arXiv:2602.18433v1 [math.PR] 20 Feb 2026

双曲空间 $\mathbb{H}^d$ 上泊松势中倾斜布朗运动的淬火路径极限与周期化稳定性

Miklos Abert、Adam Arras、Jaelin Kim

2026年2月23日

摘要

我们分析了在双曲空间 $\mathbb{H}^d$上，受全支撑势倾斜的布朗运动是否存在。在紧空间上，这些称为 Q过程的路径极限存在是经典结论，并且可以直接利用相应薛定谔算子的基态来定义。在 $\mathbb{H}^d$这类非紧空间上，这种存在性一般不成立。

我们证明，对于 $\mathbb{H}^d$ 上的平稳随机 势，只要满足适当的谱界和上确界范数界，Q过程几乎必然存在。对于作为泊松点过程因子的势，该方法在上确界范数达到（$d-1$）$^2/8$之前均适用。在这种情况下，我们还证明路径极限可以用周期势逼近。

作为一种工具，我们使用由点过程定义的叶状空间。事实证明，这个叶状空间的全局基态可以替代叶状结构的叶上不存在的 L^2 基态。将全局基态限制在某个叶上，可得到一个广义本征波，可将其代入常规方法中以得到 Q过程。

关键词：布朗运动；Q过程；泊松点过程；随机势；双曲空间；Schr¨odinger算子；Doob变换；Benjamini–Schramm收敛；叶状拉普拉斯算子。

1 引言

设$\mathbf{P}^x$表示光滑黎曼流形 M上从 $x \in M$出发的布朗运动$(X_t)^{t\in\mathbb{R}_{\geq 0}}$的维纳测度。给定连续势函数$V\colon\ M \to \mathbb{R}_{\geq 0}$，我们考虑 V倾斜路径测度（时间为 T，其定义为

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}_T^x}{\mathrm{d}\mathbf{P}^x} := \frac{1}{Z_T^x} \exp\left(- \int_0^T V(X_s)\, \mathrm{d}s \right), \tag{1}$$

其中 Z_T^x 是归一化因子。该测度描述了软陷阱模型中粒子的轨迹，条件是其存活至时间 T。我们关注当 $T \to \infty$时路径极限的存在性及其渐近行为（即轨迹空间上的弱极限）。当该极限存在时，称其为相对于 V的 Q过程。

当 M 是紧的时，众所周知，上述路径测度族在 $T \to \infty$时存在唯一的弱极限。该极限是一个扩散过程，其生成元是与薛定谔算子 $-\frac{1}{2}\Delta_M + V$ 的（唯一）基态相关联的 Doob变换。

在非紧情形下，上述算子通常没有最低特征值，也无法一般性地保证Q过程的存在。我们的主要结果给出了双曲空间 $M = \mathbb{H}^d$上齐次随机势函数的一般存在性判据。

定理1. 设 ω 为 $\mathbb{H}^d$上的齐次泊松点过程（泊松点过程），并设 $V_\omega\colon$ $\mathbb{H}^d \to [0, \infty)$ 为具有最大范数的连续ω 因子势

$$\|V_\omega\|_\infty < \frac{(d-1)^2}{8}. \tag{2}$$

则对几乎处处的 ω 以及对所有 $x \in \mathbb{H}^d$，倾斜测度$\mathbf{Q}_T^x$ 收敛到一个与起点 x无关的扩散过程。

关于泊松点过程势的因子的精确表述，我们参见定义2.1。上文可用的一类自然的势为

$$V_\omega(x) = \min\left\{ V_{\max}, \sum_{y\in\omega} \eta(d(x,y)) \right\}$$

其中 $\eta\colon\ \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ 是一个固定的种子函数， $V_{\max}$ 是一个常数。请注意，泊松点过程的强度在此处无关紧要。

定理1以一种新颖的方式结合了两个研究充分的对象。此前关于Q过程的研究主要集中于限制势，或者周期势；在后一种情形下，路径极限的存在性可由经典理论推出。另一方面，文献已对受泊松陷阱（软陷阱或硬陷阱）倾斜的时长为 T 的布朗运动进行了广泛研究，参见例如 [25] 及其中的参考文献，但我们没有发现关于路径极限存在性的讨论。这些结果也主要针对欧氏空间，而在这类空间中，我们的谱方法无法自动奏效，因此需要新的思路。

我们利用由点过程所定义的叶状空间的谱理论来得到定理1。事实上，在类似于我们的情形中，$(\mathbb{H}^d, V_\omega)$的各个实例并不容许 L^2 基态。然而，事实证明，环境叶状空间的 L^2 的全局谱理论确实容许唯一的基态，该基态（当限制回叶上时）可用作寻找极限 Q 过程的替代。

正如我们将看到的，定理1对任意平稳随机势 V也同样成立，但对最大范数的界将依赖于该势的全局谱隙。特别地，若底层群作用不具有谱隙，我们便得到一个空命题（这正是上文所指出的欧氏空间的问题）。在定理1中，我们仅使用泊松点过程，因为泊松势的因子的谱隙达到最大可能，也就是说，泊松点过程是Ramanujan的，见定理 4。

我们的下一个结果讨论如何用由周期势定义的 Q过程来近似由一般平稳随机势定义的 Q过程。

定理 2. 设(M_n) 是一列紧致双曲 d-流形，且具有一致的谱隙

$$\lambda := \liminf_{n\to\infty} \lambda_1\big(-\tfrac{1}{2}\Delta_{M_n}\big) > 0$$

使得 M_n ***Benjamini-Schramm*** 收敛于 $\mathbb{H}^d$。设 V_n 是 M_n 上的一个非负连续势，其最大范数为

$$\limsup_{n\to\infty} \|V_n\|_\infty < \lambda.$$

使得对(M_n, V_n) 进行 ***Benjamini-Schramm*** 收敛到$(\mathbb{H}^d, V)$，其中V是 $\mathbb{H}^d$上的平稳随机函数。那么叶状

空间$(\mathbb{H}^d, V)$ 的谱隙至少为 λ，并且(M_n, V_n) 的 Q-过程收敛到(M, V)的Q-过程。

我们需要说明 (M_n, V_n) 到 (M, V) 的 Benjamini-Schramm 收敛；在上述情形中，这相当简单（一般定义见 [4]）。这里，我们借助随机根和标架，将函数 V_n 提升到 $\mathbb{H}^d$，从而得到 $\mathbb{H}^d$上的周期平稳随机函数 $\widetilde{V}_n$。Benjamini-Schramm 收敛是指函数 V_n' 的分布弱收敛到 V的分布。我们将在第5节明确具体的空间和设置。

然而，目前尚不清楚哪些平稳随机势可以由具有良好谱隙的周期势逼近。这正是泊松点过程因子势相较于任意平稳随机势的优势所在。事实上，任何泊松点过程因子势都可以由周期势逼近，这使我们能够在此证明一个一般性的稳定性结果。

定理 3。存在 $\lambda_d > 0 (d \geq 2)$，使得以下结论成立。设ω 是 $\mathbb{H}^d$ 上的齐次泊松点过程（*PPP*），并设 $V_\omega : \mathbb{H}^d \to [0, \infty)$ 是 ω 势的一个连续因子，其最大范数为

$$\|V_\omega\|_\infty < \lambda_d. \tag{3}$$

那么，$(\mathbb{H}^d, V)$ 的 Q 过程可以用周期 Q 过程来近似，也就是说，用周期势定义的 Q 过程来近似。

上述定理包含两部分。首先，我们利用这样一个事实：对于每个 $d \geq 2$，都存在一个紧双曲 d流形的扩张子族，其 Benjamini-Schramm 极限为 $\mathbb{H}^d$。这可由以下两个结果推出：1）根据 Clozel [11], 的一个著名结果，对于半单李群（包括 $\mathbb{H}^d$）的任意对称空间 X，都存在一个仅依赖于 X的常数 $\epsilon_d > 0$, 使得对于 G中的每个同余格 Γ，轨形 $\Gamma\backslash X$的谱隙至少为 ϵ_d。2）在 $\mathbb{H}^d$上固定任意一个余紧算术格 Γ，根据 [3]，Γ的任意一列同余子群，$\Gamma\backslash\mathbb{H}^d$ 的 Benjamini-Schramm 极限都是 $\mathbb{H}^d$。我们将 λ_d 定义为能够实现这一点的最佳渐近谱隙。除 $d = 2$外，λ_d的值尚不明确：对于 $d = 2$，根据 Hide 和 Magee [15], 最近的研究，我们有$\lambda_2 = 1/8$，这就是最优值。

其次，我们利用这样一个事实：对于任何这样的流形序列，紧致流形上的泊松点过程将收敛到 $\mathbb{H}^d$ 的泊松点过程，这一结论也适用于任何

因子势。综合这些结果，可得到一个满足定理 2 假设的 $(M_n,\ V_n)$ 序列。

上述模型的一个极限情形是所谓的硬障碍模型，其中粒子被条件化为避开泊松点过程的一个 r-邻域

$$\{x\colon d(x,\omega) < r\} = \bigcup_{y\in\omega} B(y,r).$$

若半径足够小，则 r-邻域的补集以正概率 $[7, 26]$, 包含一个无限簇，从而引出如下问题。

问题 1.1. 在超临界硬泊松障碍模型的某个无限连通分支上，极限 Q-过程是否存在?

形式上，硬障碍对应于软势 $V_\omega(x) = V_{\max}\mathbf{1}_{\{d(x,\omega)<r\}}$中的极限 $V_{\max}\to\infty$。目前，我们在此发展的方法严重依赖于势的有界性假设，因而尚无法回答这一问题。

致谢。 作者感谢Francois Ledrappier与Jean Raimbault的有益讨论。

2 预备知识

双曲空间。 我们考虑双曲面模型:

$$\mathbb{H}^d = \left\{z = (z_0, z_1, \dots, z_d) \in \mathbb{R}^{1+d} \;\middle|\; z_0 > 0,\ \langle z, z\rangle_J = -1\right\},$$

其中 $J = \mathrm{diag}(-1,1,\dots,1)$，且 $\langle\cdot,\cdot\rangle_J$表示相应的闵可夫斯基双线性形式。附加结构将相对于一个正向正交标架 $(o,u) \in \mathcal{F}(\mathbb{H}^d)$ 来定义。我们固定典范选取$o = e_0 \in \mathbb{H}^d$ 以及 $u = (e_1,\dots,e_d) \in (T_o\mathbb{H}^d)^d$，其中 $(e_0,\dots,e_d)$ 表示 $\mathbb{R}^{1+d}$ 的标准基。在此模型中， $\mathbb{H}^d$ 的保定向等距变换群与保持该形式的实线性变换群的单位连通分支重合，即 $A^TJA = J$。我们将其记为

$$G = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^d) = \mathrm{PSO}(1,d) \subset GL_{d+1}(\mathbb{R}).$$

任一等距变换 $g \in G$ 自然地作用于（正向）标准正交标架丛，其作用方式为

$$g \cdot (o, u) := (g \cdot o,\, \mathrm{d}g_o(u)).$$

由于该作用是单传递的，我们得到恒等关系 $G \simeq \mathcal{F}(\mathbb{H}^d)$。我们将原点 o 的稳定子记为 K，因此

$$\mathbb{H}^d \simeq G/K.$$

关于双曲面模型的更多内容，我们参见 [13] 。

软陷阱中的布朗运动。令$\mathbf{P}^x$ 表示布朗运动 $(X_t)_{t\geq 0}$ 在 $C(\mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{H}^d)$ 上的维纳测度，其具有 $X_0 = x$，生成元为 $\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{H}^d}$；令$\mathbf{E}^x$ 表示相应的期望。对于 $f \in C_c^\infty(\mathbb{H}^d)$，

$$\mathbf{E}^x[f(X_t)] = \left(e^{\frac{t}{2}\Delta_{\mathbb{H}^d}} f\right)(x).$$

给定有界连续势函数 $V\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{R}$，我们定义倾斜路径测度$\mathbf{Q}_T^x$ 如下：

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{Q}_T^x}{\mathrm{d}\mathbf{P}^x} &= \frac{1}{Z_T^x} \exp\left(- \int_0^T V(X_s)\, \mathrm{d}s \right), \\ Z_T^x &= \mathbf{E}^x \left[\exp\left(- \int_0^T V(X_s)\, \mathrm{d}s \right) \right]. \end{aligned} \tag{4}$$

假设 $(\mathbf{Q}_T^x)_{T>0}$ 在赋予紧时间区间上一致收敛拓扑的 $C(\mathbb{R}_{\geq 0},\ \mathbb{H}^d)$ 上弱收敛。更准确地说，我们假设对每个 $t \geq 0$ 及每个博雷尔集 $B \in \mathcal{F}_t$（典范滤过），

$$\mathbf{Q}^x(B) := \lim_{T\to\infty} \mathbf{Q}_T^x(B)$$

存在。这些有限维边缘分布确定唯一的马尔可夫概率测度$\mathbf{Q}^x$，称为与杀死势 V 相关的 Q-过程。

周期情形。我们称 V 为周期的，如果它在无挠余紧格 $\Gamma \leq G$ 作用下保持不变，因此 $M = \Gamma\backslash\mathbb{H}^d$ 是一个闭双曲流形。薛定谔算子

$$H = -\tfrac{1}{2}\Delta_M + V$$

在 $L^2(M,\ \mathrm{vol}_M)$ 上定义了一个自伴算子，其谱为离散谱。其最低特征值 ρ 是单重的 [23], ，对应一个正的（归一化）特征向量。令 T_φ 为对角算子，其作用为乘以 φ。共轭算子（见 [5,第 1.15 节8]）

$$L = T_\varphi^*(\rho - H)T_\varphi = \tfrac{1}{2}\Delta_M + \nabla \log\varphi \cdot \nabla \tag{5}$$

生成一个扩散过程，其关于 vol_M 的转移密度 $p_L(t,x,y) = e^{tL}_{xy}$ 为

$$p_L(t,x,y) = p_{\frac{1}{2}\Delta_M}(t,x,y)e^{t\rho}\mathbf{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^t V(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\middle|\, X_t = y\right]\frac{\varphi(y)}{\varphi(x)},$$

其中，$\mathbf{E}^x$ 表示从$X_0 = x \in M$出发的布朗运动的期望。我们指的是 [23, 20, 6]；而 [24, 9] 表示通过正调和函数进行重整化。将此扩散提升到 $\mathbb{H}^d$ ，即可在周期情形下得到 Q-过程的存在性。

卡西米尔算子。在双曲面模型中，李代数 $so(1,d) \simeq T_{(o,u)}\mathcal{F}(\mathbb{H}^d)$ 由以下标准正交基生成

$$E_k := e_0e_k^* - e_ke_0^*, \qquad E_{i,j} := e_ie_j^* - e_je_i^*, \quad k,i,j \in \{1,\dots,d\},\ i<j.$$

对于 $A \in so(1,d)$ 和 $F \in C^\infty(G)$，回顾（右）李导数

$$\mathcal{L}_A F(g) := \left.\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\right|_{t=0} F\big(g\exp(tA)\big).$$

G 上的卡西米尔算子 Δ_G 是双不变的二阶微分算子

$$\Delta_G = \sum_{k=1}^{d}\mathcal{L}_{E_k}^2 - \sum_{1\le i<j\le d}\mathcal{L}_{E_{i,j}}^2.$$

它在 $C_c^\infty(G)$上关于G上的哈尔测度本质自伴，具有纯连续谱 $\mathrm{Spec}(-\Delta_G) = [\frac{(d-1)^2}{4},\infty)$，参见 [16,第 VIII 章]。卡西米尔算子限制在右 K-不变函数上时，等于双曲空间上的通常拉普拉斯–贝尔特拉米算子。对于形如 $F = f\circ\pi$的 $F \in C^\infty(G)$，其中 $f \in C^\infty(\mathbb{H}^d)$且 $\pi:\ G \to G/K$ 为商映射，有

$$(\Delta_G F)(g) = (\Delta_{\mathbb{H}^d} f)(gK). \tag{6}$$

令 $(g_t)_{t\ge0}$ 表示从 $g_0 = e_G$ 单位元出发、由 $\frac{1}{2}\Delta_G$ 生成的布朗运动。则 $(g_t\cdot o)_{t\ge0}$ 与 $(X_t)_{t\ge0}$ 具有相同的分布，其中 $X_0 = o$。

2.1 构型空间

我们记

$$\Omega = \left\{ \omega \subset \mathbb{H}^d \;\middle|\; \omega \text{ is locally finite} \right\} \tag{7}$$

赋予由计数映射生成的拓扑的构型空间

$$\omega \longmapsto |\omega \cap C|, \qquad C \subset \mathbb{H}^d \text{ compact.}$$

在 $\mathbb{H}^d$ 上强度为 $\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^d}$ 的泊松点过程的分布记为 μ。它是 Ω 上满足以下条件的唯一博雷尔概率测度：

- 对于每个紧集 $C \subset \mathbb{H}^d$，随机变量 $|\omega \cap C|$ 服从 $\mathrm{Poiss}(\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^d}(C))$ 分布；
- 对于任意一对不相交的紧集 C_1，$C_2 \subset \mathbb{H}^d$，随机变量$|\omega \cap C_1|$ 和 $|\omega \cap C_2|$ 相互独立。

由于 G 保持体积不变，其在 Ω 上的作用定义为

$$g \cdot \omega := \{ gx \mid x \in \omega \}$$

保持测度 μ。

定义 2.1. 泊松点过程的一个因子是一个随机势V_ω： $\mathbb{H}^d \to \mathbb{R}$ 具有如下形式

$$V_\omega(x) = V_\Omega(g^{-1} \cdot \omega), \qquad g \in G \text{ such that } g \cdot o = x,$$

其中 $V_\Omega : \Omega \to \mathbb{R}$ 是一个有界博雷尔函数，且具有 K-不变性，即对于所有 $k \in K$，$V_\Omega(k \cdot \omega) = V_\Omega(\omega)$。

例 2.2. 从 x到泊松点过程的距离

$$d(x, \omega) := \min_{y \in \omega} d(x, y).$$

显然是 Ω 上的一个 K-不变函数。给定任意一个光滑递减函数$\eta : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}$，满足，则势

$$V_\omega(x) = \eta(d(x, \omega))$$

是满足定理 1 假设的泊松点过程的一个因子，若 $\eta(0) < (d-1)^2/8$。

我们的主要方法是研究赋予下文所述叶状结构的泊松点过程 $L^2(\Omega,\mu)$ 的平方可积因子。

构型空间 Ω 带有由李群作用诱导的自然叶状结构。对于 $\omega\in\Omega$，G-轨道

$$\mathcal{L}_\omega := \{g\cdot\omega \mid g\in G\}\subset\Omega$$

定义了经过 ω 的叶。

注记 2.3。考虑稳定子平凡的构型所构成的博雷尔集

$$\Omega_0 = \{\omega \mid \mathrm{Stab}_G(\omega) = \{e_G\}\}.$$

由于 $\mathbb{H}^d$ 的体积无穷大，因此有 $\mu(\Omega_0)=1$；参见 [1] 的第 4.2 节。当 $\omega\in\Omega_0$，时，叶 $\mathcal{L}_\omega$ 与 G 典范微分同胚。在下文中，提及叶时，我们默认 $\omega\in\Omega_0$。

关于叶状空间的一般背景，我们参阅 [19, 10]。考虑基准标架，三元组 $(\mathbb{H}^d,\ (o,\ u)\ \omega)$ 对应于 [2] 中去奇异化定理所讨论的、由泊松点过程装饰的随机流形情形。

叶状结构可以理解为从不同参考标架观察同一构型。这自然建立了叶状空间 Ω 上的函数与 G 上的随机函数之间的对应关系。

给定一个可测函数 $F\colon\Omega\to\mathbb{R}$，我们将其与概率空间 (Ω,μ) 上的一个随机函数相关联：

$$F_\omega(g) := F(g^{-1}\cdot\omega),\qquad g\in G, \tag{8}$$

因此，$F_\omega(g)$ 表示在标架 $g\cdot(o,u)$ 看来，构型 ω 上的 F 的取值。若 F 是 K-不变的，由于 $\mathbb{H}^d\simeq G/K$，我们得到一个随机函数 $F_\omega\colon\mathbb{H}^d\to\mathbb{R}$。

3 叶状布朗运动。

由 Garnett [14]，引入的叶状布朗运动是一种马尔可夫过程，其轨迹按照布朗运动沿叶状结构的叶演化。这定义了 $L^2(\Omega,\mu)$ 上的一个压缩半群

$$\big(e^{\frac{t}{2}\Delta_\Omega}F\big)(\omega) = \mathbf{E}^{e_G}\big[F(g_t^{-1}\cdot\omega)\big],$$

其中 $(g_t)_{t\geq 0}$ 表示从单位元 e_G 出发的 G 上的布朗运动。生成元 Δ_Ω 称为叶状拉普拉斯算子，并满足关于叶向函数的恒等式 C^2

$$(\Delta_\Omega F)(\omega) := (\Delta_G F_\omega)(e_G),$$

其中 $F_\omega(g) = F(g^{-1}\cdot\omega)$。当 Ω 赋予泊松测度 μ 时，算子 Δ_Ω 是对称的，这一事实由测度叶状结构的一般理论推出，因为该测度是叶状结构的完全不变横向测度。等价地，带有其典范标架的随机装饰流形在 [2, 定理 31]的意义下是单模的。作为对称压缩半群的生成元，算子 Δ_Ω 是自伴的。事实上，利用表示论还可以得到更多结论。

定理 4（泊松点过程是 Ramanujan）。在 $L^2(\Omega,\mu)$ 上的 G-作用，即泊松点过程的叶状结构，分解为平凡表示与可数个正则表示副本的直和。因此，叶状拉普拉斯算子的谱为

$$\mathrm{Spec}(-\Delta_\Omega) = \{0\} \cup \mathrm{Spec}(-\Delta_G) = \{0\} \cup \left[\frac{(d-1)^2}{4}, \infty\right). \tag{9}$$

最小特征值是单的，并且与常值函数$\mathbf{1}_\Omega$相关联。

注3.1。这是伯努利图化中离散群的 [18, 定理 2.1 和推论 2.2] 的连续类比。

证明。我们采用 G.Last 和 M.Penrose 构造的泊松过程的福克表示， [17], 另见 [22] ，了解更多关于这种方法的内容。考虑对称福克空间

$$\Gamma_s(\mathbb{H}^d) := \mathbb{C} \oplus \bigoplus_{n=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\odot n},$$

其中 $\mathcal{H} := L^2(\mathbb{H}^d, \mathrm{vol}_{\mathbb{H}^d})$，而 $\mathcal{H}^{\odot n}$ 表示 $\mathbb{H}^d$ 中关于 n 个变量的对称函数，并赋予范数

$$\|f\|^2_{\Gamma_s(\mathbb{H}^d)} = |f_0|^2 + \sum_{n=1}^{\infty} n!\,\|f_n\|^2_{L^2((\mathbb{H}^d)^n)}.$$

给定 $F \in L^2(\Omega,\ \mu)$，我们定义映射 $U\colon\ F \mapsto f = (f_n)_{n\geq 0}$，其定义为 [17]

$$f_0 := \int_\Omega F(\omega)\mu(\mathrm{d}\omega), \qquad f_n(x_1,\ldots,x_n) := \sum_{J\subset\{1,\ldots n\}} (-1)^{n-|J|} \int_\Omega F(\omega \cup \{x_j\colon\ j\in J\})\mu(\mathrm{d}\omega),$$

[17] 中的主要结果是，$(f_n)_{n\geq 0}$ 属于 $\Gamma_s(\mathbb{H}^d)$，且 U 实际上是一个等距变换

$$\|F\|_{L^2(\Omega,\mu)} = \|f\|_{\Gamma_s(\mathbb{H}^d)} = \sqrt{\sum_{n=0}^{\infty} n!\,\|f_n\|^2_{L^2((\mathbb{H}^d)^n)}}.$$

到目前为止，我们只用到了 $\mathbb{H}^d$的测度空间结构。现在注意到，G作用通过酉变换 U在 $\Gamma_s(\mathbb{H}^d)$的每个直和项上对角作用。常值函数 1_Ω 被映到第一分量 $f_0 = 1$，并对应于平凡表示。对于 f_n，$n \geq 1$，我们看到$F(g\cdot\omega)$平移为 $f_n(g\cdot x_1,\ \ldots\ldots,\ g\cdot x_n)$，因此每个因子 $n \geq 1$都对应于正则表示。由于叶状拉普拉斯算子是通过 G上的布朗运动作用定义的，

$$e^{\frac{t}{2}\Delta_\Omega} F(\omega) = \mathbf{E}^{e_G}[F(g_t\cdot\omega)],$$

我们得到 $\mathrm{Spec}(-\Delta_\Omega) = \{0\} \cup \bigcup_{n\geq 1}\mathrm{Spec}(-\Delta_G)$。 □

4 定理1的证明

本节中，我们使用 [2]中引入的膜方法，证明定理1所述极限 Q过程的存在性。由于势是泊松点过程的一个因子，其分布在G的作用下保持不变。因此，随机薛定谔算子 $H_\omega = -\frac{1}{2}\Delta_{\mathbb{H}^d} + V_\omega$不具有基态 $\varphi_\omega \in L^2(\mathbb{H}^d)$。这种现象在自由拉普拉斯算子中也会出现：其常值特征函数 $\mathbf{1}_{\mathbb{H}^d}$ 属于$L^\infty(\mathbb{H}^d)$，但不属于 $L^2(\mathbb{H}^d)$。

相比之下，在与泊松点过程相关联的叶状空间上，常值函数 $\mathbf{1}_\Omega$ 是叶状拉普拉斯算子 Δ_Ω的一个真正的 $L^2(\Omega,\ \mu)$-特征向量。将其限制在一片叶 $\mathcal{L}_\omega$上，它就化为 $\mathbb{H}^d$ 上的常值函数$\mathbf{1}_{\mathbb{H}^d}$（视为 G上的 K-不变常值函数）。

谱扰动理论表明，在足够小的有界势下，相应的叶状 Schr¨odinger 算子仍存在一个正的基态 $\varphi \in L^2(\Omega,\ \mu)$。通过公式 (8) 中的对应关系，这

会得到一个随机的正广义特征函数 φ_ω on $\mathbb{H}^d$ for，可将其用作 Doob h 变换来构造淬火 Q 过程。

定理1的证明。考虑一个随机势 $V_\omega(\cdot)$，它是泊松过程的一个因子。根据定义 2.1，我们得到一个 K-不变的势函数 $V_\Omega \in L^\infty(\Omega)$，并将 V 相应的乘法算子 $V\colon F \mapsto V_\Omega \cdot F$ 记为。作为自伴算子的有界扰动，叶状薛定谔算子

$$H = -\tfrac{1}{2}\Delta_\Omega + V \tag{10}$$

是自伴的。它通过 $H_G = -\frac{1}{2}\Delta_G + V_\omega$作用于叶 $L^2(\mathcal{L}_\omega) \simeq L^2(G)$ 上。我们利用经典扰动理论 [21, 第七章] 证明 H 存在一个下特征向量。

我们首先假设 $\|V\| < \frac{1}{2}(d-1)_8^{\,2}$，允许势取负值。根据方程 9 的谱估计，对于 z 位于轮廓$\gamma = \{z\colon |z| = \frac{1}{2}(d-1)_8^{\,2}\}$ 内的情形，玻恩级数

$$(H-z)^{-1} = (\tfrac{-1}{2}\Delta_\Omega - z)^{-1}\sum_k (-V(\tfrac{-1}{2}\Delta_\Omega - z)^{-1})^k \tag{11}$$

绝对收敛，这表明谱与 γ 的取值范围相离。该级数关于扰动 V 是解析的，因此正交投影也

$$P_V = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma (H-z)^{-1}\mathrm{d}z.$$

对于 $V=0$， P_0 是投影到子空间 1_Ω 上的正交投影，这由定理 4 得出。由于维数 dim Range P_V 连续（作为迹），它是常数，且 P_V 投影到与基态相关联的一维特征空间上。我们设

$$\psi = \frac{P_V 1_\Omega}{\|P_V 1_\Omega\|}, \qquad \rho = \frac{\|HP_V 1_\Omega\|}{\|P_V 1_\Omega\|}.$$

注意，半群 e^{tH} 保持正性，因此基态具有恒定的符号，从而 $P_V 1_\Omega \neq 0$。事实上，不难看出， ψ 几乎处处为正。特征值和特征向量都关于 V解析变化，并且在乘以 $\|V\| < \frac{1}{2}(d-1)_8^{\,2}$ 的意义下定义良好。方程 $H\varphi = \rho\varphi$ 在叶 $\mathcal{L}_\omega$ 上转化为

$$-\frac{1}{2}\Delta_G\varphi_\omega + V_\omega\varphi_\omega = \rho\varphi_\omega.$$

令 $Z_t = e^{tH}1_\Omega \in L^2(\Omega)$。注意， 1_Ω， V_Ω 因此 Z_t 都是 K-不变函数，并且有

$$\begin{aligned} Z_T(\omega) &= \mathbf{E}^{e_G}\left[\exp\left(-\int_0^T V(g_t\cdot\omega)\mathrm{d}t\right)\right] \\ &= \mathbf{E}^{o}\left[\exp\left(-\int_0^T V_\omega(X_t)\mathrm{d}t\right)\right] = Z^o_{\omega,T}, \qquad \omega\,\mu-a.e. \end{aligned}$$

其中，第一个期望是对 G 上的布朗运动取的，第二个则是对从典范标架的基点出发的 $\mathbb{H}^d$ 取的。更一般地，对于任意 $x\in\mathbb{H}^d, g\in G$，都有 $Z_T(g^{-1}\cdot\omega) = Z^x_{\omega,T}$，其中 $g\cdot o = x$。量 $\epsilon := {(d-1)_8}^2 - 2\|V\|$ 给出了谱隙的下界， $t_n = 2\ln(n)/\epsilon$，有

$$\|e^{-t_n\rho}Z_t - \langle\psi,1_\Omega\rangle\psi\| \le e^{-t_n\epsilon} = O\left(\frac{1}{n^2}\right),$$

$$\sum_n \|e^{-t_n\rho}Z_{t_n} - \langle\psi,1_\Omega\rangle\psi\| < \infty.$$

因此 $(e^{-t_n\rho}Z_{t_n})_n$ 几乎处处收敛（相对于 μ）。对于 $t_n \le t < t_{n+1}$，我们得到

$$e^{-t\rho}Z_t(\omega) = e^{-t\rho}\mathbf{E}^{e_G}[\exp(\int_o^t -V(g_s^{-1}\cdot\omega)\mathrm{d}s)] \le e^{-t_n\rho}Z_{t_n}(\omega)e^{-(t-t_n)\rho}\exp(\|V\|_\infty(t-t_n)).$$

这意味着在一个具有全 μ 测度的集合上， $t\to\infty$ 的极限存在。由连续性可得归一化常数 $Z^x_{\omega、T}$ 的收敛，并且所有 x 都同时收敛。一旦证明了归一化常数（如方程 (4) 所定义）的收敛，极限 Q-过程的存在性便是经典结果。对于形如 $B = \{X_t\in A\}\in\mathcal{F}_t$ 的博雷尔集，以及 $t<T$，我们得到

$$
\begin{aligned}
Q^o_{\omega,T}(B) &= \frac{1}{Z^o_{\omega,T}} \mathbf{E}^o\left[\exp\left(-\int_0^T V_\omega(X_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{X_t\in A\}}\right] \\
&= \mathbf{E}^o\left[\exp\left(-\int_0^t V_\omega(X_s)\,ds\right)\mathbf{1}_{\{X_t\in A\}}\,\frac{Z^{X_t}_{\omega,T-t}}{Z^o_{\omega,T}}\right] \\
&= \int_A p_t(o,y)\,\mathbf{E}^o\left[\exp\left(-\int_0^t V_\omega(X_s)\,ds\right)\,\middle|\,X_t=y\right]\,\frac{Z^y_{\omega,T-t}}{Z^o_{\omega,T}}\,\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^d}(\mathrm{d}y) \\
&\xrightarrow[T\to\infty]{} \int_A p_t(o,y)\,\mathbf{E}^o\left[\exp\left(-\int_0^t V_\omega(X_s)\,ds\right)\,\middle|\,X_t=y\right]\,\frac{e^{t\rho}\varphi_\omega(y)}{\varphi_\omega(o)}\,\mathrm{vol}_{\mathbb{H}^d}(\mathrm{d}y) \\
&= Q^o_\omega(B)
\end{aligned}
$$

这表明极限 Q-过程存在。极限生成元的形式与 (5) 中相同,

$$L_\omega := T^*_{\varphi_\omega}(\rho - H_\omega)T_{\varphi_\omega} = \tfrac{1}{2}\Delta_{\mathbb{H}^d} + \nabla\log\varphi_\omega\cdot\nabla.$$

至此，我们已经证明，在条件$\|V_\omega\|_\infty < \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)}{8}\right)^2$，下， V 不必是非负的， Q-过程仍然存在。更一般地，令

$$V_- := \inf_{\mathbb{H}^d} V_\omega, \qquad V_+ := \sup_{\mathbb{H}^d} V_\omega, \qquad \overline{V} := \frac{V_- + V_+}{2}$$

表示势的极值和中程值。假设

$$\mathrm{osc}_{\mathbb{H}^d} V := V_+ - V_- < \frac{(d-1)^2}{8}.$$

上述论证适用于带有中心化扰动 $\|V_\omega - V\|_\infty < \frac{1}{2}\left(\frac{(d-1)}{8}\right)^2$, 的平移生成元 $-\frac{1}{2}\Delta_\Omega + V$，由此完成定理1的证明。

□

5 Benjamini–Schramm 极限与周期化

我们现在转而讨论 Q-过程的稳定性。适当的接近性概念由 [8] 中 Benjamini– Schramm 引入的局部收敛给出。我们回顾装饰流形情形下的这一概念；参见 [1]。

定义 5.1。 设 (M_n, V_n) 是一列有限体积黎曼d-流形，并配备连续势函数 V_n: $M_n \to \mathbb{R}$。若 (M_n, V_n) 在 ***Benjamini–Schramm*** 意义 （ BS ） 下收敛到一个带势的随机带基点双曲流形 (M, V, o)，则称

$$(M_n, V_n, x_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{law}} (M, V, o),$$

其中， x_n 按照黎曼体积测度选取。这里的依分布收敛是相对于流形上的带基点 C^∞-拓扑以及势的局部一致收敛而言的。在这种情况下，我们记作

$$(M_n, V_n) \xrightarrow{BS} (M, V, o).$$

本文只考虑极限为双曲空间的双曲流形。在这种情况下， $M_n \xrightarrow{BS} (\mathbb{H}^d, o)$表示： M_n 中随机点处的单射半径依概率趋于无穷。在证明定理 2 之前，我们明确构造 BS 极限中出现的叶状空间。具体做法是将该序列提升到双曲空间的随机副本上并取弱极限，同时按照 [1] 的思路，通过添加独立的泊松点过程来打破可能存在的对称性。

我们将增广构型的空间定义为

$$\widehat{\Omega} = \mathcal{V}\times\Omega = \left\{\hat{\omega} = (V, \omega) \;\middle|\; V\colon \mathbb{H}^d \to \mathbb{R} \text{ continuous, and } \omega \subset \mathbb{H}^d \text{ locally finite}\right\}. \tag{12}$$

这里， $\mathcal{V} = C(\mathbb{H}^d, \mathbb{R})$赋予紧集上的一致收敛拓扑。空间 Ω 是一个波兰空间。群 G 在 Ω 上通过对角作用$\widehat{\ }$，其定义为

$$g \cdot \hat{\omega} := (g \cdot V,\, g \cdot \omega),$$

其中 $(g \cdot V)(x) := V(g^{-1} \cdot x)$。与前文相同，诱导的叶状结构由 G-轨道定义。给定一列带有连续势函数的双曲 d-流形 (M_n, V_n)，我们选取一个随机标准正交标架 (o_n, u_n)，并考虑覆盖映射 $\pi_n\colon \mathbb{H}^d \to M_n$，它将典范标架 (o, u) 映射到 (o_n, u_n)。由此得到 $\mathbb{H}^d$ 上的一个随机提升势

$$\widetilde{V}_n := V_n \circ \pi_n. \tag{13}$$

$\widehat{\ }$ $\widetilde{\ }$令 $\widehat{\mu}_n$ 为 Ω 上的概率测度，其由 (V_n, ω) 的联合分布给出，其中 ω 是 $\mathbb{H}^d$上的独立泊松点过程。如果 $(M_n, V_n) \xrightarrow{BS}$

$(\mathbb{H}^d,\ V,\ o)$，则这些测度弱收敛，其极限

$$\hat{\mu} := \lim_n \hat{\mu}_n$$

定义极限测度叶状结构。与 2.3 节一样，对于 $\hat{}\mu$-几乎处处的 $\hat{}\omega$，叶 $\mathcal{L}_{\hat{\omega}}$ 微分同胚于 G。当 Ω 配备测度 $\hat{}\mu$ 时，叶状拉普拉斯算子 $\Delta_{\widehat{\Omega}}$ 是$\widehat{\ }$对称的这一事实源于单模性，见 [1]。有了这一构造，我们便可以证明定理 2。

定理 *2* 的证明。 考虑 $L^2(M_n,\ \mathrm{vol}_{M_n})$ 上的 Schr¨odinger 算子序列，

$$H_n = -\tfrac{1}{2}\Delta_{M_n} + V_n,$$

并令 φ_n 表示与最低特征值 ρ_n对应的归一化正特征函数。在每个 M_n上，Q-过程由与 φ_n相关联的 Doob变换 L_n 生成，见（5）。由于 (M_n) 是一列扩张子序列，$-\frac{1}{2}\Delta_{M_n}$的谱隙有一致的正下界。结合 $\limsup_n \|V_n\|_\infty < \lambda$ 这一假设，这意味着极限随机势 V_ω 满足定理1的假设。与（10）中一样，我们用

$$H = -\tfrac{1}{2}\Delta_{\widehat{\Omega}} + V$$

极限叶状薛定谔算子作用于 $L^2(\widehat{\ }\Omega,\ \hat{}\mu)$。我们将叶状拉普拉斯算子的谱隙记为

$$\lambda_1(\tfrac{-1}{2}\Delta_{\widehat{\Omega}}) := \inf(\mathrm{Spec}\left(\tfrac{-1}{2}\Delta_{\widehat{\Omega}}\right) \setminus \{0\}).$$

注意，$\lambda_1(\frac{-1}{2}\Delta_{\widehat{\Omega}})$ 隐式依赖于测度 $\widehat{\mu}$，且在存在连续谱时，它未必对应某个特征值。我们声称，该量至少等于这一列的谱隙，即

$$\lambda := \liminf_{n\to\infty} \lambda_1(M_n).$$

这一图化谱理论中的下半连续性结果是经典结论[2], ，我们在此将其改写为叶状结构的表述。根据韦伊判据，可以找到一列与 $\mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}$ 正交的函数 ψ_k，使得

$$-\tfrac{1}{2}\langle\psi_k, \Delta_{\widehat{\Omega}}\psi_k\rangle = \lambda_1(\tfrac{-1}{2}\Delta_{\widehat{\Omega}}) + o(1).$$

由稠密性，不妨设 ψ_k 在叶片方向上光滑，并且是从基点处观察到的景观 $\hat{}\omega$ 的有限邻域的因子

点 o。也就是说，对于某个缓慢增长的序列 $R_k \to \infty$，值$\psi_k(\hat{\omega})$ 仅取决于其限制

$$\hat{\omega}\big|_{B(o,R_k)} = \big(V|_{B(o,R_k)},\, \omega \cap B(o,R_k)\big).$$

但是，这样的函数 ψ_k 可以复制到叶状结构 $(\Omega,\ \hat{}\mu_n)$ 上，并且在大多数点（单射半径大于 R_k 的地方）复制到紧曲面M_n 上，具体采用方程 (13) 给出的逆向构造。这意味着 $\lambda_1(\frac{-1}{2}\Delta_{\widehat{\Omega}}) \geq \lambda := \liminf_{n\to\infty} \lambda_1(\frac{-1}{2} M_n)$。

现在，由于 $\|V\|_\infty \leq \limsup \|V_n\|_\infty < \lambda$，我们可以调整定理-orem 1 的证明，将其用于叶状结构 Ω，并推导出极限 Q-过程存在。令 $\varphi \in L^2(\Omega\ \widehat{\mu})$ 表示极限叶状薛定谔算子的正基态 ¨，该算子为 H。相应的特征值 ρ 与其余谱之间至少相隔 $\epsilon = \frac{1}{2}(\lambda - \limsup \|V_n\|_\infty)$。对于$\widehat{\mu}$-几乎处处的 $\widehat{\omega}$，叶 $\mathcal{L}_{\widehat{\omega}}$ 上的极限 Q-过程由与特征波 $\varphi_{\widehat{\omega}}(\cdot)$ 相关联的 Doob变换给出，其中该特征波视为定义在 $\mathbb{H}^d$ 上的函数。

剩下的工作是证明 M_n 上的 Q 过程收敛到这个极限过程。设 $\nu_{H_n}^{\mathbf{1}_{M_n}}$ 为与归一化常值函数 H_n 相关的谱测度，并用 $\nu_H^{\mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}}$ 表示极限叶状结构的对应量。则有

$$\frac{1}{\operatorname{Vol} M_n}\langle \mathbf{1}_{M_n}, e^{-tH_n}\mathbf{1}_{M_n}\rangle = \int e^{-t\lambda}\, \nu_{H_n}^{\mathbf{1}_{M_n}}(\mathrm{d}\lambda) = \int_{M_n} \mathbf{E}^{x_n}\left[\exp\left(-\int_0^t V_n(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\right] \frac{\operatorname{vol}_{M_n}(\mathrm{d}x_n)}{\operatorname{Vol} M_n},$$

$$\langle \mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}, e^{-tH}\mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}\rangle = \int e^{-t\lambda}\, \nu_H^{\mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}}(\mathrm{d}\lambda) = \int_{\widehat{\Omega}} \mathbf{E}^{o}\left[\exp\left(-\int_0^t V(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\right] \widehat{\mu}(\mathrm{d}\widehat{\omega}),$$

其中在最后一个积分中，$\widehat{\omega} = (V,\ \omega)$。

根据 Benjamini–Schramm收敛，带基点流形 $(M_n,\ x_n)$ 的单射半径依概率趋于无穷，并且势的局部规律收敛到极限平稳势 V 的局部规律。因此，对每个固定的 $t > 0$，拉普拉斯变换逐点收敛。由拉普拉斯变换的 L´evy 连续性定理 [12, 第 XIII 章], ，可得谱测度弱收敛。

根据谱隙假设，基态特征值 $\rho_n \in [0, \|V_n\|_\infty]$ 与 $[\lambda, \infty)$ 所包含的 H_n 谱的其余部分相分离。因此，

$$\rho_n \longrightarrow \rho, \qquad \nu_{H_n}^{\mathbf{1}_{M_n}}(\{\rho_n\}) \longrightarrow \nu_H^{\mathbf{1}_{\widehat{\Omega}}}(\{\rho\}).$$

由于

$$Z_{n,t}^{x_n} := \mathbf{E}^{x_n}\left[\exp\left(-\int_0^t V_n(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\right]$$

在 Benjamini–Schramm 意义下连续，并且通过谱分解，

$$\varphi_n(\cdot) = \lim_{t\to\infty} \frac{e^{-t\rho_n} Z_{n,t}(\cdot)}{\mu_n(\{\rho_n\})},$$

对 n 上的收敛进行一致控制，

$$\|\varphi_n(\cdot) - \frac{e^{-t\rho_n} Z_{n,t}(\cdot)}{\mu_n(\{\rho_n\})}\|_{L^2(M_n)} \le e^{-\epsilon t},$$

其中 ϵ 是谱隙的下界。我们得到 $\sqrt{\mathrm{Vol}(M_n)}\varphi_n(\cdot)$ 在 Benjamini–Schramm 意义下收敛到 $\varphi(\cdot)$。最后，Q-过程在 M_n 上的转移密度为

$$p_{L_n}(t,x,y) = p_{\frac{\Delta_{M_n}}{2}}(t,x,y)e^{t\rho_n}\frac{\varphi_n(y)}{\varphi_n(x)}\mathbf{E}^x\left[\exp\left(-\int_0^t V_n(X_s)\,\mathrm{d}s\right)\middle|\, X_t = y\right].$$

B-S 中的每一项都完成了证明。 □

我们以周期化稳定性结束本文。

定理 *3* 的证明。 众所周知，存在一列紧致双曲 d-流形 (M_n)，它们在 Benjamini–Schramm 意义下收敛到 $\mathbb{H}^d$，且具有一致的谱隙

$$\lambda := \liminf_{n\to\infty} \lambda_1\left(-\tfrac{1}{2}\Delta_{M_n}\right) > 0.$$

这个谱隙由 Clozel 定理得出：该定理指出，对于半单李群的任意对称空间（特别是），存在一个只依赖于的常数，使得中的每个同余格都会产生一个谱隙至少为的轨形。

对于余紧算术格 Isom()，根据，的任意同余子群序列在 Benjamini–Schramm 意义下收敛到。我们将定义为可达到的最大值，并固定这样一个序列 ()。

设 ω_n 为 M_n上的泊松点过程。由于 V_ω 是泊松点过程的因子，它可以用有限范围因子$V_{R_n,\omega}$来逼近，其中 $R_n \to \infty$

与在 M_n上均匀选取的一点处的单射半径相比足够缓慢。

利用 ω_n 上泊松点过程的实现 M_n，我们通过复制定义$V_{R_n,\omega}$的有限程规则，在 M_n 上定义周期势V_n 。根据构造，序列 (M_n, V_n) 满足定理 2 的假设。因此，相应的 Q上 M_n 过程在 Benjamini–Schramm 意义下收敛到 $(\mathbb{H}^d, V_\omega)$ 上的极限 Q过程。

最后，将 M_n 上的每个 Q过程提升到万有覆盖 $\mathbb{H}^d$ ，即可得到一个周期的 Q过程。这便给出了极限 Q过程所需的周期逼近。

□

参考文献

[1] M. Ab´ert 和 I. Biringer，所有黎曼流形空间上的幺模测度，Geometry & Topology 26(2022)，第 5 期，2295–2404。[2]Miklos Abert、Adam Arras 和 Jaelin Kim，图上的均匀随机游走、环路过程与图化，arXiv 预印本 arXiv:2512.09166 (2025)。[3] Mikl´os Ab´ert、Nicolas Bergeron、Ian Biringer、Tsachik Gelander、Niko- lay Nikolov、Jean Raimbault 和 Iddo Samet，关于李群中格序列的 L^2-不变量的增长，《数学年刊》185(2017)，第 3 期，711–790。[4] Miklos Abert、Nicolas Bergeron 和 Etienne Le Masson，*Benjamini–Schramm* 极限中的特征函数与随机波，arXiv 预印本 arXiv:1810.05601 (2018)。[5] Dominique Bakry、Ivan Gentil、Michel Ledoux 等，马尔可夫扩散算子的分析与几何，第 103 卷，Springer，2014。[6]W. Ballmann 和 P. Polymerakis，谱底与覆盖，(2019)。[7] Itai Benjamini 和 Oded Schramm，双曲平面中的渗流，《美国数学会杂志》14(2001)，第 2 期，487–507。

[8]——,有限平面图分布极限的重现，《电子概率杂志》**6** (2001)。[9] Robert Brooks，黎曼覆盖的谱底。，《纯粹与应用数学杂志》**1985** (1985)，第 357 期，101–114。[10] Alberto Candel 和 Lawrence Conlon，叶状结构 *II*，第 2 卷，美国数学会，2000。[11] Laurent Clozel，$D´emonstration\ de\ la\ conjecture\ \ \tau$，《数学发明》**151** (2003)，第 2 期，297–328。[12] William Feller，概率论及其应用导论，第二卷，第 2 卷，John Wiley & Sons，1991。[13] Jacques Franchi 和 Yves Le Jan，双曲动力学与布朗运动：导论，牛津数学专著，2012。[14] Lucy Garnett，叶状结构、遍历定理与布朗运动，《泛函分析杂志》**51**(1983)，第 3 期，285–311。[15] Will Hide 和 Michael Magee，双曲曲面上近乎最优的谱隙，《数学年刊》**198** (2023)，第 2 期，791–824。[16] Anthony W Knapp，半单群表示论：基于实例的概述，(2001)。[17]G. Last 和 M. D. Penrose，泊松过程的福克空间表示、混沌展开与协方差不等式，《概率论及相关领域》**150** (2011)，663–690。[18] Russell Lyons 和 Fedor Nazarov，非 *amenable* 群上的完美匹配作为独立同分布因子，《欧洲组合学杂志》**32**(2011)，第 7 期，1115–1125。[19] Calvin C Moore 和 Claude L Schochet，叶状空间上的整体分析，第 9 卷，剑桥大学出版社，2006。[20] P. Polymerakis，黎曼覆盖下微分算子的谱，《几何分析杂志》(2019)。

[21] Michael Reed 和 Barry Simon，*IV*：算子分析，第 4 卷，Elsevier，1978 年。[22] Yu. G. Kondratiev、S. Albeverio 和 M. R¨ockner，构形空间上的分析与几何，《泛函分析杂志》**154**（1998），444–500。[23] Ichiro Shigekawa，紧黎曼流形上带磁场的 *Schr ¨odinger* 算子的特征值问题，《泛函分析杂志》**75**（1987），92–127。[24] D. Sullivan，黎曼几何中正性的相关方面，《微分几何杂志》（1987），327–351。[25] Alain-Sol Sznitman，布朗运动、障碍物与随机介质，施普林格科学与商业媒体，2013 年。[26] Johan Tykesson，双曲空间中连续渗流的泊松布尔模型的无界连通分支数，（2007）。