $x\in M\oplus N$，有 $u\theta(x) = \pi(x)u$，其中 π 与前面相同，是利用 L_0 构造的。令 $V_\theta = u^* V_\pi u$。那么 $V\mapsto V_\theta$ 保序，并将 $M\oplus N$ 上的量子关系映射为 $\theta(M\oplus N)$ 上的量子关系，[6，引理 7.4]。

引理 2.6. 映射 $V\mapsto V_\theta$ 保持性质 $V = 1_N V 1_M$。

证明。令 $P = \pi(M\oplus N) = (M\oplus N)\otimes 1\subseteq\mathcal{B}((H\oplus K)\otimes L_0)$。根据前一个引理，我们只需证明，对于 P 上的量子关系 V，$V\mapsto u^* V u$ 保持该性质。回顾一下，由于 u 与 θ 和 π 交织，因此有 $uu^*\in P' = (M'\oplus N')\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_0)$。此外，$u 1_M = u\theta(1_M) = \pi(1_M)u = 1_M u$，且对于 1_N。因此，如果 $V\subseteq 1_N V 1_M$，那么 $u^* V u\subseteq u^* 1_N V 1_M u = 1_N(u^* V u)1_M$。再次利用双模性质得到等式。 □

推论 2.7. 从 M 到 N 的量子关系与所选表示无关。

证明。设 $M\subseteq\mathcal{B}(H_1)$ 与 $\mathcal{B}(H_2)$，并对 K_1、K_2上的 N 同样处理。设 $\theta_{1,2}\colon M\oplus N\to\mathcal{B}(H_2\oplus K_2)$ 为所得的 $*$-同态，其逆为 $\theta_{2,1}\colon M\oplus N\to\mathcal{B}(H_1\oplus K_1)$，其中我们首先将 $M\oplus N$ 视为在 $H_1\oplus K_1$上作外围作用，其次视为在$H_2\oplus K_2$上作用。在 $M\oplus N$上的量子关系 $V_1\subseteq\mathcal{B}(H_1\oplus K_1)$与 $V_2\subseteq\mathcal{B}(H_2\otimes K_2)$之间存在保序双射；事实上，$V_2 = (V_1)_{\theta_{1,2}}$ 与 $V_1 = (V_2)_{\theta_{2,1}}$。若 $V_1 = 1_N V_1 1_M$，则将该引理应用于 $\theta_{1,2}$ 可证 $V_2 = 1_N V_2 1_M$，而反之则通过改用$\theta_{2,1}$ 得到。 □

注 2.8。为便于后文引用，我们给出 V_θ 更具体的描述。通常，我们感兴趣的是 $\theta_M\colon M\to\mathcal{B}(H_1)$ 和 $\theta_N\colon M\to\mathcal{B}(K_1)$ 都是正规保单位 $*$-同态，给出 $\theta = \theta_M\oplus\theta_N\colon M\oplus N\to\mathcal{B}(L)$，其中 $L = H_1\oplus K_1$。选取等距算子 $u_M\colon H_1\to H\otimes L_1$和 $u_N\colon K_1\to K\otimes L_2$，分别扩张 θ_M、θ_N，于是令 $L_0 = L_1\oplus L_2$，得到

$$\begin{aligned} u\colon L = H_1\oplus K_1 &\to (H\oplus K)\otimes L_0\cong (H\otimes L_1)\oplus(H\otimes L_2)\oplus(K\otimes L_1)\oplus(K\otimes L_2),\\ (\xi,\eta) &\mapsto (u_M(\xi),0,0,u_N(\eta)). \end{aligned}$$

于是，对于 $z \in M \oplus N$，有 $u^*(z\otimes 1)u = \theta(z)$，因此 $V_\theta = u^*(V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_0))u$可视为 $M \oplus N$上的量子关系。

作为从 M 到 N的量子关系，我们考察 $\mathcal{B}(H_1, K_1)$ 角。由于我们取弱*-闭包，只需考虑 $\mathcal{B}(L_0)$中的一个秩一算子。令 $\gamma_i = (\alpha_i, \beta_i) \in L_0 = L_1 \oplus L_2$ 对于 $i = 1, 2$，并设 $t = |\gamma_1\rangle\langle\gamma_2| \in \mathcal{B}(L_0)$。因此，对于 $\xi \in H_1$、$\eta \in K_1$和 $v \in V \subseteq \mathcal{B}(H, K)$，我们关注的是

$$\begin{aligned}\big((0,\eta)\big|u^*(v\otimes t)u(\xi,0)\big) &= \big((0,0,0,u_N(\eta))\big|(v\otimes|(\alpha_1,\beta_1)\rangle\langle(\alpha_2,\beta_2)|(u_M(\xi),0,0,0)\big)\\ &= \big((1\otimes\langle\beta_1|)u_N(\eta)\big|v(1\otimes\langle\alpha_2|)u_M(\xi)\big)\\ &= \big(\eta\big|u_N^*(v\otimes|\beta_1\rangle\langle\alpha_2|)u_M(\xi)\big).\end{aligned}$$

我们得出结论：$V_\theta = u_N^*(V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1, L_2))u_M$。这里，当然，$V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1, L_2)$ 是 $V \otimes \mathcal{B}(L_1, L_2)$的弱 *- 闭包，我们可以将其视为 $\mathcal{B}((H \oplus K) \otimes (L_1 \oplus L_2))$ 的一个有补子空间。

借此机会，我们来完成 [6] 中开始的讨论。Weaver 在 [26, 定理 2。7] 中的论证是：当 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ 且 $\theta\colon M \to \mathcal{B}(K)$ 是一个单射、保单位的正规 $*$-同态时，则[1] 对某个足够大的 L，有 $M \otimes 1$ 与 $\theta(M) \otimes 1$空间同构：存在一个酉算子 $w\colon K \otimes L \to H \otimes L$，使得 $w^*(x \otimes 1)w = \theta(x) \otimes 1$对每个 $x \in M$ 均成立。于是，$V \subseteq \mathcal{B}(H)$ 上的量子关系 M 与 $W \subseteq \mathcal{B}(K)$ 上的量子关系 $\theta(M)$ 恰在 $w^*(V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L))w = W\bar{\otimes}\mathcal{B}(L)$ 时相关。

命题 2.9。与 V 关联的量子关系 $W \subseteq \mathcal{B}(K)$ 恰为 V_θ。

证明。我们继续使用刚才引入的记号。设 $\xi_0 \in L$ 为单位向量，并定义$u\colon K \to H\otimes L$为 $u(\xi) = w(\xi\otimes\xi_0)$，于是对于 $x \in M$，我们有 $u^*(x\otimes 1)u = (\mathrm{id} \otimes\omega_{\xi_0})(w^*(x\otimes 1)w) = \theta(x)$。特别地，$u^*u = 1$，因此我们得到 θ的一个膨胀。根据 [6,引理 7.4] 中的唯一性断言，我们有

$$V_\theta = u^*(V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L))u = (\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi_0})(w^*(V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L))w) = (\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi_0})(W\bar{\otimes}\mathcal{B}(L)) = W.$$

对于最后一个等式，注意到由切片映射的弱*-连续性可知，$(\mathrm{id}\otimes\omega_{\xi_0})(W\bar{\otimes}\mathcal{B}(L)) \subseteq W$，而另一个包含映射显然成立。因此，$V_\theta = W$，如所声称。 □

上文构造的映射 $U \mapsto U_\theta$ 不要求 θ 是单射，因此是对 [26, 定理 2.7] 的一个温和推广（当然，一般来说我们无法得到双射！）。下面说明，这种“基变换”运算与复合可交换。

命题 2.10. 对于 $i = 1, 2, 3$，设 $M_i \subseteq \mathcal{B}(H_i)$ 是一个冯·诺依曼代数，且 $\theta_i\colon M_i \to \mathcal{B}(K_i)$ 是一个保单位正规 $*$-同态。设 $U \subseteq \mathcal{B}(H_1, H_2), V \subseteq \mathcal{B}(H_2, H_3)$ 分别是从 M_1 到 M_2、从 M_2 到 M_3 的量子关系。那么 $V_{\theta_2\oplus\theta_3} \circ U_{\theta_1\oplus\theta_2} = (V \circ U)_{\theta_1\oplus\theta_3}$。

证明。令 $u_i\colon K_i \to H_i \otimes L_i$扩张 θ_i，于是$U_{\theta_1\oplus\theta_2} = u_2^*(U\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1, L_2))u_1$，由注 2.8。类似地，$V_{\theta_2\oplus\theta_3} = u_3^*(V\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_2, L_3))u_2$。因此

$$\begin{aligned}&V_{\theta_2\oplus\theta_3} \circ U_{\theta_1\oplus\theta_2}\\ &= \mathrm{lin}\left\{u_3^*(v\otimes t_1)u_2u_2^*(u\otimes t_2)u_1 : v \in V, u \in U, t_1 \in \mathcal{B}(L_2, L_3), t_2 \in \mathcal{B}(L_1, L_2)\right\}^{-w^*}\\ &= \mathrm{lin}\left\{u_3^*(v\otimes t_1)(u\otimes t_2)u_1 : v \in V, u \in U, t_1 \in \mathcal{B}(L_2, L_3), t_2 \in \mathcal{B}(L_1, L_2)\right\}^{-w^*}\\ &= u_3^*((V \circ U)\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1, L_3))u_1 = (V \circ U)_{\theta_1\oplus\theta_3},\end{aligned}$$

[1]我们在 https://github.com/MatthewDaws/Mathematics/tree/master/Isomorphism-VN 中给出这一结论的一个基本上自成一体的证明，以及一些文献注记。

这里用到了 $u_2u_2^* \in M_2'\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_2)$，且 U 是一个左 M_2'-模（或者 V 是一个右 M_2'-模），以及 $\mathcal{B}(L_2,L_3)\circ\mathcal{B}(L_1,L_2) = \mathcal{B}(L_1,L_3)$；验证这一点需要一个常规论证（通过有限秩算子进行逼近）。□

根据定义2.1中关系的概念，我们可以形式化地将关系视为一个等价类：对于每一对 H, K 满足 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$, $N \subseteq \mathcal{B}(K)$ 我们都有 V的某个代表元。我们不会采用如此形式化的表述，但务必始终检查定义是否良定义，也就是说，我们确实指定了一个等价类。

由此我们得到一个范畴：对象是冯·诺伊曼代数，态射是量子关系。复合满足结合律或许并非显而易见，而且我们稍后还会用到类似的思路，因此在此给出详细论证。给定量子关系 U、V、W，我们断言 $U\circ(V\circ W)$ 等于

$$X = \mathrm{lin}\{uvw : u\in U, v\in V, w\in W\}^{-w^*}.$$

显然 $X \subseteq U\circ(V\circ W)$。反过来，我们证明对于 $u\in U$、$y\in V\circ W$，有$uy\in X$；于是 $U\circ(V\circ W)\subseteq X$，因为 X是一个弱*-闭子空间。然而，由于 X是弱$*$-闭子空间，且乘法分别弱*-连续，我们可以用形如 vw 的元素逼近 y，其中 $v\in V$、$w\in W$，断言由此得证。同理，$X = (U\circ V)\circ W$，因此特别有 $(U\circ V)\circ W = U\circ(V\circ W)$。

M 上的恒等态射是量子关系 M'，因为若 V 是从 M 到 N 的量子关系，那么 $V\circ M'\subseteq V$ 由双模性质成立；但由于 $1\in M'$，显然$V = V\circ M'$。

我们不会进一步研究这个范畴的范畴论性质；尽管如此，比较 [11],会很有意思。

3 量子集之间的函数

用我们的记号重述并推广 [11, 第 4]节中的定义，可得如下内容。

定义 3.1。设 M、N 是冯·诺依曼代数，且 V 是从 M到 N的量子关系。那么，当 $V\circ V^*\subseteq N'$ 时，称 V为余单射；当 $V^*\circ V\supseteq M'$时，称其为余满射。当 V 同时满足这两个条件时，我们称 V 为函数；余单射关系是偏函数。类似地，当 $V^*\circ V\subseteq M'$ 时，称 V 为单射；当 $V\circ V^*\supseteq N'$时，称其为满射。

我们可以立即验证，这些概念定义良好。

引理 3.2. 设 $M\subseteq\mathcal{B}(H)$ 是一个冯·诺依曼代数，$\theta_M\colon M\to\mathcal{B}(H_1)$ 是一个保单位正规 $*$-同态，并且存在某个等距算子 $u_M\colon H_1\to H\otimes L$，使其扩张为 $\theta_M(x) = u_M^*(x\otimes 1)u_M$。那么，当且仅当 $u_M x u_M^*\in M'\bar{\otimes}\mathcal{B}(L)$ 时，$x\in\theta_M(M)'$；因此 $\theta_M(M)' = u_M^*(M'\bar{\otimes}\mathcal{B}(L))u_M$。

证明。对于 $x\in\mathcal{B}(H_1)$，我们有以下一系列推论

$$\begin{aligned}
x\in\theta_M(M)' &\iff xu_M^*(y\otimes 1)u_M = u_M^*(y\otimes 1)u_M x \qquad (y\in M)\\
&\implies u_M x u_M^*(y\otimes 1)u_M u_M^* = u_M u_M^*(y\otimes 1)u_M x u_M^* \qquad (y\in M)\\
&\implies u_M x u_M^*(y\otimes 1) = (y\otimes 1)u_M x u_M^* \qquad (y\in M)\\
&\implies x u_M^*(y\otimes 1)u_M = u_M^*(y\otimes 1)u_M x \qquad (y\in M)
\end{aligned}$$

利用 $u_M^* u_M = 1$ 和 $u_M u_M^* \in M' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$。因此，整个过程中都是等价关系，从而 $x \in \theta_M(M)'$ 当且仅当 $u_M x u_M^* \in (M \otimes 1)' = M' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$。因此，给定 $y \in M' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$，我们有 $x = u_M^* y u_M$ 满足 $u_M x u_M^* = (u_M u_M^*) y (u_M u_M^*) \in M' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$，于是 $x \in \theta_M(M)'$；反过来，对于 $x \in \theta_M(M)'$，我们有 $x = u_M^* u_M x u_M^* u_M \in u_M^* (M' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)) u_M$。 □

命题 3.3. 设 V 是一个从 M 到 N的量子关系。作用于 H, K 上的希尔伯特空间的选取, N 不会改变 V是否为（余）单射或（余）满射。

证明。设 $\theta_M : M \to \mathcal{B}(H_1)$ 和 $\theta_N : N \to \mathcal{B}(K_1)$ 是忠实表示，并令 $\tilde{V} = V_{\theta_M \oplus \theta_N}$，因此我们要证明 V 是余满射当且仅当 $\tilde{V}$ 是余满射，其他情形也同理。由于 $\tilde{V}^* = V^*_{\theta_N \oplus \theta_M}$，命题 2.10 表明 $\tilde{V}^* \circ \tilde{V} = (V^* \circ V)_{\theta_M \oplus \theta_M}$。若 $M' \subseteq V^* \circ V$，则 $(M')_{\theta_M \oplus \theta_M} \subseteq \tilde{V}^* \circ \tilde{V}$，但根据引理 3.2，$(M')_{\theta_M \oplus \theta_M} = u_M^* (M' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_1)) u_M = \theta_M(M)'$。（这一点也可由定理 2.7推出。）因此，$V$ 是余满射意味着 $\tilde{V}$ 是余满射；交换 H、H_1 与 K、K_1 的角色即可证明反向结论。其他情形类似。 □

我们旨在推广 [11, 定理 7.4]该定理表明，对于形如$L^\infty(X)$、$L^\infty(Y)$的代数，量子函数与保单位正规 $*$-同态 $L^\infty(Y) \to L^\infty(X)$一一对应。事实上，Kornell 已在未发表的著作 [10], 中通过直接论证完成了这项工作；此外，还有人声称（但未作进一步说明），该结果实际上可直接由 [20, 定理 4.2.7] 或 [19, 命题 6.12], 推出，也就是说，可通过使用一些关于希尔伯特 C^*-模的结果得到。为作记录，并且由于我们希望证明更强一些的结论，我们将概述这一论证的过程。

固定冯·诺依曼代数 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ 和 $N \subseteq \mathcal{B}(K)$。我们不假设同态是保单位的。

命题 3.4. 设 $\theta : N \to M$ 是一个正规 $*$-同态，并定义

$$V^\theta = \{v \in \mathcal{B}(H, K) : yv = v\theta(y) \ (y \in N)\}.$$

于是，V^θ 是一个从 M 到 N 的余单射量子关系。

证明。显然，V^θ 是一个弱*-闭子空间。对于 $a \in M'$、$b \in N'$ 和 $v \in V^\theta$，对 $y \in N$我们有 $y(bva) = b(yv)a = bv\theta(y)a = (bva)\theta(y)$，这表明 $bva \in V^\theta$。因此，V^θ 是一个双模，即一个量子关系。

对于 $u^* \in V^{\theta *}$，由于 θ 是一个 $*$-同态，我们有 $\theta(y)u^* = u^* y$ 对 $y \in N$成立。因此，给定 $v \in V^\theta$，对 $y \in N$ 我们有 $vu^* y = v\theta(y)u^* = yvu^*$，这表明 $vu^* \in N'$。所以$V^\theta \circ V^{\theta *} \subseteq N'$，也就是说，$V^\theta$ 是余单射的。 □

现在我们考虑一个一般的从 M 到 N的余单射量子关系 V。考虑 V^*，它是单射的，以及一个右 N'-模。由于 V^* 是单射的，我们可以通过 $(u^*|v^*) = uv^* \in N'$ 为 u^*、$v^* \in V^*$ 定义一个取值于 N'的内积。因此，V^* 是N'上的希尔伯特 C^*-模：这意味着 V^* 是一个右 N'-模，并且具有一个与该模结构相容的取值于 N'的内积；有关更多内容，请参见例如 [14] 。

命题3.5。模 V^* 是自对偶的，也就是说，有界的 N'-线性映射 $V^* \to N'$ 可表示为与 V^*中某个元素的内积

证明。 模 V^* 是一个具体的希尔伯特模，因为根据定义，它是在希尔伯特空间上表示的。这类对象已有充分研究，但我们并不知道有哪篇规范参考文献。要证明 V^* 是自对偶的，最简便的办法是借助 [2, 引理 8.5.4(1)] ，该引理告诉我们V^* 是自对偶的，因为 N'值内积在每个变量上分别弱*连续，而这里显然如此。 □

许多文献（例如 [17, 19]）采用自对偶模，而书籍 [20] 则采用拓扑条件；但实际上，证明适用于任意弱*-闭的具体希尔伯特模，因此也适用于 V^*。事实上，这些方法实际上是等价的， [21]。

以下是我们需要的书籍 [20] 中的结果；为完整起见，我们给出一个基于 Rieffel 的工作 [19] 的证明。

定理 3.6 ([20, 定理 4.2.7])。 设 H, K 是希尔伯特空间，设 $N_0 \subseteq \mathcal{B}(K)$ 是冯·诺依曼代数，且设 $X \subseteq \mathcal{B}(K, H)$ 是一个希尔伯特 C^*-模，其底代数为 N_0 ，它是弱*-闭的，并满足 lin $\{x(\xi) : x \in X, \xi \in K\}$ 在 H 中稠密。存在唯一的正规保单位 $*$-同态 $\theta\colon N_0' \to \mathcal{B}(H)$ ，使得

$$X = V^{\theta *} = \{x \in \mathcal{B}(K, H) : xa' = \theta(a')x \ (a' \in N_0')\}.$$

证明。 由于 $N_0 \subseteq \mathcal{B}(K)$, 我们看到 K 是一个“生成元”，参见 [19, 命题 1。3]。由于 X 是自对偶的（证明与命题 3.5相同），根据 [19, 命题 6，12] 存在一个希尔伯特空间L 及一个正规保单位 $*$-同态 $\rho\colon N_0' \to \mathcal{B}(L)$ ，使得 X 同构于（作为希尔伯特C^*-模）

$$V^{\rho *} = \{x \in \mathcal{B}(K, L) : xa' = \rho(a')x \ (a' \in N_0')\}.$$

事实上， $L = F_X(K)$ 用 [14, 第 4] 章的语言来说，它就是 X 与 K的内张量积，也就是代数张量积关于如下定义在初等张量上的预内积所作的完备化：

$$(x \otimes \xi | y \otimes \eta) = (\xi | x^* y \eta) = (x\xi | y\eta) \qquad (x, y \in X, \xi, \eta \in K).$$

由于 $X \subseteq \mathcal{B}(K, H)$ ，我们得到这个简单的内积形式；再由稠密性假设可知， L 与 H等距。因此，将 L 与 H 等同，并令 $\theta = \rho$。 □

推论 3.7（Kornell）。设 $V \subseteq \mathcal{B}(H, K)$ 是一个从 M 到 N的量子函数。那么，对于唯一的保单位正规 $*$-同态 $\theta\colon N \to M$，有 $V = V^\theta$。

证明。根据假设，$V \circ V^* \subseteq N'$，因此我们可以将 $V^* \subseteq \mathcal{B}(K, H)$ 视为定义在 $N_0 = N'$ 上的希尔伯特 C^*-模。此外， $M' \subseteq V^* \circ V$。假设 $\xi_0 \in H$，且对于所有 $x \in V^*$、$\xi \in K$，都有 $(\xi_0 | x\xi) = 0$。那么显然，对于每个 x、$y \in V$、$\xi \in H$，都有 $0 = (\xi_0 | x^* y \xi) = 0$，因此对于每个 $x \in M'$、$\xi \in H$，都有 $0 = (\xi_0 | x\xi)$。取 $x = 1$、$\xi = \xi_0$，可得 $\xi_0 = 0$，因此定理 3.6 的稠密性条件成立。存在一个保单位正规 $*$-同态 $\theta\colon N = N_0' \to \mathcal{B}(H)$ ，满足 $V = V^\theta$。此外，对于 $a \in N$、$b \in M'$、$x \in V^*$ ，我们有 $xa = \theta(a)x$，但也有 $bx \in V^*$，因此 $bxa = \theta(a)bx$，进而 $\theta(a)bx = b\theta(a)x$。根据稠密性条件，对于所有 a、b，都有 $\theta(a)b = b\theta(a)$，因此 θ 映入 $M'' = M$，如所需。 □

我们将巧妙调整这一论证，以处理非幺同态以及仅假设为余单射的关系。我们首先研究 V^θ的各种性质。事实上， V^θ 的定义取决于 H、K 和 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$、$N \subseteq \mathcal{B}(K)$的选择，因此我们首先检查是否正确定义了“等价类”，详见第2节末尾的讨论。

命题 3.8. 设 $\theta_M\colon M \to \mathcal{B}(H_1)$ 和 $\theta_N\colon N \to \mathcal{B}(K_1)$ 是正规单射保单位 $*$-同态，且 $\theta\colon N \to M$ 是正规 $*$-同态。设 $\theta_1\colon \theta_N(N) \to \theta_M(M)$ 由 θ 诱导，再构造 V^θ 和 V^{θ_1}。那么， V^{θ_1} 恰好是由 V^θ 诱导的量子关系，该关系沿同态 $\theta_M \oplus \theta_N\colon M \oplus N \to \mathcal{B}(H_1 \oplus K_1)$ 传递。

证明。我们再次使用注记 2.8中的记号，因此我们希望证明 $V^{\theta_1} = u_N^*(V^\theta \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_1, L_2))u_M$。根据定义， $v \in V^{\theta_1}$ 当 $\theta_N(y)v = v\theta_M(\theta(y))$ 对于 $y \in N$ 时， $u_N^*(y \otimes 1)u_N v = v u_M^*(\theta(y) \otimes 1)u_M$。按照引理 3.2 的证明中的方法推理，可得

$$V^{\theta_1} = \{v \in \mathcal{B}(H_1, K_1) : (y \otimes 1)u_N v u_M^* = u_N v u_M^*(\theta(y) \otimes 1)\ (y \in N)\}.$$

同样，我们将 $\mathcal{B}(H_1, K_1)$ 视为 $\mathcal{B}(H_1 \oplus K_1)$的子空间，依此类推，并认为 $u_N v u_M^*$作用于 $(H_1 \oplus K_1) \otimes L$上。因此，我们可以通过正规泛函切片，并将所得条件与 V^θ的定义进行比较，从而得出：当且仅当$(\mathrm{id} \otimes \omega)(u_N v u_M^*) \in V^\theta$ 对每个 $\omega \in \mathcal{B}(L)_*$都成立时， $v \in V^{\theta_1}$ 成立。根据 [13, 注记 1.5], ，由于希尔伯特空间上的有界算子具有性质 S_σ，因此可得

$$V^{\theta_1} = \{v \in \mathcal{B}(H_1, K_1) : u_N v u_M^* \in V^\theta \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_1, L_2)\} = u_N^*(V^\theta \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_1, L_2))u_M,$$

对于第二个等式，完全按照引理3.2的第二部分进行论证。 □

对于一个 $*$-同态 $\theta\colon N \to M$，由于 $\theta(1)$ 是 M 中的一个投影，且与 $\theta(N)'$对易，因此 $\theta(1)\theta(N)' = \theta(1)\theta(N)'\theta(1)$是一个非保单位的冯·诺依曼代数（即 $\mathcal{B}(H)$的一个弱*闭自伴子代数）。

引理 3.9。 对于一个正规 $*$-同态 $\theta\colon N \to M$，我们有 $\theta(1)\theta(N)' = V^{\theta *} \circ V^\theta$。

证明。 由命题 3.8 可知，我们可以改变 N 作用于其上的空间，而不改变 $V^{\theta *} \circ V^\theta$。因此，取合适的 L，将 K 替换为 $K \otimes L$，我们不妨设存在 $r\colon H \to K$ 满足$r\theta(y) = yr$ 对每个 $y \in N$均成立，且 $r^*r = \theta(1) \in M$。给定 $x \in \theta(N)'$，令 $u = xr^*\colon K \to H$。对于 $y \in N$，我们有 $uy = xr^*y = x\theta(y)r^* = \theta(y)xr^* = \theta(y)u$，因此 $u^* \in V^\theta$。由于 $uu^* = xr^*rx^* = x\theta(1)x^* = \theta(1)xx^*$，且 $V^{\theta *} \circ V^\theta$ 是一个线性空间，我们得出$\theta(1)\theta(N)' \subseteq V^{\theta *} \circ V^\theta$。

对于另一个包含映射，令 $v \in V^\theta$ so $v^*y = \theta(y)v^*$ for $y \in N$，因此 $v^* = \theta(1)v^*$。对于u, $v \in V^\theta$，我们有 $v^*u\theta(y) = v^*yu = \theta(y)v^*u$，于是 $v^*u \in \theta(N)'$，因此 $v^*u = \theta(1)v^*u \in \theta(1)\theta(N)'$。 □

推论 3.10. 对于正规 $*$-同态 $\theta\colon N \to M$，我们有 $\overline{\mathrm{lin}\{v^*\xi : v \in V^\theta, \xi \in K\}} = \theta(1)(H)$。

证明。 根据引理 3.9，我们有 $\overline{\mathrm{lin} V^{\theta *} K} \supseteq \overline{\mathrm{lin}}(V^{\theta *} \circ V^\theta)H = \overline{\mathrm{lin}}\,\theta(1)\theta(N)'H = \theta(1)(H)$作为 $\theta(N)'$使 $\theta(1)(H)$ 保持不变。反过来，对于任意 $v \in V^\theta$ 我们有 $v^* = v^*1 = \theta(1)v^*$，因此 $\overline{\mathrm{lin}}\, V^{\theta *} K \subseteq \theta(1)(H)$。 □

对于任意余单射 V，由于 $V \circ V^* \subseteq N'$，且 $V \circ V^*$ 始终是一个 N'-双模，我们有 $V \circ V^*$ 是一个弱 *-闭理想，因此对于某个中心投影 $z \in N \cap N'$，有 $V \circ V^* = zN'$[22, 命题 II.3.12]。

引理 3.11. 设 $\theta\colon N \to M$ 为正规 $*$-同态，并设 $z \in N \cap N'$ 为满足 $V^\theta \circ V^{\theta *} = zN'$ 的中心投影。则 $\ker(\theta) = (1 - z)N$。

证明。若 $\theta(y)=0$ 则对 $v\in V^\theta$ 我们有 $yv=v\theta(y)=0$。反之，设 $\theta(y)\neq 0$，从而亦有 $\theta(y^*)\theta(1)=\theta(y)^*\neq 0$，因此由推论 3.10，存在 $v\in V^\theta$ 使得 $\theta(y)^*v^*\neq 0$。我们得出 $\theta(y)=0$ 当且仅当 $yv=v\theta(y)=0$ 对每个 $v\in V^\theta$。

因此 $y\in\ker\theta$ 意味着，对于所有 u，都有 $yvu^*=0$ $v\in V^\theta$；反过来，若特别地对于所有 v都有 $yvv^*=0$，则对于所有 v都有 $yvv^*y^*=0$，因此对于所有 v都有 $yv=0$，故 $\theta(y)=0$。于是，$y\in\ker\theta$当且仅当 $yzN'=y(V^\theta\circ V^{\theta^*})=\{0\}$，这等价于 $yz=0$，也等价于 $y\in(1-z)N$，如所述。 □

现在我们陈述主要结果，它推广了从 [11] 到任意冯·诺伊曼代数的关系与同态之间的若干等价关系。

定理 3.12. 正规 $*$-同态 $\theta\colon N\to M$ 与从 M 到 N的余单射量子关系 V 之间存在一个双射，该双射由 $\theta\mapsto V^\theta$给出。在此双射下：

(1) 保单位同态对应于量子函数；*(2)* 单同态对应于满射量子关系；*(*

3) V 是单射，当且仅当 $\theta(1)$ 在 M中是中心的，以及 $\theta(N)=\theta(1)M$ ；

(4) 对于量子函数，满同态对应于单射量子函数。

证明。命题 3.4 表明，V^θ 总是余单射的。现在令 V 为任意一个余单射量子关系，并令 $H_e=\operatorname{lin}\{v^*\xi:\xi\in K,v\in V\}\subseteq H$，再令 e 为$\overline{H}$ 到 H_e上的投影。由于 V^* 是一个左 M'-模，因此 H_e 是一个 M'-不变子空间，从而 $e\in M$。通过余限制，V^* 中的每个元素都是 $\mathcal{B}(K,H_e)$ 中的一个映射，记作 $U\subseteq\mathcal{B}(K,H_e)$，其中 $U\subseteq\mathcal{B}(K,H_e)$ 是一个左 N'-模。令 $M_e=eMe\subseteq\mathcal{B}(H_e)$ 为一个冯·诺依曼代数，因此根据 [22, 命题 II.3.10]，我们有 $(M_e)'=(M')_e=eM'\subseteq\mathcal{B}(H_e)$。于是$U$ 是一个右 $(M_e)'$-模，因为 V 是一个右 M'-模。然后，定理 3.6（按照推论 3.7 的证明中的方式应用）表明，存在唯一的正规保单位 $*$-同态 $\theta_e\colon N\to M_e$，满足 $V^{\theta_e*}=U$。令 θ 为 θ_e 与包含映射 $M_e\to M$的复合，特别地，$\theta(1)=e$。于是，对于 $y\in N$，$v\in V^{\theta*}$ 当且仅当 $vy=\theta(y)v=\theta_e(y)ev$。因此，首先$v=v1=ev$；其次，我们看到 $v\in V^{\theta*}$ 当且仅当 $ev\in U$。所以 $V^*=V^{\theta*}$。

反过来，从 θ出发，令 $e=\theta(1)$。每个 $v\in V^{\theta*}$ 都满足 $v=v1=ev$，而推论 3.10 表明 $H_e=e(H)=\operatorname{lin}V^{\theta*}K$。根据定理 3.6的$\overline{\text{唯}}$一性条款，若我们按照上一段所述由 θ_e 构造出 $V^{\theta*}$，那么对于每个 $\theta_e(y)=e\theta(y)e$，都有 $y\in N$，因此 θ 恰好是 θ_e 与包含映射 $M_e\to M$的复合。这就证明了所述的双射。

为证明 (1)，我们需要证明：当 θ是保单位的时，V^θ 是余满射（另一个方向的蕴含已在推论 3.7 中证明），根据引理 3.9，这等价于 $\theta(N)'\supseteq M'$；显然这是成立的，因为 $\theta(N)\subseteq M$。

令 z为满足引理 3.11中 $\ker(\theta)=(1-z)N$ 条件的中心投影，因此 $V\circ V^*=zN'$。那么，θ 是单射，当且仅当 $z=1$，当且仅当 $V\circ V^*=N'$，当且仅当 V是满射（这里一如既往地 $V\circ V^*\subseteq N'$）。这就证明了 (2)。

由引理 3.9，$V^*\circ V=\theta(1)\theta(N)'$。若 V是单射，则 $\theta(1)\theta(N)'\subseteq M'$，故 $\theta(1)\in M'$因而 $e=\theta(1)$ 是中心的。由于 $\theta(N)\subseteq M$，我们有 $M'\subseteq\theta(N)'$ 因此 $e\theta(N)'\subseteq M'$意味着 $eM'\subseteq e\theta(N)'=e^2\theta(N)'\subseteq eM'$ 因此我们得到等式。在 $\mathcal{B}(e(H))$内部，再次由[22, 命题 II.3.10], 我们有 $(eM)'=eM'=e\theta(N)'=(e\theta(N))'$ 因此 $eM=e\theta(N)=$

$\theta(N)$，这表明 (3)的“仅当”部分。反之，若 e 是中心的且 $\theta(N) = eM$ 则 $e\theta(N)' = (e\theta(N))' = (eM)' = eM' = eM'e \subseteq M'$ 因此 V 是单射。

最后，如果 V 是量子函数，那么 θ 是保单位的，因此(3) 表明 V 是单射当且仅当 θ是满射，从而说明(4)。 □

最后，我们考虑两个范畴中的复合；比较 [10, 第 4] 节和第 [11,节 7]。

命题 3.13。 对于正规 $*$-同态 $\theta_1 \colon M_1 \to M_2$ 和 $\theta_2 \colon M_2 \to M_3$，我们有 $V^{\theta_1} \circ V^{\theta_2} = V^{\theta_2 \circ \theta_1}$。

证明。 可以直接证明这一点，但论证较为繁琐。相反，这将由下文的推广命题 4.9 推出，同时考虑命题4.7。 □

当一个量子关系 V 既是余单射又是单射时， V^* 也具有这些性质，因此存在一个正规 $*$-同态 $\theta \colon N \to M$ ，满足 $V = V^\theta$；以及一个正规 $*$-同态 $\theta^\star \colon M \to N$ ，满足 $V^{\theta^\star} = V^*$。现在我们描述 $\theta^\star$。令 $z \in N \cap N'$ 为满足 $\ker(\theta) = (1 - z)N$的中心投影，见引理 3.11；并回忆定理 3.12(3)中， $\theta(1) \in M$ 也是一个中心投影，且满足 $\theta(N) = \theta(1)M$。于是， θ 限制为一个 $*$-同构 $zN \to \theta(N) = \theta(1)M$。令 θ^{-1} 为其逆，并对每个 $x \in M$定义 $\theta^\star(x) = \theta^{-1}(\theta(1)x) \in zN \subseteq N$ ，因此 $\theta^\star$ 是一个正规 $*$-同态。

命题 3.14. 设 V 既是单射又是余单射，并设 $\theta^\star$ 如上所述。则$V^* = V^{\theta^\star}$。

证明. 从定义出发，我们得到以下一系列推论：

$$\begin{aligned} v \in V^{\theta^\star} \quad &\iff \quad xv = v\theta^\star(x) = v\theta^{-1}(\theta(1)x) \qquad (x \in M) \\ &\implies \quad \theta(y)v = vy \qquad (y = yz \in N). \end{aligned}$$

注意到 $\theta^\star(1) = \theta^{-1}(\theta(1)) = z$ ，因此 $v \in V^{\theta^\star}$ 意味着 $v = 1v = v\theta^\star(1) = vz$。所以对于 $y \in N$, 由于 $\theta(y) = \theta(zy)$, 我们看到对于任意 $y \in N$, 都有 $\theta(y)v = \theta(zy)v = vzy = vy$ ， 也就是说, $v^* \in V^\theta = V$。

反过来，给定 $v \in V^*$ ，我们有对每个 $y \in N$， $\theta(y)v = vy$。特别地， $v = \theta(1)v$。给定 $x \in M$， 令 $y = \theta^{-1}(\theta(1)x) \in zN$， 于是 $\theta(y) = x\theta(1)$，因此 $xv = x\theta(1)v = \theta(y)v = vy = v\theta^\star(x)$。所以 $v \in V^{\theta^\star}$ 且 $V^* = V^{\theta^\star}$ ， 如所声称。 □

我们最后按照 [11, 第 4]节，对可逆关系作一些说明。

命题 3.15。 设 U 是一个可逆的偏函数。那么 U^* 是 U的逆，因此 U 是一个既是单射又是满射的函数。

证明。 设 U 是一个从 M 到 N 的关系，其逆为从 N 到 M的 V。这意味着 $V \circ U = M'$ 以及 $U \circ V = N'$。根据假设， $U \circ U^* \subseteq N'$，但如前所述，由于 $U \circ U^*$ 也是一个 N'-双模，它在 N' 中构成一个弱*-闭理想，因此对于某个中心投影 z，它等于 zN' 。于是 $V^* \circ V \circ U \circ U^* = V^* \circ M' \circ U^* = V^* \circ U^* = (U \circ V)^* = N'$，但同时 $V^* \circ V \circ U \circ U^* = V^* \circ V \circ N'z = V^* \circ (Vz) \subseteq \mathcal{B}(K)z$，所以必然有 $z = 1$（例如，这是因为 N' 是保单位的）。

因此 $U \circ U^* = N'$。那么 $U^* \circ U = V \circ U \circ U^* \circ U = V \circ N' \circ U = V \circ U = M'$。所以 U 有逆 U^* ，因此 U 是一个既单射又满射的函数。 □

正如在 [11, 命题 4.7], 之后所指出的，我们当然可以有并非偏函数的可逆关系。

4 通道与关系

现在我们来研究一个类似于“量子混淆图”的概念。我们先从经典情形的动机谈起。

例 4.1. 从集合 X 到 Y 的噪声通信信道可以建模为条件概率分布 $p(y|x)$。因此，对每个$x \in X$，有 $p(y|x) \in [0,1]$ 和 $\sum_{y\in Y} p(y|x) = 1$。由此我们得到一个酉完全正映射 $\theta\colon \ell^\infty(Y) \to \ell^\infty(X)$;

$$\theta(f)(x) = \sum_{y\in Y} p(y|x) f(y) \qquad (x \in X, f \in \ell^\infty(Y)).$$

我们不妨（以一种或许不太标准的方式）称信道（或θ）给出的关系为 $R = \{(x,y) : p(y|x) > 0\}$，也就是说，这些配对为 (x,y)：以非零概率传输 x后，可以得到符号 y。该信道的混淆图是定义在 X 上的关系，其中 $x_1 \sim x_2$，当且仅当存在某个 y，使得 $(x_1,y) \in R$ 和 $(x_2,y) \in R$。

我们现在试图对一般的冯·诺伊曼代数做类似的事情。Verdon 在 [24], 中考察了这一想法的抽象版本，见下文第 5.1 节。对于形如 $L^\infty(\mathcal{X})$ 的代数，一个具体构造在 [12, 第 6]节中给出；我们在下文作进一步评述。

设 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ 与 $N \subseteq \mathcal{B}(K)$ 为冯·诺伊曼代数，并设 $\theta\colon N \to M$ 为正规完全正（CP）映射。则 θ 容许一个 Stinespring 膨胀：存在一个正规保单位的 $*$- 同态 $\pi_0\colon N \to \mathcal{B}(H_0)$、一个算子 $v_0\colon H \to H_0$，以及一个正规保单位的
$*$-同态 $\rho\colon M' \to \pi_0(N)'$，使得

$$\theta(y) = v_0^*\pi_0(y)v_0 \quad (y \in N), \qquad v_0x' = \rho(x')v_0 \quad (x' \in M').$$

注意，任何这样的“膨胀” (π_0, v_0, H_0) 都给出一个正规完全正映射 $N \to \mathcal{B}(H)$，而 ρ 的存在保证该映射映入 M。我们有：θ 是保单位的（酉完全正）当且仅当 v_0 是等距算子。若 $\operatorname{lin}\{\pi_0(y)v_0\xi : \xi \in H, y \in N\}$ 在 H_0 中稠密，则称该膨胀是 最小的。对适当的 ρ，最小膨胀总是存在，[22, 例如定理 IV.5.5]，并且在酉等价意义下是唯一的。

继续下去，我们可以将 π_0 扩张，得到等距算子 $u\colon H_0 \to K \otimes L$，使得对于每个 $y \in N$ 都有 $u\pi_0(y) = (y \otimes 1)u$，这是一种之前用过的技巧。接着 $\theta(y) = v_0^*\pi_0(y)v_0 = v_0^*u^*(y \otimes 1)uv_0$，因此令 $v = uv_0$，我们得到 $\theta(y) = v^*(y \otimes 1)v$。现在假设我们有某个算子$v\colon H_0 \to K\otimes L$，其中 L，且对于 $y \in N$ 有 $\theta(y) = v^*(y\otimes 1)v$。映射 $\iota\colon \pi_0(y)v_0\xi \mapsto (y\otimes 1)v\xi$ 可通过线性和连续性延拓为等距算子 $H_0 \to K\otimes L$，因为我们有 θ 的两个膨胀，也就是说，因为

$$\begin{aligned}((y_1 \otimes 1)v\xi_1|(y_2 \otimes 1)v\xi_2) &= (\xi_1|v^*(y_1^*y_2 \otimes 1)v\xi_2) = (\xi_1|\theta(y_1^*y_2)\xi_2)\\ &= (\pi_0(y_1)v_0\xi_1|\pi_0(y_2)v_0\xi_2) \qquad (y_1, y_2 \in N, \xi_1, \xi_2 \in H).\end{aligned}$$

于是，对于每个 $y \in N$，$\iota v_0 = v$ 和 $\iota\pi_0(y) = (y \otimes 1)\iota$。然后，我们可以通过 $\rho'(x') = \iota\rho(x')\iota^*$ 定义 $\rho'\colon M' \to \mathcal{B}(K \otimes L)$。由于 ι 是等距算子，ρ' 是一个 $*$-同态。对于 $x' \in M'$，$y \in N$，我们看到 $\rho'(x')(y\otimes 1) = \iota\rho(x')\pi_0(y)\iota^* = \iota\pi_0(y)\rho(x')\iota^* = (y\otimes 1)\rho'(x')$，因此 $\rho'(x') \in (N\otimes 1)' = N'\bar{\otimes}\mathcal{B}(L)$。此外，$\rho'(x')v = \iota\rho(x')\iota^*\iota v_0 = \iota v_0x' = vx'$，因此 ρ' 满足与 ρ类似的性质。

定理 4.2。 设 $\theta\colon N \to M$ 是一个正规完全正映射，其膨胀由算子 $v\colon H \to K \otimes L$给出，使得对于 $y \in N$, $\theta(y) = v^*(y \otimes 1)v$ 。那么

$$V = \mathrm{lin}\{y'(1 \otimes \langle\xi|)v : \xi \in L, y' \in N'\}^{-w^*} \subseteq \mathcal{B}(H, K)$$

是一个从 M到 N的量子关系，其定义仅取决于 θ ，而不取决于所选的膨胀。事实上，设 (π_0, H_0, v_0) 是 θ的最小膨胀，并考虑量子函数 $V^{\pi_0} \subseteq \mathcal{B}(H_0, K)$。那么 V 是 $\{xv_0 : x \in V^{\pi_0}\}$的弱*闭包。

证明。 如上所述，存在一个对 v具有交织性质的 $\rho'\colon M' \to N' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$ 。对于 $\xi \in H_1$，由弱*连续性可得 $(1 \otimes \langle\xi|)vx' = (1 \otimes \langle\xi|)\rho'(x')v \in (1 \otimes \langle\xi|)(N' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L))v \in V$。因此， V是一个右 M'-模；根据定义，它也是左 N'-模，故是一个从 M到 N的量子关系。

令 (π_0, H_0, v_0) 为 θ的最小膨胀，并如上所述，考虑等距算子 $\iota\colon H_0 \to K \otimes L$，它满足 $\iota v_0 = v$。令

$$W_0 = \mathrm{lin}\{y'(1 \otimes \langle\xi|)\iota : \xi \in L, y' \in N'\} \subseteq \mathcal{B}(H_0, K),$$

并令 W 为 W_0的弱*-闭包，我们有 V 是 $\{xv_0 : x \in W_0\}$的弱*-闭包。由于先与 v_0 复合这一操作是弱*-连续的， V 也是 $\{xv_0 : x \in W\}$的弱*-闭包。我们将证明 $W = V^{\pi_0}$。

显然， W 是一个 N'-$\mathcal{B}(H_0)'$-双模，因此是一个从 $\mathcal{B}(H_0)$ 到 N的量子关系。 $W_0 \circ W_0^*$的典型元素为 $y_1'(1 \otimes \langle\xi_1|)\iota\iota^*(1 \otimes |\xi_2\rangle)y_2' = y_1'(\mathrm{id} \otimes \omega_{\xi_1, \xi_2})(\iota\iota^*)y_2' \in N'$，因为对于 $y \in N$，根据交换关系 $(y \otimes 1)\iota = \iota\pi_0(y)$ 有 $\iota\iota^* \in (N \otimes 1)' = N' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$ 。取弱*-闭包可知， $W \circ W^* \subseteq N'$也成立，即 W 是余单射。根据定理 3.12，存在一个正规 $*$-同态 $\pi\colon N \to \mathcal{B}(H_0)$ ，使得 $W = V^\pi$。特别地，对于 $y \in N, x \in W$，有 $x\pi(y) = yx$。然而，对于 $x = y'(1 \otimes \langle\xi|)\iota \in W_0$ ，我们发现

$$y'(1 \otimes \langle\xi|)\iota\pi(y) = yy'(1 \otimes \langle\xi|)\iota = y'(1 \otimes \langle\xi|)(y \otimes 1)\iota = y'(1 \otimes \langle\xi|)\iota\pi_0(y) \qquad (y \in N).$$

由于这对所有 y'、ξ 都成立，我们得到 $\iota\pi(y) = \iota\pi_0(y)$；又由于 ι 是等距算子，可知 $\pi = \pi_0$。因此，如所声称的，

$$W = V^{\pi_0} = \{x \in \mathcal{B}(H_0, K) : yx = x\pi_0(y)\ (y \in N)\}.$$

由此我们证明了定理的第二个结论。但我们只用 θ 的最小膨胀中的数据就表示出了 V，因此可知， V 的初始定义不依赖于 v 的选择。

□

定义 4.3. 用 V^θ 表示由完全正映射 θ 定义的量子关系。

例 4.4. 让我们回到例 4.1，即从 X 到 Y的（经典）信道。酉完全正映射 $\theta\colon \ell^\infty(Y) \to \ell^\infty(X)$ 的一个膨胀为 $v\colon \ell^2(X) \to \ell^2(Y) \otimes \ell^2(X)$； $\delta_x \mapsto \sum_y p(y|x)^{1/2}\delta_y \otimes \delta_x$ 于是

$$v^*(f \otimes 1)v\delta_x = v^* \sum_y p(y|x)^{1/2} f(y)\delta_y \otimes \delta_x = \sum_y p(y|x) f(y)\delta_x = \theta(f)\delta_x.$$

令 $e_y \in \ell^\infty(Y)$ 为投影到单点 y 上的极小投影，并令 $e_{y,\,x}$ 为秩一映射 $\ell^2(X) \to \ell^2(Y)$； $\delta_x \mapsto \delta_y$ 且对于 $z \neq x$， $\delta_z \mapsto 0$ 。我们看到 $(1 \otimes \langle\delta_x|)v\delta_z = \delta_{x,z} \sum_y p(y|x)^{1/2}\delta_y = \sum_y p(y|x)^{1/2} e_{y,\,x}\delta_z$。因此，量子关系为

$$\begin{aligned} V &= \mathrm{lin}\{e_y(1 \otimes \langle\delta_x|)v : x \in X, y \in Y\}^{-w^*} = \mathrm{lin}\{p(y|x)^{1/2} e_{y,x} : x \in X, y \in Y\}^{-w^*} \\ &= \mathrm{lin}\{e_{y,x} : p(y|x) \neq 0\}^{-w^*}. \end{aligned}$$

也就是说，该量子关系由与信道相关联的关系 R 给出，正如我们所预期的；请比较下文的例子 5.5 。

注 4.5。考虑 $V^{\theta *} \circ V^{\theta}$，它是 M 上的一个量子关系。这等于

$$\begin{aligned} &\operatorname{lin}\{v^*(1 \otimes |\xi_1\rangle) y'(1 \otimes \langle \xi_2|) v : y' \in N', \xi_1, \xi_2 \in H_1\}^{-w^*} \\ &= \operatorname{lin}\{v^*(y' \otimes T)) v : y' \in N', T \in \mathcal{B}(H_1)\}^{-w^*} \\ &= \operatorname{lin}\{v^* S v : S \in N' \bar{\otimes} \mathcal{B}(H_1)\}^{-w^*} \end{aligned}$$

与 [6, 注 7.6] 比较可知， $V^{\theta *} \circ V^{\theta}$ 是平凡量子图 N' 的拉回，等价地说，是 θ的量子混淆图。因此， V^{θ} 确实可以视为与 θ相关联的“关系”。

注记 4.6。特别地，当 θ 是酉完全正时，我们看到 $1 \in V^{\theta *} \circ V^{\theta}$ ，因此由双模性质可得 $M' \subseteq V^{\theta *} \circ V^{\theta}$ ，所以 V^{θ} 是余满射。

现在我们说明，此处的构造推广了上一节针对量子函数和 $*$-同态的构造，因此 V^{θ} 并非容易引起混淆的记号。

命题 4.7。 设 $\theta: N \to M$ 是一个正规 $*$-同态。那么由定理V *4.2* 给出的 V^{θ}是与 θ相关联的量子函数。

证明。 将 θ 视为完全正映射，我们得到如下的膨胀 (π_0, v_0, H_0) 。令 $e = \theta(1)$为 M 中的一个投影，使得对每个 $y \in N$都有 $e\theta(y) = \theta(y)e = \theta(y)$ 。令 $H_0 = e(H)$ 和 π_0 为以 $eMe \subseteq \mathcal{B}(H_0)$为陪域的 θ。令 $v_0: H \to H_0$ 为投影 e。于是

$$v_0^* \pi_0(y) v_0 = e\theta(y)e = \theta(y) \qquad (y \in N),$$

因此，我们确实得到了一个膨胀。此外，$\operatorname{lin}\{\pi_0(y)v_0\xi : \xi \in H, y \in N\} = \operatorname{lin}\{\theta(y)e\xi : \xi \in H, y \in N\} = e(H) = H_0$ ，所以该膨胀是最小的。根据定理 4.2，可得 $V = V^{\pi_0} e$，因为它是弱*闭的，这是因为 e 是幂等的。

令 $x \in V^{\pi_0}$，于是 $x: H_0 \to K$ 对 $y \in N$满足 $yx = x\pi_0(y) = x\theta(y)|_{H_0}$ 。因此 $yxe = x\theta(y)e = x\theta(y)$ ，所以 $xe \in V^{\theta}$。反过来，令 $x \in V^{\theta}$ 并设 $x_0 = x|_{H_0}: H_0 \to K$。那么，对 $y \in N$ 有 $yx_0 = yx|_{H_0} = x\theta(y)|_{H_0} = x|_{H_0}\pi_0(y) = x_0\pi_0(y)$，所以 $x_0 \in V^{\pi_0}$，进而有 $x_0 e = xe = x\theta(1) = 1x = x$。由此可得 $V = V^{\pi_0} e = V^{\theta}$ ，如所声称。 □

到目前为止， V^{θ}虽然与所选取的 θ膨胀无关，但确实取决于表示 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$ 和 $N \subseteq \mathcal{B}(K)$。现在我们证明，如果改变$H$， K 那么V^{θ} 会以我们根据推论2.7所预期的确切方式发生变化。

命题4.8。 给定一个酉完全正映射 $\theta: N \to M$，V^{θ} 的定义不取决于其作用于哪些希尔伯特空间的选择 M， N 。

证明。 设 $\theta_M: M \to \mathcal{B}(H_1)$ 是一个由 $u_M: H_1 \to H \otimes L_1$膨胀的保单位单射正规 $*$-同态，N也类似。设 $\theta_1: N \to M$ 为完全正映射 θ，现将其视为从 $\theta_N(N) \subseteq \mathcal{B}(K_1)$ 到 $\theta_M(M) \subseteq \mathcal{B}(H_1)$的映射，即 $\theta_M \circ \theta = \theta_1 \circ \theta_N$。设$(\pi_0', H_0', v_0')$ 是 θ_1的最小膨胀，并再次设 (π_0, H_0, v_0) 是θ 的最小膨胀。对于 y_1、 $y_2 \in N$、 ξ_1、 $\xi_2 \in H_1$，我们有

$$\begin{aligned} (\pi_0'\theta_N(y_1)v_0'\xi_1 | \pi_0'\theta_N(y_2)v_0'\xi_2) &= (\xi_1 | \theta_M(\theta(y_1^* y_2))\xi_2) = (u_M\xi_1 | (\theta(y_1^* y_2) \otimes 1)u_M\xi_2) \\ &= \big((\pi_0(y_1)v_0 \otimes 1)u_M\xi_1 \big| (\pi_0(y_2)v_0 \otimes 1)u_M\xi_2\big). \end{aligned}$$

因此，映射 $\alpha\colon \pi_0'\theta_N(y)\nu_0'\xi \mapsto (\pi_0(y)\nu_0\otimes 1)u_M\xi$ 可通过线性性和连续性延拓为等距算子 $H_0' \to H_0\otimes L_1$，它满足 $\alpha\pi_0'\theta_N(y) = (\pi_0(y)\otimes 1)\alpha$ 和 $\alpha\nu_0' = (\nu_0\otimes 1)u_M$。因此，$\alpha\alpha^* \in (\pi_0(N)\otimes 1)'$，且 $\pi_0'\theta_N(y) = \alpha^*(\pi_0(y)\otimes 1)\alpha$。

根据定义，$x\colon H_0' \to K_1$ 属于 $V^{\pi_0'}$ 当且仅当对每个 $y\in N$，$\theta_N(y)x = x\pi_0'(y)$ 成立；接着仿照命题 3.8 的证明可知，这等价于 $u_N x\alpha^* \in V^{\pi_0}\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1,L_2)$。因此，$V^{\theta_1}$ 是形如 $x\nu_0'$ 的映射的弱*-闭包，其中 x满足相应条件。由于 $\nu_0' = \alpha^*(\nu_0\otimes 1)u_M$，我们看到对某个 $x_0\in V^{\pi_0}\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1,L_2)$有 $x\nu_0' = x\alpha^*(\nu_0\otimes 1)u_m = u_N^* x_0(\nu_0\otimes 1)u_M$。于是$x_0(\nu_0\otimes 1)\in V^{\theta}\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1,L_2)$，因此 $x\nu_0' \in u_N^*(V^{\theta}\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1,L_2))u_M$；根据注 2.8，这恰好就是 $\tilde{V}^{\theta}$，即由 V^{θ}诱导的从 $\theta_M(M)$ 到 $\theta_N(N)$ 的量子关系。

反之，$\tilde{V}^{\theta}$ 的弱*稠密子空间是 $\{u_N^*(x\nu_0\otimes t)u_M : x\in V^{\pi_0}, t\in\mathcal{B}(L_1,L_2)\}$。给定这样的 $a = u_N^*(x\nu_0\otimes t)u_M \in \tilde{V}^{\theta}$，令 $x_1 = u_N^*(x\otimes t)\alpha$，因此根据双模性质有 $u_N x_1\alpha^* = u_N u_N^*(x\otimes t)\alpha\alpha^* \in V^{\pi_0}\bar{\otimes}\mathcal{B}(L_1,L_2)$。于是 $x_1\in V^{\pi_0'}$，从而 $x_1\nu_0'\in V^{\theta_1}$。然后 $x_1\nu_0' = u_N^*(x\otimes t)\alpha\nu_0' = u_N^*(x\nu_0\otimes t)u_M = a$。由于 V^{θ_1} 是弱*-闭的，这表明$\tilde{V}^{\theta}\subseteq V^{\theta_1}$，证明完毕。□

我们还有命题 3.13 的一个完全类似的结果。

命题 4.9。设 $\theta_1\colon M_1\to M_2$ 和 $\theta_2\colon M_2\to M_3$ 是完全正映射，其中对于 $i=1$、2、3，$M_i\subseteq\mathcal{B}(H_i)$ 是冯·诺依曼代数。则 $V^{\theta_2\circ\theta_1} = V^{\theta_1}\circ V^{\theta_2}$。

证明。设 $u_1\colon H_2\to H_1\otimes L_1$ 扩张 θ_1，且 $u_2\colon H_3\to H_2\otimes L_2$ 扩张 θ_2。对于 $x\in M_1$，我们有

$$\theta_2(\theta_1(x)) = u_2^*(\theta_1(x)\otimes 1)u_2 = u_2^*(u_1\otimes 1)^*(x\otimes 1\otimes 1)(u_1\otimes 1)u_2,$$

因此 $u = (u_1\otimes 1)u_2$ 扩张 $\theta_2\circ\theta_1$。于是，当我们取线性张成和闭包时，

$$\begin{aligned} V^{\theta_2\circ\theta_1} &= \mathrm{lin}\{y'(1\otimes\langle\xi\otimes\eta|)u : \xi\in L_1,\eta\in L_2, y'\in M_1'\}^{-w^*}\\ &= \mathrm{lin}\{y'(1\otimes\langle\xi|)u_1(1\otimes\langle\eta|)u_2 : \xi\in L_1,\eta\in L_2, y'\in M_1'\}^{-w^*}\\ &= \mathrm{lin}\{x(1\otimes\langle\eta|)u_2 : x\in V^{\theta_1},\eta\in L_2\}^{-w^*}\\ &= \mathrm{lin}\{xy'(1\otimes\langle\eta|)u_2 : x\in V^{\theta_1},\eta\in L_2, y'\in M_2'\}^{-w^*}\\ &= V^{\theta_1}\circ V^{\theta_2}, \end{aligned}$$

倒数第二步使用了 V^{θ_1} 是一个右 M_2'-模这一事实。□

这个命题表明，$\theta\mapsto V^{\theta}$ 是相关范畴之间的一个函子。另请参阅我们下面关于 [24]的讨论，尤其是命题 5.10和5.11。

给定一个完全正映射 $\theta\colon N\to M$，其膨胀为 $\theta(y) = v^*(y\otimes 1)v$，对应于某个算子 $v\colon H\to K\otimes L$，取 L 的一个正交归一基 $(e_i)_{i\in I}$，从而存在算子 $b_i\colon H\to K$，使得对每个 $\xi\in H$ 有 $v(\xi) = \sum_{i\in I} b_i(\xi)\otimes e_i$，因而 $\sum_i b_i^* b_i = v^*v < \infty$。于是 $\theta(y) = \sum_{i\in I} b_i^* y b_i$ 是 θ 的一个*Kraus* 表示。以下内容应与 [12, 命题 6.1(3)] 相比较。

命题 4.10. 设 $\theta\colon N\to M$ 对 $y\in N$ 具有 *Kraus* 表示 $\theta(y) = \sum_{i\in I} b_i^* y b_i$。相应的量子关系为

$$V^{\theta} = \mathrm{lin}\{y' b_i : y'\in N', i\in I\}^{-w^*}.$$

证明。由于任意 $\xi\in L$ 都具有如下形式 $\xi = \sum_i \xi_i e_i$ 其中 (ξ_i)为平方可和，故可知 $(1\otimes\langle\xi|)v = \sum_i \xi_i b_i$，因此根据定理 V^{θ} 4.2 中 的定义以及一个标准的逼近论证，即可得出所述结论。□

注 4.11。 如注 4.6中所述，当 θ 是酉完全正映射时， V^θ 是余满射。我们可能会想知道，每个从 V 到 M 的 N 余满射量子关系是否都来自某个酉完全正映射 $N \to M$? 下面给出一个例子，说明情况并非如此。

令 $M = N = \mathbb{M}_2$ ，因此，从 M 到 N 的量子关系只是一个子空间 $V \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{C}^2, \mathbb{C}^2) = \mathbb{M}_2$。令

$$\hat{u}_1 = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \hat{u}_1, \quad u_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{8} & 0 \\ 0 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

于是 $u_1^* u_1 = \hat{u}_1^* \hat{u}_1$ 且 $u_1^* u_1 - u_2^* u_2 = 1$。令 $V = \mathrm{lin}\{u_1, u_2\}$，于是 $1 \in V^* \circ V$，因此 V 是余满射的。

假设存在一个酉完全正映射 $\theta\colon N \to M$，使得 V。令 (π, u, H) 为 θ 的一个极小 Stinespring 表示，因此 $\pi\colon \mathbb{M}_2 \to \mathcal{B}(H)$，且 $u\colon \mathbb{C}^2 \to H$ 是一个等距算子，并且对每个 $y \in \mathbb{M}_2$ 都有 $u^* \pi(y) u = \theta(y)$。那么，对某个 H_1 和 $\pi(y) = y \otimes 1$，有 $H = \mathbb{C}^2 \otimes H_1$。取 H_1 的一个正交归一基 (δ_i)，并令 $b_i \in \mathbb{M}_2$，使得对每个 $\xi \in \mathbb{C}^2$ 都有 $u(\xi) = \sum_i b_i(\xi) \otimes \delta_i$。那么 $\theta(y) = \sum_i b_i^* y b_i$ 是一个 Kraus 表示。极小性意味着 $\mathrm{lin}\{\pi(y)u\xi : y \in \mathbb{M}_2, \xi \in \mathbb{C}^2\}$ 在 H 中稠密，也就是说，

$$\mathbb{C}^2 \otimes H_1 = \overline{\mathrm{lin}}\Big\{ \sum_i y b_i \xi \otimes \delta_i : y \in \mathbb{M}_2, \xi \in \mathbb{C}^2 \Big\} = \mathrm{lin}\Big\{ \sum_i e_{st} b_i \delta_r \otimes \delta_i : 1 \leqslant s, t, r \leqslant 2 \Big\},$$

其中我们去掉闭包，因为第二个表达式显然是有限维的。因此， H_1 是有限维的（事实上，其维数至多为 4）。确实，由于 $e_{st} b_i \delta_r = (\delta_t | b_i \delta_r) \delta_s$ ，这等价于

$$H_1 = \mathrm{lin}\{\xi_{t,r} : 1 \leqslant t, r \leqslant 2\} \quad \text{where} \quad \xi_{t,r} = \sum_i (\delta_t | b_i \delta_r) \delta_i.$$

假设我们有标量 s_i，满足 $\sum_i s_i b_i = 0$。那么对每个 t， r 都有

$$0 = \sum_i (\delta_t | s_i b_i \delta_r) = (\bar{s} | \xi_{t,r}),$$

其中 $s_- = \sum_i s_i \delta_i$。由于 $\{\xi_{t,r}\}$ 张成 H_1 这等价于 $s = 0$，也就是说， $s_i = 0$ 对每个 i。因此 b_i 线性无关。由命题 4.10 可知 $V = \mathrm{lin}\{b_i\}$ ，因此 b_i 构成 V的一个基。

因此， $\{u_1, u_2\}$和 $\{b_1, b_2\}$是 V的基。因此存在一个矩阵 $B \in \mathbb{M}_2$ wit h

$$B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \implies 1 = b_1^* b_1 + b_2^* b_2 = \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* \end{pmatrix} B^* B \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1^* & u_2^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s & \mu \\ \bar{\mu} & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$
$$= s u_1^* u_1 + \mu u_1^* u_2 + \bar{\mu} u_2^* u_1 + t u_2^* u_2,$$

也就是说，其中 B^*B 是正定的， s、 $t \geqslant 0$ 和 $|\mu^2| \leqslant st$。观察 $\mathbb{M}_2$的右上角元素，我们有

$$u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} \implies u_2^* u_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{8} & 2\sqrt{8} \\ -3\sqrt{3} & 2\sqrt{3} \end{pmatrix} \implies 0 = -\mu 3\sqrt{3} + \bar{\mu} 2\sqrt{8},$$

但这就与 $|\mu| 3\sqrt{3} = |\mu| 2\sqrt{8}$ 矛盾了。

这一矛盾表明， V 不可能由酉完全正映射 θ产生。

注 4.12。 当 $M = \mathbb{M}_m$， $N = \mathbb{M}_n$由于交换子是平凡的，取任意 (b_i) 的 $V \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{C}^m, \mathbb{C}^n)$ 一组基 (b_i) 并将其作为 Kraus 算子，我们很容易得到一个完全正$\theta\colon N \to M$ ，满足 $V^\theta = V$，由命题 4.10。我们将在下文的推论 5.15 中用不同的技巧将此结果推广到所有有限维冯·诺依曼代数。

描述哪些量子关系可以作为 V^θ 且 θ为酉完全正映射而出现，将会很有意思。注4.11 中给出的反例似乎是，我们构造了V且 $V^* \circ V$保单位，但不存在 (b_i) 的 V的张成集 $\sum_i b_i^* b_i = 1$。量子图中不会出现同样的现象， [8, 引理 2], 似乎是因为一个微妙的相互作用：量子图既是自伴的，又是保单位的，因此具有良好的正性概念。

4.1 拉回

在 [27] Weaver 定义了拉回的概念，即利用一个（酉）完全正映射变换（定义在单个代数上的）量子关系的一种方法。现在，我们将其推广到定义在两个代数上的量子关系，并展示它与上一节内容的联系。我们先回顾对拉回的处理，见 [6, 定理 7。5]。设 $V \subseteq \mathcal{B}(H_1)$ 是冯·诺依曼代数$M_1 \subseteq \mathcal{B}(H_1)$上的一个量子关系，且设 $\theta\colon M_1 \to M_2$ 是一个正规完全正映射。令 (π, L, v) 为 θ的一个膨胀，则 V的拉回是 $\overleftarrow{V}^\theta$ 的弱*闭包，其中 $v^* V_\pi v$如 V_π 引理2.6中所述。此定义与所选的膨胀无关，并且 $\overleftarrow{V}^\theta \subseteq \mathcal{B}(H_2)$ 是 M_2上的一个量子关系。当上下文明确时，如果所用的完全正映射 θ 清楚，我们将记作 $\overleftarrow{V}$

这一定义可直接推广到本文所研究的量子关系。

命题 4.13. 对于 $i = 1,2$，设 $M_i \subseteq \mathcal{B}(H_i), N_i \subseteq \mathcal{B}(K_i)$ 为冯·诺伊曼代数，设 $V \subseteq \mathcal{B}(H_1, K_1)$ 为从 M_1 到 N_1的量子关系，并设 $\theta_M\colon M_1 \to M_2$ 与$\theta_N\colon N_1 \to N_2$ 为正规完全正映射。将 $V \subseteq \mathcal{B}(H_1 \oplus K_1)$ 视为 $M_1 \oplus N_1$上的量子关系，设 $\theta = \theta_N \oplus \theta_M$，并构造拉回 $U = \overleftarrow{V}^\theta$。则：

1. $1_{N_2} U 1_{M_2} = U$，因此 U 定义了从 M_2 到 N_2的量子关系；
2. 在 $\theta_M(x) = u_M^*(x \otimes 1)u_M, \theta_N(y) = u_N^*(y \otimes 1)u_N$ 扩张下，例如 $u_M\colon H_2 \to H_1 \otimes L_M$, $u_N\colon K_2 \to K_1 \otimes L_N$，作为 $\mathcal{B}(H_2, K_2)$ 的子空间，我们有 U 是 $u_N^*(V \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_M, L_N))u_M$的弱* 闭包。

证明。 我们采用与备注 2.8类似的论证。给定 θ_M 和 θ_N的扩张，我们可知 θ的膨胀为

$$u\colon H_2 \oplus K_2 \to (H_1 \oplus K_1) \otimes (L_M \oplus L_N) \cong (H_1 \otimes L_M) \oplus (H_1 \otimes L_N) \oplus (K_1 \otimes L_M) \oplus (K_1 \otimes L_N),$$

即 $u = u_N \oplus 0 \oplus 0 \oplus u_M$。根据定义 $U = u^*(V \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_M \oplus L_N))u$。注意 $u 1_{M_2} = (1_{M_1} \otimes 1)u$，类似地 $u 1_{N_2} = (1_{N_1} \otimes 1)u$，因此 $U 1_{M_2} = u^*(V \bar{\otimes} \mathcal{B}(L_M \oplus L_N))(1_{M_1} \otimes 1)u = U$ ，因为 $V 1_{M_1} = V$，类似地 $1_{N_2} U = U$。最后一个结论由备注 2.8中的计算得出；此处由于 u_M， u_N 是一般算子（例如不满足 $u_M u_M^* \in (M \otimes 1)'$），我们需要取弱*闭包。

□

至于量子混淆图， [6, 备注 7。6], 我们发现 V^θ对于 θ一个完全正映射，可以表示为一个拉回。

命题 4.14。 给定一个酉完全正映射 $\theta\colon N \to M$，量子关系 V^θ 是平凡关系 N' 沿完全正映射 $\theta \oplus 1\colon N \oplus N \to M \oplus N$的拉回。

证明。 令 $\nu\colon H \to K \otimes L$ 扩张 θ，因此根据定义和定理 4.2， $V^\theta = \lin\{y'(1 \otimes \langle\xi|)\nu : \xi \in L, y' \in N'\}^{w^*}$。完全正映射 $\theta \oplus 1$ 由这对 $(\nu, 1)$扩张，因此

$$\overleftarrow{N'} = 1(N' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L, \mathbb{C}))\nu^{-w^*} = \lin\{y'(1 \otimes \langle\xi|)\nu : \xi \in L, y' \in N'\}^{-w^*} = V^\theta,$$

如所需。 □

接下来，我们说明拉回可以用关系的复合以及由完全正映射 θ_M 和 θ_N定义的关系来表示；对于形如 $L^\infty(X)$的代数，另见 [12,命题 6.1]。

命题 4.15。我们有 $\overleftarrow{V} = V^{\theta_N *} \circ V \circ V^{\theta_M}$。

证明。 沿用命题 4.13中的记号。然后，由于我们取弱*-闭包，只需考虑 $\mathcal{B}(L_M, L_N)$ 中的秩一算子，因此

$$\begin{aligned}
\overleftarrow{V} &= \lin\{u_N^*(\nu \otimes t)u_M : \nu \in V, t \in \mathcal{B}(L_M, L_N)\}^{-w^*} \\
&= \lin\{u_N^*(\nu \otimes |\eta\rangle\langle\xi|)u_M : \nu \in V, \xi \in L_M, \eta \in L_N,\}^{-w^*} \\
&= \lin\{u_N^*(1 \otimes |\eta\rangle)\nu(1 \otimes \langle\xi|)u_M : \nu \in V, \xi \in L_M, \eta \in L_N,\}^{-w^*} \\
&= \lin\{u_N^*(1 \otimes |\eta\rangle)y'\nu x'(1 \otimes \langle\xi|)u_M : \nu \in V, \xi \in L_M, \eta \in L_N, x' \in M_1', y' \in N_1'\}^{-w^*},
\end{aligned}$$

在最后一步中，利用 V 是一个 N_1'-M_1'-双模。由定理 4.2，我们识别出关系 V^{θ_M} 和 $V^{\theta_N *}$，从而得到 $\overleftarrow{V} = V^{\theta_N *} \circ V \circ V^{\theta_M}$。 □

这就给出了 一个关于复合如何与拉回构造相互作用的简单证明。

推论 4.16。给定这里所考虑形式的完全正映射 $\theta_1\colon M_1 \oplus N_1 \to M_2 \oplus N_2$和 $\theta_2\colon M_2 \oplus N_2 \to M_3 \oplus N_3$，以及一个从 M_1到 N_1的量子关系 V，我们有 $\overleftarrow{V}^{\theta_2 \circ \theta_1} = (V^{\leftarrow \theta_1})^{\leftarrow \theta_2}$。

证明。现在利用命题 4.9即可立即得到结论。 □

注 4.17。特别地，给定一个 V 定义在单个代数 M_1上的量子关系，以及一个单独的完全正映射 $\theta\colon M_1 \to M_2$，我们有 $\overleftarrow{V} = V^{\theta *} \circ V \circ V^\theta$。与注 4.5中一样，酉完全正映射 θ的量子混淆图是平凡量子关系的拉回，因此为$V^{\theta *} \circ M_2' \circ V^\theta = V^{\theta *} \circ V^\theta$。

注 4.18. 假设 θ_M， θ_N 并且实际上是保单位的正规 $*$-同态。比较命题 4.13 与注 2.8 立即表明， V_θ，即由 V 沿同态 θ诱导的量子关系，等于 $\overleftarrow{V}$，即拉回。根据命题 4.15，这等于 $V^{\theta_N *} \circ V \circ V^{\theta_M}$，其中 V^{θ_M}与 V^{θ_N}在此为余单射，如第 3 节。特别地，取 θ_M， θ_N 为单射，从而根据定理 3.12， V^{θ_N}， V^{θ_M} 为量子函数，这表明我们如何仅利用量子关系范畴内的复合，来计算改变我们的代数所作用的希尔伯特空间对量子关系的影响。

5 邻接算子

在量子图的一般理论中，至少当我们的冯·诺依曼代数 M 是有限维时，量子关系 $V \subseteq \mathcal{B}(H)$（即 M'-双模，其中 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$）与量子邻接算子，即某些算子$A \in \mathcal{B}(L^2(M))$之间存在双射。我们在 [6, 第 5] 节中以相当一般的方式探讨了这一点。从 [3, 15]出发，另一种（或许可称为“平行”的）方法是考察完全正的映射 $A\colon M \to M$： 这一点在 [25]中有进一步阐述。利用Choi矩阵构造的推广， [6, 第 5.4]节与 [25, 第 3.1], 节中这样的 A 与正元素 $e \in M \otimes M^{op}$ 构成双射，进而， A 是Schur幂等的当且仅当 e 是幂等的（因而为一个投影）。我们将遵循 [25] 与 [7], 中所给出的约定，下文将作更多说明。

本节中，我们将对该理论作出适当修改，以处理两个冯·诺依曼代数 M 和 N之间的一般量子关系，并采用定义 2.4所建议的方法。选取忠实正泛函 φ_M, φ_N 在 M, N 上，并分别在相应空间上表示 M ，其 GNS空间为 $L^2(M) = L^2(\varphi_M)$；以及在 $L^2(\varphi_N)$上表示 N 。我们记$\Lambda = \Lambda_M\colon M \to L^2(M)$ 为 GNS映射；在此情形下，它是一个线性双射，因为 M 是有限维的。若上下文明确，我们通常省略下标。

乘法映射 $M\otimes M \to M$诱导出一个（有界）线性映射 $m = m_M\colon L^2(M)\otimes L^2(M) \to L^2(M)$; 对于 N也同样如此。特别地，我们有伴随 $m^*\colon L^2(M) \to L^2(M) \otimes L^2(M)$ ，它同样可以视为线性映射 $M \to M \otimes M$。在 上的 *Schur*积为$\mathcal{B}(L^2(M))$，其中 $A \star B = m(A \otimes B)m^*$， A。$B \in \mathcal{B}(L^2(M))$由于 M和 N均为有限维，我们将 $\mathcal{B}(L^2(M))$与 $\mathcal{B}(M)$等同，依此类推，因此也将 Schur积视为定义在 $\mathcal{B}(M)$上。受定义 2.4启发，我们有如下结论。

定义5.1. 从 M 到 N 的量子邻接算子是一个完全正（CP）映射 $A\colon M \oplus N \to M \oplus N$ ，它是Schur幂等的，并且满足 $1_N A 1_M = A$。

同样， 1_N 是 $N \subseteq M \oplus N$的单位元；在此我们也将其视为在$M \oplus N$上的投影；$(x, y) \mapsto (0, y)$，对于 1_M也类似。我们指出，由于（例如） $M \oplus N$在 $L^2(M) \oplus L^2(N)$上以“对角”方式作用，因此 A 是一个“角”并不妨碍它是完全正的（如果将其理解为作用在两个希尔伯特空间直和上的正算子，这一点可能显得奇怪）。事实上，很容易看出，当且仅当存在一个线性映射$A'\colon M \to N$，使得对 $x \in M$有 $A(x \oplus y) = 0 \oplus A'(x)$ 时， $1_N A 1_M = A$ 成立；此时， A 是完全正的，当且仅当A' 是完全正的。我们可以在 $\mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$ 上定义Schur积： $A' \star B' = m_N(A' \otimes B')m_M^*$；于是， A 是Schur幂等的，当且仅当 A' 是。由此得到以下等价定义。

定义 5.2。从 M 到 N 的量子邻接算子是一个完全正映射$A\colon M \to N$ ，且为 Schur 幂等。

我们将采用第二种定义，但第一种等价定义使我们能够快速应用现有理论，即在 $M = N$ 时的情形。我们不再赘述取直和再取角的（略显繁琐的）推导，而是直接陈述这一更一般情形下的结果，并偶尔指出它们如何由直和形式推导得出。

此时，我们需要使用 φ_M 的模自同构群，因此先固定一些额外的记号。我们希望在 M 上选取一个参考迹，其中 马尔可夫

迹 Tr_M 最为合适。这是 M 上唯一的迹，满足：若我们构造 GNS空间 $L^2(M)$ 和 GNS表示 $\pi_M\colon M \to \mathcal{B}(L^2(M))$，则有 $\mathrm{Tr} \circ \pi_M = \mathrm{Tr}_M$，其中 Tr 是 $\mathcal{B}(L^2(M))$上的规范迹。更多内容请参见下文的例子 [6, 引理 7。12], 和注 5.8。存在一个正可逆算子 $Q_M \in M$，满足 $\varphi_M(x) = \mathrm{Tr}_M(Q_M x)$对每个 $x \in M$都成立。于是，模自同构群 $(\sigma_t^M) = (\sigma_t)$、模共轭 $J = J_M$ 和模算子 $\nabla = \nabla_M$ 可定义如下：

$$\sigma_t(x) = Q_M^{it} x Q_M^{-it}, \quad J\Lambda(x) = \Lambda(\sigma_{-i/2}(x^*)), \quad \nabla\Lambda(x) = \Lambda(QxQ^{-1}) \qquad (x \in M).$$

更多说明可见 [6, 第 5] 节，例如。

回顾第 1.1 节关于相反代数的讨论。遵循 [6, 第 5 节。4]我们定义一个线性双射

$$\Psi'\colon \mathcal{B}(L^2(M), L^2(N)) \to N \otimes M^{\mathrm{op}}; \quad |\Lambda(x)\rangle\langle\Lambda(y)| \mapsto x \otimes \sigma_{i/2}(y)^{*\mathrm{op}}.$$

这个映射是对“Choi矩阵”构造的一种推广， [4,定理 2]。

定理 5.3。 映射 Ψ' 在映射 $A\colon M \to N$ 和 $e \in N \otimes M^{\mathrm{op}}$之间给出一个双射，且下列条件等价：

1. A是完全正且 *Schur*幂等的；
2. A 是实 （意即 $A(x^*) = A(x)^*$ 对 $x \in M$成立）且 *Schur*幂等 ；
3. e 是一个（自伴）投影。

证明。为完整起见，我们提供一些细节。Ψ' 是一个双射。对于 $a \in M$ 令 $m_M^*\Lambda(a) = \sum_i \Lambda(a_i) \otimes \Lambda(b_i)$。于是

$$\begin{aligned}(|\Lambda(x_1)\rangle\langle\Lambda(y_1)|) \star (|\Lambda(x_2)\rangle\langle\Lambda(y_2)|)\Lambda(a) \\ &= m_N\Big(\sum_i \Lambda(x_1)(\Lambda(y_1)|\Lambda(a_i)) \otimes \Lambda(x_2)(\Lambda(y_2)|\Lambda(b_i))\Big) \\ &= \Lambda(x_1x_2)(m_N(\Lambda(y_1) \otimes \Lambda(y_2)|\Lambda(a)) = \Lambda(x_1x_2)(\Lambda(y_1y_2)|\Lambda(a)),\end{aligned}$$

因此 $(|\Lambda(x_1)\rangle\langle\Lambda(y_1)|) \star (|\Lambda(x_2)\rangle\langle\Lambda(y_2)|) = |\Lambda(x_1x_2)\rangle\langle\Lambda(y_1y_2)|$。由于 $y \mapsto \sigma_{i/2}(y)^{*\mathrm{op}}$ 是一个同态，因此 Ψ' 关于 Schur 积是一个同态。

我们的映射 Ψ' 恰好是映射 $\Psi'\colon \mathcal{B}(L^2(M) \oplus L^2(N)) \to (M \oplus N) \otimes (M \oplus N)^{\mathrm{op}}$从 [6,第 5 节4]的限制。后一个映射是完全正映射与正元素之间的双射。因此， A 是完全正且 Schur 幂等，等价于 e是幂等且正的，也就是说，是一个投影。与 A 为实数的等价性见 [15, 命题 223]，，另见 [6, 定理 537]。 □

注5.4. 关于“实”条件，我们再补充几点。如果考虑更大的 完全有界映射类，那么存在一个自然的周期为2的反线性映射 $T \mapsto T^\dagger$，定义为 $T^\dagger(a) = T(a^*)^*$。例如，在“Paulsen2×2 矩阵技巧” [18, 定理 8.3]中，我们可以隐约看到这一点。该映射对于复合积并非对合：事实上，$(T \circ S)^\dagger = T^\dagger \circ S^\dagger$。不过，我们可以看到， A 为实映射当且仅当 $A^\dagger = A$。

我们声称， $\dagger$ 是 Schur积下的一个对合，且 Ψ' 是一个 $*$-同态。只需证明当 $A = |x\rangle\langle y|$ 时， $\Psi'(A^\dagger) = \Psi'(A)^*$ 。我们有

$$A^\dagger(a) = A(a^*)^* = \overline{(\Lambda(y)|\Lambda(a^*))}x^* = \varphi(ay)x^* = \varphi(\sigma_i(y)a)x^* = |x^*\rangle\langle\sigma_i(y)^*|(a),$$

这里我们再次将映射 $L^2(M) \to L^2(N)$ 与映射 $M \to N$等同起来。因此 $\Psi'(A^\dagger) = x^* \otimes \sigma_{i/2}(\sigma_i(y)^*)^{*\mathrm{op}} = x^* \otimes \sigma_{i/2}(y)^{\mathrm{op}} = \Psi'(A)^*$，如所声称的。

也可以通过先观察到 $m^\dagger = m \circ \tau$（其中 τ 是张量交换映射），以及 $(m^*)^\dagger = \tau m^*$，来直接证明这一点。因此可得 $(A_1 \star A_2)^\dagger = m^\dagger(A_1^\dagger \otimes A_2^\dagger)(m^*)^\dagger = m(A_2^\dagger \otimes A_1^\dagger)m^* = A_2^\dagger \star A_1^\dagger$。

我们还注意到 $1^\dagger = 1$，因此量子图的“自反”公理（例如参见 [6,定义 2。4]），即 $A \star 1 = 1$，等价于 $1 \star A^\dagger = 1$；当然，当$1 \star A = 1$为实数时，A 这一点成立。

我们快速探讨一个具有启发性的例子，其中两个代数都是交换的。

例5.5. 设 X、Y 为有限集，并设 $M = \ell^\infty(X)$、$N = \ell^\infty(Y)$ 分别作用于 $\ell^2(X)$、$\ell^2(Y)$ 上。因此，从 M 到 N 的量子关系 V 是一个 $\ell^\infty(Y)$-$\ell^\infty(X)$-双模 $V \subseteq \mathcal{B}(\ell^2(X), \ell^2(Y))$。考察最小幂等元 $(e_x)_{x\in X}$ 和 $(e_y)_{y\in Y}$ 的作用，可知 V 是其所包含的矩阵元 $e_{y,x}$ 的线性张成。也就是说，令 $R = \{(y,x) : e_{y,x} \in V\} \subseteq Y \times X$，则 R 是一个关系，且 $V = \lin\{e_{y,x} : (y,x) \in R\}$。我们在例 4.4 中见过这类想法。

投影 $e \in N \otimes M^{\mathrm{op}} \cong \ell^\infty(Y \times X)$ 就是 R的指示函数。我们在 $\ell^\infty(X)$上选取自然的马尔可夫迹，即由 X上的计数测度诱导的迹。于是，$\Lambda\colon \ell^\infty(X) \to \ell^2(X)$ 就是函数上的形式恒等映射，N也一样，因此映射 Ψ' 是

$$\Psi'\colon \mathcal{B}(\ell^2(X), \ell^2(Y)) \to \ell^\infty(Y \times X); \quad e_{y,x} = |\Lambda(e_y)\rangle\langle\Lambda(e_x)| \mapsto e_y \otimes e_x = e_{(y,x)},$$

其中 $e_{(y,x)} \in \ell^\infty(Y \times X)$ 是投影到单点集 (y,x)上的极小投影。因此，将 A视为矩阵时，当 $(y,x) \in R$成立时，其 (y,x) 位置上的元素为 1，否则为 0。当然，A于是（经典意义下）是Schur幂等且完全正的。

给定 φ_M，M^{op} 上的自然忠实正泛函由 $\varphi_{M^{\mathrm{op}}}(x^{\mathrm{op}}) = \varphi(x)$给出；相应的 GNS空间 $L^2(\varphi_{M^{\mathrm{op}}})$ 与 $\Lambda^{\mathrm{op}}(x^{\mathrm{op}}) = \Lambda(x^*)$的共轭空间 $L^2(\varphi_M)$ 酉等价，并且 x^{op} 的作用为 $x^\top \in \mathcal{B}(L^2(\varphi_M))$，参见引理 5.32] 中的 [6, 。

代数 $N \otimes M^{\mathrm{op}}$ 自然地作用于 $L^2(N) \otimes L^2(M^{\mathrm{op}}) = L^2(N) \otimes L^2(M)$。于是，投影 $e \in N \otimes M^{\mathrm{op}}$ 与不变子空间 $V_0 \subseteq L^2(N) \otimes L^2(M)$ 一一对应。事实上，V_0 正是 e的像。我们将 $L^2(N) \otimes L^2(M)$ 视为希尔伯特–施密特算子 $\mathrm{HS}(L^2(M), L^2(N))$，在这里它等于 $\mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$。在这一对应下，$V_0$ 成为一个 N'-M'-双模，也就是一个量子关系。

然而，正如 Wasilewski 在 [25], 中所指出的，我们通常不会将 e 直接与V_0联系起来：这样做有多种原因，[7, 25]另见下文备注 5.12 。相反，我们将邻接算子 A 与投影 e以及量子关系 V联系起来，具体如下。根据 [7,第2节4]，当 $A = \sum_j |\Lambda(x_j)\rangle\langle\Lambda(y_j)|$ 时，有

$$T \in V \quad \Longleftrightarrow \quad \sum_j \sigma_{-i/4}(x_j) T \sigma_{-i/4}(y_j^*) = T. \tag{5.1}$$

于是，根据 [7, 命题 2.9], 另见 [25, 定理A]，V^* 对应于 $\tau(e)^{\mathrm{op}}$（即 e的张量交换），也对应于 A 的 KMS 伴随。根据 [7, 引理 6.21]，后者为 $J_M A^* J_N$，其中 A^* 是 A的希尔伯特空间伴随。（张量交换映射是 $N \otimes M^{\mathrm{op}} \to M^{\mathrm{op}} \otimes N$，但我们希望落在 $M \otimes N^{\mathrm{op}}$中，因此这里写作 $\tau(e)^{\mathrm{op}}$。）注意，V^* 对应于$\tau(e)^{\mathrm{op}}$ 似乎非常自然；若用 V_0 代替 V，一般而言这一点便不成立。

我们希望考察不一定是幂等的算子，因此现在（稍作扩展）将 [7, 第 2] 节中的一些结果加以推广。给定任意 $A \in \mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$，我们仍可考察 $x = \Psi'(A) \in N \otimes M^{op}$，进而构造子空间 $\mathrm{Im}\,(x) \subseteq HS(L^2(M), L^2(N))$。以下内容定义了一个与 V 相关联的 A 和 x，并验证当 x 是投影时，我们便得到关系（5.1）。

命题 5.6。设 $A \in \mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$ 为 $A = \sum_j |\Lambda(x_j)\rangle\langle\Lambda(y_j)|$，并令 $x = \Psi'(A)$。定义

$$V = \{\nabla_N^{1/4} T \nabla_M^{1/4} : T \in \mathrm{Im}\,(x)\} \subseteq \mathcal{B}(L^2(M), L^2(N)).$$

则：

(1) 像 $(x) = \left\{ \sum_j x_j T \sigma_{i/2}(y_j)^* : T \in HS(L^2(M), L^2(N)) \right\}$；

(2) $V = N' \nabla^{1/4} A \nabla^{-1/4} M' = \mathrm{lin}\{a' \nabla^{1/4} A \nabla^{-1/4} b' : a' \in N', b' \in M'\}$，其中这里我们考虑 $A \in \mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$。特别地，$V$ 是一个从 M 到N的量子关系。

(3) 我们有 像 $(\tau(x^*)^{op}) = \{T^* : T \in$ 像 $(x)\}$，并且与 $\tau(x^*)^{op}$ 相关联的量子关系和邻接算子分别为 V^* 和 $\nabla^{-1/2} A^* \nabla^{1/2}$。

(4) 当 x是幂等的，(5.1) 成立。

证明。我们有 因此有 $x = \Psi'(A) = \sum_j x_j \otimes \sigma_{i/2}(y_j)^{*op}$。于是，$\mathrm{Im}\,(x)$ 中的典型成员是

$$\sum_j x_j(\xi) \otimes \overline{\sigma_{i/2}(y_j)\eta} \cong \sum_j |x_j(\xi)\rangle\langle\sigma_{i/2}(y_j)\eta| = \sum_j x_j |\xi\rangle\langle\eta|\sigma_{i/2}(y_j)^*,$$

对于 $\xi \in L^2(N)$，$\eta \in L^2(M)$。取线性张成可得(1)。

现在设 对于某些 $a \in N$、$b \in M$，有 $\xi = \Lambda(a), \eta = \Lambda(b)$。那么 V 的一个典型成员是

$$\begin{aligned}
&\sum_j \nabla^{1/4} x_j |\Lambda(a)\rangle\langle\Lambda(b)|\sigma_{i/2}(y_j)^* \nabla^{1/4} = \sum_j \sigma_{-i/4}(x_j) \nabla^{1/4} |\Lambda(a)\rangle\langle\Lambda(b)| \nabla^{1/4} \sigma_{-i/4}(y_j^*) \\
&\quad = \sum_j |\Lambda(\sigma_{-i/4}(x_j)\sigma_{-i/4}(a))\rangle\langle\Lambda(\sigma_{i/4}(y_j)\sigma_{-i/4}(b))| \\
&\quad = \sum_j J\sigma_{-i/4}(a^*)J |\Lambda(\sigma_{-i/4}(x_j))\rangle\langle J\sigma_{-i/4}(b^*)J\Lambda(\sigma_{i/4}(y_j))| \\
&\quad = J\sigma_{-i/4}(a^*)J \nabla^{1/4} \sum_j |\Lambda(x_j)\rangle\langle\Lambda(y_j)| \nabla^{-1/4} J\sigma_{i/4}(b)J = a' \nabla^{1/4} A \nabla^{-1/4} b',
\end{aligned}$$

记作，其中 $a' = J\sigma_{-i/4}(a^*)J \in M'$ 且 $b' = J\sigma_{i/4}(b)J \in N'$。这里我们用到了 $\sigma_{i/2}(y_j)^* = \nabla^{1/2} y_j^* \nabla^{-1/2}$ 等等。由于 M'（分别地，N'）中的任意成员都可以出现，取线性张成可得 (2)。

对于 (3)，注意到 $\tau(x)^{*op} = \sum_j \sigma_{i/2}(y_j) \otimes x_j^{*op}$ 并且 $\mathrm{Im}\,(\tau(x)^{*op}) = \{\sum_j \sigma_{i/2}(y_j) T x_j^* : T \in HS(L^2(N), L^2(M))\} = \{T^* : T \in \mathrm{Im}\,(x)\}$ 与 (1)比较可知。相应的 V因此为 $\{\nabla^{1/4} T \nabla^{1/4} : T^* \in \mathrm{Im}\,(x)\} = V^*$。相应的量子邻接算子为 $\sum_j |\Lambda(\sigma_{i/2}(y_j))\rangle\langle\Lambda(\sigma_{-i/2}(x_j))| = \nabla^{-1/2} A^* \nabla^{1/2}$。

我们可以将（5.1）的右边改写为

$$\begin{aligned}
&\sum_j x_j \nabla^{-1/4} T \nabla^{1/4} y_j^* = \nabla^{-1/4} T \nabla^{1/4} \\
\iff \quad &\sum_j x_j \nabla^{-1/4} T \nabla^{-1/4} \sigma_{-i/2}(y_j^*) = \nabla^{-1/4} T \nabla^{-1/4}
\end{aligned}$$

因为 $\sigma_{-i/4}(x_j) = \nabla^{1/4} x_j \nabla^{-1/4}$，依此类推。现在我们识别出 x 的作用，因此该条件等价于 $\nabla^{-1/4} T \nabla^{-1/4}$ 是 x 的不动点。当 x 是幂等的时，根据定义，这等价于 $\nabla^{-1/4} T \nabla^{-1/4} \in \mathrm{Im}\,(x)$，即 $T \in V$，从而验证了 (4)。 □

注5.7。 与 [7, 注2。7], 定义 V时，以及在第 (2) 点中，我们可以将 ∇_N 替换为 Q_N，并将 ∇_M 替换为 Q_M。

注5.8。到目前为止，我们的论述相当抽象，但由于 M 是有限维的，显然 M 只是矩阵代数的直和，例如可写作 $M = \bigoplus_{\alpha \in I} \mathbb{M}_{n(\alpha)}$，其中 I 是某个有限集。设 1_α 是因子 $\mathbb{M}_{n(\alpha)}$ 的单位元，因此 $\{1_\alpha\}$ 是 M 的极小中心幂等元的集合。设 $(e^\alpha_{i,j})_{i\,j=1}^{n(\alpha)}$，为 $\mathbb{M}_{n(\alpha)}$ 的矩阵单位。根据 [6, 引理 7.12], ， 马尔可夫迹定义为 $\mathrm{Tr}_M(x) = \sum_\alpha n(\alpha) \mathrm{Tr}(1_\alpha x)$ ， 其中 Tr 是 $\mathbb{M}_{n(\alpha)}$ 上的非归一化迹。仿照前文从定义 2.9], 开始的计算，例如可以验证 Tr_M 给出 $mm^* = 1$。

更多评述见 [1, 命题 2.1], 但请注意，在该文献中，Banica 假设所有迹都已归一化，这并非我们的约定。

现在我们明确计算 A 与 $\Psi'(A)$的作用之间的联系；这可与 [7, 第 6], 节进行比较，不过这里给出的是直接计算。

引理 5.9. 设 $A\colon M \to N$，且 $\Psi'(A) \in N \otimes M^{\mathrm{op}}$ 作用于 $L^2(N) \otimes L^2(M)$。那么对于b_0, $b_1 \in M$,

$$\big(\xi_1 \big| A(b_1^* b_0)\xi_0\big) = \big(\xi_1 \otimes \overline{J\Lambda(b_1)} \big| \Psi'(A)(\xi_0 \otimes \overline{J\Lambda(b_0)})\big) \qquad (\xi_0, \xi_1 \in L^2(N)).$$

证明。 设 $x = \Psi'(A) = x_j \otimes \sigma_{i/2}(y_j)^{*\mathrm{op}}$，也就是说， $A = \sum_j |\Lambda(x_j)\rangle\langle\Lambda(y_j)|$, 意味着 $A\colon M \to N$ 是 $b \mapsto A(b) = \sum_j \varphi(y_j^* b) x_j$。对于 b_0、 $b_1 \in M$ 和 ξ_0、 $\xi_1 \in L^2(N)$, 我们有

$$\begin{aligned}
\big(\xi_1 \otimes \overline{J\Lambda(b_1)} \big| \Psi'(A)(\xi_0 \otimes \overline{J\Lambda(b_0)})\big) &= \sum_j (\xi_1 | x_j \xi_0)(\overline{J\Lambda(b_1)} | \overline{\sigma_{i/2}(y_j) J\Lambda(b_0)}) \\
&= \sum_j (\xi_1 | x_j \xi_0)(\Lambda(b_1) | J\sigma_{i/2}(y_j) J\Lambda(b_0)) = \sum_j (\xi_1 | x_j \xi_0)(\Lambda(b_1) | \Lambda(b_0 \sigma_{-i}(y_j^*))) \\
&= \sum_j (\xi_1 | x_j \xi_0) \varphi(b_1^* b_0 \sigma_{-i}(y_j^*)) = \sum_j (\xi_1 | x_j \xi_0) \varphi(y_j^* b_1^* b_0) = (\xi_1 | A(b_1^* b_0)\xi_0),
\end{aligned}$$

正如所声称的。 □

5.1 重新审视完全正映射与量子关系

现在是讨论 Verdon 的部分研究成果的合适时机 [24].[2] 那篇论文的背景是一个抽象的 C^*-2-范畴：其动机在于，我们可以将这个范畴取为某个紧量子群 G 的表示范畴 $\mathrm{Rep}(G)$， 这样构造便会自动与群作用协变。这里的代数对象是“可分标准弗罗贝尼乌斯代数”， [24, 附录 A]: 如果我们将范畴取为 2Hilb，那么就会得到有限维 C^*-代数 M，而“可分”条件对应于选取一个具有 $m^* m = 1$的迹，也就是我们所说的马尔可夫迹 Tr_M。在这个抽象背景下，尚不清楚代数作用于哪个“希尔伯特空间”，因此 Verdon 对

[2]提醒读者， [24] 中的一些图表已损坏，例如（14），因此 arXiv 版本更易阅读，arXiv:2302。07776 [math.OA]参见https://arxiv.org/pdf/2302.07776。

量子关系， [24, 定义 3。2], 是上述投影的类似物， $e = \Psi'(A) \in N \otimes M^{op}$因为 e 仅利用代数结构来定义。给定一个完全正映射 $A\colon M \to N$（比较 [24, 定义 2。6]）“底层量子关系” [24, 定义 3。2] 用我们的术语来说，就是 $x = \Psi'(A)$的支撑投影。由于 A完全正等价于 x为正，支撑投影就是到 x的像上的投影。由于这里实际上只处理迹情形，我们看到， A 与$V = \mathrm{Im}\,(x)$ 之间的关系恰与命题5.6中的相同。

由 [24, 命题 3.5] 可知，映射 $A \to V$ 是一个满的保 dagger 函子。让我们在当前设定下给出一个类似的结果，其中 φ_M， φ_N 可以是任意的。我们赋予完全正映射范畴以 KMS 伴随所定义的 dagger 结构， $A \mapsto A^*_{KMS} = \nabla^{-1/2} A^* \nabla^{1/2} = JA^*J$，如前所述。命题5.6(3)表明 A^*_{KMS} 是完全正的，因为 $\Psi'(A^*_{KMS}) = \tau(\Psi'(A))^{op*}$ 是正的。

命题 5.10。 命题 $A \to V$ 所给出的映射*5.6* 是一个保伴随的函子，并且是满的（在态射集上满射）。

证明。 命题5.6(3) 表明此映射保 $*$，而命题5.6(2)表明，当 $A = \text{恒等元}_M$ 时，我们有 $V = M'$，它们分别是相关范畴中的恒等态射。下面的命题5.13 表明，给定 $A_1\colon M_1 \to M_2$ 和 $A_2\colon M_2 \to M_3$ 完全正映射及其对应的量子关系 V_1， V_2，有 $A_2 \circ A_1$ 给出量子关系 $V_2 \circ V_1$。因此我们得到一个函子。

给定任意一个量子关系 V，令 e 为到 $\nabla_N^{-1/4} V \nabla_M^{-1/4}$ 上的投影，并令 $A = \Psi'^{-1}(e)$，于是根据定理5.3， A 尤其是完全正的；根据命题5.6， V 与 A相关联。因此，每个 V 都来自某个 A，这表明具有满性。 □

现在，我们有两种方法可以将完全正映射与量子关系关联起来：一种是考虑$\theta\colon N \to M$ 并构造 V^θ，如第4节所述；另一种是考虑 $A\colon M \to N$，将其视为 $\mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$的一个成员，构造 $\Psi'(A)$，再构造 V。这两种方法显然不同，但似乎有可能在 $\theta = A^*_{KMS}$ 的情况下（即至少定义域和值域是正确的），得到 V^θ与 $\Psi'(A)$相关联。我们将看到，这在迹情形下成立，但一般情形更为复杂。

命题 5.11。 设 A， V 如命题 *5.6*所述相关联，其中 A 是完全正的，并令 $\theta = A^*_{KMS}\colon N \to M$，它也完全正。于是 $V^\theta = \nabla_N^{1/4} V \nabla_M^{-1/4}$ 。特别地，当φ_M， φ_N 是迹时， $V^\theta = V$。

证明。 利用命题 5.6将 A 与正算子 $\Psi'(A)$ 及量子关系 $V = \nabla^{1/4}\mathrm{Im}\,\Psi'(A)\nabla^{1/4}$联系起来。根据命题 5.6(3)， A^*_{KMS} 与正算子 $\tau(\Psi'(A))^{op*}$相关联。接着将引理 5.9 应用于 A^*_{KMS} 可知，对于 a_0， $a_1 \in N$， b_0， $b_1 \in M$，

$$\big(\Lambda(b_1)\big|A^*_{KMS}(a_1^* a_0)\Lambda(b_0)\big) = \big(\Lambda(b_1) \otimes \overline{J\Lambda(a_1)}\big|\tau(\Psi'(A))^{op*}(\Lambda(b_0) \otimes \overline{J\Lambda(a_0)})\big). \tag{5.2}$$

我们旨在为 θ找到一个 Stinespring 膨胀；同样，这与 [7, 第 6], 节类似，不过我们将直接使用（5.2）。设 $j\colon L^2(N) \to \overline{L^2(N)};\ \xi \mapsto J\xi$是一个酉算子，因为 J 是一个反线性对合。那么对于 a_0， a_1， y_0， $y_1 \in N$ 我们得到

$$\begin{aligned}
&(a_1 j y_1^{op}\overline{\Lambda(1)}|a_0 j y_0^{op}\overline{\Lambda(1)}) = (a_1 J\Lambda(y_1^*)|a_0 J\Lambda(y_0^*)) = (\Lambda(a_1\sigma_{-i/2}(y_1))|\Lambda(a_0\sigma_{-i/2}(y_0)))\\
&= \varphi_N(\sigma_{i/2}(y_1^*)a_1^* a_0 \sigma_{-i/2}(y_0)) = \varphi_N(a_1^* a_0 \sigma_{-i/2}(y_0)\sigma_{-i/2}(y_1^*)) = (\Lambda(a_1)|Jy_1 y_0^* J\Lambda(a_0))\\
&= (y_0^* J\Lambda(a_0)|y_1^* J\Lambda(a_1)) = (y_1^{op}\overline{J\Lambda(a_1)}|y_0^{op}\overline{J\Lambda(a_0)}).
\end{aligned} \tag{5.3}$$

取某个 $y \in N \otimes M^{op}$，使得 $\Psi'(A) = y^*y$；因此 $\tau(\Psi'(A))^{op*} = \tau(y)^{op}\tau(y)^{op*}$，因为 $x \mapsto \tau(x)^{op*}$ 是一个同态，并定义

$$u\colon L^2(M) \to L^2(M) \otimes L^2(N); \quad \xi \mapsto (1 \otimes j)\tau(y)^{op*}(\xi \otimes \overline{\Lambda_N(1)}).$$

这给出了 θ的一个膨胀，因为

$$\begin{aligned}
&\big(\Lambda(b_1)\big|u^*(1 \otimes a_1^* a_0)u\Lambda(b_0)\big) \\
&\quad = \big((1 \otimes a_1 j)\tau(y)^{op*}(\Lambda(b_1) \otimes \overline{\Lambda(1)})\big|(1 \otimes a_0 j)\tau(y)^{op*}(\Lambda(b_1) \otimes \overline{\Lambda(1)})\big) \\
&\quad = \big(\tau(y)^{op*}(\Lambda(b_1) \otimes \overline{J\Lambda(a_1)})\big|\tau(y)^{op*}(\Lambda(b_0) \otimes \overline{J\Lambda(a_0)})\big) \\
&\quad = \big(\Lambda(b_1)\big|A_{KMS}^*(a_1^* a_0)\Lambda(b_0)\big),
\end{aligned}$$

由5.3）和（5.2）。

由于现在我们有了一个膨胀，定理4.2 表明

$$V^\theta = \mathrm{lin}\{y'(\langle\xi| \otimes 1)u : y' \in N', \xi \in L^2(M)\}.$$

设 $y = \sum_i y_i \otimes x_i^{op} \in N \otimes M^{op}$，取 $b \in M$、$a \in N$ 并令 $y' = JaJ \in N'$。那么对于 $\xi \in L^2(M)$,

$$\begin{aligned}
y'(\langle\Lambda(b)| \otimes 1)u(\xi) &= \sum_i y' j(\langle\Lambda(b)| \otimes 1)(x_i^*\xi \otimes y_i^{*op}\overline{\Lambda(1)}) = \sum_i y' j\overline{\Lambda(y_i)}(\Lambda(b)|x_i^*\xi) \\
&= \sum_i JaJJ\Lambda(y_i)(\Lambda(x_i b)|\xi) = \sum_i |J\Lambda(ay_i)\rangle\langle\Lambda(x_i b)|\xi.
\end{aligned}$$

由于 $J\Lambda(ay_i) = \sigma_{-i/2}(y_i^*)J\Lambda(a)$，我们看到

$$y'(\langle\Lambda(b)| \otimes 1)u = \sum_i \sigma_{-i/2}(y_i^*)|J\Lambda(a)\rangle\langle\Lambda(b)|x_i^*,$$

因此，对 a、b 取线性张成可知，V^θ 是 $\sum_i \sigma_{i/2}(y_i)^* \otimes x_i^{op*}$ =$(\sigma_{i/2} \otimes \mathrm{id})(y)^*$ 作用于 $L^2(N) \otimes L^2(M)$所得的像。由于 $(\sigma_{i/2} \otimes \mathrm{id})(y) = (\nabla^{-1/2} \otimes 1)y(\nabla^{1/2} \otimes 1)$，我们看到

$$\begin{aligned}
\mathrm{Im}\,(\sigma_{i/2} \otimes \mathrm{id})(y)^* &= \ker(\sigma_{i/2} \otimes \mathrm{id})(y) = \ker y(\nabla^{1/2} \otimes 1) = \ker(\nabla^{1/2} \otimes 1)y^*y(\nabla^{1/2} \otimes 1) \\
&= \mathrm{Im}\,(\nabla^{1/2} \otimes 1)\Psi'(A)(\nabla^{1/2} \otimes 1) = (\nabla^{1/2} \otimes 1)\mathrm{Im}\,\Psi'(A),
\end{aligned}$$

这里我们考虑 $\mathrm{Im}\,\Psi'(A) \subseteq L^2(N) \otimes L^2(M)$。相反，若将该空间视为$\mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$，则得到 $V^\theta = \nabla^{1/2}\mathrm{Im}\,\Psi'(A) = \nabla^{1/2}\nabla^{-1/4}V\nabla^{-1/4} = \nabla^{1/4}V\nabla^{-1/4}$，正如所声称的那样。

□

注 5.12。当然，如果 $V^\theta = V$ 而不是 $\nabla_N^{1/4}V\nabla_M^{-1/4}$，那就更好了；我们想知道，是否是我们某些“选择”导致了模算子的出现。在 [6, 第 5]节中，我们考虑了许多种在 $\mathcal{B}(L^2(M))$ 和 $M \otimes M^{op}$之间建立与 Schur积相容的双射的方法。只有 $\Psi' = \Psi'_{0,\,1/2}$（或其对称对应物 $\Psi = \Psi_{1/2,\,0}$）给出了完全正 A 与正 $x \in M \otimes M^{op}$之间的双射。一旦我们使用了Ψ'，考虑 A_{KMS}^* 就是自然的，因为它保持完全正性，并且来自自然的“对合” $x \mapsto \tau(x)^{*op}$。命题 5.11 的证明表明，此时 $V^\theta = \nabla^{1/2}\mathrm{Im}\,\Psi'(A)$。当然，我们可以将与 A 和/或 $x = \Psi'(A)$ 相关联的量子关系定义为$\nabla^{1/2}\mathrm{Im}\,(x)$，但这样一来，$A_{KMS}^*$ 和/或 $\tau(x)^{*op}$ 就不会与 V^*相关联：只有命题 5.6 中所作的选择才能做到这一点。

现在我们可以快速证明“函子性”，见命题 5.10。

命题 5.13。 设 M_1、M_2、M_3 是有限维冯·诺依曼代数，并设$V_1 \subseteq \mathcal{B}(L^2(M_1), L^2(M_2))$ 和 $V_2 \subseteq \mathcal{B}(L^2(M_2), L^2(M_3))$ 是量子关系，其对应的邻接算子为 A_1、A_2。令 $V = V_2 \circ V_1 \subseteq \mathcal{B}(L^2(M_1), L^2(M_3))$，并设$x = \Psi'(A_2 \circ A_1)$ 是 $M_3 \otimes M_1^{op}$ 中的一个正算子。那么 V 是根据命题 x *5.6* 与 *5.6*相关联的量子关系。

证明。 对于 $i = 1$，令 2 为 $\theta_i = (A_i)^*_{KMS}$，于是命题 5.11 表明 $V^{\theta_i} = \nabla^{1/4} V_i \nabla^{-1/4}$。令 $A = A_2 \circ A_1$，于是 $A^*_{KMS} = \theta_1 \circ \theta_2$，并令 U 为与之关联的量子关系 A，于是 $V^{\theta_1 \circ \theta_2} = V^{A^*_{KMS}} = \nabla^{1/4} U \nabla^{-1/4}$。由命题 4.9 可得 $V^{\theta_1 \circ \theta_2} = V^{\theta_2} \circ V^{\theta_1} = \nabla^{1/4} V_2 \nabla^{-1/4} \nabla^{1/4} V_1 \nabla^{-1/4} = \nabla^{1/4} V \nabla^{-1/4}$，因此我们得出结论 $U = V$，如所述。 □

注 5.14。 第 3 节的主张，尤其是命题 3.14，是 $V \mapsto V^*$可视为一种（部分）逆运算；但这里它似乎与完全正映射上的（KMS）伴随有关。不过，我们需要稍加谨慎。命题 5.10 中的函子当然不是等价，因此，不能仅仅因为两个完全正映射给出相同的关系，就认为这两个映射相同。请参见下文第 5.3 节，其中我们计算与 A相关联的 Schur幂等 V^θ，这里 $*$-同态 θ。

接下来，我们证明所有量子关系都源自一个完全正映射；以下证明与 Verdon 的方法非常相似。

推论 5.15。设 M、N 为有限维，且 V 是从 M 到 N的一个量子关系。存在一个完全正映射 $\theta\colon N \to M$，使得 $V = V^\theta$。

证明。 设 $\varphi_M = \mathrm{Tr}_M$，并设 M 作用于 $L^2(M)$，且 N的选取相同。我们将V 视为 $\mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$的子空间，因此由命题 5.6 应用于例如投影到 V，可得到一个完全正 $A\colon M \to N$。令 $\theta = A^*_{KMS} = A^*$，并应用前面的结果。

□

正如我们在注 4.11 中所见，并非所有余满射 V 都来自酉完全正 θ。与之相关的是 [24, 命题 36]给出的刻画：这里的“量子信道”是迹保持（TP）的完全正映射，而非酉完全正映射，详见下一个引理。遗憾的是，我们无法理解 [24,命题 36]给出的论证；下面谈几点看法。

引理 5.16。 令 $A\colon M \to N$ 为完全正映射。则 A 满足 $\varphi_N \circ A = \varphi_M$，当且仅当 A^* 是酉完全正映射；当且仅当 $(\varphi_N \otimes \mathrm{id})\Psi'(A) = 1^{op}$。

证明。 A 与 A^* 之间的关系是，对于每个 $a \in N$，都有 $\varphi_N(a^* A(b)) = \varphi_M(A^*(a)^* b)$ $b \in M$。由于 φ_M 是忠实的，因此 $A^*(1) = 1$ 当且仅当对每个 b都有 $\varphi_M(b) = \varphi_N(A(b))$，也就是说 $\varphi_M = \varphi_N \circ A$，即 A 保留了泛函。与命题 5.6 中一样，令 $A = \sum_j |\Lambda(x_j)\rangle\langle\Lambda(y_j)|$，于是 $\Psi'(A) = \sum_j x_j \otimes \sigma_{i/2}(y_j)^{*op}$，从而 $(\varphi_N \otimes \mathrm{id})\Psi'(A) = \sum_j \varphi_N(x_j)\sigma_{-i/2}(y_j^*)^{op}$；而对于 $b \in M$，有 $\varphi_N(A(b)) = \sum_j \varphi_N(x_j)\varphi_M(y_j^* b)$。因此，$\varphi_N \circ A = \varphi_M$当且仅当 $\sum_j \varphi_N(x_j) y_j^* = 1$，也当且仅当 $(\varphi_N \otimes \mathrm{id})\Psi'(A) = 1^{op}$，因为 $\sigma_{i/2}$ 是保单位同态。

□

注 5.17. 用我们的语言来说， [24, 命题 3.6] 声称，在满足 $e \in N \otimes M^{op}$的情况下，我们可以选取一个邻接算子 A，使得 $x = \Psi'(A)$ 具有支撑投影 e，且 $(\varphi_N \otimes \mathrm{id})\Psi'(A) = 1^{op}$，当且仅当 $(\varphi_N \otimes \mathrm{id})(e)$ 可逆。我们证明“仅当”：令 $u = (\varphi_N \otimes$

$\mathrm{id})(e)$，因此由有限维性，只需证明 u 是单射。若 $u\xi = 0$，则 $0 = (\xi|u\xi) = (\Lambda_N(1)\otimes\xi|e(\Lambda_N(1)\otimes\xi))$，所以 $\Lambda_N(1)\otimes\xi \in \ker(e) = \mathrm{Im}\,(e)^\perp = \mathrm{Im}\,(x)^\perp = \ker(x)$，故 $0 = (\Lambda_N(1)\otimes\xi|x(\Lambda_N(1)\otimes\xi)) = (\xi|(\varphi_N\otimes\mathrm{id})(x)\xi) = \|\xi\|^2$。

然而，“如果”情形并不成立。设 $M = N = \mathbb{M}_2$，并令 $N\otimes M^{\mathrm{op}} \cong \mathbb{M}_4$ 作用于 $\mathbb{C}^4$。假设对某个单位向量 $\xi = (\xi_i) \in \mathbb{C}^4$ 有 $e = |\xi\rangle\langle\xi|$，因此 x 为正且与 e 具有相同的像，故必为 e 的正倍数。对 $i \leqslant 3$ 令 $\xi_i = 1/2$，并令 $\xi_4 = i/2$。于是矩阵元为 $e_{i,j} = \xi_i\xi_j = 1/4$，但 $e_{4,j} = i/4$、$e_{i,4} = -i/4$（对 i、$j \leqslant 3$）除外。因此

$$u = (\mathrm{Tr}\otimes\mathrm{id})(e) = \begin{pmatrix} 1/2 & (1-i)/4 \\ (1+i)/4 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

其行列式非零，因而可逆，但由于 x 是 e 的正倍数，不可能有 $(\mathrm{Tr}\otimes\mathrm{id})(x) = 1$。

一个仍有趣的问题是：能否依据 e 刻画何时可以选择 x，使得 $(\varphi_N\otimes\mathrm{id})(x) = 1^{\mathrm{op}}$。此外，本文的理念是考察量子关系 V，这在此处对应于直接给出一个使用 e 的像（作为 $\mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$ 的子空间）的条件。

按照 Weaver 的定义，量子图 [27] 是一个量子关系 V 从 M 到 M，且该关系是对称的、$V^* = V$并且自反的，$1 \in V$（等价地，$M' \subseteq V$）。Verdon 的 [24,定义 39], 只考虑对称条件；若我们还满足 $1 \in V$，则 V 称为“量子混淆图”。由完全正映射定义的图是 $V^{\theta *}\circ V^{\theta}$，[24,命题 311], ，参见注 4.5。以下内容根据我们对 Verdon 证明 [24, 命题 312]的理解改编而来。与以往一样，我们考虑的是酉完全正映射，而不是“信道”（保迹完全正映射）。我们将论证分为两部分。

引理 5.18。设 M 是一个有限维冯·诺依曼代数，令 $\varphi_M = \mathrm{Tr}_M$ 为马尔可夫迹，并设 $A \in \mathcal{B}(L^2(M))$ 是一个正算子，使得其诱导的映射$M \to M$ 是完全正的。令 S 为与 A相关联的量子关系，则存在一个希尔伯特空间 L 以及一个完全正映射 $\theta\colon \mathcal{B}(L) \to M$，满足 $V^{\theta *}\circ V^{\theta} = S$。

证明。设 $x = \Psi'(A) \in M\bar{\otimes}M^{\mathrm{op}}$ 是一个正元素。由于 A 是正的，存在 M 中的有限序列 $(a_i)_{i=1}^n$，使得 $A = \sum_i |\Lambda(a_i)\rangle\langle\Lambda(a_i)|$，从而 $x = \sum_i a_i\otimes a_i^{*\mathrm{op}}$。定义

$$u\colon L^2(M) \to L^2(M)\otimes\mathbb{C}^n; \quad \xi \mapsto \sum_i a_i^*(\xi)\otimes\delta_i.$$

我们将 u“旋转”以求得 $v\colon \mathbb{C}^n \to L^2(M)\otimes L^2(M)$。这意味着，如果 $u = \sum_j |\xi_j\otimes\alpha_j\rangle\langle\eta_j|$，那么$v = \sum_j |\eta_j\otimes\xi_j\rangle\langle\alpha_j|$。选取 M 中的 (e_k)，使得 $(\Lambda(e_k))$ 是 $L^2(M)$ 的正交归一基。于是

$$u(\xi) = \sum_{l,k}(\Lambda(e_k)|a_l^*(\xi))\Lambda(e_k)\otimes\delta_l \quad\Longrightarrow\quad u = \sum_{l,k}|\Lambda(e_k)\otimes\delta_l\rangle\langle\Lambda(a_l e_k)|,$$

因此

$$v(\overline{\delta_j}) = \sum_{l,k}\overline{\Lambda(a_l e_k)}\otimes\Lambda(e_k)(\overline{\delta_l}|\overline{\delta_j}) = \sum_k \overline{\Lambda(a_j e_k)}\otimes\Lambda(e_k).$$

映射 $T\colon M \to \mathcal{B}(\mathbb{C}^n); \overline{x} \mapsto v^*(1 \otimes x)v$ 是完全正的，并且满足

$$\begin{aligned}\left(\overline{\delta_i}\middle|T(x)\overline{\delta_j}\right) &= \sum_{k,l}\left(\overline{\Lambda(a_i e_k)} \otimes \Lambda(e_k)\middle|\overline{\Lambda(a_j e_l)} \otimes x\Lambda(e_l)\right)\\ &= \sum_{k,l}(\Lambda(a_i^* a_j e_l)|\Lambda(e_k))(\Lambda(e_k)|x\Lambda(e_l)) = \sum_{l}(\Lambda(a_i^* a_j e_l)|x\Lambda(e_l))\\ &= \mathrm{Tr}(a_j^* a_i x) = \varphi(a_j^* a_i x),\end{aligned}$$

由于 $\varphi = \mathrm{Tr}_M$ 是 M上的马尔可夫迹。我们计算伴随 T^*:

$$\begin{aligned}\varphi(x^*T^*(|\overline{\delta_i}\rangle\langle\overline{\delta_j}|)) = (\Lambda(x)|T^*(|\overline{\delta_i}\rangle\langle\overline{\delta_j}|))_{L^2(M)} &= (T(x)||\overline{\delta_i}\rangle\langle\overline{\delta_j}|)_{HS} = \mathrm{Tr}(T(x)^*|\overline{\delta_i}\rangle\langle\overline{\delta_j}|)\\ &= (\overline{\delta_j}|T(x)^*\overline{\delta_i}) = \overline{\varphi(a_j^* a_i x)} = \varphi(x^* a_i^* a_j).\end{aligned}$$

由此可得

$$(T^* \circ T)(x) = \sum_{i,j}\varphi(a_j^* a_i x)T^*(|\overline{\delta_i}\rangle\langle\overline{\delta_j}|) = \sum_{i,j}\varphi(a_j^* a_i x)a_i^* a_j = \sum_{i,j}|\Lambda(a_i^* a_j)\rangle\langle\Lambda(a_i^* a_j)|x.$$

因此$\Psi'(T^* \circ T) = \sum_{i,\ j} a_i^* a_j \otimes (a_i^* a_j)^{*\mathrm{op}} = x^* x$，因而$\mathrm{Im}\ \Psi'(T^* \circ T) = \mathrm{Im}\,(x^* x) = \mathrm{Im}\,(x)$因为 x是正的，所以 $T^* \circ T$给出量子关系 S即我们最初的那个。令 $\theta = T^*$因此命题5.11 表明 V^θ 是由 T诱导的量子关系，并且由命题5.10我们得出 $T^*\circ T$与量子关系 $V^{\theta *}\circ V^\theta$相关联，即 $S = V^{\theta *}\circ V^\theta$。 □

命题 5.19 （[24, 命题 3.12]）。 设 M 为有限维冯·诺依曼代数，并设 S 为 M 上的量子图（因此 $S^* = S$ 且 $1 \in S$）。存在一个酉完全正映射$\theta\colon \mathcal{B}(L) \to M$，对某个有限维希尔伯特空间 L，满足 $V^{\theta *} \circ V^\theta = S$。因此每一个这样的 S 都是某个到 M的酉完全正映射的量子混淆图。

证明。 令 $e \in M \otimes M^{\mathrm{op}}$ 为到 $S \subseteq \mathcal{B}(L^2(M)) \cong HS(L^2(M))$上的投影，并令 e_0 为到 $M' \subseteq \mathcal{B}(L^2(M))$上的投影。由于 $M' \subseteq S$，我们有 $e_0 \leqslant e$，因此 $e_1 = e - e_0$ 是一个与 e_0 正交的投影。由于 $S^* = S$，我们有 $\tau(e)^{*\mathrm{op}} = e$，类似地有 $\tau(e_0)^{*\mathrm{op}} = e_0$，因此 e_1 也满足这一条件。令 $A_1 = \Psi'^{-1}(e_1)$，可知 A_1 是完全正的，且 $A_1^* = A_1$。经过计算可得 $\Psi'^{-1}(e_0) = 1_{L^2(M)}$。由于 A_1 是自伴的，存在某个 $t > 0$，使得$A = 1 + tA_1$ 是一个正算子。根据引理选取 θ，于是 $V^{\theta *} \circ V^\theta$ 等于 $\Psi'(A) = e_0 + te_1$的像。由于 e_0、e_1 正交且和为 e，因此该像为 $\mathrm{Im}\,(e) = S$，如所要求证。 □

注 5.20。在引理 5.18 的证明中，我们本可以直接根据族 v 来定义(a_i)，但这样会进一步掩盖 [24]的动机。映射 u 扩张一个完全正映射，例如 $\theta_A\colon M \to M$; $x \mapsto u^*(x \otimes 1)u = \sum_i a_i x a_i^*$，这恰好就是来自 θ_A[7, 命题 24]的映射（这一映射在文献中多处出现，最早可追溯至 [26]）。在 [7, 第 6 节5] 中，我们曾怀疑将 θ_A 视为一个 CB（甚至如这里一样，视为完全正）映射是否有益：现在看来，这种怀疑似乎过于草率！不过，我们指出，在命题5.19的应用中， A 并非量子图的邻接算子 S。

我们现在将给出一个类似的刻画，说明哪些量子图（对称关系，不必自反）来自完全正映射，且不假定保单位。这可以通过改编上述证明来完成，但由于对 e_0的类比而言很难计算 $\Psi'^{-1}(e_0)$，因而较为复杂。我们转而使用已经建立的部分理论。

定理 5.21. 设 M 为有限维冯·诺依曼代数，并设 S 为 M 上满足 $S = S^*$的量子关系。下列各项等价：

(1) 存在 一个冯·诺依曼代数 N 和一个完全正映射 $\theta\colon N \to M$，满足 $S = V^{\theta *} \circ V^{\theta}$；

(2) 存在 $x_0 \geqslant 0$ 属于 $S \cap M$，使得对每个 $x = x^* \in S$，都存在 $t > 0$ 满足 $-tx_0 \leqslant x \leqslant tx_0$；

在这种情况下，我们可以取 $x_0 = \theta(1)$，并且可以取 N 为有限维的。

证明。令 M 作用于 H，于是 $S \subseteq \mathcal{B}(H)$。若我们有如(1)所示的完全正映射，则令 $u\colon H \to K \otimes L$ 扩张 θ，其中 $N \subseteq \mathcal{B}(K)$，并设 $x_0 = u^*u = \theta(1) \in M$。对于 $x = x^* \in S$，存在$y \in N' \bar{\otimes} \mathcal{B}(L)$ 满足 $x = u^* y u$，因此取 $z = \frac{1}{2}(y + y^*)$ 可得 $z = z^*$ 且 $x = u^* z u$。由于$-\|z\| \leqslant z \leqslant \|z\|$ 我们得到 $-\|z\| x_0 \leqslant x \leqslant \|z\| x_0$，从而证明了 (2)。

令 (2) 成立，并令 f_0 为 x_0的支撑投影。令 $x = x^* \in S$，并通过缩放假设 $-x_0 \leqslant x \leqslant x_0$。存在 $\epsilon_2 > 0$ 满足 $x_0 \leqslant \epsilon_2 f_0$。因此 $-\epsilon_2 f_0 \leqslant x \leqslant \epsilon_2 f_0$，再次通过缩放，我们可以假设 $-f_0 \leqslant x \leqslant f_0$。然后左右分别乘以$1 - f_0$ 可得 $(1 - f_0)x(1 - f_0) = 0$。

假设 $y \in \mathcal{B}(H)$ 为正，且 $(1 - f_0)y(1 - f_0) = 0$。 C^*-条件表明$y^{1/2}(1 - f_0) = 0$，因此 $y(1 - f_0) = 0$，所以 $y = yf_0$，从而也有 $y = y^* = f_0 y$。将此应用于$y = x + f_0$ 可得 $f_0 y = y f_0 = y$，因此 $x f_0 = f_0 x = x$。给定任意 $x \in S$，取其实部和虚部可得，同样有 $x f_0 = f_0 x = x$。

我们需要谨慎使用记号：将 f_0 视为算子 $H \to H$，并令 $p_0\colon H \to H_0 = f_0(H)$ 为余限制，因此 $p_0^*\colon H_0 \to H$ 是包含映射。于是 $p_0 p_0^* = 1$，而 $p_0^* p_0 = f_0$。令 $M_0 = p_0 M p_0^* \subseteq \mathcal{B}(H_0)$ 为一个冯·诺依曼代数。在 H_0 上，我们有 x_0 可逆（由有限维性可知），因此可以令 $S_0 = \{x_0^{-1/2} p_0 x p_0^* x_0^{-1/2} : s \in S\}$，从而看到 S_0是 H_0上的量子图，且 $S = \{x_0^{1/2} p_0^* x p_0 x_0^{1/2} : x \in S_0\}$。因此存在某个 N 以及一个酉完全正映射 $\theta_0\colon N \to M_0$，使得 $V^{\theta_0 *} \circ V^{\theta_0} = S_0$。定义 $\theta_1\colon M_0 \to M_0$ 为 $\theta_1(x) = x_0^{1/2} x x_0^{1/2}$，这是一个完全正映射，且 $V^{\theta_1} = M_0' x_0^{1/2}$。由命题 4.9，$V^{\theta_1 \circ \theta_0} = V^{\theta_0} \circ V^{\theta_1} = V^{\theta_0} x_0^{1/2}$。

令 $\iota\colon M_0 \to M$ 为包含映射，即 $\iota(y) = p_0^* y p_0$，一个正规 $*$-同态，并令 V^ι 为量子函数，

$$\begin{aligned} V^\iota &= \{v \in \mathcal{B}(H, H_0) : yv = v\iota(y) = vp_0^* y p_0 \ (y \in M_0)\} \\ &= \{v \in \mathcal{B}(H, H_0) : p_0 x p_0^* v = v f_0 x f_0 \ (x \in M)\} \\ &= \{v \in \mathcal{B}(H, H_0) : f_0 x f_0 p_0^* v = p_0^* v f_0 x f_0 \ (x \in M)\}, \end{aligned}$$

如 $p_0 f_0 = f_0^*$ 等。因此，当且仅当 $p_0^* v \in (f_0 M f_0)' = M_0' \oplus \mathcal{B}(H_0^\perp)$作用于 $H = H_0 \oplus H_0^\perp$时，$v \in V^\iota$。等价地，对于某个 $y' \in M_0'$，有 $v = y' p_0$。由 [22, 命题 II.3.10],$M_0' = p_0 M' p_0^*$，因此 $V^\iota = p_0 M' f_0$。

令 $\theta = \iota \circ \theta_1 \circ \theta_0\colon N \to M$ 因此 $V^\theta = V^{\theta_0} x_0^{1/2} \circ p_0 M' f_0$ 由这些计算可得。由于 $x_0 \in M$与 f_0可交换，我们看到 $V^\theta = V^{\theta_0} p_0 x_0^{1/2}$ 因此 $V^{\theta *} \circ V^\theta = x_0^{1/2} p_0^* S_0 p_0 x_0^{1/2} = S$，这正是证明 (1)所需的。 □

这些论证本质上都相当有限维。命题 5.19 在 [12, 命题 6。7], 中给出了一个简短的证明，该证明同样使用保迹完全正映射，而非酉完全正映射。命题 6。7]的思路是利用Duan论证找到一个保迹完全正映射$\phi\colon \mathcal{B}(H) \to \mathcal{B}(K)$，使得 S，然后只需将其限制到 $M \subseteq \mathcal{B}(H)$，比如得到$\hat{\theta}\colon M \to \mathcal{B}(K)$；接下来只需稍作验证，确认这不会改变 S （使用

这里 S 是一个 M'-双模）。与引理 5.16中一样，相关的UCP映射 $\theta\colon \mathcal{B}(K) \to M$满足关系

$$\mathrm{Tr}_M(\theta(a)b) = \mathrm{Tr}(a\hat{\theta}(b)) = \mathrm{Tr}(a\iota(\phi(b))) \qquad (a \in \mathcal{B}(K), b \in M),$$

其中 ι 是包含映射 $M \to \mathcal{B}(H)$。因此 $\theta = \hat{\tau} \circ \hat{\phi}$。事实上，以$\mathrm{Tr}_M$ 为马尔可夫迹，不难验证 $\hat{\tau}\colon \mathcal{B}(H) \to M$ 是一个条件期望：这或许在意料之中，因为它提供了一种将酉完全正映射的陪域从 $\mathcal{B}(H)$ 变为 M的方法。可以将这一条件期望的想法加以推广，使其适用于更一般的情形，但遗憾的是，存在正规条件期望 $\mathcal{B}(H) \to M$ 是一个相当强的条件，参见 [23,习题 IX.4.1], ，它迫使 M 成为矩阵代数的直和（可能是无限直和）。若能有工具将这些想法推广到更一般的冯·诺依曼代数，那将非常有趣。

5.2 序

在前面几节中，量子关系上的（包含）序非常重要。现在我们来看这对量子邻接算子意味着什么。设 A， e， V 彼此相关。由于 V 与$\mathrm{Im}\,(e)$ 之间由命题5.6 给出的双射是保序的，我们得到投影上的通常序： $e_1 \leqslant e_2$ 当且仅当 $e_2e_1 = e_1$，等价地， $e_1e_2 = e_1$。由此可见，这等价于 $A_2 \star A_1 = A_1 \iff A_1 \star A_2 = A_1$。

然而，由于关系的复合由邻接算子的复合给出，命题 5.13（当然，这可能无法保持舒尔幂等性），因此要为例如 A 余满射给出一个实用条件似乎很困难，我们在此不再探讨。不过，我们确实有以下结论。

命题 5.22. 设 $A\colon M \to N$ 是一个量子邻接算子。以下各条件等价：

(1) A是余单射；

(2) 将 $A \circ (JA^*J)$视为 $L^2(N)$上的映射时，它是 N'的成员；

(3) 存在一个中心正元素 $x_0 \in N$ ，使得对每个 $x \in N$，都有 $(A \circ (JA^*J))(x) = xx_0 = x_0^{1/2} x x_0^{1/2}$ 。

证明。 设 V 为与 A相关联的量子关系，故根据定义， A 是余单射当且仅当 V是余单射，也就是说，当且仅当 $V \circ V^* \subseteq N'$。由命题 5.13， $V \circ V^*$ 是 $A \circ (JA^*J)$的像，而由命题 5.6(2) 可知这意味着 $V \circ V^* = N'\nabla^{1/4}(A \circ (JA^*J))\nabla^{-1/4}N'$。由于 ∇ 在 N'上实现了一个单参数群，我们看到 $N' \supseteq V \circ V^*$ 当且仅当

$$\begin{aligned} & N' \supseteq \nabla^{1/4} N'(A \circ (JA^*J))N'\nabla^{-1/4} \\ \iff \quad & \nabla^{-1/4} N' \nabla^{1/4} = N' \supseteq N'(A \circ (JA^*J))N', \end{aligned}$$

而这等价于 $A \circ (JA^*J) \in N'$ （作为 $1 \in N'$）。由于 N' 的任一成员都对某个 $x_0 \in N$具有形式$\Lambda(x) \mapsto \Lambda(xx_0)$ ，并且若映射 $x \mapsto xx_0$ 是正的，则 $x_0 = 1x_0$ 是正的，且对每个 $x \geqslant 0$ 我们有 $xx_0 = (xx_0)^* = x_0x$，因此取这些 x的线性张成，我们得出 x_0 是中心的。反之，对任意正的 x_0， $x \mapsto x_0^{1/2} x x_0^{1/2}$ 是完全正的。 □

由于余单射 V 对应于 $*$-同态，下一节将给出此类 A 的一个明确表达式，尽管它稍显复杂。

5.3 量子函数

我们来考察定理 3.12 关于量子邻接算子的论述。设 $\theta\colon N \to M$是一个 $*$-同态，其中同样有 M，N 是作用于 $L^2(M)$ 和 $L^2(N)$上的有限维对象，分别如此。考虑定义 V^θ 中所述的量子关系 3.4。我们的最终目标是求出与 V^θ相关联的量子邻接算子。

命题 5.23. 设 M, N 是有限维的，设 $\theta\colon N \to M$ 是一个 $*$-同态，并构造量子关系 $V^\theta \subseteq \mathcal{B}(L^2(M), L^2(N))$。

(1) $V^{\theta *}$ 与 $\{\xi \in L^2(M) : \theta(1)\xi = \xi\}$ 之间存在一个线性双射，其中 $\nu^* \in V^{\theta *}$ 与 $\xi = \nu^*\Lambda(1)$ 双射，而 ξ 将 ν^* 确定为 $y \in N$ 的 $\nu^*\Lambda(y) = \theta(y)\xi$。

(2) 设 $\hat{\theta}\colon L^2(N) \to L^2(M)$ 是由 θ 诱导的映射，因此 $\hat{\theta}\Lambda(y) = \Lambda(\theta(y))$ 对于 $y \in N$。由 $\hat{\theta}$ 生成的 M'-N' 双模是 $V^{\theta *}$。

证明。我们有，当 $\nu\colon L^2(M) \to L^2(N)$ 且 $\nu^* y = \theta(y)\nu^*$ 对于 $y \in N$时，$\nu \in V^\theta$。由 $\xi = \nu^*\Lambda(1)$ 可知，对于 $y \in N$，$\nu^*\Lambda(y) = \nu^* y\Lambda(1) = \theta(y)\xi$，因此 ν^*，故 ν由 ξ确定。此外，$\theta(1)\xi = \theta(1)\nu^*\Lambda(1) = \nu^*\Lambda(1) = \xi$。给定任意满足 $\xi = \theta(1)\xi$的 ξ，定义 $t\colon \Lambda(y) \mapsto \theta(y)\xi$ 对于 $y \in N$，于是 $\nu = t^*\colon L^2(M) \to L^2(N)$ 满足 $\nu^* y\Lambda(z) = t\Lambda(yz) = \theta(yz)\xi = \theta(y)t\Lambda(z)$ 对于 y、$z \in N$，因此 $\nu^* y = \theta(y)\nu^*$ 对于 $y \in N$，进而 $\nu \in V^\theta$，其中 $\nu^*\Lambda(1) = \theta(1)\xi = \xi$。故 (1) 成立。

如 $JMJ = M'$等等，对于 $a' \in M', b' \in N'$，存在 $x_0 \in M, y_0 \in N$，使得 $a'\Lambda_M(b) = \Lambda_M(bx_0)$，并且 $b'\Lambda_N(y) = \Lambda_N(yy_0)$ 对于 $y \in N, b \in M$。因此

$$a'\hat{\theta}b'\Lambda(y) = a'\hat{\theta}\Lambda(yy_0) = a'\Lambda(\theta(y)\theta(y_0)) = \theta(y)\Lambda(\theta(y_0)x_0),$$

因此$\nu^* = a'\hat{\theta}b'\Lambda(y) \in V^{\theta *}$ 与向量 $\xi = \Lambda(\theta(y_0)x_0)$相关联，如第 (1) 部分所示。由于任何满足 $\xi \in L^2(N)$ 的 $\theta(1)\xi = \xi$ 都以这种方式得到，我们已经证明了 (2)。 □

当 $\varphi_N = \mathrm{Tr}_N$ 为马尔可夫迹时，我们有 $m_N m_N^* = 1$，见注 5.8，因此θ 是同态意味着 $m_M(\hat{\theta} \otimes \hat{\theta}) = \hat{\theta}m_N$，因此 $\hat{\theta} \star \hat{\theta} = \hat{\theta}m_N m_N^* = \hat{\theta}$，所以 θ是 Schur幂等，当然 θ是完全正的。如果 φ_M 还是迹，那么第 (2) 式和命题 5.6(2) 表明 $\hat{\theta}$ 必定是与 $V^{\theta *}$相关联的邻接算子。因此，$J\hat{\theta}^* J = \hat{\theta}^*$ （因为 φ_M 是迹）也是 V^θ的邻接算子。

在一般情形下，命题 5.10 无法帮助我们找到邻接算子，因为这里我们要寻找的是与 V一一对应的舒尔幂等完全正映射 A，而不只是某个完全正映射。不过，命题 5.11 能为非迹情形提供一些指导。设 $\theta\colon N \to M$ 是我们的 $*$-同态，那么我们要寻找满足$V^\Phi = \nabla^{1/4}V^\theta\nabla^{-1/4}$的 $\phi\colon N \to M$完全正映射；这样，满足 $A^*_{KMS} = \phi$ 的 A 便与 V^θ相关联，我们或许可以设法调整 A 使其成为舒尔幂等。根据注5.7，我们也可以改为寻找 $V^\Phi = Q_N^{1/4}V^\theta Q_M^{-1/4}$，这样就能使用不同于 L^2 空间的希尔伯特空间。特别地，通过用 $N \subseteq \mathcal{B}(K)$调整 K，我们可以假设存在满足 $r\theta(y) = yr$ 的 $r\colon H \to K$，其中$y \in N$，因此 $\theta(y) = r^* yr$ 是一个膨胀。于是 $V^\theta = N'r$。令 $u = Q_N^{1/4}rQ_M^{-1/4}$，并定义$\phi(y) = u^* yu$，其中 $y \in N$，于是 $V^\Phi = N'u = N'Q_N^{1/4}rQ_M^{-1/4} = Q_N^{1/4}N'rQ_M^{-1/4} = Q_N^{1/4}V\theta Q_M^{-1/4}$ 如所需。注意，此时 $\phi(y) = Q_M^{-1/4}\theta(Q_N^{1/4}yQ_N^{1/4})Q_M^{-1/4}$。

受此启发，并通过一些例子进行研究，我们尝试定义

$$A(x) = Q_M^{-1/4}u^{1/2}\theta(Q_N^{1/4}xQ_N^{1/4})u^{1/2}Q_M^{-1/4} \qquad (x \in N), \tag{5.4}$$

其中， $u \in M \cap \theta(N)'$ 是一个正算子，我们稍后将对其进行定义。然后， A映射到 M中，且是完全正的。

引理 5.24. 设 u 限制在 $\operatorname{Im}\theta(1)$上时可逆。那么 $M'\nabla_M^{1/4}A\nabla_N^{-1/4}N' = V^{\theta *}$。

证明. 设 $a' \in M'$ 由某个 $x_0 \in M$ 按照 $a'\Lambda(a) = \Lambda(ax_0)$ 给出，并类似地设 $b' \in N'$与 $y_0 \in N$相关联。那么对于 $x \in N$,

$$\begin{aligned} a'\nabla_M^{1/4}A\nabla_N^{-1/4}b'\Lambda(x) &= a'\nabla_M^{1/4}A\Lambda(Q_N^{-1/4}xy_0Q_N^{1/4}) \\ &= a'\nabla_M^{1/4}\Lambda\big(Q_M^{-1/4}u^{1/2}\theta(Q_N^{1/4}Q_N^{-1/4}xy_0Q_N^{1/4}Q_N^{1/4})u^{1/2}Q_M^{-1/4}\big) \\ &= \Lambda\big(\theta(x)\theta(y_0Q_N^{1/2})uQ_M^{-1/2}x_0\big), \end{aligned}$$

这里我们用到了 $u \in \theta(N)'$。令 $y_0 = Q_N^{-1/2}$ ，于是得到这一项 $\theta(1)$。由于 $\theta(1)u = u\theta(1)$，可得 $\operatorname{Im}\theta(1)$ 是 u的不变子空间，而我们的假设是 u 在此子空间上可逆，因此存在 $w \in M$ 使得 $uw = wu = \theta(1)$。对于任意$z_0 \in M$ ，令 $x_0 = Q_M^{1/2}wz_0$，以得到映射 $\Lambda(x) \mapsto \theta(x)\Lambda(z_0)$。根据命题 5.23，对每个 $v^* \in V^{\theta *}$ ，存在 $\xi \in L^2(M)$ 使得 $v^*\Lambda(x) = \theta(x)\xi$。由于 $\xi = \Lambda(z_0)$ 对某个 $z_0 \in M$成立，证明完毕。 □

现在看来，有必要明确地将 N 识别为矩阵代数的直和，例如$N = \bigoplus_\alpha \mathbb{M}_{n(\alpha)}$。对于 $x \in N$ ，令 $x = (x_\alpha)$ 属于这个直和。设 (1_α) 为 N中的极小中心幂等元族，则 1_α 是 $\mathbb{M}_{n(\alpha)}$的单位元。对于给定的 α，将 θ 限制到$\theta_\alpha \colon \mathbb{M}_{n(\alpha)} \to \theta(1_\alpha)M\theta(1_\alpha) \subseteq \mathcal{B}(\operatorname{Im}\ \theta(1_\alpha))$ 上，得到一个保单位的 $*$-同态，因此，对于某个辅助的（有限维）希尔伯特空间 K_α，有 $\operatorname{Im}\ \theta(1_\alpha) \cong \mathbb{C}^{n(\alpha)} \otimes K_\alpha$，且在此同构下 $\theta_\alpha(x) = x \otimes 1$。我们的元素 $u \in \theta(N)' \cap M$ 限制到 $\operatorname{Im}\theta(1_\alpha)$ 后，得到一个与 $\mathbb{M}_{n(\alpha)} \otimes 1$对易的元素，因此其形式为 $1 \otimes u_\alpha$。

引理 5.25. A 是 *Schur*幂等的，当且仅当对于每个 α，正的 $u_\alpha \in \mathcal{B}(K_\alpha)$ 满足

$$(\operatorname{Tr} \otimes \mathrm{id})\big((Q_{N,\alpha}^{-3/4} \otimes 1)(\theta(1_\alpha)Q_M^{-1/2}\theta(1_\alpha))(1 \otimes u_\alpha)(Q_{N,\alpha}^{1/4} \otimes 1)\big) = 1.$$

这里我们将 $\theta(1_\alpha)Q_M^{-1/2}\theta(1_\alpha)$ 视为 $\mathcal{B}(\text{像}\,\theta(1_\alpha)) \cong \mathbb{M}_{n(\alpha)} \otimes \mathcal{B}(K_\alpha)$ 的一个成员。

证明. 设 $e_{i,j}$ 表示矩阵代数 $\mathbb{M}_n$ 的矩阵单位，并设 $(e_{i,j}^\alpha)$ 表示 $\mathbb{M}_{n(\alpha)} \subseteq N$ 的矩阵单位。关于 m^* 的公式已在定义 2.9]，之前计算过，例如，这便给出

$$m_N^*(e_{i,j}^\alpha Q_N^{-1}) = \sum_k e_{i,k}^\alpha Q_N^{-1} \otimes e_{k,j}^\alpha Q_N^{-1}.$$

注意，形如 $e_{i,\,j}^\alpha Q_N^{-1}$ 的元素的线性张成给出了全部 N，并且 $e_{i,\,j}^\alpha Q_N^{-1} = e_{i,\,j}^\alpha Q_{N_\alpha}^{-1}$。对于这样的元素，我们有

$$\begin{aligned} m_M(A \otimes A)m_N^*(e_{i,j}^\alpha Q_N^{-1}) &= \sum_k A(e_{i,k}^\alpha Q_{N,\alpha}^{-1})A(e_{k,j}^\alpha Q_{N,\alpha}^{-1}) \\ &= \sum_k Q_M^{-1/4}u\theta(Q_{N,\alpha}^{1/4}e_{i,k}^\alpha Q_{N,\alpha}^{-3/4})Q_M^{-1/2}u\theta(Q_{N,\alpha}^{1/4}e_{k,j}^\alpha Q_{N,\alpha}^{-3/4})Q_M^{-1/4}, \end{aligned} \tag{5.5}$$

这里再次利用 $u \in \theta(N)'$。这个表达式的中间部分是

$$\sum_k \theta(e^\alpha_{i,k})\theta(Q^{-3/4}_{N,\alpha})\theta(1_\alpha)Q^{-1/2}_M\theta(1_\alpha)u\theta(Q^{1/4}_{N,\alpha})\theta(e^\alpha_{k,j}).$$

由于这是 $\theta(1_\alpha)M\theta(1_\alpha)$ 的一个元素，我们使用该同构，并在 $\mathbb{M}_{n(\alpha)} \otimes \mathcal{B}(K_\alpha)$ 中进行运算，从而得到

$$\begin{aligned}&\sum_k (e^\alpha_{i,k}Q^{-3/4}_{N,\alpha} \otimes 1)\theta(1_\alpha)Q^{-1/2}_M\theta(1_\alpha)(1 \otimes u_\alpha)(Q^{1/4}_{N,\alpha}e^\alpha_{k,j} \otimes 1)\\ &= e^\alpha_{i,j} \otimes (\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{id})\big((Q^{-3/4}_{N,\alpha} \otimes 1)(\theta(1_\alpha)Q^{-1/2}_M\theta(1_\alpha))(1 \otimes u_\alpha)(Q^{1/4}_{N,\alpha} \otimes 1)\big). \qquad (5.6)\end{aligned}$$

我们将 (5.5) 与

$$A(e^\alpha_{i,j}Q_N^{-1}) = Q^{-1/4}_M u\theta(Q^{1/4}_{N_\alpha}e^\alpha_{i,j}Q^{-3/4}_{N,\alpha})Q^{-1/4}_M.$$

由此可知，$A \star A = A$ 当且仅当 (5.6) 等于简洁的 $e^\alpha_{i,j} \otimes 1$，这正是引理陈述中所声称的条件。□

现在我们继续证明适当的 u 总是存在，并展示如何构造它。对于给定的 α，令

$$t = \theta(1_\alpha)Q^{-1/2}_M\theta(1_\alpha) = \sum_{i,j} e^\alpha_{i,j} \otimes t_{i,j} \in \mathbb{M}_{n(\alpha)} \otimes \mathcal{B}(K_\alpha) = \mathcal{B}(\mathrm{Im}\,\theta(1_\alpha)),$$

即。引理 5.25 中的条件变为

$$\begin{aligned}1 &= \sum_{i,j} (\mathrm{Tr} \otimes \mathrm{id})\big((Q^{-3/4}_{N,\alpha} \otimes 1)(e^\alpha_{i,j} \otimes t_{i,j}u_\alpha)(Q^{1/4}_{N,\alpha} \otimes 1)\big)\\ &= \sum_{i,j} \mathrm{Tr}(Q^{-3/4}_{N,\alpha}e^\alpha_{i,j}Q^{1/4}_{N,\alpha})t_{i,j}u_\alpha = \sum_{i,j} (Q^{-1/2}_{N,\alpha})_{j,i}t_{i,j}u_\alpha.\end{aligned}$$

因此定义

$$\nu = \sum_{i,j} (Q^{-1/2}_{N,\alpha})_{j,i}t_{i,j} \in \mathcal{B}(K_\alpha).$$

引理 5.26. 算子 ν 是正且可逆的，并且 $1 \otimes \nu$ 是 M 中某个元素在 $\mathrm{Im}\,\theta(1_\alpha)$上的限制。

证明. 设 $q = Q^{-1/2}_{N\,\alpha}$,为正矩阵，因此对于 $\xi \in K_\alpha$ ，有

$$(\xi|\nu\xi) = \sum_{i,j} q_{j,i}\big(\xi\big|t_{i,j}\xi\big) = \sum_{i,j} q_{j,i}(\delta_i \otimes \xi|t(\delta_j \otimes \xi)) = \sum_{i,j} q_{j,i}t^\xi_{i,j},$$

也就是说，其中 t^ξ 是正矩阵，因为对于 $\eta \in \mathbb{C}^{n(\alpha)}$,

$$(\eta|t^\xi(\eta)) = \sum_{i,j} \overline{\eta_i}(\delta_i \otimes \xi|t(\delta_j \otimes \xi))\eta_j = (\eta \otimes \xi|t(\eta \otimes \xi)) \geqslant 0,$$

由于 t 是正的。因此

$$(\xi|\nu\xi) = \mathrm{Tr}(qt^\xi) = \mathrm{Tr}(q^{1/2}t^\xi q^{1/2}) \geqslant 0,$$

由此我们得出，ν 是正的。

这个计算还表明，如果 $\nu\xi = 0$，那么 $\mathrm{Tr}(q^{1/2}t^{\xi}q^{1/2}) = 0$，因此 $(t^{\xi})^{1/2}q^{1/2} = 0$，所以$t^{\xi} = 0$，因为 q是可逆的。于是，对于每个 η，都有 $(\eta\otimes\xi|t(\eta\otimes\xi)) = 0$，所以 $(\theta(1)(\eta\otimes\xi)|Q_M^{-1/2}\theta(1)(\eta\otimes\xi)) = 0$，从而对于每个 η，都有 $\theta(1)(\eta\otimes\xi) = 0$。然而，$\eta\otimes\xi\in\mathrm{Im}\,\theta(1)$，因此我们得出 $\xi = 0$。所以 ν是单射的，因而是可逆的。

对于任意的 i、j、k，利用同构 $\mathrm{Im}\,\theta(1_\alpha)\cong\mathbb{M}_{n(\alpha)}\otimes\mathcal{B}(K_\alpha)$，我们有

$$\theta(e_{k,i}^{\alpha})Q_M^{-1/2}\theta(e_{j,k}^{\alpha}) = (e_{k,i}\otimes 1)t(e_{j,k}\otimes 1) = e_{k,k}\otimes t_{i,j}$$
$$\Longrightarrow 1\otimes\nu = \sum_{i,j,k} e_{k,k}\otimes(Q_{N,\alpha}^{-1/2})_{j,i}t_{i,j} = \sum_{i,j,k}(Q_{N,\alpha}^{-1/2})_{j,i}\theta(e_{k,i}^{\alpha})Q_M^{-1/2}\theta(e_{j,k}^{\alpha}),$$

它是一个 M 的成员（更准确地说，是该元素在 $\mathrm{Im}\,\theta(1_\alpha)$上的限制。） □

根据引理，我们因此可以定义 u_α 为 ν的逆，对每个 α。投影 $\theta(1_\alpha)$ 两两正交，且其和为 $\theta(1)$。因此，我们可以用显然的方式定义$u = \sum_\alpha\theta(1_\alpha)(1\otimes u_\alpha)\theta(1_\alpha)$。由引理可知，$u\in M$；而根据构造，$u$ 与 $\theta(N)$可交换。由于每个 u_α 都是正的，u 也为正。我们的记号是一致的：将 u 限制回 $\mathrm{Im}\,\theta(1_\alpha)$ 确实得到算子 $1\otimes u_\alpha$，它是可逆的。因此，u 满足引理5.24和5.25的条件，因此 A 是与 $V^{\theta *}$相关联的邻接算子。

如果某种方式能够“计算”A 与一般的 V^{θ}相关的邻接算子（其中 θ 仅为完全正算子，那么这仍是一个有趣的问题。考虑第5.1节，这与计算正算子的支撑投影密切相关。即使在经典情形下，除了进行非常明确的计算之外，这项任务似乎也很难完成。

参考文献

[1] Teodor Banica。《一般余作用的对称性》。*Math. Ann.*，314(4)：763–780，1999。

[2] David P. Blecher 和 Christian Le Merdy。《算子代数及其模——算子空间方法》，伦敦数学会专著新系列第 30 卷。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，牛津，2004 年。牛津科学出版物。[3] Alexandru Chirvasitu 和 Mateusz Wasilewski。随机量子图。《美国数学会汇刊》，375(5):3061–3087，2022 年。[4] Man Duen Choi。复矩阵上的完全正线性映射。《线性代数及其应用》，10:285–290，1975 年。[5] Matthew Daws。单参数等距算子群与算子代数之间的包含映射。《纽约数学杂志》，27:164–204，2021 年。[6] Matthew Daws。量子图：不同视角、同态与量子自同构。《美国数学会通讯》，4:117–181，2024 年。[7] Matthew Daws。无限维量子图：希尔伯特–施密特算子与希尔伯特模，2025 年。arXiv:2511.23121 [math.OA].[8] Runyao Duan。噪声量子信道零错误容量的超激活，2009 年。arXiv:0906.2527 [quant-ph]。

[9] Runyao Duan、Simone Severini 和 Andreas Winter。通过量子信道、非交换图与量子 Lovász 数实现零错误通信。IEEE 信息论汇刊，59(2):1164–1174，2013 年。[10] Andre Kornell。量子函数，2015 年。arXiv:1101.1694 [math.OA]。[11] Andre Kornell。量子集。《数学物理杂志》，61(10):102202，33 页，2020 年。[12]Andre Kornell 和 Bert Lindenhovius。同态的量子图，2026 年。arXiv:2601.09685 [quant-ph]。[13] Jon Kraus。冯·诺伊曼代数中 σ-弱闭子空间的切片映射问题。《美国数学会汇刊》，279(1):357–376，1983 年。[14] E. C. Lance。希尔伯特 C^*-模，伦敦数学会讲义系列第 210 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。算子代数学家的工具箱。[15] Junichiro Matsuda。 M_2 上的量子图分类及其量子自同构群。《数学物理杂志》，63(9):论文编号 092201，34 页，2022 年。[16] Benjamin Musto、David Reutter 和 Dominic Verdon。量子函数的组合式方法。《数学物理杂志》，59(8):081706，42 页，2018 年。[17] William L. Paschke。 B^*-代数上的内积模。《美国数学会汇刊》，182:443–468，1973 年。[18] Vern Paulsen。完全有界映射与算子代数，剑桥高等数学研究丛书第 78 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2002 年。[19] Marc A. Rieffel。 C^*-代数与 W^*-代数的 Morita 等价。《纯粹与应用代数杂志》，5:51–96，1974 年。[20] Kalyan B. Sinha 和 Debashish Gos wami。量子随机过程与非交换几何，剑桥数学专著第 169 卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007 年。[21] Michael Skeide。冯·诺依曼模、交织算子与自对偶性。《算子理论杂志》，54(1):119–124，2005 年。[22] M. Takesaki。《算子代数理论》第一卷，数学科学百科全书第 124 卷。施普林格出版社，柏林，2002 年。1979 年初版重印，《算子代数与非交换几何》第 5 卷。[23]M. Takesaki。《算子代数理论》第二卷，数学科学百科全书第 125 卷。施普林格出版社，柏林，2003 年。《算子代数与非交换几何》第 6 卷。[24] Dominic Verdon。协变量子组合学及其在零错误通信中的应用。数学物理通讯，405(2):论文编号 51，57 页，2024 年。

[25] Mateusz Wasilewski. 关于量子 Cayley 图。《数学文献》， 29(6):1281–1317, 2024.
[26] Nik Weaver. 量子关系。《美国数学学会回忆录》， 215(1010):v–vi, 81–140, 2012.
[27] Nik Weaver. 量子关系作为量子关系。《几何分析杂志》， 31(9):9090–9112, 2021.