arXiv:2602.18440v1 [math.CO] 26 Nov 2025

极大等距间距

预印本

Michael Puthawala

2026年2月24日

摘要

我们将欧几里得空间中的一个族 $\{Y_1, \ldots, Y_I\}$ 称为等距间隔，如果 $\|y_i - y_j\| = 1$当 $y_i \in Y_i$, $y_j \in Y_j$ 且 $i \neq j$时成立。换言之，从每个集合中选取一个代表元，就会得到一个完全距离图（即等边集合）。如果每个 Y_i 在包含关系下都是极大的，我们就称这种间距为极大间距。在本文中，我们刻画了 $\mathbb{R}^n$中的极大等距间距。对于每个等距间距，都存在一个相关的中心（ $\mathbb{R}^n$ 中的一个点）和半径（一个非负标量），使得这些中心构成一个垂心系。利用经典几何中的论证，我们发现，极大等距间距的模空间可以通过其中心和半径的运动来描述。借助几何组合学中的工具，我们构造了一个称为签名的离散组合对象。我们的分类定理表明，当且仅当极大等距间距具有相同的签名时，它们才是等距的。我们还构造了$\mathbb{R}^1, \mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$中的所有极大等距间距，概述了在 $\mathbb{R}^n$中构造所有极大等距间距的步骤，并给出了一种用于检验点轨迹是否等距排列的算法。该算法的时间复杂度与点数呈线性关系，相较于朴素的直接二次算法有所改进。

1 引言

欧几里得空间中子集$\mathcal{Y} = \sqcup_{i=1}^{I} Y_i$ 的不交并若满足等距间隔 条件，则称其为等距间距；也就是说，$\|y_i - y_j\| = 1$ 当$i \neq j$ 对 $y_i \in Y_i$ 和 $y_j \in Y_j$成立时。换言之，从每个集合中各选一个点，就会得到一个完全单位距离图。这些点的构形与几何组合学中的问题密切相关，例如对等边集合/点的研究 [2, 3, 6] ；但据我们所知，此前尚未研究过等距间距。在这项工作中，我们刻画了 $\mathbb{R}^n$中的极大（按子集关系而言）等距间距。

事实证明，对于每个 $i = 1, .., I$，在 Y_i的仿射包中都存在唯一一点 c_i，我们称之为 Y_i 的中心；该点到 Y_i 中的每个点距离相等。本手稿的核心思路是，等距间距的许多性质都可以改写为关于其中心的陈述，反之亦然。

借助经典几何中的论证，我们发现，极大等距间距的中心要么全部重合，要么构成一个正交归一系统。也就是说，它们是一个垂心单形的顶点连同其垂心。这带来了一个出人意料的结论：极大等距间距的各类并非几何齐次。正如每个（非退化）垂心系都有一个唯一的顶点位于其余顶点生成的单纯形内部，等距间距中也有一个中心位于其余中心生成的单纯形内部。利用这种非齐次性，我们构造了内外压缩与拉伸，它们是等距间距的非平凡等距变换的生成元。借助这些变换，我们找到了极大等距间距的标准形。这些标准形本身是离散对象，因此可以用组合方法加以分类。

为了理解标准形组合学，我们引入签名空间。签名是满足某些排序约束的自然数元组。关键在于，我们可以轻松找出所有对应于极大等距间距的签名。此外，这些签名易于处理，因此能够推导出许多关于等距间距的后续结果。例如，对于任意 $I, n \in \mathbb{N}$，我们都可以计算维数为 $\mathbb{R}^n$ 、具有 I 个类的极大等距间距的数量。例如，在 $\mathbb{R}^n$ 中，有

$\mathbb{R}^n$ 中有 $\sum_{i=0}^{n} p(i)$个不同的极大等距间距，其中 p 是数论中的分拆函数。

我们的主要技术成果是定理 2.7.6，这是一个分类定理，将极大$\widehat{\ }$等距间距（记作 $\mathcal{ES}(I,\ n)/\cong$）的等距类与 I 中的 $\mathbb{R}^n$ 类对应到一个相应的签名空间（记作 $\hat{\ }\mathcal{S}(I,\ n)$）。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$**定理 *2.7.13*。** 令 $\mathcal{ES}_{=}(I,\ n)$（分别为 $\mathcal{ES}_{\neq}(I,\ n)$）表示 I中$\mathbb{R}^n$ 的中心重合（分别为不重合）的极大等距间距，$\cong$ 表示等距间距的等距变换，$\hat{\ }\mathcal{S}_{=}$ 和 $\hat{\ }\mathcal{S}_{\neq}$表示定义 2.7.10 中给出的有效签名子集，sig 表示将等距间距与签名相关联的映射。那么，以下所有映射均为双射。

$$
\begin{aligned}
\operatorname{sig}\colon \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong} &\to \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n),\\
\operatorname{sig}\colon \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong} &\to \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n),\\
\operatorname{sig}\colon \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong} &\to \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n),\\
\operatorname{sig}\colon \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong} &\to \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n).
\end{aligned}
$$

1.1 与 PriorWork 的比较

等距间隔与几何组合学中的其他经典问题有关。例如，[3, 9]刻画了等边集合；等距间距是每个集合都只含一个元素的等边集合。

几何组合学中有许多着色问题，它们考虑一个几何图（其中棱由几何规则确定），并询问要用多少种颜色，才能在给图着色时确保任何共享一条棱的两个节点颜色不同。参见例如 [10] 和 [2, 第 5]章。一个例子是著名的 Hadwiger–Nelson 问题 [7]：图的顶点是平面上的点，当两个节点之间的距离为单位距离时，它们之间就连一条棱。等距间距通过某种对偶关系与这些着色问题相关。在着色问题中，图的节点是固定的，目标是使所需颜色数最少。而在等距间隔问题中，颜色数是固定的，目标是使点数最大。

等距间距的几何还与机器学习和统计学中的应用领域对比学习有关 [1, 第 6.3 节。5]在这一设置中，有一个数据集合 $\mathcal{X} = \{X_i\}_{i=I}$，其中每个数据都关联着某个标签 i。任务是寻找一个函数 f，将[1]这些 X_i嵌入，使得当 $x_i, x_i' \in X_i$ 时，$d(f(x_i)\ f(x_i'))$ 较小；而对于 $x_i \in X_i$, $x_j \in X_j$，其中 $i \neq j$，$d(f(x_i)\ f(x_j))$ 较大。直观地说，f 将数据嵌入到另一个空间中，在该空间里，语义相似的数据彼此接近，而语义不同的数据彼此远离。假设只要 $i \neq j$，$f(x_i)$ 与 $f(x_j)$ 之间的距离就相同，那么经过重新缩放后，$\mathcal{Y} := \sqcup_{i=1}^{I} f(X_i)$ 是等距排列的。换句话说，一个良好的对比嵌入的值域近似为等距间距。

这份手稿的一项有趣发现是，存在一种描述点何时呈等距排列的“局部-整体乘积结构”。如果满足某些局部条件（即关于每个 Y_i的条件），以及某些全局条件（这些条件涉及 Y_i和 Y_j 彼此之间的相对位置），那么点轨迹便呈等距排列。这些条件可以彼此独立地检验。如果$\mathcal{Y}$ 的构造方式使得每个 Y_i 都满足相应的局部条件，那么总可以在空间中调整每个 Y_i 的位置，使其满足相应的全局条件，反之亦然。这一观察最终导出了算法 3：该算法能够在线性时间内（相对于点数）验证给定的点轨迹是否等距。这比直接检查 $\|y_i - y_j\| = 1$ 的朴素算法有所改进。

[1]在机器学习的语境中，embed 一词的含义不同于它在拓扑学中的通常含义（即值域上的同胚）。在机器学习的语境中，嵌入是指重新参数化到一个更“自然”的新坐标系中。这些嵌入通常不要求是单射。

1.2 手稿结构

在第 2.2 节中，我们确立了等距间距的基本性质。我们发现，每个等距间隔类都可以用两个量来概括：该类的中心（ $\mathbb{R}^n$中的一个点）和它的半径（一个标量），见定义 2.2.8。本手稿其余部分的总体策略，是通过理解等距间隔的中心和半径来理解这些间隔。本节最重要的结果是推论 2.2.13：根据等距间隔的中心和半径（再加上一些简单的正交条件），可以判定$\mathcal{Y}$ 是否为等距间隔。特别是，等距间距的类和半径满足一组相容方程，即方程 22。

在第 2.3 节中，我们讨论一种技巧：通过正交投影和反射来扩展等距间距（引理 2.3.1）。极大等距间距在这一运算下保持不变。利用这一不变性，我们得到了两个显著结果。第一个结果——推论 2.3.7——指出，极大等距间距的中心要么是彼此不同的点，要么全部重合。第二个结果——命题 2.3.13——指出，如果等距间距的中心不重合，那么任一中心都是由其余中心构成的单纯形的垂心。结合起来，这两个结果对极大等距间距施加了很强的限制。
在第 2.4 节中，我们讨论如何以自然的方式将多个等距间距“粘合”起来，形成一个更大的等距间距。我们发现，可以为每个等距间距关联一个称为范围的标量（定义 2.4.4）；并且，两个等距间距能够粘合，当且仅当它们的范围满足某个不等式（命题 2.4.6）。此外，我们还可以轻松计算此类粘合的范围（命题 2.4.8）。

在第2.5节中，我们探讨等距间距上的自然等距变换有哪些。我们发现有三种自然的等距变换。其中两种（欧几里得等距变换和重新着色）是平凡的。不过，等距间距还存在另一种等距变换，我们称之为压缩与拉伸（定义 2.5.2）。这种等距变换较难描述和刻画，而且通常不能扩展为环境空间上的等距变换。

在第2.6节中，我们刻画极大等距间距上的压缩与拉伸等距变换。为此，我们考察一种简单的压缩与拉伸，称为外层-内层挤压与拉伸（命题 2.6.1）。接着，通过推导出一种规范形（定义 2.6.8），我们证明，对于极大等距间距，压缩与拉伸可由外层-内层挤压与拉伸生成（定理 2.6.10 和命题 2.6.11）。重要的是，这种规范形是具体的，因而很容易构造。
在第2.7节中，我们为每个极大等距间距关联一个称为其签名的对象，见定义 2.7.1。接着我们证明，极大等距间距等距当且仅当它们具有相同的签名，见定理 2.7.6。随后，我们计算了 $\mathbb{R}^0$ $\mathbb{R}^1$，$\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$中的所有签名，从而求出这些空间中的所有极大等距间距。最后，我们统计了 $\mathbb{R}^n$ 中的极大等距间距数目，并发现其表达式很简单，见命题2.7.16。
在第2.8节中，我们给出一种算法，即算法 3，用于验证有限点集是否构成等距间距。通过分析该算法的运行时间（定理 2.8.1），我们发现其运行时间随点数线性增长。

2 结果

2.1 问题设置和基本示例

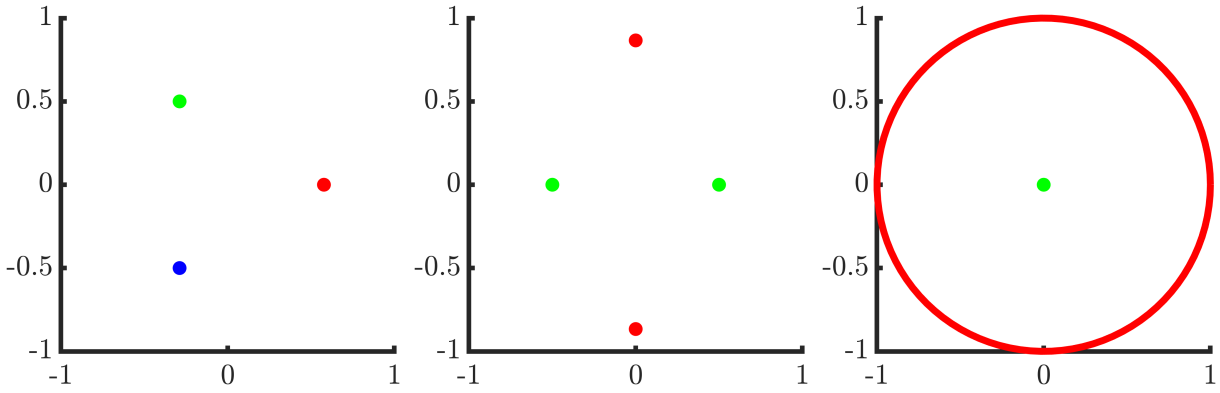
我们首先定义所研究的核心对象。
定义2.1.1 (等距排列，等距间距**)**。 设 $n, I \in \mathbb{N}$ 且 $I \geq 2$。不交并 $\mathcal{Y} = \sqcup_{i=1}^{I} Y_i$，其中$Y_i \subset \mathbb{R}^n$，称为等距排列，若对每个 $i \neq j$，且 $y_i \in Y_i, y_j \in Y_j$

$$\|y_i - y_j\| = 1. \tag{1}$$

若 $I = 1$，我们称$\mathcal{Y}$ 为等距排列，若存在一点 $c_0 \in \mathbb{R}^n$，使得对于所有 $y \in \mathcal{Y}$，$\|y - c\| \leq 1$ 均为常数。

我们称这样的$\mathcal{Y}$为一个等距间隔。一个 $i \in 1, \ldots, I$称为Y的一个类。我们将等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$记为满足条件 I 的 $\mathbb{R}^n$ 中的所有等距间距所成的集合。当 I 和 n 的含义可由上下文确定时，我们将等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$记为等距间距。

在这项工作中，我们研究当公式 1 中的范数为欧几里得范数时，等距间距 的形态。其他几何下的情形留待未来研究。



(a) $\mathcal{Y}^{(1)}$ (b) $\mathcal{Y}^{(2)}$ (c) $\mathcal{Y}^{(3)}$

图1： $\mathbb{R}^2$ 中三个不同等距间距的示例， I取值各不相同。详情见例2.1.2。每幅图中，类别标签以颜色表示。例如，图1b中的两个红点是该等距间距中的 Y_1 。请注意，同一类内的点之间无需满足任何间距要求。

在继续之前，我们先给出一些等距间隔的例子。

例2.1.2. 图1展示了三个不同的等距间距，$\mathcal{Y}^{(1)} \in$ 等距间距$(3, \mathbb{R}^2)$ 和 $\mathcal{Y}^{(2)}, \mathcal{Y}^{(3)} \in$ 等距间距$(2, \mathbb{R}^2)$。在每个示例中，类别标签均以颜色表示。也就是说，颜色相同的点属于同一类。

第一个例子是$\mathcal{Y}^{(1)}$，如图1a所示。它展示了三个点，它们位于边长为 1 的等边三角形上。类似地，将正单纯形的每个顶点都作为一个类，这种构造适用于任意维数。

第二个例子是$\mathcal{Y}^{(2)}$，如图1b所示。它展示了两个类，每个类都由菱形上的四个点组成，菱形的边长为 1。这种构造显然可以推广到高维。

最后展示的例子是$\mathcal{Y}^{(3)}$，如图1c所示。这个例子中，一个类是$S^1_1(0)$的边界，另一个类仅包含原点这一个点。在此例中，连续统多个点属于红色类，而一个点属于绿色类。

考虑以下将一个等距间距变换为另一个等距间距的运算。

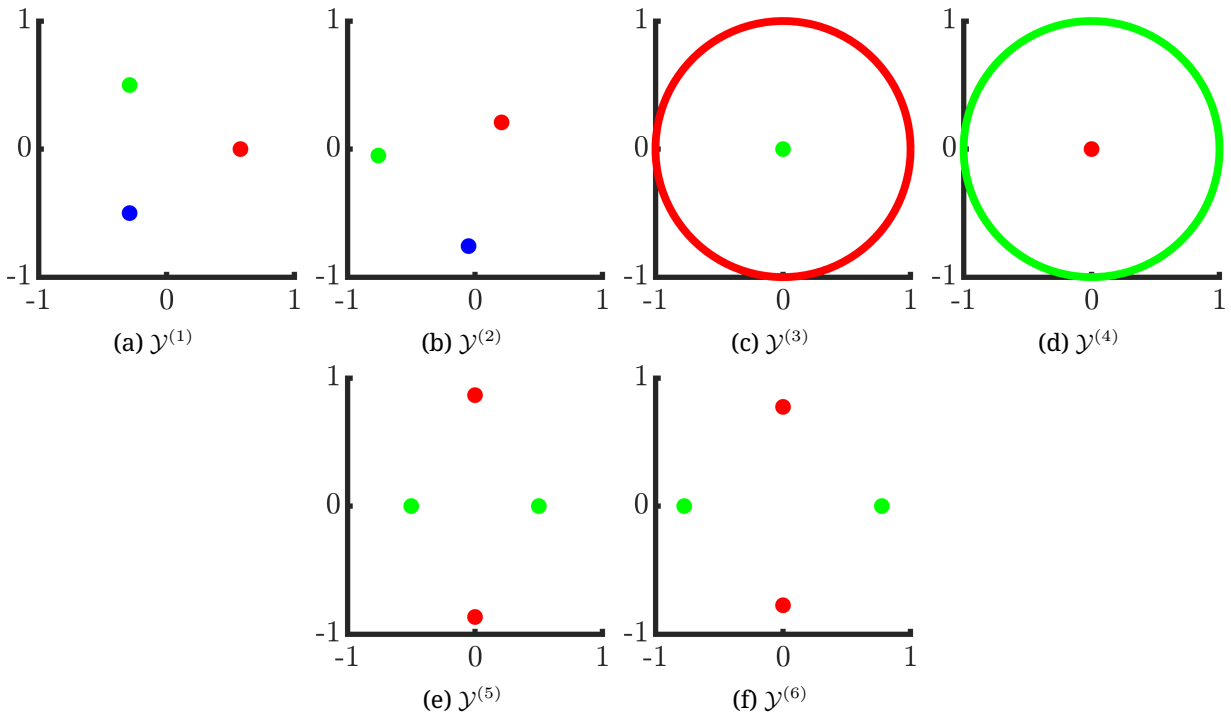
例2.1.3 （保持等距间距不变的运算）。 图2展示了几种将等距间距相互变换的方式。图中给出了四对等距间距。前三对表示作用于等距间距的等距变换（将在第2.5节进一步讨论）。最后一对则说明了极大性的概念。

第一对，$\mathcal{Y}^{(1)}$ （图 2a）和 $\mathcal{Y}^{(2)}$ （图 2b），两者仅相差一个旋转平移，即 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得群的一个元素，表示为 $E(n)$，其中 $n = 2$。这种运算是环境空间上的等距变换，因此会保持等距间距。

第二对，$\mathcal{Y}^{(3)}$ （图 2c）和 $\mathcal{Y}^{(4)}$ （图 2d），两者相差的是类别标签的置换（即点的颜色）。这种运算会保持等距间隔，并且显然可以推广到任意数量的点。

第三对，$\mathcal{Y}^{(5)}$ （图 2e）和 $\mathcal{Y}^{(6)}$ （图 2f），两者相差的是挤压与拉伸，这在定义 2.5.2 中有所定义。对于这个例子，我们通过将绿色点彼此移开来“拉伸”绿色类，并通过将红色点彼此移近来“挤压”红色类。若操作得当，所得间距仍然是等距的。在高维中也存在类似的运算，但其特征并不容易描述。关键在于，以某种方式挤压 $\mathbb{R}^n$ 的某些维度并拉伸另一些维度，从而保持等距间距。

事实上，这里概述的等距间距的三种等距变换（旋转平移、类别置换以及压缩与拉伸）刻画了所有空间中极大等距间距的全部等距变换。这就是我们的主定理 2.7.6 的内容。



(a) $\mathcal{Y}^{(1)}$ (b) $\mathcal{Y}^{(2)}$ (c) $\mathcal{Y}^{(3)}$ (d) $\mathcal{Y}^{(4)}$

(e) $\mathcal{Y}^{(5)}$ (f) $\mathcal{Y}^{(6)}$

图2：一个示例，展示了等距间距以一些无趣的方式生成其他等距间距的几种情形。本图总共展示了八个等距间距。这些图由四对组成。第一对 $\mathcal{Y}^{(1)}$ 和 $\mathcal{Y}^{(2)}$通过旋转平移相关联。也就是说 $Y^{(1)}_i = pY^{(2)}_i$ 其中 $p \in E(2)$。第二对 $\mathcal{Y}^{(3)}$ 和 $\mathcal{Y}^{(4)}$通过置换类别标签相关联。也就是说， $Y^{(3)}_i = Y^{(4)}_{\sigma(i)}$对于某个置换 σ，作用于 $\{1, \ldots, I\}$。第三对 $\mathcal{Y}^{(5)}$ 和 $\mathcal{Y}^{(6)}$通过我们称为压缩与拉伸的变换相关联，这个名称源于绿色的点被“挤压”到一起，而红色的点被“拉伸”开来。直观而言，一个类别的点被“挤”在一起，而另一个类别的点则被“拉”开，以保持等距间距。

2.2 等距间距、中心与半径

现在我们给出两个证明显而易见的重要结果。这两个结果都是后续所有论述的重要工具。

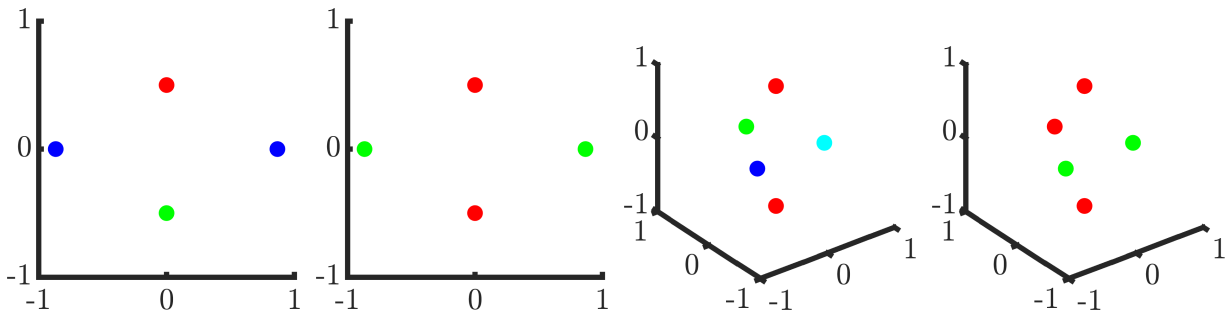
注 2.2.1（记号简写：I）。 在手稿中，我们采用以下记号。如果在定理、引理、例子等中提到一个$\mathcal{Y} \in$等距间距，则默认

1. 变量 i, j 或 k 表示$\mathcal{Y} \in$ 等距间距的类别标签，

2. 符号 Y_i, Y_j 或 Y_k 表示$\mathcal{Y}$的类，

根据注 2.2.1，在引理2.2.2的表述中，我们约定 i 和 j 均指$\mathcal{Y}$的类。后续结果中也将沿用这一隐含约定，以避免记号过于繁杂。

引理2.2.2(Ort 正交性引理)。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距、$i \neq j$、y_i、$y'_i \in Y_i$以及 y_j、$y'_j \in Y_j$。则 仿射包 $Y_i \perp$ 仿射包 Y_j .



(a) $\mathcal{Y}^{(1)}$ (b) $\mathcal{Y}^{(2)}$ (c) $\mathcal{Y}^{(3)}$ (d) $\mathcal{Y}^{(4)}$

图 3：重新着色技巧的两个示例。第一个示例展示了$\mathcal{Y}^{(1)}$，其绘制于子图 3a 中，并重新着色为$\mathcal{Y}^{(2)}$，绘制于子图 3b 中。第二个示例展示了$\mathcal{Y}^{(3)}$，其绘制于子图 3c 中，并重新着色为$\mathcal{Y}^{(4)}$，绘制于子图 3d 中。

证明。 该断言等价于证明 $\langle y_i - y_i',\ y_j - y_j' \rangle = 0$。这由以下等式链可得。

$$
\begin{aligned}
2\langle y_i - y_i', y_j - y_j' \rangle &= 2\left(\langle y_i, y_j \rangle + \langle y_i', y_j' \rangle - \langle y_i, y_j' \rangle - \langle y_i', y_j \rangle\right) && (2)\\
&= \langle y_i, y_i \rangle - \langle y_i, y_i \rangle + \langle y_i', y_i' \rangle - \langle y_i', y_i' \rangle \\
&+ \langle y_j, y_j \rangle - \langle y_j, y_j \rangle + \langle y_j', y_j' \rangle - \langle y_j', y_j' \rangle \\
&+ 2\left(\langle y_i, y_j \rangle + \langle y_i', y_j' \rangle - \langle y_i, y_j' \rangle - \langle y_i', y_j \rangle\right) && (3)\\
&= \left(-\langle y_i, y_i \rangle + 2\langle y_i, y_j \rangle - \langle y_j, y_j \rangle\right) \\
&+ \left(-\langle y_i', y_i' \rangle + 2\langle y_i', y_j' \rangle - \langle y_j', y_j' \rangle\right) \\
&+ \left(\langle y_i, y_i \rangle - 2\langle y_i, y_j' \rangle + \langle y_j', y_j' \rangle\right) \\
&+ \left(\langle y_i', y_i' \rangle - 2\langle y_i', y_j \rangle + \langle y_j, y_j \rangle\right) \\
&= -\|y_i - y_j\|^2 - \|y_i' - y_j'\|^2 \\
&+ \|y_i - y_j'\|^2 + \|y_i - y_j'\|^2 && (4)\\
&= 2 - 2 = 0 && (5)
\end{aligned}
$$

□

定义 2.2.3（最小仿射集）。 对于一个 $X \subset \mathbb{R}^n$，我们将 Aff X 定义为包含X的最小仿射集。对于 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距，我们定义集合 $A_i :=$Aff(Y_i)。也就是说， A_i 是包含 Y_i的最小仿射集。

现在我们介绍一种称为重新着色技巧的方法。这个技巧源于如下观察：给定一个等距间隔 $\mathcal{Y}$，我们可以通过对 $\mathcal{Y}$ 的所有类进行分拆，并将每个分拆中的所有类着成相同的颜色，得到另一个等距间隔。

引理 2.2.4（重新着色技巧）。 设 $Y \in$ 等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$ 是一个等距间隔，且 p_1、...、 p_J是$\{1, \ldots, I\}$的一个分拆，其中 $J \geq 2$。考虑由下式定义的 $Y' = \sqcup_{j=1}^{J} Y_{\cdot j}$

$$
Y_j' := \bigcup_{i \in p_j} Y_i. \tag{6}
$$

那么 $Y' \in$ 等距间距$(J, \mathbb{R}^n)$。

证明。 考虑一个 $i' \neq j'$、 $y_{i'}' \in Y_{i'}'$和 $y_{j'}' \in Y_{\cdot j'}$。那么根据式 6，存在一个 $i \neq j$，使得 $y_{i'}' \in Y_i$ 和 $y_{j'} \in Y_j$。由于 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距，我们有 $\left\|y_{i'}' - y_{j'}'\right\| = 1$ □

注2.2.5（重新着色技巧中 $J \geq 2$ 的必要性）。要求 $J \geq 2$ 是必要的，因为将所有点都染成同一种颜色并不总能得到等距间距集，参见图 3 中的$\mathcal{Y}^{(1)}$。

图 3 给出了重新着色技巧的两个例子。重新着色技巧显而易见，但有着强大的用途。我们可以利用它，将涉及类 Y_i 和 Y_j 的结果推广为关于 $\cup_{i\in\mathcal{I}}Y_i$和 $\cup_{j\in\mathcal{J}}Y_j$的更一般结果，其中任意不相交的$\mathcal{I}$，$\mathcal{J}\subset\{1,\ldots\ldots,\ I\}$均适用。例如，以下是引理2.2.2的推论。**推论2.2.6**（强正交性）。设$\mathcal{Y}\in$等距间距(I) 且$\mathcal{I}\subset\{1,\ldots\ldots,\ I\}$。则，

$$\operatorname{Aff}\cup_{i\in\mathcal{I}}Y_i\perp\operatorname{Aff}\cup_{i\in\mathcal{I}^c}Y_i. \tag{7}$$

证明。对$\mathcal{Y}$ 应用重新着色技巧，得到$\mathcal{Y}'$，其中 $p_1:=\mathcal{I}$ 且 $p_2:=\mathcal{I}^c$。于是，将引理2.2.2应用于$\mathcal{Y}'$即可得到该推论。□

根据 A_i的定义，我们可以给出第一个定理，即投影定理 m.

定理2.2.7 (投影定理)。设 $Y\in$ 等距间距$(I,\mathbb{R}^n)$。给定 i，定义集合 $A_i\subset\mathbb{R}^{n+1}$ 如下

$$\mathcal{A}_i:=\left\{(c,r)\colon Y_i\subset S_r^{n-1}(c)\right\}. \tag{8}$$

则有以下结论

1. 集合 A_i 非空。*2.* 令 $r_i:=$最小 $\pi_{n+1}A_i$。那么 $r_i\in[0,1]$，并且存在唯一的 c_i，使得 （c_i、 r_i） $\in A_i$。*3.* 点 c_i 满足

$$c_i:=\operatorname*{Aff}_{A_i}\cup_{j\in\mathcal{J}}Y_j \tag{9}$$

其中$J\subset\{1$、……、$I\}$ 不包含 i。

证明。第 1 点。如果 $I=1$，则根据定义可得第 1 点。如果 $I>1$，则 $(y_j,\ 1)\in\mathcal{A}_i$，其中 $j\neq i$ 且 $y_j\in Y_j$。

第 2 点。令 $(y,\ r)\in\mathcal{A}_i$，并令 $y^*:=$ 投影$_{A_i}y$。根据勾股定理

$$\left(y^*,\sqrt{r^2-\|y-y^*\|^2}\right)\in\mathcal{A}_i. \tag{10}$$

因此，如果 $(c_i,\ r_i)$ 满足 $r_i=$最小 $\pi_{n+1}\mathcal{A}_i$，那么 $c_i\in A_i$。由于 A_i是包含 Y_i的最小仿射集，Y_i包含一个由 A_i+1维单纯形的点 σ组成的（非退化）单纯形。陈述 $(c_i,\ r_i)\in\mathcal{A}_i$且$c_i\in A_i$ 意味着 c_i 是 σ的外接中心。c_i 的唯一性源于外接中心的唯一性。

第3点。推论2.2.6意味着 $A_i\perp$ 仿射包 $\cup_{j\in\mathcal{I}}A_j$。因此，若 $y\in Y_j$ 对于 $j\in\mathcal{J}$，则 $(\operatorname{proj}_{A_i}y_j,$ $\sqrt{1-\left\|y-\operatorname{proj}_{A_i}y_j\right\|^2})$。但 $\left\|y-\operatorname{proj}_{A_i}y_j\right\|^2=r_i$，所以根据第2点，$\operatorname{proj}_{A_i}y_j=c_i$。

□

定义 2.2.8（Y_i的中心和半径）。设$\mathcal{Y}\in$等距间距。对于每个 i，令$\mathcal{A}_i$ 由方程8给出。我们将 Y_i 的中心 和半径 分别定义为 c_i 和 r_i，其中 $r_i:=\min\pi_{n+1}\mathcal{A}_i$，而 c_i 是满足（c_i，r_i）$\in\mathcal{A}_i$的唯一点。

备注 2.2.9（记号简写：II）。我们采用以下记号。若某个定理、引理、例子等中提到$\mathcal{Y}\in$等距间距，并且提到某个 c_i，c_j，c_k，r_i，r_j 或 r_k，则默认 c_i （分别为c_j，c_k）指类 Y_i（分别为 Y_j，Y_k）的中心；同样，r_i（分别为 r_j，r_k）指半径。

接下来，我们给出以下技术性辅助引理，它可视为引理2.2.2的推广。

命题 2.2.10 (三分正交性)。设 $\mathcal{Y}\in$等距间距。则

$$\cup_{i=1}^{I}A_i\perp\operatorname{Aff}(c_1,\ldots,c_I). \tag{11}$$

证明。对于证明，只需证明对于每个 $i=1,\ldots,I$，$A_i\perp\operatorname{Aff}(c_1,\ldots,c_I)$。为此，只需证明对于每个 j，$A_i\perp\operatorname{Aff}(c_i,c_j)$。设 $y_i\in Y_i$和 $y_j\in Y_j$，则

$$\begin{aligned}\langle y_i-c_i,c_i-c_j\rangle&=\langle y_i-c_i,c_i-y_j+y_j-c_j\rangle &(12)\\&=\langle\underbrace{y_i-c_i}_{\in A_i}\underbrace{c_j-y_j}_{\in A_j}\rangle+\langle y_i-c_i,y_j-c_i\rangle &(13)\\&=0 &(14)\end{aligned}$$

其中 $\langle y_i - c_i, y_j - c_i \rangle = 0$，因为根据定理2.2.7第3点， c_i 是 y_j 在 A_i 上的正交投影。

□

这份手稿的指导原则是，通过理解等距间距的半径和中心，便能理解等距间距。也就是说，许多关于等距间距的问题都可以转化为关于其中心和半径的问题。定理2.2.7表明，等距间隔会导出半径和中心（每个类各一个）。一个自然的问题是，反过来是否也成立？也就是说，我们能否以某种方式选取中心和半径，然后确定一个具有这些中心和半径的等距间隔。后文的定理 2.2.12 表明，答案是肯定的，但 r_i与 c_i之间还须满足一些相容条件。

我们可以将上述结果概括为以下推论。

推论 **命题 2.2.11** (等距间隔的性质)。 设 $\mathcal{Y}$ ∈等距间距。则有以下结论 .

1. 对所有满足 $i \neq j$的 i、 j，

$$r_i^2 + r_j^2 \leq 1 \tag{15}$$

$$\|c_i - c_j\|^2 = 1 - r_i^2 - r_j^2. \tag{16}$$

2. 仿射空间 A_i 满足

(a) $r_i > 0 \Longleftrightarrow$ 维数 $A_i > 0$.

(b) 这些仿射空间

$$A_1, \ldots, A_I, \mathrm{Aff}(\{c_1, \ldots, c_I\}) \tag{17}$$

两两正交。

证明。 我们依次证明每个性质

1. 根据命题 2.2.10，我们有

$$\begin{aligned} 1 = \|y_i - y_j\|^2 &= \|y_i - c_i\|^2 + \|c_i - c_j\|^2 + \|c_j - y_j\|^2 \\ &= r_i^2 + r_j^2 + \|c_i - c_j\|^2 \\ &\geq r_i^2 + r_j^2. \end{aligned} \tag{18}$$

这就证明了公式 15 和 16。

2. 令 $r_i > 0$。这意味着至少存在一个 $y_i \in Y_i$，使得 $y_i \neq c_i$。只有当 dim $A_i > 0$ 时这才可能成立（否则， A_i 是一个单点，且 dim A_i =dim$\{c_i\} = 0$）。现在，假设 dim $A_i > 0$。根据 A_i 的极小性，这意味着存在一个 $y_i \in Y_i$，使得 $y_i \neq c_i$ （否则，$A_i = \{c_i\}$ 会更小）。因此， $r_i = \|y_i - c_i\| > 0$。这就证明了 2 (a)。

根据引理2.2.2，若 $i \neq j$，则 A_i 和 A_j 正交。根据命题 2.2.10， A_i 和 Aff($c_1, \ldots, c_I$) 正交。这就证明了 2 (b)。

□

该推论说明了如何构造由$\mathcal{Y}$ ∈ 等距间距产生的 Y_i。首先，选择一些满足方程 15 和 16 的中心c_i和半径 r_i。然后，选择向量空间 $V_1, \ldots, V_I$，使它们两两正交，并且与 Aff $\{c_1, \ldots, c_I\}$ 正交，同时满足 $r_i > 0 \implies$ dim $V_i > 0$。然后令 $A_i \coloneqq c_i + V_i$。这一方法确实有效，而且事实上只取决于如何选择这些 r_i。

定理 2.2.12 (等距间隔的构造)。 设半径 $\{r_i\}_{i=1}^I$ 满足 $r_i \in [0, 1]$，并设中心 $\{c_i\}_{i=1}^I$ 和 $\{V_i\}_{i=1}^I$ 的定义使得下列条件成立。

1. 对所有满足 $i \neq j$、 $r_i^2 + r_j^2 \leq 1$ 的 i、 j，

2. 中心满足

$$\|c_i - c_j\|^2 \coloneqq 1 - r_i^2 - r_j^2. \tag{19}$$

3. 子空间 V_i 的选取满足

(a) V_i 的维数被选取，使得 $r_i > 0 \Longleftrightarrow \dim(V_i) > 0$。*(b)* 集合*{*$V_i$*}*$_{i=1}^{I}$ 是两两正交的。*(c)* 对任意 j，每个 V_i 与张成空间 *{*$c_j - c_1, \ldots, c_j - c_I$*}*正交。

则 $\sqcup_{i=1}^{I} Y_i \in$ 等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$ 其中

$$Y_i \coloneqq S_{r_i}^{n-1}(c_i) \cap A_i \tag{20}$$

且 $A_i \coloneqq c_i + V_i$。此外，$\sqcup_{i=1}^{I} Y_i$ 具有中心*{*c_i*}*和半径*{*r_i*}*。

注意，张成空间 $\{c_i - c_1, \ldots, c_i - c_I\}$ =张成空间 $\{c_j - c_1, \ldots, c_j - c_I\}$ 由命题 B.0.2。

证明。设 $y_i \in Y_i$ 和 $y_j \in Y_j$。注意，由 V_i两两正交这一假设，$y_i - c_i$ 与 $y_j - c_j$ 正交，且由 V_i 与张成空间 $\{c_j - c_1, \ldots, c_j - c_I\}$的正交性以及命题 B.0.5 第2点，$y_i - c_i$ 与 $c_i - c_j$ 正交。两次应用勾股定理，我们得到

$$\begin{aligned} \|y_i - y_j\|^2 &= \|y_i - c_i + c_i - c_j + c_j - y_j\|^2 \\ &= \|y_i - c_i\|^2 + \|c_i - c_j\|^2 + \|c_j - y_j\|^2 \\ &= r_i^2 + \ell_{i,j}^2 + r_j^2 \\ &= r_i^2 + 1 - r_i^2 - r_j^2 + r_j^2 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{21}$$

由 V_i 的正交性可知，对每个 i，$\mathrm{proj}_{A_i} y_j = c_i$。因此，$\sqcup_{i=1}^{I} Y_i$ 具有所需的中心。若 $r_i = 0$，则 $S_{r_i}^{n-1}(c_i) \cap A_i = \{c_i\}$ $\cap A_i = \{c_i\}$。所以，Y_i 具有所需的半径 0。若 $r_i > 0$，则 $S_{r_i}^{n-1}(c_i) \cap A_i \neq \emptyset$ 当且仅当 $\dim A_i > 0$。这证明 Y_i 具有所需的半径 r_i。

□

推论 2.2.11 和定理 2.2.12 结合起来，给出了等距对比嵌入点的一个充要刻画，如下列推论所示。

推论 2.2.13 (等距间距的刻画)。设 $Y \coloneqq$*{*Y_i*}*$_{i=1}^{I}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个点集。那么，$Y \in$ 等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$ 当且仅当存在中心 *{*c_i*}*$_{i=1}^{I}$、半径 *{*r_i*}*$_{i=1}^{I}$、仿射子空间 *{*A_i*}*$_{i=1}^{I}$，使得下述条件成立。

1. 中心和半径满足

$$\|c_i - c_j\|^2 = 1 - r_i^2 - r_j^2 \tag{22}$$

2. 对每个 $i \in I$，A_i 经过 c_i，且 V_i 满足以下条件 .

(a) A_i 的维数选取为使得 $r_i > 0 \Longleftrightarrow \dim(A_i) > 0$。*(b)* 集合 *{*$A_i$*}*$_{i=1}^{I}$ 两两正交。˜*(c)* 每个 A_i 都与 A 正交，其中

$$\tilde{A} \coloneqq \mathrm{span}\,\{c_j - c_1, \ldots, c_j - c_I\} \tag{23}$$

对任意 j。

3. 对每个 $Y_i \subset S_{r_i}^{n-1}(c_i) \cap A_i$。

证明。正向证明应用推论 2.2.11。逆向证明应用定理 2.2.12。 □

注记 2.2.14（相容性方程计数）。从推论 2.2.13 可见，生成等距间距的问题归结为选取相容的 r_i、c_i，以及选取满足所有必要正交条件的子集 V_i。然而，要选取相容的 r_i 和 c_i，

并非易事。一种思路是选取一个 $c_1,\dots,c_I$，然后令 $r_1,\dots,r_I$ 由求解关于 r_i^2 的线性方程组得到：

$$\begin{aligned}\|c_1-c_2\|^2 &= 1-r_1^2-r_2^2,\\ \|c_1-c_3\|^2 &= 1-r_2^2-r_3^2,\\ &\vdots\\ \|c_{I-1}-c_I\|^2 &= 1-r_{I-1}^2-r_I^2\end{aligned}$$

然而，有 I 个未知数和 $\binom{I}{2}$ 个方程。当 $I>2$，$\binom{I}{2}>I$ 时，因此自然会预期：对于 c_1，……，c_I的大多数选择，都不存在 r_1，……，r_I的选择，使得当$I>2$时方程22成立。情况确实如此，这破坏了先选择 c_i再选择 r_i的计划。

为使注2.2.14更加具体，我们给出如下例子。

例2.2.15 （选择$\{c_i\}$的非平凡性）。 设 $I=3$ 与$\{c_i\}_{i=1}^I$ 由下式给出

$$c_1 \coloneqq (0,-\epsilon),\quad c_2 \coloneqq (0,\epsilon)\quad ,c_3 \coloneqq (\alpha,0) \tag{24}$$

其中 $\epsilon>0$ 已给定。对于 ϵ，α 的哪些取值，存在$\{r_i\}_{i=1}^I$ 的选择使得方程22成立？由对称性显然可知 $r_1=r_2$。于是由方程22，我们有

$$\|c_1-c_2\|=2\epsilon=\sqrt{1-2r_1^2}\implies r_1=\sqrt{\frac{1}{2}-2\epsilon^2}. \tag{25}$$

再次应用公式 22，可得

$$\|c_1-c_3\|^2=\epsilon^2+\alpha^2=1-r_1^2-r_3^2\implies \alpha^2=\frac{1}{2}+\epsilon^2-r_3^2. \tag{26}$$

因此，若 $\alpha^2 > \frac{1}{2}+\epsilon^2$，则 $r_3^2<0$，这就产生了矛盾。因此，若 $\alpha^2 > \frac{1}{2}+\epsilon^2$，则不存在满足条件的 r_3，使得其构成的等距间距的中心由公式 24 给出。

理解中心几何结构的约束是本手稿的一个重点。假设我们有一个由 c_i 和 r_i 构成的相容集，则可得以下结果。

推论 2.2.16 (选择 V_i的可行性)。 设 $\{r_i\}_{i=1}^I$ 和 $\{c_i\}_{i=1}^I$ 满足定理 *2.2.12* 的假设（*1–2*）。那么，当且仅当 $\mathbb{R}^n$ 中满足定理 *2.2.12* 的假设（*3*）的一组 $\{V_i\}_{i=1}^I$ 存在时，

$$\dim \tilde{V}+\#\{r_i>0\}_{i=1}^I \le n. \tag{27}$$

其中 $\tilde{V}\coloneqq$张成空间 $\{c_1-c_1,\dots,c_1-c_I\}$。此外，若 $\{d_i\}_{i=1}^I$ 满足 $d_i\in\mathbb{N}$，则 $d_i=0$ 当且仅当 $r_i=0$，并且

$$\dim \tilde{V}+\sum_{i=1}^I d_i \le n \tag{28}$$

那么就存在一种对 $\{V_i\}_{i=1}^I$ 的选择，使得 维数$(V_i)=d_i$。

˜证明。 根据定理 2.2.12 的证明，由 c_i 构成的单纯形包含在 V 中。当且仅当下式成立时，才存在这样一种选择$\{V_i\}_{i=1}^I$：

$$\left(\sum_{i=1}^I \dim(V_i)\right)+\dim(\tilde{V})\le n. \tag{29}$$

根据假设 3.a，我们有，维数$(V_i)>0$ 当且仅当 $r_i>0$。因此，$\sum_{i=1}^I$维数(V_i) 的最小值为 $\#\{r_i>0\}_{i=1}^I$。于是，

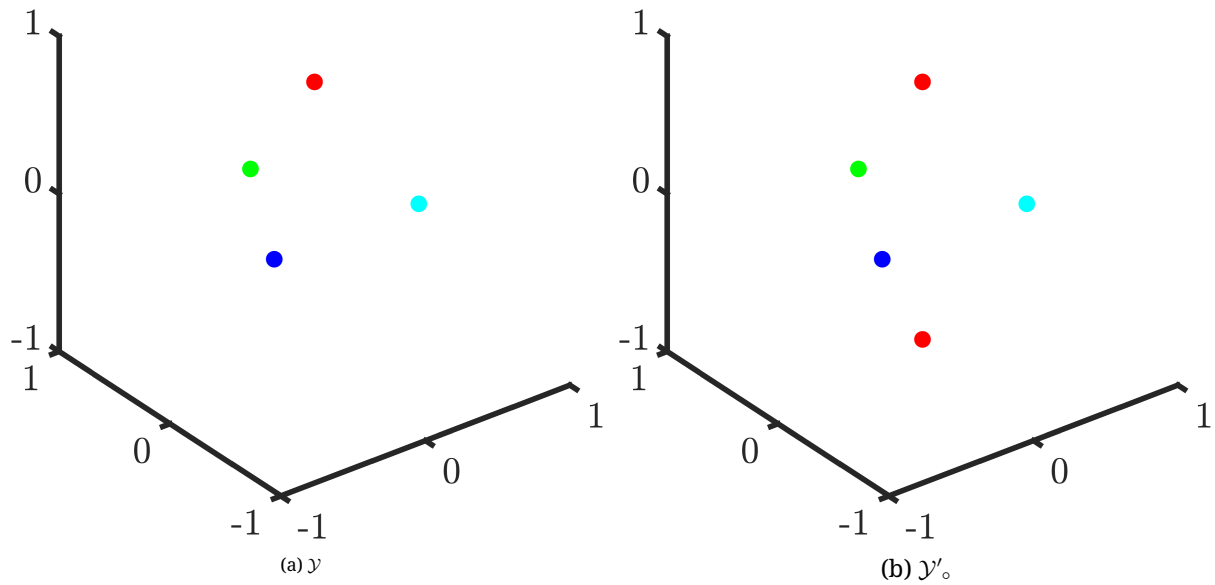
$$\#\{r_i>0\}+\dim(\tilde{V})\le n. \tag{30}$$

这就证明了第一个结论。

˜第二个结论可由在方程 29 中令 $d_i=$ 维数(V_i)，并将维数(V) 项移到等式另一边得到。

□

推论 2.2.16 简而言之指出，生成 $\mathcal{Y}$ ∈等距间距 的唯一难点在于找到相容中心和半径。



(a) $\mathcal{Y}$ (b) $\mathcal{Y}'$。

图 4：引理 2.3.1 在三维中的构造示例，其中 $I = 4$。(a) $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(4, \mathbb{R}^n)$ 的示意图，其中红点表示 Y_4。(b) 应用引理 2.3.1，将红点与其关于正交投影到包含其他三个点的仿射空间所得投影点的反射点合并。这产生了一个间距 $\mathcal{Y}'$，它最大化$\mathcal{Y}$。

2.3 正交反射引理及其推论

接下来，我们介绍一种能够导出更深入几何结果的构造。大致来说，其思路是：将某一类的中心正交投影到由其他中心张成的子空间上，并进行反射，从而增大该类中的等距间隔。

引理 2.3.1 (正交反射引理)。设 $\mathcal{Y} \in$等距间距 其中心为 $\{c_i\}_{i=1}^{I}$。

那么，存在一个等距间隔 $Y' = \sqcup_{i=1}^{I} Y_i' \in ES$，使得

$$Y_i' = Y_i, \quad for\ each\ i \leq I-1 \tag{31}$$

and

$$Y_I' = Y_I \cup \underset{c_I^*}{\operatorname{refl}} Y_I \quad where \quad c_I^* := \underset{\operatorname{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-1})}{\operatorname{proj}} c_I, \tag{32}$$

其中refl表示反射算子，见定义 *B.0.4*。

证明。设 $y_I, y_I^* \in Y_I$互为反射，且 $y_j \in Y_j$对某个 $j \leq I-1$成立。考虑三角形$\triangle y_I c_I^* y_j$和$\triangle y_I^* c_I^* y_j$。这两个三角形共用边 $c_I^* y_j$，且边 $y_I c_I^*$和 $y_I^* c_I^*$的长度相同。此外，角 $\angle y_I c_I^* y_j$和 $\angle y_I c_I^* y_j$相同（即为直角），这可由以下计算得出。

$$\begin{aligned}
\langle c_j - c_I^*, c_I^* - y_I^* \rangle &= \langle c_j - c_I^*, c_I^* - y_I - 2(y - c_I^*) \rangle && (33)\\
&= \langle c_j - c_I^*, y_I - c_I^* \rangle && (34)\\
&= \langle c_j - c_I^*, y_I - c_I \rangle + \langle c_j - c_I^*, c_I - c_I^* \rangle = 0. && (35)
\end{aligned}$$

因此，根据边角边判定，这两个三角形全等，所以 $\|y_I^* - y_j\| = \|y_I - y_j\| = 1$，这就证明了$\mathcal{Y}_I' \in$等距间距。□

图 4 给出了该引理的一个直观应用示例。注意，$|\mathcal{Y}| \subset |\mathcal{Y}'|$。理解引理 2.3.1 的一种有效方式，是将其视为一种算法：以等距间隔 $\mathcal{Y}$ 作为输入，并生成一个可能更大的$\mathcal{Y}'$。引理 2.3.1 的主要用途，是为极大等距间距生成一个不变量。以下定义和命题将对此进行说明。

定义 2.3.2 （极大等距间距）. 我们称$\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(I,\ \mathbb{R}^n)$ 是极大的，如果它在等距间距$(I,\ \mathbb{R}^n)$ 中关于子集运算是极大的。也就是说，当$\mathcal{Y}' \in$ 等距间距$(I,\ \mathbb{R}^n)$ 且$\mathcal{Y} \subset \mathcal{Y}'$蕴含$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$时，$\mathcal{Y}$是极大的。我们定义

$$\widehat{\mathcal{ES}}(I,\mathbb{R}^n) \coloneqq \{\mathcal{Y} \in \mathcal{ES}(I,\mathbb{R}^n) \colon \mathcal{Y} \text{ is maximal}\}. \tag{36}$$

命题 2.3.3。设 $\mathcal{Y}$ $\in$等距间距。那么

$$c_I \in \mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-1}). \tag{37}$$

证明。 将引理 2.3.1 应用于$\mathcal{Y}$，并定义 $c_I^* \coloneqq$ 投影$_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-1})}\ c_I$。

假设 $\mathbf{refl}_{c_I^*} Y_I \not\subset Y_I$，那么我们可以通过引理 2.3.1，用 $Y_I \cup \mathbf{refl}_{c_I^*} Y_I$ 替换 Y_I，使$\mathcal{Y}$严格变大。这与$\mathcal{Y}$的极大性矛盾。因此，$\mathbf{refl}_{c_I^*} Y_I \subset Y_I$。

任取 $j \le I-1$。那么根据定义，我们有 $\mathbf{proj}_{A_i} y_j = c_i$。此外，我们有 $c_I^* \in A_i$（因为它位于连接 y_I 与 $\mathbf{refl}_{c_I^*} y_I$ 的直线上），并且根据命题 2.2.10， $y_j - c_I^*$ 与 $c_I^* - y_I$ 正交。因此，$\mathbf{proj}_{A_i} y_j = c_i^*$。于是 $c_i^* = c_i$，所以

$$c_I = c_I^* = \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-1})} c_I. \tag{38}$$

□

我们也可以使用引理 2.3.1 证明以下两个推论，它们说明维度被“投影掉”时，等距间距可能呈现的形式。

命题 2.3.4 (中心正交投影重合)。 设 $\mathcal{Y}$ $\in$等距间距。则

$$\operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})} c_{I-1} = \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})} c_I \tag{39}$$

证明。 当 $I = 2$时，投影落在原点，因此公式 39 显然成立。若 $I = 3$，则 $\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})$ 只有一个点（c_1），因此结论也显然成立。

设 $I \le 4$。令 $\mathcal{Y}^{(I-1)}$ 为去掉类 $I-1$ 后的 $\mathcal{Y}$。同样，令 $\mathcal{Y}^{(I)}$ 为去掉类 I 后的 $\mathcal{Y}$。令 $\hat{}\mathcal{Y}^{(I-1)}$ 和 $\hat{}\mathcal{Y}^{(I)}$ 分别为将引理 2.3.1 应用于 $\mathcal{Y}^{(I-1)}$ 和 $\mathcal{Y}^{(I)}$ 所得到的等距间距。记

$$\hat{c}_{I-1} \coloneqq \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})} c_{I-1} \tag{40}$$

$$\hat{c}_I \coloneqq \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})} c_I. \tag{41}$$

若能证明$\hat{c}_{I-1} = \hat{c}_I$，则该结论成立。我们将 $\hat{}\mathcal{Y}^{(I-1)}$ 的第 $I-1$ 个类记为 $\hat{}\,Y_{I-1}$，类似地，将 $\hat{}\mathcal{Y}^{(I)}$的第 $I-1$ 个类记为 $\hat{}\,Y_I$。

将 r_{I-1}^* 和 r_I^* 分别记为类 Y_{I-1} 和 Y_I 的半径。对于任意的 $y_1 \in Y_1$，$\hat{}y_{I-1} \in Y_{I-1}\hat{}$和 $\hat{}y_I \in Y_I$，由命题 2.2.10 可得以下结果:

$$0 = \left\|y_1 - \hat{y}_I^2\right\| - \|y_1 - \hat{y}_{I-1}\|^2 \tag{42}$$

$$= \|y_1 - c_1\|^2 + \left\|c_1 - \hat{c}_I^2\right\| + \|\hat{c}_I - \hat{y}_I\|^2 \tag{43}$$

$$- \|y_1 - c_1\|^2 - \|c_1 - \hat{c}_{I-1}\|^2 - \|\hat{c}_{I-1} - \hat{y}_{I-1}\|^2 \tag{44}$$

$$= \|c_1 - \hat{c}_I\|^2 - \|c_1 - \hat{c}_{I-1}\|^2 + r_I^{*2} - r_{I-1}^{*2}. \tag{45}$$

假设$\hat{c}_{I-1} \neq \hat{c}_I$。那么在 c_1，.....，c_{I-2}中，必有一个中心比$\hat{c}_I$更靠近$\hat{c}_{I-1}$，反之亦然。不失一般性，设 c_1 和 c_2 满足

$$\|c_1 - \hat{c}_I\| < \|c_1 - \hat{c}_{I-1}\|, \quad \text{and} \quad \|c_1 - \hat{c}_{I-1}\| < \|c_1 - \hat{c}_I\|. \tag{46}$$

因此，应用方程 45 $r_{I-1} > r_I$ 可得。将 c_2 代入 c_1 的位置，重复相同的计算，可得 $r_I > r_{I-1}$。这就产生了矛盾。因此$\hat{c}_I = \hat{c}_{I-1}$。 □

命题 2.3.4 也意味着以下结论。

推论 2.3.5 (投影半径重合)。 设 $Y \in$ 等距间距，且 $c_I^* \coloneqq$ 投影$_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})}\, c_I$ 以及 $c_{I-1}^* \coloneqq$投影$_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})}\, c_{I-1}$。那么，对于任意 y_I 和 y_{I-1}，

$$\|y_I - c_I^*\|_2^2 = \left\|y_{I-1} - c_{I-1}^*\right\|_2^2 \tag{47}$$

$$\|y_I - c_I\|_2^2 + \|c_I - c_I^*\|_2^2 = \|y_{I-1} - c_{I-1}\|_2^2 + \left\|c_{I-1} - c_{I-1}^*\right\|_2^2 \tag{48}$$

证明。方程 47 可由方程 45 与命题 2.3.4 合并得到。根据勾股定理，方程 47 推出 48。

□

通过利用关于仿射空间进行反射的技巧，我们可以证明以下定理。该定理将这样的条件联系起来：一个 $\mathcal{Y} \in$等距间距被另一个所有中心均重合的间距最大化；以及包含$\mathcal{Y}$的中心的仿射空间的秩与移除$\mathcal{Y}$的两个中心后的仿射秩之间的关系。

定理 2.3.6 (留二仿射秩蕴含重合中心最大化)。 设 Y 是一个等距间隔，其中心为 $\{c_i\}_{i=1}^I$，并且存在一个 i，$j \le I$，其中 $i \neq j$，使得

$$\mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_I) = \mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_I). \tag{49}$$

那么，存在一个能使 Y 达到最大值的等距间隔 Y，使得 $\hat{c}_1 = \cdots = \hat{c}_I$，其中 $\hat{c}_1, \ldots, \hat{c}_I$ 表示 Y 的中心。

证明。 为简化记号，不失一般性，设 $i = I-1$ 和 $j = I$。由命题 2.3.4 可得

$$c_I = \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})} c_I = \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})} c_{I-1} = c_{I-1}. \tag{50}$$

由推论 2.3.5 可得 $r_I = r_{I-1} = \frac{\sqrt{2}}{2}$。由此可知，对于任意的 $k \le I$，都有 $\|y_i - c_I\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$。因此，根据余弦定理，对于任意的 $k,\ \ell \le I$，只要 $k \neq \ell$，直线 $\overline{y_k c_I}$和 $\overline{y_\ell c_I}$就相互正交。

考虑 $\hat{\mathcal{Y}} \in$ 等距间距，使得 $\hat{\mathcal{Y}} = \left\{\hat{Y}_k\right\}_{k=1}^I$ 由下式定义

$$\hat{Y}_k = Y_k \cup \operatorname*{refl}_{c_I} Y_k \quad \text{for each } k = 1, \ldots, I-2, \tag{51}$$

$\hat{Y}_I = Y_I$，以及 $Y_{I-1} = Y_{I-1}$。由于 $y_k c_I$ 与 $y_\ell c_I$ 正交，根据引理 2.3.1 的证明中相同的论证，我们有 $\|y_\ell - y_k\| = \|\hat{y}_\ell - y_k\|$、$\|y_\ell - y_{I-1}\| = \|\hat{y}_\ell - y_{I-1}\|$ 和 $\|y_\ell - y_I\| = \|\hat{y}_\ell - y_I\|$，对任意 $y_\ell \in Y_\ell$，$\hat{y} \in \mathrm{refl}_{c_I} Y_\ell$、$y_k \in Y_k$、$y_{I-1} \in Y_{I-1}$ 和 $y_I \in Y_I$均成立。由于 ℓ 和 k 是任意的，因此我们有 $\hat{\ }$，$\mathcal{Y}$ 是一个等距间隔。

现在我们证明 $\mathcal{Y}$ 的所有中心都重合。注意到 $c_I \in \mathrm{Aff}(Y_k \cup \mathrm{refl}_{c_I} Y_k)$，由此可得这一结论；因此应用定义 2.2.8，我们有 $c_k = \mathrm{proj}_{\mathrm{Aff}(Y_k \cup \mathrm{refl}_{c_I} Y_k)}\, y_I = c_I$，对任意 $y_I \in Y_i$均成立。 □

定理 2.3.6 和命题 2.3.3 立即推出以下推论。它揭示了等距间隔的极大性与张成其中心的仿射空间的秩之间的关系。

推论 2.3.7 (极大间隔的留出秩)。 设 $Y \in$等距间距，其中心为 $c_1, \ldots, c_I$，且这些中心并非全部重合，并且 $i \neq j$。那么，

$$\mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_I) = \mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_I) \tag{52}$$

and

$$\mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_I) \subsetneq \mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_I). \tag{53}$$

证明。 公式 52 由命题 2.3.3 立即得出。

公式 53 由极大嵌入的唯一性得出。该假设意味着，$\mathcal{Y}$ 不会由中心重合的等距间隔达到最大值。因此，公式 49 不成立。

□

推论 2.3.7 给出了以下事实的一个简洁证明。

推论 2.3.8 (如果极大间距中的两个中心重合，那么所有中心都重合**)**。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距。如果 $i \neq j$ 满足 $c_i = c_j$，那么 $c_1 = \cdots = c_I$。

证明。 如果 $I = 2$，结论显然成立。设 $I \geq 3$，并设 k 与 i 和 j均不相同。由 $c_i = c_j$ 可得

$$\mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{j-1}, c_{j+1}, \ldots, c_I) \underbrace{=}_{c_i = c_j} \mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_I) \underbrace{=}_{\text{Eqn. 52}} \mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_I).$$

除非 $c_1 = \cdots = c_I$，否则这与推论 2.3.7 的公式 53 矛盾。因此 $c_1 = \cdots = c_I$。 □

鉴于推论 2.3.8，我们引入以下定义。

定义 2.3.9(极大重合/非重合中心**).** 我们将等距间距 的两个子集定义如下 .

$$\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I, \mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ \mathcal{Y} \in \widehat{\mathcal{ES}} \colon \text{the centers of } \mathcal{Y} \text{ coincide} \right\} \tag{54}$$

$$\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I, \mathbb{R}^n) \coloneqq \left\{ \mathcal{Y} \in \widehat{\mathcal{ES}} \colon \text{the centers of } \mathcal{Y} \text{ do not coincide} \right\} \tag{55}$$

注 2.3.10（中心重合的等距间距的性质）. 利用这一新记号，我们可以用下列方程重新表述推论 2.3.8。

$$\widehat{\mathcal{ES}}(I, \mathbb{R}^n) = \widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I, \mathbb{R}^n) \cup \widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I, \mathbb{R}^n). \tag{56}$$

显然，等距间距$_{=}(I, \mathbb{R}^n) \cap$ 等距间距$_{\neq}(I, \mathbb{R}^n) = \emptyset$，因此我们看到，集合等距间距 分成两类。在第一类中，等距间距$_{=}$，所有中心都重合。在第二类中，等距间距 $\neq$，没有 中心重合。事实表明，以这种方式分离 等距间距 是自然的。

我们将看到，关于$\mathcal{Y} \in$等距间距 的许多陈述都有一部分适用于 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$_{=}$的情形，而另一部分适用于$\mathcal{Y} \in$ 等距间距$_{\neq}$的情形，正如推论 2.3.7中那样。手稿后文还有其他例子，例如定义 2.4.4 2.3.18、2.6.8、2.7.1。

注意，在下面的命题以及手稿其余部分中，conv 指凸包运算，参见定义 B.0.3。在继续之前，我们先回顾初等几何中垂心单形和垂心系统的概念。

定义 2.3.11 (垂心单形**)**。 设 σ 是一个 n单纯形。若 σ的 $n+1$条高线交于一点，则称其为垂心单形，这个交点称为垂心。

设 x_1、.....、 x_{n+1} 是一个垂心 n单纯形的顶点，其垂心为 x_0。那么， x_0、 x_1、.....、 x_{n+1}称为垂心系统；从该系统中任意去掉一个点，所得的都是一个垂心单形，且其垂心就是被去掉的那个点。

所有三角形都有垂心。在高维情形下则并非如此。一般而言，单纯形并不是垂心单形。

命题 2.3.12 (正交心性／正交心系统的等价条件**)**。 设 $\triangle$ 为一个 n单纯形。则下列条件等价。

1. $\triangle$ 是垂心系。*2.* $\triangle$ 的高线垂足是各自对应面的垂心。*3.* 假设 $n \geq 3$，$\triangle$ 的每条棱都与其相对的 $n-2$ 面正交

.

设给定点 $x_0, \ldots, x_{n+1} \in \mathbb{R}^n$。则下列条件等价。

1. 点 $x_0, \ldots, x_{n+1}$ 构成一个垂心系。

2. 存在 $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{R}$，使得

$$\|x_i - x_j\|^2 = \lambda_i + \lambda_j \quad \textit{with} \quad \sum_{i=0}^{n+1} \frac{1}{\lambda_i} = 0, \ \textit{and} \ \lambda_i + \lambda_j > 0, \ i \neq j. \tag{57}$$

3. 令 $p\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ 由 $p(x) = (x, 1)$定义。则存在一个 $i \in \{0, \dots, n+1\}$，使得该矩阵

$$A \coloneqq \begin{pmatrix} p(x_0 - x_i) & \dots & p(x_{i-1} - x_i) & p(x_{i+1} - x_i) & \dots & p(x_{n+1} - x_i) \end{pmatrix} \tag{58}$$

是正交的。

证明。 关于成为垂心单形的等价条件。关于点 1 $\iff$ 2，参见 [8]。关于点 2 $\iff$ 3，参见 [4,第 4] 页及其中所列的参考文献。

关于点 2 和点 3 的等价性，参见 [5, 第 2] 节。 □

现在，我们给出一个强有力的几何结果，它为极大嵌入中的中心如何分布提供了几何判据。

命题 2.3.13 （中心构成垂心系统）。 设 $Y \in$ 等距间距$\neq$。那么 $c_1, \dots, \dots, c_I$ 构成一个垂心系。

证明。 定义 $\triangle_i \coloneqq$ 凸包运算$(c_1, \dots\dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots\dots, c_I)$。若能证明$\triangle_i$ 是一个单纯形，且 c_i 是其垂心，则结论成立。$\triangle_i$ 是单纯形，等价于证明 $c_1, \dots\dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots\dots, c_I$仿射无关。这由推论 2.3.7 得出。

现在证明 c_i 是$\triangle_i$的垂心。注意，由推论 2.3.8 可知，当 $i \neq j$ 时， $c_i \neq c_j$。因此，直线 $c_j c_i$ 定义良好。为方便记号，定义

$$A_{(i,j)} \coloneqq \operatorname{Aff}(c_1, \dots, c_{j-1}, c_{j+1}, \dots, c_{i-1}, c_{i+1}, \dots, c_I). \tag{59}$$

以及 $c_j^* \coloneqq$ 投影$_{A_{(i,j)}}\, c_j$。由命题 2.3.4 可得

$$\operatorname*{proj}_{A_{(i,j)}} c_i = c_j^*$$

因此， c_i、 c_j和 c_j^* 都位于同一条直线上。由于 c_j^* 由正交投影定义，这条直线与 $A_{(i,j)}$正交。因此， c_i 位于经过 c_j 且与 $A_{(i,j)}$正交的直线上，也就是说， c_i 位于连接 c_j 与其在$\triangle_i$的对面上的正交投影的直线上。对每个 j均如此，因此 c_i 是$\triangle_i$的垂心。 □

下面的推论给出了一个有用的恒等变换

推论 2.3.14 （ $\tilde{A}$ 的维数）。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$，则 $n =$ 维 $\tilde{A} + \sum_{i=1}^{I}$ 维 A_i 一个d

$$\dim \tilde{A} = \begin{cases} 0 & \text{if } \mathcal{Y} \in \widehat{\mathcal{ES}}_{=} \\ I - 2 & \text{if } \mathcal{Y} \in \widehat{\mathcal{ES}}_{\neq} \end{cases}. \tag{60}$$

证明。 假设对于所有的 i, $r_i = 0$ 都成立。则$\mathcal{Y}$ 是一个正单纯形，并且可以通过如图 4 所示的反射技巧严格地取得最大值，矛盾。

设 i 使得 $r_i > 0$。定义

$$\hat{V}_i \coloneqq (\operatorname{Aff}|\mathcal{Y}|)^{\perp} = \left(\operatorname{Aff}\tilde{A} + \sum_{i=1}^{I} A_i\right)^{\perp} \tag{61}$$

$\hat{}\,\hat{}$ 以及 $A_i = c_i V_i$。定义 $\mathcal{Y}$ 使得

$$\hat{Y}_j = \begin{cases} Y_j & \text{if } i \neq j \\ \left(A_i + \hat{A}_i\right) \cap S_{r_i}^{n-1}(c_i) & \text{if } i = j \end{cases}. \tag{62}$$

那么，$\hat{}\,\mathcal{Y} \in$ 等距间距。如果 $n >$ dim $\tilde{A} + \sum_{i=1}^{I} \dim A_i$，那么 $\hat{}\, V_i$ 并非平凡，因此 $Y_i \subsetneq \hat{}\, Y_i$，故$\mathcal{Y}$ 不是极大的。这是矛盾。因此， $n =$ dim $\tilde{A} + \sum_{i=1}^{I} \dim A_i$。

现在我们证明公式 60。当中心重合时，证明显然成立。当中心不重合时，则

$$\dim \tilde{A} = \dim \operatorname{Aff} c_1, \dots, c_I = \dim \operatorname{conv}(c_1, \dots, c_I) = I - 2 \tag{63}$$

其中最后一个等式由命题 2.3.13 得出。 □

事实证明，相容条件（公式 22）等价于中心构成一个垂心单形这一陈述。

命题 2.3.15（正交反射引理生成垂心系统）。设 $c_1, \ldots, c_I$ 是 $Y \in$ 等距间距的中心，且仿射无关。那么 $c_1, \ldots, c_{I-1}, c_I^*$ 是一个垂心系，其中$c_I^* :=$ 投影$_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-1})}\ c_I$。

证明。目标是证明，对于每个 $i = 1, \ldots, I-1$，都有 $c_i c_I^* \in$ 仿射包$(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{I-1})^\perp$。运用正交反射技巧（应用于 I），我们可以定义 $\mathcal{Y}' \in$ 等距间距，其中当 $i = 1, \ldots, I-1$ 时，$c_i' = c_i$，且 $c_I' = c_I^*$。于是，将推论 2.3.5 应用于$\mathcal{Y}'$ 可得

$$\operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1',\ldots,c_{i-1}',c_{i+1}',\ldots,c_{I-1}')} c_i' = \operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1',\ldots,c_{i-1}',c_{i+1}',\ldots,c_{I-1}')} c_I'. \tag{64}$$

替换 $c_i' = c_i$、$c_I' = c_I^*$ 并重新整理各项后，我们得到

$$\operatorname*{proj}_{\mathrm{Aff}(c_1,\ldots,c_{i-1},c_{i+1},\ldots,c_{I-1})} (c_i - c_I^*) = \mathbf{0} \implies \overline{c_i c_I^*} \in \mathrm{Aff}(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_{I-1})^\perp \tag{65}$$

这就证明了该结果。 □

命题 2.3.15 意味着，命题 2.3.13 的一个版本也适用于非极大等距间距。

推论 2.3.16（垂心单形的中心形式）。若 $Y \in$ 等距间距（I），则 $\triangle_{c_1, \ldots, c_I}$ 构成一个（可能退化的）垂心单形。

证明。考虑对$\mathcal{Y}$ 应用正交反射引理，其所在的类为 I。 □

Pro命题 2.3.13 和 2.3.15 互为逆命题（相差一个缩放因子），如下述定理所示 s.

定理 2.3.17 (小型垂心系统对应于 等距间距≠ 中的中心)。设 $c_0, \ldots, c_{n+1} \in \mathbb{R}^m$ 是一个垂心系。如果 m 足够大，则存在某个 $\alpha \in (0, \infty)$ 以及 $Y \in$ 等距间距≠$(n+1, \mathbb{R}^m)$，使得$\alpha c_0, \ldots, c\alpha_{n+1}$。

证明。设给定 $c_0, \ldots, c_{n+1}$。于是，由等式 57 可知，存在 $\lambda_0, \ldots, \lambda_{n+1}$，使得对于每个 $i \neq j$都有 $\|c_i - c_j\|^2 = \lambda_i + \lambda_j$。如果我们选择

$$\alpha^2 \leq \min(\inf_i \frac{1}{2\lambda_i}, \inf_{i,j} \|c_i - c_j\|) \tag{66}$$

那么 $\|\alpha c_i - \alpha c_j\| \leq 1$ 且 $\frac{1}{2} - \alpha^2 \lambda_i \geq 0$。于是 $\|\alpha c_i - \alpha c_j\|^2 = \alpha^2 \lambda_i + \alpha^2 \lambda_j$。若定义 $r_i := \sqrt{\frac{1}{2} - \alpha^2 \lambda_i}$，则可见 $\|\alpha c_i - \alpha c_j\|^2 = 1 - r_i^2 - r_j^2$。因此，这样选择的 $\alpha c_0, \ldots, \alpha c_{n+1}$和 $r_0, \ldots, r_{n+1}$ 满足等式 22，$r_i^2 + r_j^2 \leq 1$。

根据推论 2.3.14，dim 仿射包 αc_0，……，αc_{n+1}。因此，根据推论 2.2.16，如果 $m \geq n +$# $\{r_i > 0\}_{i=0}^{n+1}$，那么可以选择一个仿射空间 A_i，使得 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(n+2,\ \mathbb{R}^m)$，其中

$$Y_i := S_{c_i}^{m-1}(r_i) \cap A_i. \tag{67}$$

通过选择 A_i 使得 $\sum_{i=0}^{n+1} \dim A_i = m - n$，根据推论 2.3.14 和命题 2.3.13，$\mathcal{Y}$ 是极大的。

□

命题 2.3.12 和命题 2.3.13 表明，$\mathcal{Y} \in$等距间距≠ 的中心并非几何齐次。对于其中一个中心 c_i，相应的 $\lambda_i < 0$。从几何上看，这意味着 c_i 位于其他中心的凸包中。我们将这个特殊的中心称为内中心。内中心在后文中将变得非常重要。

定义 2.3.18（内类）。设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距。若 i 是 Y 的一个内类，则称 $c_i \in$conv$(c_1, \ldots, c_{i-1}, c_{i+1}, \ldots, c_I)$。

非内层类是指任何不是内类的类。

引理 2.3.19（内中心的存在性）。当 $I > 1$ 时，每个 $Y \in$ 等距间距（I）都有一个内类。若 $Y \in$ 等距间距$\neq$（I），则该内类是唯一的。

证明。当 $\mathcal{Y} \in$等距间距$_=$ 时，证明是显然的，因为中心重合。

根据命题 2.3.13，$\mathcal{Y} \in$等距间距$\neq$ 的中心构成一个垂心系。根据命题 2.3.12 第 3 点，存在一个中心，当将其视为原点时，其余列构成一个正交矩阵。称该中心为 c_i。从几何上看，显然 c_i 包含在其他类的凸包中。此外，该中心是唯一的。

□

2.4 将等距间距粘合在一起

给定若干等距间距，有可能将它们嵌入某个公共空间，从而构成一个更大的等距间隔。在本节中，我们确定何时可以做到这一点。

定义 2.4.1（粘合点，粘合）。设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距。若 $|\mathcal{Y}| \in$ 等距间距(1)，则我们将 粘合点 定义为 $|\mathcal{Y}|$ 的中心。

设 $N \in \mathbb{N}$，且 $\mathcal{Y}^{(1)} \in$ 等距间距$(I^{(1)},\ \mathbb{R}^{n^{(1)}}) \ldots,\ \mathcal{Y}^{(N)} \in$ 等距间距$(I^{(N)},\ \mathbb{R}^{n^{(N)}})$。如果存在等距嵌入 $f^{(1)}\colon \mathbb{R}^{n^{(1)}} \to \mathbb{R}^m,\ \ldots,\ f_{(N)}\colon \mathbb{R}^{n^{(N)}} \to \mathbb{R}^m$，使得

$$\bigcup_{n=1}^{N} f^{(n)}(\mathcal{Y}^{(n)}) \in \mathcal{ES}(\sum_{n=1}^{N} I^{(n)}, \mathbb{R}^m). \tag{68}$$

我们将元组 $(f_{(1)} \ldots,\ f^{(N)})$ 称为 粘合$\mathcal{Y}^{(1)},\ \ldots,\ \mathcal{Y}^{(N)}$ 的粘合；当 $\mathcal{Y}^{(1)},\ \ldots,\ \mathcal{Y}^{(N)}$ 根据上下文可以明确时，简称为粘合。

如果存在某个 m 和 $(f^{(1)},\ \ldots,\ f_{(N)})$，使得 $\mathcal{Y}^{(1)},\ \ldots,\ \mathcal{Y}^{(N)}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中粘合，则称 $\mathcal{Y}^{(1)},\ \ldots,\ \mathcal{Y}^{(N)}$ 可以粘合，或称其为可粘合。

若粘合存在，我们将$\mathcal{Y}^{(1)}, \ldots, \mathcal{Y}^{(N)}$ 的粘合记为$\mathcal{Y}^{(1)} \vee \cdots \vee \mathcal{Y}^{(N)}$。

正如注 2.2.5 中所指出的，$\mathcal{Y} \in$ 等距间距 并不意味着 $|\mathcal{Y}| \in$等距间距。因此，并非所有等距间距都有粘合点。正如下述命题所示，粘合点是进行任何粘合的必要条件。

注 2.4.2（中心与粘合点的诠释）。我们可以如下结合粘合与重新着色技巧的思想。如果等距间距$\mathcal{Y}^{(1)}, \ldots, \mathcal{Y}^{(N)}$ 在 $\mathbb{R}^m$中粘合在一起，那么它们就定义了一个$\mathcal{Y}' \in$ 等距间距$(N, \mathbb{R}^m)$，其类为

$$Y_i := \left|\mathcal{Y}^{(i)}\right|. \tag{69}$$

也就是说，将等距间距粘合在一起“看起来像是”形成等距间距，只不过是“高一个层次”。从这个角度来看，$\mathcal{Y}^{(i)}$ 的粘合点就是$|\mathcal{Y}^{(i)}|$的中心，将其视为$\mathcal{Y}'$中的一个单独的类。

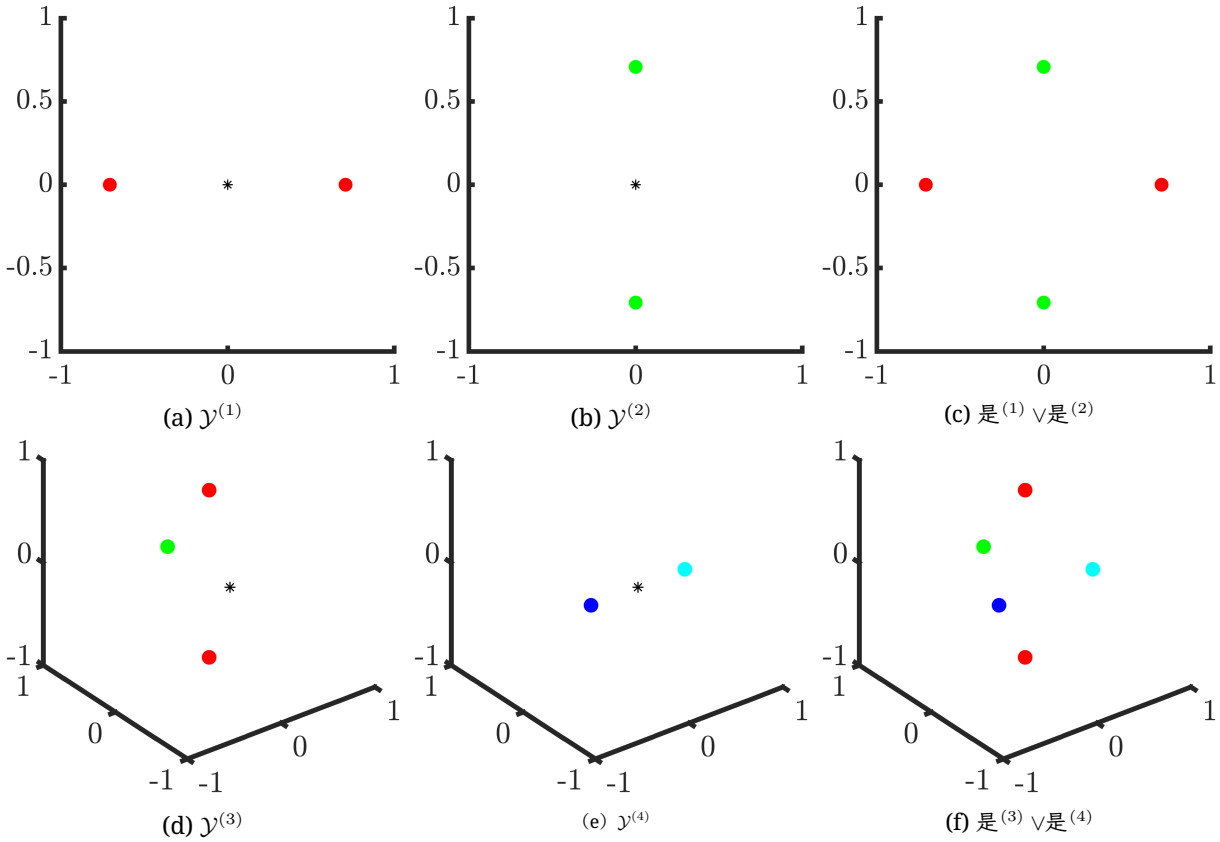
例2.4.3（　　粘合示例）。粘合的一个例子是 $\mathcal{Y}^{(1)},\ \mathcal{Y}^{(2)} \in$ 等距间距$(1,\ \mathbb{R}^2)$，其中

$$Y_1^{(1)} := \left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0\right)\right\} \quad Y_1^{(2)} := \left\{\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right), \left(0, \frac{-\sqrt{2}}{2}\right)\right\}. \tag{70}$$

这两个间距集粘合在一起，形成 $\mathcal{Y}^{(1)} \vee \mathcal{Y}^{(2)}$，其中 $f^{(1)} = f_{(2)} = I$的粘合点位于原点。$\mathcal{Y}^{(1)}$和$\mathcal{Y}^{(2)}$分别由图5a和图5a中的红点和绿点表示。粘合点以黑色 $*$标出。$\mathcal{Y}^{(1)} \vee \mathcal{Y}^{(2)}$的粘合过程如图5c所示。

粘合的另一个例子由 $\mathcal{Y}^{(3)},\ \mathcal{Y}^{(4)} \in$ 等距间距$(2,\ \mathbb{R}^3)$ 给出，其中

$$\begin{aligned} Y_1^{(3)} &:= \left\{\left(0, 0, \frac{\sqrt{6}}{3}\right), \left(0, 0, \frac{-\sqrt{6}}{3}\right)\right\}, & Y_2^{(3)} &:= \left\{\left(0, \frac{\sqrt{3}}{3}, 0\right)\right\} \\ Y_1^{(4)} &:= \left\{\left(\frac{-1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{12}}, 0\right)\right\}, & Y_2^{(4)} &:= \left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{-1}{\sqrt{12}}, 0\right)\right\}. \end{aligned} \tag{71}$$



(a) $\mathcal{Y}^{(1)}$ (b) $\mathcal{Y}^{(2)}$ (c) 是$^{(1)}$ ∨是$^{(2)}$

(d) $\mathcal{Y}^{(3)}$ (e) $\mathcal{Y}^{(4)}$ (f) 是$^{(3)}$ ∨是$^{(4)}$

图5：展示粘合点的粘合示例，粘合点以黑色 $*$ 标出。子图 5a–5c 展示了 $\mathbb{R}^2$ 中的粘合，子图 5d–5f 展示了三维中的粘合。

这两个间距集粘合在一起，形成 $\mathcal{Y}^{(3)} \vee \mathcal{Y}^{(4)}$，其中 $f^{(3)} = f_{(4)} = I$的粘合点位于原点。$\mathcal{Y}^{(3)}$和$\mathcal{Y}^{(4)}$分别由图 5d 和 5e 中的红色点和绿色点表示。粘合点用黑色 $*$ 标出。粘合 $\mathcal{Y}^{(3)} \vee \mathcal{Y}^{(4)}$ 在图 5f 中表示

存在这样的等距间距：它们有粘合点，却无法粘合，例如 $\mathcal{Y}^{(5)}$，$\mathcal{Y}^{(6)} \in$ 等距间距$(1,\ \mathbb{R}^2)$，其中

$$Y_1^{(5)} := \{(1,0),(-1,0)\} \quad Y_1^{(6)} := \{(0,1),(0,-1)\}. \tag{72}$$

$\mathcal{Y}^{(5)}$和$\mathcal{Y}^{(6)}$都有粘合点 $c^{*(5)} = c^{*(6)} = \mathbf{0}$。然而，任何候选粘合 $f_{(5)}\, f^{(6)}$都必须满足$\left\| f^{(5)}(y_5) - f_{(6)}(y_6) \right\| = 1$，但

$$\begin{aligned}\left\| f^{(5)}(y_5) - f^{(6)}(y_6) \right\|^2 &= \left\| f^{(5)}(y_5) - f^{(5)}(c^{*(5)}) \right\|^2 + \left\| f^{(5)}(c^{*(5)}) - f^{(6)}(c^{*(6)}) \right\|^2 + \left\| f^{(6)}(c^{*(6)}) - f^{(6)}(y_6) \right\|^2 \\ &> 2.\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{Y}^{(5)}$ 和$\mathcal{Y}^{(6)}$ 无法粘合。

注释2.4.3表明，要使$\mathcal{Y}^{(1)}$，……，$\mathcal{Y}^{(N)}$ 在 $\mathbb{R}^m$ 中可粘合，每个$\mathcal{Y}^k$都必须有一个粘合点，m 必须足够大，而且每个间距都不能“太大”。为明确“大小”这一概念，我们引入范围的概念。

定义 2.4.4（范围）。对于每个 I，$n \in \mathbb{N}$，我们定义范围，记作 ext：等距间距$(I,\ \mathbb{R}^n) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$如下

$$\operatorname{ext} \mathcal{Y} := \begin{cases} \infty & \text{if } \mathcal{Y} \text{ has no glue site} \\ \|y - c^*\| & \text{if where } c^* \text{ is the glue site of } \mathcal{Y} \text{ and } y \in |\mathcal{Y}| \end{cases} \tag{73}$$

如果公式 73 右侧的集合为空，则我们定义范围$\mathcal{Y} = \infty$。

之所以称为范围，是因为它既衡量等距间距集的大小，也衡量其可粘合的程度，正如下述命题所示。

命题 2.4.5 (范围的基本性质)。 设 $Y \in$ 等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$。那么存在一个 $Y' \in$ 等距间距，使得 Y 与 Y' 粘合，当且仅当范围$Y \leq 1$。

证明。 设 $\mathcal{Y} \in$等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$，且范围 $\mathcal{Y} \leq 1$。$\mathcal{Y}$有一个粘合点 c。然后，定义

$$\mathcal{Y}' \coloneqq \left\{(\mathbf{0}^n, \pm\sqrt{1-r^2})\right\} \tag{74}$$

其中 $r \coloneqq \|y - c^*\|$。显然，$\mathcal{Y}' \in$等距间距(1)，并且 $\mathcal{Y}$与 $\mathcal{Y}'$通过映射 $(x \mapsto (x-c, 0)\ Id_{n+1})$ 粘合。因此，范围$\mathcal{Y} \leq 1$ 意味着存在一个 $\mathcal{Y}'$，使得 $\mathcal{Y}$ 与 $\mathcal{Y}'$ 粘合。
假设$\mathcal{Y}$ 与$\mathcal{Y}'$ 粘合。设 $y \in |\mathcal{Y}|, y' \in |\mathcal{Y}'|, c$ 表示$\mathcal{Y}$ 的粘合点，而 c' 表示$\mathcal{Y}'$的粘合点。那么，根据命题 2.2.10、注记 2.4.2 和勾股定理

$$1 = \|y - y'\|^2 = \|y - c\|^2 + \|c - c'\|^2 + \|c' - y'\|^2 \geq \|y - c\|^2 = \operatorname{ext}\mathcal{Y}^2. \tag{75}$$

因此，Y 的范围 ≤ 1。

□

范围还有一个具体用途：它给出了两个等距间距可以粘合在一起的简单条件，如下述命题所示。

命题 2.4.6 （范围刻画可粘合性）。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(I,\ \mathbb{R}^n)$ 且 $\mathcal{Y}' \in$ 等距间距$(I',\ \mathbb{R}^{n'})$。
If

$$\operatorname{ext}\mathcal{Y}^2 + \operatorname{ext}\mathcal{Y}'^2 \leq 1 \tag{76}$$

那么 Y 与 Y' 可以在 $\mathbb{R}^m$ 中粘合，其中 $m = n + n' + 1$。此外，若 范围$Y^2 +$ 范围$Y'^2 = 1$，则可取 $m = n + n'$。

若 Y 与 Y' 在 $\mathbb{R}^m$ 中粘合，则

$$\operatorname{ext}\mathcal{Y}^2 + \operatorname{ext}\mathcal{Y}'^2 \leq 1. \tag{77}$$

此外，若 n （分别为 n'）是使 Y（分别为 Y'）嵌入 $\mathbb{R}^n$ （分别为 $\mathbb{R}^{n'}$）的最小维数，且 Y 与 Y' 在 $\mathbb{R}^{n+n'}$ 中粘合，则 范围 $Y^2 +$ 范围 $Y'^2 = 1$。

证明。 首先证明，范围$\mathcal{Y}^2 +$范围 $\mathcal{Y}'^2 \leq 1$ 意味着$\mathcal{Y}$和$\mathcal{Y}'$可粘合。根据命题 2.4.5 第 4 点，$\mathcal{Y}$和$\mathcal{Y}'$都有粘合点，分别记为 c^* 和 $c^{*\prime}$。
定义 f: $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}$ 如下

$$f(x) \coloneqq (x - c^*, \mathbf{0}^{n'}, 0) \tag{78}$$

并将 f': $\mathbb{R}^{n'} \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} \times \mathbb{R}$ 定义为

$$f'(x) \coloneqq (\mathbf{0}^n, x' - c'^*, \alpha) \tag{79}$$

其中 $\alpha \coloneqq \sqrt{1 - \text{范围}\,\mathcal{Y}^2 - \text{范围}\,\mathcal{Y}'^2}$。我们断言， f和 f'构成了$\mathcal{Y}$与$\mathcal{Y}'$在 $\mathbb{R}^{n+n'+1}$中的粘合。显然，如果 y_i 和 y_j 都是$\mathcal{Y}$或$\mathcal{Y}'$中的点，则 $\|y_i - y_j\| = 1$。剩下需要检查的是 $y_i \in \mathcal{Y}$且 $y'_j \in \mathcal{Y}'$的情形。于是

$$\begin{aligned} \left\|y_i - y'_j\right\|^2 &= \|y_i - c^*\|^2 + \alpha^2 + \left\|y'_j - c^{*\prime}\right\|^2 && (80)\\ &= \operatorname{ext}\mathcal{Y}^2 + (1 - \operatorname{ext}\mathcal{Y}^2 - \operatorname{ext}\mathcal{Y}'^2) + \operatorname{ext}\mathcal{Y}'^2 && (81)\\ &= 1. && (82) \end{aligned}$$

因此， $f(\mathcal{Y}) \cup f\prime(\mathcal{Y}') \in$等距间距$(I + I', \mathbb{R}^{n+n'+1})$。

如果范围 $\mathcal{Y}^2 +$范围 $\mathcal{Y}'^2 =$ 1，于是 $\alpha = 0$和 $f(\mathcal{Y}) \cup f\prime(\mathcal{Y}') \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n'} \times \{0\}$，因此我们可以“修剪”额外维度 .

现在假设 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}'$ 在 $\mathbb{R}^m$中粘合。通过引理 2.2.4 的重新着色技巧，我们可以看出，$\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}'$ 的粘合点 c^* 和 c'^* 是 等距间距$(2, \mathbb{R}^m)$ 中某个元素的中心。因此，通过命题 2.2.10，对于所有 $y \in |\mathcal{Y}|$ 和 $y' \in |\mathcal{Y}'|$，我们有

$$1 = \|y - c^*\|^2 + \|c^* - c'^*\|^2 + \|c'^* - y'\|^2 \tag{83}$$

这意味着 $\|y - c^*\|^2 + \|c'^* - y'\|^2 =$的范围$\mathcal{Y}^2 +$的范围 $\mathcal{Y}'^2 \leq 1$。

假设 n 和 n' 是最小的。再次运用重新着色技巧以及命题 2.2.10，我们得到 Aff($\mathcal{Y}$) $\perp$ Aff($\mathcal{Y}'$)，且 $c^* - c'^* \in$ (Aff($\mathcal{Y}$) $\oplus$ Aff($\mathcal{Y}'$))$^\perp = \mathbb{R}^{n+n'}$，因此 $c^* - c'^* = \mathbf{0}$。所以，方程83写作 $1 = \|y - c^*\|^2 + 0 + \|c'^* - y'\|^2 =$的范围 $\mathcal{Y}^2 +$的范围 $\mathcal{Y}'^2$。 □

推论2.4.7 (在同一空间中粘合间距)。 设 $Y \in$等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$，$Y' \in$等距间距$(I', \mathbb{R}^n)$。那么，Y和 Y'在 $\mathbb{R}^n$ 中粘合，当且仅当 范围$Y^2 +$范围 $Y'^2 \leq 1$且

$$\dim \operatorname{Aff} |\mathcal{Y}| + \dim \operatorname{Aff} |\mathcal{Y}'| \leq \begin{cases} n & if\ \operatorname{ext} \mathcal{Y}^2 + \operatorname{ext} \mathcal{Y}'^2 = 1 \\ n-1 & if\ \operatorname{ext} \mathcal{Y}^2 + \operatorname{ext} \mathcal{Y}'^2 < 1 \end{cases} \tag{84}$$

证明。 对于反向，当且仅当 $n_1 \geq d \coloneqq$ dim 仿射包 $|\mathcal{Y}|$时，我们可以将 $\mathcal{Y}$ 嵌入 $\mathbb{R}^{n_1}$；并且当且仅当 $n_2 \geq d' \coloneqq$ dim 仿射包 $|\mathcal{Y}'|$时，可以将 $\mathcal{Y}'$ 嵌入$\mathbb{R}^{n_2}$。因此，根据应用于 $\mathcal{Y}$ 在 $\mathbb{R}^d$ 中的嵌入以及 $\mathcal{Y}'$ 在 $\mathbb{R}^{d'}$中的嵌入的命题 2.4.6，若 范围 $\mathcal{Y}^2 +$ 范围$\mathcal{Y}'^2 = 1$，则 $\mathcal{Y}$与 $\mathcal{Y}'$ 在 $\mathbb{R}^{d+d'}$ 中可粘合，若 范围$\mathcal{Y}^2 +$ 范围$\mathcal{Y}'^2 < 1$，则在 $\mathbb{R}^{d+d'+1}$ 中可粘合。

为证明正向，这可由如下观察得出：方程83对所有可粘合间距集均成立（回顾$y - c^*$、 $c^* - c'^*$与 $c'^* - y'$均正交）。若 $\|c^* - c'^*\|^2 = 1 -$范围$\mathcal{Y}^2 -$范围 $\mathcal{Y}'^2 = 0$，则 $c^* - c'^* = \mathbf{0}$，并且我们可以取 $n \geq$dim 仿射包 $|\mathcal{Y}| +$dim 仿射包 $|\mathcal{Y}'|$。否则，我们需要为$c^* - c'^*$再增加一个正交维度，因此 $n \geq$dim 仿射包 $|\mathcal{Y}| +$dim 仿射包 $|\mathcal{Y}'| + 1$。 □

下面的命题为范围$\mathcal{Y} \vee \mathcal{Y}'$给出了一个用范围$\mathcal{Y}$和范围 $\mathcal{Y}'$表示的简便表达式。

命题 2.4.8 （可拼接等距间隔的范围）。 设 $\mathcal{Y}$与 $\mathcal{Y}'$ 粘合在一起。若 范围$\mathcal{Y} \vee \mathcal{Y}' < \infty$，则

$$\operatorname{ext}(\mathcal{Y} \vee \mathcal{Y}') = \frac{\sqrt{1 - 4 \operatorname{ext} \mathcal{Y}^2 \operatorname{ext} \mathcal{Y}'^2}}{2\sqrt{1 - \operatorname{ext} \mathcal{Y}^2 - \operatorname{ext} \mathcal{Y}'^2}}. \tag{85}$$

证明。 我们用 $c^{\vee *}$ 表示$\mathcal{Y} \vee \mathcal{Y}'$的粘合点。由正交性，我们有

$$(\operatorname{ext} \mathcal{Y} \vee \mathcal{Y}')^2 = \|y - c^*\|^2 + \|c^* - c^{\vee *}\|^2 = \|y' - c'^*\|^2 + \|c'^* - c^{\vee *}\|^2 \tag{86}$$

根据重新着色技巧， $c^{\vee *}$ 位于连接 c^* 与 c'^*的直线上。因此存在 $\lambda \in [0, 1]$ 使得

$$c^{\vee *} = (1 - \lambda) c^* + \lambda c'^*. \tag{87}$$

通过计算， $\|c^* - c^{\vee *}\| = \lambda \|c^* - c'^*\|$ 与 $\|c'^* - c^{\vee *}\| = (1 - \lambda) \|c^* - c'^*\|$。将其代入方程86表明 λ 满足

$$\|y - c^*\|^2 + \lambda^2 \|c^* - c'^*\|^2 = \|y' - c'^*\|^2 + (1 - \lambda)^2 \|c^* - c'^*\|^2 \tag{88}$$

$$\alpha + \lambda^2 \gamma = \beta + (1 - \lambda)^2 \gamma \tag{89}$$

其中，我们记 $\alpha \coloneqq \|y - c^*\|^2, \beta \coloneqq \|y' - c'^*\|^2$，以及 $\gamma \coloneqq \|c^* - c'^*\|^2$。

解出 λ 可得

$$\lambda = \frac{\beta - \alpha + \gamma}{2\gamma}. \tag{90}$$

现在我们证明方程85。结合方程86、89和90可得

$$(\operatorname{ext} \mathcal{Y} \vee \mathcal{Y}')^2 = \alpha + \lambda^2 \gamma = \alpha + \frac{(\beta - \alpha + \gamma)^2}{4\gamma}. \tag{91}$$

注意到 $1=\alpha+\gamma+\beta$，并利用这一恒等变换简化方程91，可得

$$(\operatorname{ext}\mathcal{Y}\vee\mathcal{Y}')^2=\frac{4\alpha(1-\alpha-\beta)+(1-2\alpha)^2}{4\left(1-\alpha-\beta\right)} \tag{92}$$

$$=\frac{1-4\alpha\beta}{4\left(1-\alpha-\beta\right)}. \tag{93}$$

最后，注意到 $\alpha=$范围$\mathcal{Y}^2$，$\beta=$范围 $\mathcal{Y}'^2$ 可得

$$(\operatorname{ext}\mathcal{Y}\vee\mathcal{Y}')^2=\frac{1-4\operatorname{ext}\mathcal{Y}^2\operatorname{ext}\mathcal{Y}'^2}{4\left(1-\operatorname{ext}\mathcal{Y}^2-\operatorname{ext}\mathcal{Y}'^2\right)} \tag{94}$$

□

Co推论 2.4.9 (粘合的粘合点)。 若 Y 和 Y' 可粘合，则 $Y\vee Y'$ 的粘合点为 is

$$\frac{1}{2}\left(c^*+c'^*\right)+\delta\left(c^*-c'^*\right) \tag{95}$$

其中 c^* 和 c'^* 分别是 Y 和 Y' 的粘合点，并且

$$\delta:=\frac{\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}{2\left(1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'\right)}. \tag{96}$$

证明。 使用命题 2.4.8 的证明中的相同记号，等式 90 可写为

$$\lambda=\frac{\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}+1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}{2(1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}+\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}')}. \tag{97}$$

根据公式 87，$\mathcal{Y}\vee\mathcal{Y}'$ 的粘合点为

$$(1-\lambda)c^*+\lambda c'^*=\frac{1}{2}\left(c^*+c'^*\right)+\frac{\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}{2\left(1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'\right)}\left(c^*-c'^*\right). \tag{98}$$

□

推论 2.4.10 （正多边形等距配置的范围）。 设 $Y\in$ 等距间距（$n+1,\mathbb{R}^n$） 是通过将 $E_{1,\ n}$ 的每个顶点涂成不同颜色而得到的等距间隔。则 范围（Y） $=\sqrt{}_2{}^{\ n}{}_{\ (n+1)}$。

证明。 本证明可由命题 B.0.7 推出。 □

现在我们给出两个相关的计算，它们在已知各组成粘合点的情况下，给出粘合的粘合点所在位置的具体公式。

命题 2.4.11 （计算 I）。 设 Y、$Y'\in$ 等距间距（$I,\mathbb{R}^n$） 粘合在一起，且 $c^*=\mathbf{0}^n$、 $c'^*=$（$\mathbf{0}^{n-1},\gamma$） 其中$\gamma=\sqrt{1-$范围$^2Y\ -$范围$^2Y'}$。则

$$c^{\vee*}=\left(\mathbf{0}^{n-1},\frac{1-2\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}}{2\sqrt{1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}}\right). \tag{99}$$

命题 2.4.12 （微积分II）。 设 Y、$Y'\in$ 等距间距（$I,\mathbb{R}^n$）， c^*、 $c^{*\prime}\in\mathbf{0}^{n-1}\times\mathbb{R}$ 以及 $c^{*\vee}=\mathbf{0}^n$。则

$$c^*=(\mathbf{0}^{n-1},\mp\frac{1-2\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}}{2\sqrt{1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}}),\quad c^{*\prime}=(\mathbf{0}^{n-1},\pm\frac{1-2\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}{2\sqrt{1-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}-\operatorname{ext}^2\mathcal{Y}'}}). \tag{100}$$

证明。 令 $c^{(1)*}:=\mathbf{0}^n,c^{(1)\prime*}:=\left(\mathbf{0}^{n-1},\gamma\right)$ 和 $c^{(1)\vee*}:=\left(\mathbf{0}^{n-1},\frac{1-2\text{范围}^2\,\mathcal{Y}\,\text{范围}^2\,\mathcal{Y}-\text{范围}^2\,\mathcal{Y}'}{2\sqrt{1-}}\right)$。根据命题 2.4.11，它们分别是$\mathcal{Y}$、$\mathcal{Y}$和$\mathcal{Y}\vee\mathcal{Y}'$的中心。然后，通过计算可得 c^*,c'^*和 $c^{\vee*}$的表达式

$$c^*=c^{(1)}\pm c^{(1)\vee*},\quad c'^*=c'^{(1)}\pm c^{(1)\vee*},\quad c^{\vee*}=c^{(1)\vee*}\pm c^{(1)\vee*}. \tag{101}$$

□

2.5 等距嵌入

等距间距有两种等距变换。第一种是欧几里得等距变换（即可扩展到环境空间的等距变换）。第二种是我们称为压缩与拉伸等距变换的变换，它通常无法扩展为 $\mathbb{R}^n$ 上的等距变换。本节将探讨压缩与拉伸等距变换。

定义 2.5.1 (酉旋转平移)。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(\mathbb{R}^n, I)$, $\mathcal{Y}' \in$ 等距间距$(\mathbb{R}^n, I')$。若 $I = I'$，且存在一个 $U \in E(n)$, 使得对每个 $i = 1, \ldots, I$，我们称 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}'$是平凡同构的，或通过 U同构

$$UY_i' = Y_i, \tag{102}$$

其中， $E(n)$表示 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得群。

图 2a 和 2b 展示了两个平凡同构的等距间距的示例。图 2a 和 2b 展示了两个平凡同构的等距间距的示例。

最后一种等距变换着重体现了 r 在推论 2.2.13 中的作用。

定义 2.5.2 （压缩与拉伸）。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(\mathbb{R}^n, I)$。映射 $f\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 称为 Y 的压缩与拉伸 ，若它满足以下性质。

1. 映射

$$f|_{\bigcup_{i=1}^{I}\{c_i\}}\colon \bigcup_{i=1}^{I} c_i \to \mathbb{R}^n \tag{103}$$

是单射。

2. 对每个 $i = 1, \ldots, I$，映射 $d\colon V_i \to \mathbb{R}^n$ 定义为

$$d(x) \coloneqq f(x + c_i) - f(c_i) \tag{104}$$

是以 c_i 为中心、因子为 $\alpha \neq 0$的 V_i 的伸缩。

我们称 $\mathcal{Y}$ 和 $\mathcal{Y}'$ 为挤压和拉伸同构 或通过压缩与拉伸同构 f，如果 $I = I'$ 且存在一个 $\mathcal{Y}$的压缩与拉伸 f，使得对每个 $i = 1, \ldots, I$,

$$fY_i = Y_i'. \tag{105}$$

“压缩与拉伸”这一名称源自动画中同名的动画原理。在动画中，压缩与拉伸原理指的是沿一个轴拉伸物体（例如卡通角色），同时沿垂直轴挤压物体，以突出运动或动量 [11]。这里的用法与此类似。映射 f 会产生“挤压”一个类、同时“拉伸”另一个类的效果。压缩与拉伸等距变换的定义并未排除$\mathcal{Y}$ 可能与$\mathcal{Y}'$压缩与拉伸同构、但反过来却不成立的情况。然而，正如下述命题所示，事实并非如此。

命题 2.5.3 (挤压和拉伸的性质)。 设 $Y \in$是等距间距，且 f 是 Y 的一次压缩与拉伸。那么以下结论成立。

1. 对于每个 $i = 1, \ldots, I$，集合 $f(A_i)$是 A_i 的一个平移，且 $f|_{A_i}$是一个双射。

2. 若 $fY \in$等距间距，则 $f|_{\bigcup_{i=1}^{I} Y_i}$是单射。

3. 若 f 是 Y 的压缩与拉伸，且 $Y' \in$ 等距间距使得 $fY_i = Y_{\sigma i}$，则存在 Y' 的压缩与拉伸g ，使得

$$gY_i' = Y_i. \tag{106}$$

证明。 首先，我们证明第 1 点。回顾 $A_i = c_i + V_i$ 来自推论 2.2.13。在方程 104 中作替换$\tilde{x} \coloneqq x - c_i$，该方程变为

$$d(x) = f(x + c_i) - f(c_i) = \tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(0) \tag{107}$$

其中 $\tilde{f}\colon V_i \to \mathbb{R}^n$。由于 $d(x)$ 是伸缩， $\tilde{f}(\tilde{x}) - \tilde{f}(0) \subset V_i$ 且 $\tilde{f}(V_i) - \tilde{f}(0) = V_i$，显然 $\tilde{f}$ 通过伸缩并平移 $\tilde{f}(0) = f(c_i)$ 的方式作用于 V_i。也就是说， $\tilde{f}\colon V_i \to f(c_i) + V_i$是一个双射。因此，$f|_{A_i}\colon A_i \to f(c_i) + V_i$是一个双射。

现在我们证明第 2 点。如果 $y_i,\ y_i' \in Y_i$，且 $f(y_i) = f(y_i')$，那么 $y_i = y_i'$就是第 1 点。剩下要证明的是，$f(y_i) = f(y_j)$ 意味着当 $i \neq j$ 时 $y_i = y_j$。假设 $y_i \in Y_i$ 且 $y_j \in Y_j$，其中 $i \neq j$，并假设$f(y_i) = f(y_j)$，那么根据定理2.2.7，$y_j =$ 投影$_{A_i}\, y_j = c_i$ 且 $y_i =$ 投影$_{A_j}\, y_i = c_j$。因此，根据压缩与拉伸等距变换的性质 1，我们有 $y_i = y_j$。

现在我们证明第 3 点。根据第 2 点，$f|_{\bigcup_{i=1}^{I} Y_i}$ 在其值域上有唯一逆映射，记作 g。剩下要证明的是，g 是压缩与拉伸。

显然，g 满足定义2.5.2的第 1 点。根据命题 2.5.3的第 1 点，我们看到，公式 104 中的 d 实际上是一个映射 $d\colon V_i \to V_i$，以及一个伸缩因子为 $\alpha \neq 0$ 的伸缩。这种伸缩是可逆的，其逆映射也是一种伸缩。由于 g是 f的逆映射，因此 g必定将 $f(c_i) + V_i$伸缩，因子为 $\alpha^{-1} \neq 0$。因此，g是压缩与拉伸。

□

注记 2.5.4（记号简写：III）。给定一个 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(\mathbb{R}^n,\ I)$，我们用记号 $f\mathcal{Y}$表示

$$f\mathcal{Y} \coloneqq \bigsqcup_{i=1}^{I} f(Y_i). \tag{108}$$

当上下文足以明确$\mathcal{Y}$ 的含义时，我们就简称$\mathcal{Y}$ 的压缩与拉伸为压缩与拉伸。

$\mathcal{Y}$ 的压缩与拉伸不必在整个 $\mathbb{R}^n$ 上都可逆，但在 $f\mathcal{Y}$ 上可逆，如命题 2.5.3 所示。因此，当$\mathcal{Y}$的含义明确时，我们用 f^{-1} 表示将 $f\mathcal{Y}$ 映射到$\mathcal{Y}$的压缩与拉伸。

一般而言，如果$\mathcal{Y} \in$ 等距间距，那么当 f 是压缩与拉伸时，没有理由认为 $f\mathcal{Y} \in$ 等距间距。事实上，如果 f 是压缩与拉伸，且对每个类 i 都具有相同的伸缩因子 $\alpha \neq 0, 1$，那么 $f\mathcal{Y} \notin$等距间距。尽管如此，对于某个 f，仍有可能 $f\mathcal{Y} \in$等距间距。直观地说，如果 f 对某个类的伸缩因子为 < 1，对其他类的伸缩因子为 > 1，那么这些效应可能相互抵消，从而使 $f\mathcal{Y} \in$ 等距间距。

例2.5.5 （压缩与拉伸等距变换的示例）。图 6a 和图 6b 展示了二维中的一种压缩与拉伸等距变换。图 6a 是一种等距间隔：将单位边长正方形的相对顶点涂成相同的颜色；图 6b 则是一个边长均为单位长度的菱形。注意，$f_1|_{\bigcup_{i=1}^{I} c_i}$ 是恒等变换，而 $f_1|_{A_i}$ 对红色类进行因子为 > 1 的伸缩，对绿色类进行因子为 < 1 的伸缩。直观而言，将某个类按因子 < 1 伸缩，会使其中的点更靠近其中心（以及所有其他类）；按因子 > 1 伸缩，则会使其中的点远离其中心（以及所有其他类）。f_1 通过先进行一次伸缩 > 1，再进行另一次伸缩 < 1来实现。

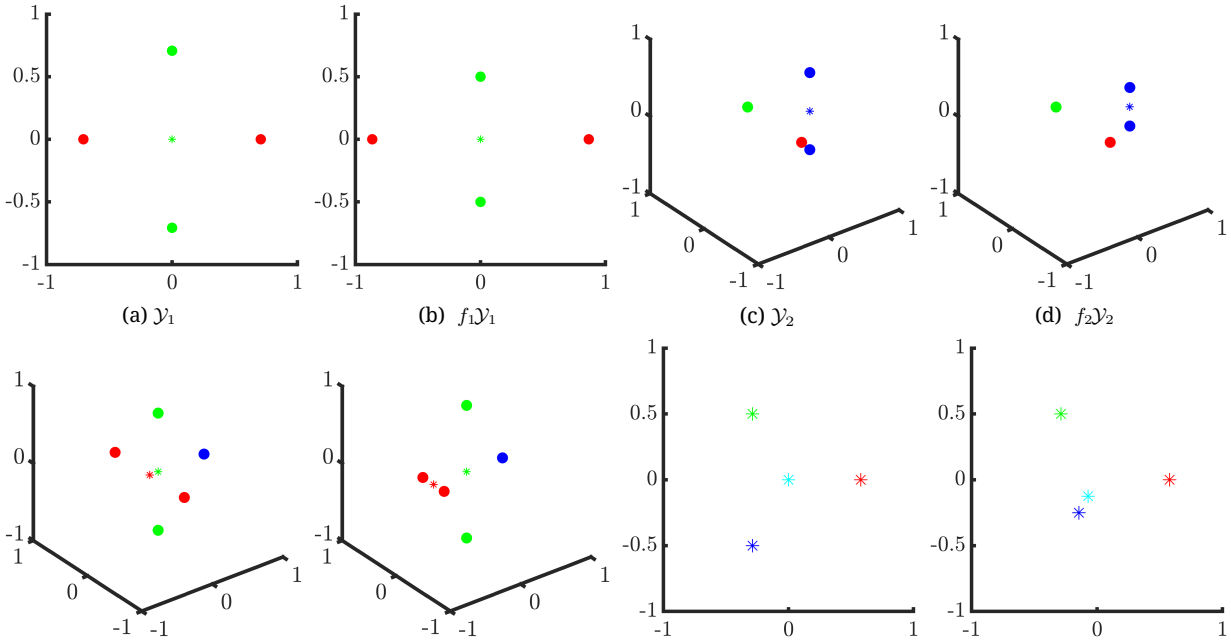
图6c和图6d展示了一种仅作用于一个类（两图中的蓝色类）的压缩与拉伸等距变换。f_2 通过两步操作实现。首先，它使中心蓝色类远离绿色类和红色类。其次，它按因子 < 1伸缩蓝色类，使其中的点更靠近其中心。

图6e和图6f展示了第三种压缩与拉伸，f_3。f_3 同时作用于绿色类和红色类。在红色类上，它使红色中心进一步远离另外两个中心，并以因子 < 1 扩张红色类加以补偿。在绿色类上，它使该中心更靠近蓝色中心、更远离红色中心，并以因子 > 1扩张绿色类。

图6g和图6h展示了压缩与拉伸在高维中的大致情形。在该图中，等距间距被省略，仅绘制了中心。由此图很容易看出，压缩与拉伸是一种保持正交中心性的中心形变。

注记 2.5.6（压缩与拉伸等距变换在等距间距$\neq$上的解释）. 压缩与拉伸等距变换在应用于等距间距$\neq$时具有一种自然的解释。回想命题 2.3.13与定理 2.3.17共同表明，等距间距$\neq$ 的中心构成垂心系统。压缩与拉伸是一种保持正交中心性的中心形变，并且不会使所得单纯形过大（在定理 2.3.17的意义下）。

如例2.5.5所示，可以找到不同于旋转平移或重新着色的压缩与拉伸等距变换。此外，正如图6中的压缩与拉伸等距变换 f_3 所示，压缩与拉伸等距变换可能并非平凡，即它们需要以精心平衡的顺序移动多个类，才能保持等距间距。



(a) $\mathcal{Y}_1$ (b) $f_1\mathcal{Y}_1$ (c) $\mathcal{Y}_2$ (d) $f_2\mathcal{Y}_2$

(e) $\mathcal{Y}_3$ (f) $f_3\mathcal{Y}_3$ (g) $\mathcal{Y}$的中心$_4$ (h) $f_4\mathcal{Y}$的中心$_4$

图 6：例2.5.5中详细介绍的压缩与拉伸等距变换示例图。图中绘出了六组等距间距。左列中的四组等距间距（图(a、c、e)）分别与相应位置上的图(b、d、f)压缩与拉伸同构。颜色相同的点属于同一类。对于包含两个以上点的类，其中心以相应颜色的星号标出。最后两幅图(g、h)展示了压缩与拉伸如何影响高维空间中的中心。在图(g、h)中，等距间距集本身未显示，而是绘出了每个类的中心。

2.6 规范形式

对极大等距间距进行分类的主要难点，在于理解何时两个等距间$\frown$距集 等距间距$\neq$ 是压缩与拉伸同构的。本节将通过构造极大等距间距的规范形来解决这一问题。根据命题 2.6.11，它是等距变换的不变量。

$\frown$规范形的核心思想是，等距间距$\neq$ 的中心并非 几何齐次。存在一个特殊的中心，它位于由其他中心生成的单纯形内部，如定义2.3.18所述。此外，涉及内中心与任一其他中心的压缩与拉伸（称为内外压缩与拉伸）很容易刻画，见命题 2.6.1。进一步说，任何压缩与拉伸都可以写成内外压缩与拉伸的复合。

下面的命题非常有用，但需要先作一些说明。我们的思路是研究最简单的压缩与拉伸：除了内类和一个外类之外，在所有类上均为恒等变换。这些简单的压缩与拉伸是后续许多结果的构建模块。

命题 2.6.1 的设置比较特殊，但传达了一个重要信息。可以将 $\mathrm{Y}\in$等距间距(I) 视为我们主要关注的间距集，将 $\mathrm{Y}_{1:I-2}:=\bigsqcup_{i=1}^{I-2}Y_i\in$ 等距间距$(I-2)$ 和 $\mathrm{Y}_{I-1:I}:=\bigsqcup_{i=I-1}^{I}Y_I\in$ 等距间距(2) 视为分别独立考察类 Y_1、...、Y_{I-2} 和 Y_{I-1}、Y_I 所形成的间距集，其中 Y_{I-1} 是 Y 的一个外类，而 Y_I 是其内类。显然，$\mathrm{Y}_{1:I-2}$ 和 $\mathrm{Y}_{I-1:I}$ 粘合（因为 $\mathrm{Y}_{1:I-2}\vee\mathrm{Y}_{I-1:I}=\mathrm{Y}$）。命题 2.6.1 表明，存在 $\mathrm{Y}_{I-1:I}$ 的压缩与拉伸 f，使得 $\mathrm{Y}_{1:I-2}$ 与 $f\mathrm{Y}_{I-1:I}$ 粘合。我们可以通过 $f\mathrm{Y}:=\mathrm{Y}_{1:I-2}\vee f\mathrm{Y}_{I-1:I}$，将这类 $\mathrm{Y}_{I-1:I}$ 的压缩与拉伸视为 Y 的压缩与拉伸；它们在两个类上不是恒等变换。命题 2.6.1 阐明了关于 f 的哪些条件会使间距集 $\mathrm{Y}_{1:I-2}$ 与 $f\mathrm{Y}_{I-1:I}$ 粘合。下面命题中的 r_{I-1} 和 r_I 是 fY_{I-1} 和 fY_I 的半径。

命题 2.6.1 (外层-内层挤压与拉伸)。设 $\mathcal{Y}\in$ 等距间距$(I-2,\ \mathbb{R}^n)$ 是一个间距，且 $V\subset$仿射包$(|\mathcal{Y}|)^\perp$。

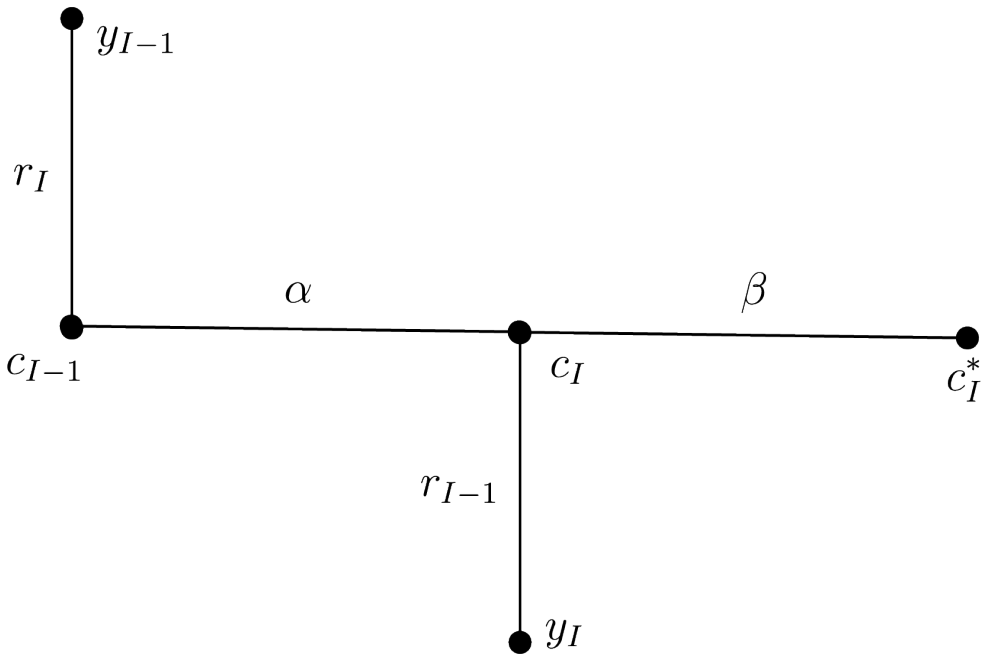


图7：命题 2.6.1 证明中所用量的示意图

设 $r_{I-1} \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ $r_I \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{1-r_{I-1}^2})$ 满足

$$(\operatorname{ext}\mathcal{Y})^2 = 1 - r_I^2 - \frac{\left(2r_I^2-1\right)^2}{4\left(1-r_I^2-r_{I-1}^2\right)}, \quad \dim V \geq 2 \quad \textit{and} \quad \dim V \geq 3 \textit{ if } r_{I-1} > 0. \tag{109}$$

那么存在 $c_I, c_{I-1} \in \mathbb{R}^n$ 和 $Y' \in$ 等距间距（$I, \mathbb{R}^n$），使得以下结论成立

1. $Y\prime_{I-1}$ 和 Y_I' 的中心分别为 c_{I-1} 和 c_I。*2.* $Y\prime_{I-1}$ 和 Y_I' 的半径分别为 r_{I-1} 和 r_I。*3.* 当 $i \in 1$、.....、I_1 时，$Y\prime_i = Y_i$。*4.* $c_I \in c_{I-1}c_{I-1}^*$，其中 $c_{I-1}^* \in$ 投影 $_{\operatorname{Aff}(c_1,\ldots,c_{I-2})}\ c_{I-1}$。

证明。 证明所用记号的设置见图7。

设 $e_1, e_2 \in V$正交，并定义 $\alpha := 1 - r_I^2 - r_{I-1}^2$和 $\beta := \frac{2r_I^2-1}{2\sqrt{1-r_I^2-r_{I-1}^2}}$。设 c^* 为$\mathcal{Y}$的粘合点，并令

$$c_{I-1} := c^* + \beta e_1, \quad \text{and} \quad c_I := c^* + (\alpha+\beta)e_1. \tag{110}$$

定义 $Y_I := S_{r_I}^{n-1}(c_I) \cap (c_I +$ 张成空间 $\{e_2\})$。若 $r_{I-1} > 0$，令 $e_3 \in V$与 e_1, e_2标准正交，并令$Y_{I-1} := S_{r_{I-1}}^{n-1}(c_{I-1}) \cap (c_{I-1} +$ 张成空间$\{e_3\})$。否则令 $Y_3 := \{c_{I-1}\}$。

令 $\alpha = \sqrt{1-r_I^2-r_{I-1}^2}$和 $\beta = \frac{2r_I^2-1}{2\sqrt{1-r_I^2-r_{I-1}^2}}$。通过直接计算可得

$$r_I^2 + \beta^2 + (\operatorname{ext}\mathcal{Y})^2 = 1 \quad \text{and} \quad r_{I-1}^2 + (\alpha+\beta)^2 = r_I^2 + \beta^2. \tag{111}$$

接下来必须验证以下内容。

1. $\|y_I - y_i\| = 1$ 其中 $i < I-1$。
2. $\|y_{I-1} - y_i\| = 1$ 其中 $i < I-1$。

3. $\|y_I - y_{I-1}\| = 1$。

1. 计算　根据投影的正交性以及 c_I 和 c_{I-1}的共线性进行计算，我们有 th　　at

$$\begin{aligned}\|y_I - y_i\|^2 &= \|y_I - c_I\|^2 + \left\|c_I - c_{I-1}^*\right\|^2 + \left\|c_{I-1}^* - y_i\right\|^2 &(112)\\ &= r_I^2 + \beta^2 + (\operatorname{ext}\mathcal{Y})^2 &(113)\\ &= 1. &(114)\end{aligned}$$

2. 再次根据投影的正交性以及 c_I 和 c_{I-1}的共线性，我们有 tha　　t

$$\begin{aligned}\|y_{I-1} - y_i\|^2 &= \|y_{I-1} - c_{I-1}\|^2 + \left(\|c_{I-1} - c_I\| + \left\|c_I - c_{I-1}^*\right\|\right)^2\\ &\quad + \left\|c_{I-1}^* - y_i\right\|^2 &(115)\\ &= r_{I-1}^2 + (\alpha+\beta)^2 + (\operatorname{ext}\mathcal{Y})^2 &(116)\\ &= r_I^2 + \beta^2 + (\operatorname{ext}\mathcal{Y})^2 &(117)\\ &= 1. &(118)\end{aligned}$$

3. 根据所有项的正交性，

$$\begin{aligned}\|y_{I-1} - y_I\|^2 &= \|y_{I-1} - c_{I-1}\|^2 + \|c_{I-1} - c_I\|^2 + \|c_I - y_I\|^2 &(119)\\ &= r_{I-1}^2 + \alpha^2 + r_I^2 &(120)\\ &= 1 &(121)\end{aligned}$$

□

命题 2.6.1 有如下推论。

推论 2.6.2 (最大等距间隔的半径必要条件**)。** 设 $\mathcal{Y}$ ∈等距间距 是一个内类为 I的等距间隔。于是 $r_I \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

证明。 设 $\mathcal{Y}|_{1:I-2} \coloneqq \sqcup_{i=1}^{I-2} Y_i$。 命题 2.6.1 适用于 $\mathcal{Y}|_{1:I-2}$。 注意， $\mathcal{Y}|_{1:I-2} \vee (Y_{I-1} \sqcup Y_I) = \mathcal{Y}$。 由于 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距， $c_I \in c_{I-1}c_{I-1}^*$ 其中 $c_{I-1}^* \coloneqq$ 投影$_{\operatorname{Aff}\mathcal{Y}|_{1:I-2}}$ c_{I-1} 由命题 2.3.13 得出。命题 2.6.1 适用于 $\mathcal{Y}|_{1:I-2}$。 从命题 2.6.1 的证明可清楚看出，关于 r_I 和 r_{I-1} 的条件互为充要条件。因此， $r_I \geq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

□

推论 2.6.3 （最大间隔中心重合的判定）。 **</style}设 Y 等距间距**（I）满足 $I > 2$。那么，Y 的中心重合，当且仅当存在一个类 i ，使得 $r_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。Y 的中心不重合，当且仅当存在一个类 i ，使得 $r_i > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

证明。 *</style}*设 ， j， k互不相同。设 i满足 $r_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$。则 $\|c_i - y_j\| = \|c_i - y_k\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$。因此，根据 $\|y_j - y_k\| = 1$，三角形 $\triangle c_i y_j y_k$是直角三角形。图8给出了示意图。若定义 $\hat{}y_k \coloneqq 2c_i - y_k$ （ y_k关于中心 c_i的反射），那么三角形 $\triangle c_i y_j \hat{}y_k$ 是一个全等三角形，因此 $\|\hat{}y_k - y_j\| = 1$，进而根据 Y_k的极大性，$\hat{}y_k \in Y_k$ 。因此， $c_i \in$ 属于仿射包 Aff Y_k，根据定义 2.2.8， $c_k = c_i$ 。因此，所有中心都重合。

设$\mathcal{Y}$ 满足所有中心都重合于点 c ，且 i， j， k 互不相同。那么根据正交性和勾股定理，我们有：

$$\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\|y_i - c\|^2\\ \|y_j - c\|^2\\ \|y_k - c\|^2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}. \tag{122}$$

该方程组只有一个解，即$\|y_i - c\|^2 = \|y_j - c\|^2 = \|y_k - c\|^2 = \frac{1}{2}$。

令 i 满足 $r_i > \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。那么$\mathcal{Y}$ 的中心不能重合。若它们重合，就会得到 122 的第二个解。

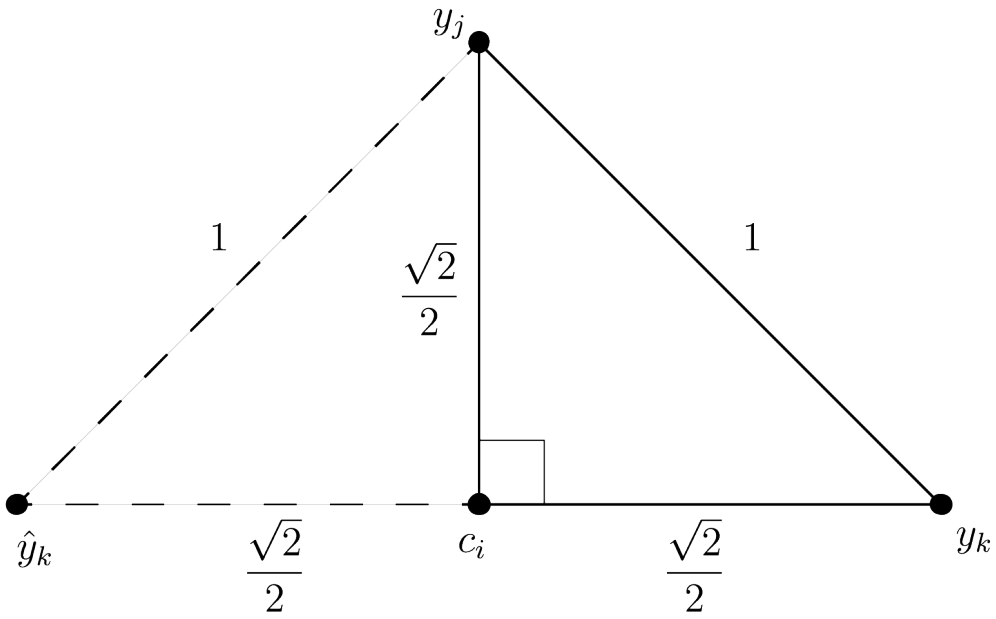


图8：证明推论 2.6.3 中所用三角形 $\triangle c_i y_j y_k$ 和$\triangle c_i y_j \hat{} y_k$ 的草图。

将推论 2.6.2 应用于$\mathcal{Y}$，可知必有 $r_i \neq \frac{\sqrt{2}}{2}$，否则中心就会重合。因此，$r_i > \frac{\sqrt{2}}{2}$。

□

推论2.6.4（内类的刻画）。 设 Y $\in$等距间距$\neq$。则以下条件等价

1. 类 i 是 Y 的内类。*2.* 类 i 满足 $r_i > \frac{\sqrt{2}}{2}$。*3.* 类 i 求解 $i = \arg\max_{j \in 1,\ldots,I} r_j$。

证明。 推论 2.6.3 的证明表明，1. 和 2. 等价。条件 2. 和 3. 的等价性由勾股定理得出。

□

现在我们给出两个辅助引理，它们将在后面的一个定理中发挥作用。

引理 2.6.5（方程 109 的解的存在性）。 对于给定的 Y，使得 范围$Y \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ 令 $r_{I-1} \in [0, \frac{\sqrt{2}}{2})$。那么存在一个 $r_I \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{1 - r_{I-1}^2})$，使方程 *109* 得到满足。

证明。 当 $r_{I-1}^2 \in [\frac{1}{2}, 1 - r_I^2)$ 时，对 r_I和 r_{I-1}的约束得到满足。其思路是将 r_{I-1}视为固定值，并对函数应用介值定理

$$f(r) := 1 - r^2 - \frac{\left(2r^2 - 1\right)^2}{4\left(1 - r^2 - r_{I-1}^2\right)} - \gamma \tag{123}$$

其中 $\gamma :=$(范围 $\mathcal{Y}$)$^2 \leq \frac{1}{2}$。注意，当 $f(r) = 0$ 时，方程 109 成立。当 $r_I^2 = \frac{1}{2}$ 时，则

$$f(r) = 1 - r^2 - \frac{\left(2r^2 - 1\right)^2}{4\left(1 - r^2 - r_{I-1}^2\right)} - \gamma \tag{124}$$

$$= 1 - \frac{1}{2} - \frac{\left(2\frac{1}{2} - 1\right)^2}{4\left(1 - \frac{1}{2} - r_{I-1}^2\right)} - \gamma \tag{125}$$

$$= \frac{1}{2} - \gamma \geq 0. \tag{126}$$

发送时， $r^2 \to 1 - r_{I-1}^2$ 会得到

$$\lim_{r^2 \to 1-r_{I-1}^2} f(r) = \lim_{r^2 \to 1-r_{I-1}^2} 1 - r^2 - \frac{\left(2r^2-1\right)^2}{4\left(1-r^2-r_{I-1}^2\right)} - \gamma \tag{127}$$

$$= 1 - \left(1 - r_{I-1}^2\right) - \frac{\left(2\left(1-r_{I-1}^2\right)-1\right)^2}{\lim_{r^2 \to 1-r_{I-1}^2} 4\left(1-r^2-r_{I-1}^2\right)} - \gamma \tag{128}$$

$$= -\infty. \tag{129}$$

因此， $f(r) = 0$ 有一个解。 □

推论 2.6.6 (微积分 III)。 设 Y 的中心位于 $\{c_i\}_{i=1}^k = E_{\ell,\ k}$ 对于某个 k，且 $\ell^2 = 1 - 2r^2$ 对于某个r。那么

$$\operatorname{ext} \mathcal{Y}^2 = \frac{2r^2 + k}{2(k+1)}. \tag{130}$$

证明。 注意，这些条件意味着 $r_i = r$ 是常数。
我们可以应用命题 B.0.7，得到 $\|c_i - c^*\|^2 = \ell^2{}_2{}^{\ k}{}_{(k+1)}$，其中 c^* 表示 Y 的粘合点。根据命题 2.2.10，

$$\|y - c^*\|^2 = \|y - c_i\|^2 + \|c_i - c^*\|^2 \tag{131}$$

$$= r^2 + (1 - 2r^2)\frac{k}{2(k+1)} \tag{132}$$

$$= \frac{2r^2 + k}{2(k+1)}. \tag{133}$$

□

引理 2.6.7 (具有内类的正半径等距间隔的压缩与拉伸)。 设 $Y \in$ 等距间距(I) 具有一个内类和正半径。对于任意 $r \in \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$，存在 Y 的压缩与拉伸等距变换 f，使得 fY 的内类半径为 $\sqrt{\frac{I+1-2r^2}{2I}}$，而$fY$ 的所有其他类的半径为 r。

证明。 证明的思路是给出一系列内外压缩与拉伸，每次都使Y_j 具有正确的半径，并且在其他外类上保持恒等变换。整体的压缩与拉伸则由这些内外压缩与拉伸的复合给出。

不失一般性，令 I 表示$\mathcal{Y}$ 和 $j \neq I$的中心类。运用与推论 2.6.2中相同的技巧，我们可以考虑$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}|_{1:j-1,\ j+1:I-1} \vee \mathcal{Y}|_j \vee \mathcal{Y}_I$，其中$\mathcal{Y}|_{1:j-1,j+1:I-1} \coloneqq \sqcup_{i\in\{1:j-1,j+1:I-1\}} Y_i$，$\mathcal{Y}|_j \coloneqq \{Y_j\}$ 以及$\mathcal{Y}|_I \coloneqq \{Y_I\}$。由类 I的内性可知，$c_I \in c_j c_j^*$，其中 $c_j^* \coloneqq$ 投影$_{\operatorname{Aff} \mathcal{Y}_{1:j-1,j+1:I-1}} c_j$。
该计算通过显式构造 Y_j 与 Y_I 的压缩与拉伸 f_j 来进行，以使 $f_j Y_j$ 具有正确的半径。在此计算中，r_j 与 r_I（分别为 c_j 与 c_I）表示$\mathcal{Y}$ 在f_j 被应用之前的半径（分别为中心），而 r_j' 与 r_I'（分别为 c_j' 与 c_I'）表示 $f_j Y_j$ 与 $f_j Y_I$的半径（分别为中心）。也就是说，是在压缩与拉伸被应用之后。

我们有范围$\mathcal{Y}|_{I-1,\ I} > \frac{\sqrt{2}}{2}$，因此范围$\mathcal{Y}|_{1:j-1,\ j+1:I-1} < \frac{\sqrt{2}}{2}$。对于给定的 $r_i' \in (0,\ \frac{\sqrt{2}}{2})$，由引理 2.6.5，存在 $r_I' \in [\frac{\sqrt{2}}{2}, \sqrt{1 - r_i'^2}]$，使得命题 2.6.1 适用，其中

$$c_j' \coloneqq c^* + (\alpha + \beta)\, e, \quad c_I' \coloneqq c^* + \beta e, \tag{134}$$

并且 $\alpha \coloneqq \sqrt{1 - r_I'^2 - r_i'^2}$、 $\beta \coloneqq \frac{2r_I'^2 - 1}{2\sqrt{1 - r_I'^2 - r_i'^2}}$、 c^*是$\mathcal{Y}|_{1:j-1,j+1:I-1}$和 $e = \frac{c_j - c_I}{\|c_j - c_I\|}$的粘合点。注意，$\|c_j - c_I\| \neq 0$，因为$\mathcal{Y}$的中心并不重合。
设 f_j 为在 $i \neq j, I$时使类 Y_i 保持不变的压缩与拉伸，并且

$$f_j c_j = c_j', \quad f_j c_I = c_I', \tag{135}$$

将类 j 以因子 $\frac{r}{r_j}$ 扩张，并将类 I 以因子 $\frac{r'_I}{r_I}$扩张。$_\ f_j$ 依构造是压缩与拉伸。注意$f_jY_j \sqcup f_jY_I \in$ 等距间距由命题 2.6.1 得出，且 $f_j\mathcal{Y}$ 的第 j个类的半径为 r。

对每个 $j = 1$、.....、I_1 执行此构造，并定义

$$f \coloneqq f_1 f_2 \dots f_{I-1}, \quad \mathcal{Y}' \coloneqq f\mathcal{Y}. \tag{136}$$

于是，根据命题 2.5.3， f 是一个压缩与拉伸等距变换。此外，根据构造，当 $i \neq I$时，类 i的半径为 r。

计算可得，当 $i \neq j$时， $\|c_i - c_j\|^2 = 1 - 2r_j'^2$ $i,\ j < I$，因此 $f\mathcal{Y}$的中心构成一个边长为 $\sqrt{1-2r_j'^2}$ 的正单纯形。因此，在 $v = c_j$、 $\ell = \sqrt{1-2r_j'^2}$和 $n = I-1$的情况下，推论 2.4.10 适用。于是，

$$1 - r_I'^2 - r_j'^2 = \left\|c'_j - c'_I\right\|^2 = \left(1 - 2r_j'^2\right)\frac{I-1}{2(I-1+1)} \tag{137}$$

对上述等式求解 $r_I'^2$，可得

$$r_I'^2 = r_j'^2 + \left(1 - \frac{I-1}{2I}\right)\left(1 - 2r_j'^2\right) = \frac{I+1-2r_j'^2}{2I}. \tag{138}$$

因此， $r'_I = \sqrt{\frac{I+1-2r'^2_j}{2I}}$。根据压缩与拉伸的构造， $r'_j = r$。 □

在以下定义中，回忆一下，$E_{\ell,\ k}$ 表示嵌入于 $\mathbb{R}^{k-1}$中的、具有 k 个顶点且边长为 ℓ的正单纯形。

定义 2.6.8（极大等距间距的等边标准形）。 设 $\mathcal{Y}$ $\in$等距间距。如果存在一个 $r \in (0,\ \frac{\sqrt{2}}{2})$，使得对$\mathcal{Y}$的所有非内正半径中心， $r_i = r$ ，则称$\mathcal{Y}$ 处于等边标准形。

在定义 2.6.8 中，如果$\mathcal{Y}$ 没有内中心，则所有中心都被视为非内中心。如果$\mathcal{Y}$没有正半径非内中心，那么它自动处于等边标准形。下面的命题说明了为什么称其为等边标准形，同时也给出了等边标准形中的间距所呈现形式的几何描述。

命题 2.6.9（等边标准形的刻画）。 设 Y $\in$ 等距间距（I）。令 k' 表示半径为 *0* 的类的数量，$k = I - k'$ 表示具有正半径的类的数量。以下两者在平移/旋转意义下等价。

1. Y 处于等边标准形。

2. 以下两种情况之一成立。

(a) $Y \in$ 等距间距$_=$，Y 的中心位于 $\mathbf{0}^n$，且对于所有 i， $r_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

(b) $Y \in$ 等距间距$_{\neq}$，存在一个 $r \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ ，使得以下条件成立

i. 零半径的中心位于 $E_{1,k'} \times \mathbf{0}^{n-k'-1} \times \alpha_0$ ，其中

$$\alpha_0 = \frac{1}{2(k'+1)}\sqrt{\frac{2k(k'+1)}{1-2r^2k'-2r^2+k+k'}}. \tag{139}$$

ii. Y 的所有非内层类的半径均为 r，且这些中心位于 $\mathbf{0}^{k'-1} \times E_{\ell,k-1} \times -\alpha_{>0}$ ，其中$\ell = \sqrt{1-2r^2}$且

$$\alpha_{>0} = \frac{1-2r^2}{2k}\sqrt{\frac{2k(k'+1)}{1-2r^2k'-2r^2+k+k'}}. \tag{140}$$

iii. Y 的内类位于 $\mathbf{0}^n$ ，半径为

$$\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1-2r^2}{2(k+k'-2k'r^2-2r^2+1)}}. \tag{141}$$

证明。 显然，2 蕴含 1，因为零半径中心和非内类正半径中心的位置位于正单纯形上。

证明 1 推出 2 时，有两种情形，分别对应条件 2.(a) 和 2.(b)。
2.(a) 的情形是指 $\mathcal{Y}$ 的任意中心对齐。在这种情况下，根据推论 2.3.8，所有中心都位于原点。公式 $r_i = \frac{\sqrt{2}}{2}$ 由推论 2.6.3 得出,其中 $I > 2$。若 $I = 2$，则 $r_1 = r_2$ 推出 $r_1 = r_2 = \frac{\sqrt{2}}{2}$。
在 2.(b) 的情形下，只需计算所有相关对象的范围，并应用第 2.4 节中推导出的各种恒等式，即可得出结论。

令 $\mathcal{Y}|_0$ 表示$\mathcal{Y}$ 中半径为零的类，$\mathcal{Y}|_{>0}$ 表示$\mathcal{Y}$ 中半径为正的非内层 类，并令 Y_I 表示$\mathcal{Y}$的内类。暂且假设 $k \geq 1$，且 $k' \geq 2$。由 $\ell^2 = \|c_i - c_j\|^2 = 1 - 2r^2$ 可得 $\ell = \sqrt{1-2r^2}$，其中 c_i, c_j 是非内层正半径中心。根据引理 2.2.4 和推论 2.3.7，可得 c_I以及$\mathcal{Y}|_0$、$\mathcal{Y}|_{>0}$ 的粘合点共线。通过验证以下恒等式，可得$\alpha_0, \alpha_{>0}$ 和 r_I 的公式。

$$\overset{2}{\operatorname{ext}}\mathcal{Y}|_0 = \frac{k'}{2(k'+1)} \tag{142}$$

$$\overset{2}{\operatorname{ext}}\mathcal{Y}|_{>0} = \frac{2r^2 + k - 1}{2k} \tag{143}$$

$$1 - \overset{2}{\operatorname{ext}}\mathcal{Y}|_0 - \overset{2}{\operatorname{ext}}\mathcal{Y}|_{>0} = \frac{1 - 2r^2k' - 2r^2 + k + k'}{2k(k'+1)}. \tag{144}$$

方程 142 和 143 由推论 2.6.6 得出。方程 144 由直接计算得出。随后，通过直接计算验证了以下方程

$$\alpha_0 = \frac{1}{2(k'+1)}\sqrt{\frac{2k(k'+1)}{1 - 2r^2k' - 2r^2 + k + k'}} \tag{145}$$

$$\alpha_{>0} = \frac{1-2r^2}{2k}\sqrt{\frac{2k(k'+1)}{1 - 2r^2k' - 2r^2 + k + k'}} \tag{146}$$

$$r_I = \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1-2r^2}{2(k + k' - 2k'r^2 - 2r^2 + 1)}} \tag{147}$$

wh这里，方程 145 和 146 由命题 2.4.12 得出，而方程 147 则通过求解

$$1 = r_I^2 + \alpha_0^2 + \overset{2}{\operatorname{ext}}\mathcal{Y}|_0 \tag{148}$$

得到 r_I。
现在考虑 $k' = 0$ 或 $k = 1$ 的情形。在这种情形下，中心位于正单纯形上的说法是空泛的。我们约定，单点是一个正零维单纯形 $E_{\ell,\ 0}$对任意 ℓ 都成立。显然，范围 ext $E_{\ell,\ 0} = \sqrt{1-\ell^2}$。换言之，当$\mathcal{Y}|_0$只包含一个类时，范围 ext$\mathcal{Y}|_0 = 0$；当$\mathcal{Y}|_{>0}$ 只包含一个类时，范围 ext$\mathcal{Y}_{>0} = r$。根据这一约定，方程 142 和 143 仍然成立，因此证明的其余部分也随之成立。 □

正如稍后在例 2.7.15 中所示，等距间距($I,\ \mathbb{R}^n$) 中有十个彼此不同构的元素，其中 $n \leq 3$。只有一个具有自由度。等边标准形有一个自由度（即 r的选择），而因此，当 $n \leq 3$ 时，等距间距($I,\ \mathbb{R}^n$) 的所有元素都已经处于等边标准形。

当 $n \geq 4$ 时，$\widehat{\mathcal{ES}}(I, \mathbb{R}^n)$ 要大得多，并且其“大多数”元素都不处于等边标准形。
命题 2.6.9 很有用，因为它将等边标准形的抽象几何定义与半径、中心和范围的具体代数联系起来。我们现在给出一个定理：所有极大等距间距都可以通过一个等距变换序列化为等边标准形。

定理 2.6.10 （极大等距间距具有等边标准形）。 设 $Y \in$ 等距间距。则存在 Y 的一个等距变换 f，使得 fY 处于等边标准形。

证明。 考虑$\mathcal{Y}$ 的（任意两个）中心重合的情形。根据推论 2.3.8，它们便全部重合。设 T为一个平移，使$\mathcal{Y}$ 的中心位于$\mathbf{0}$。如果 $I > 2$，那么 $T\mathcal{Y}$ 处于等边标准形，因为

$r_i = r_j$ 根据推论 2.6.3。如果 $I = 1$，则命题显然成立。如果 $I = 2$，那么存在一个压缩与拉伸 f，使得 $r_1 = r_2$。无论如何，$fT\mathcal{Y}$都处于等边标准形。
假设$\mathcal{Y}$ 的任何中心都不重合。证明策略是给出一个等距变换序列，使得命题2.6.9的第2点成立。

Let $r \in (0, \frac{\sqrt{2}}{2})$ and

$$\mathcal{Y} = \mathcal{Y}_{r=0} \vee \mathcal{Y}_{r>0} \tag{149}$$

其中$\mathcal{Y}_{r=0}$ 是$\mathcal{Y}$ 中半径为零的类，$\mathcal{Y}_{r>0}$ 是$\mathcal{Y}$ 中半径为 > 0的类。设 k' 为$\mathcal{Y}$ 中半径为0的类的个数，k 为半径为 > 0的类的个数。注意 $k + k' = I$。
为便于记号，设1,$\dots, k-1$ 为$\mathcal{Y}$的正半径类，k为内类。对每个$i = 1,\dots, k-1$，我们可以应用引理 2.6.7，并得到 $f_{i-1} \dots f_1\mathcal{Y}$的一个内外压缩与拉伸 f_i，使得 $f_i f_{i-1} \dots f_1\mathcal{Y}$的第 i个类的半径为 r。设 $f := f_{k-1} \dots f_1\mathcal{Y}$。

令 c^*表示 $f\mathrm{Y}$ 的第 k 个中心，T表示平移算子 $y \mapsto y - c^*$和 $\mathrm{Y}^{(1)} := Tf\mathrm{Y}$。令 $A_{=0} := \mathrm{Aff}\left|\mathrm{Y}_0^{(1)}\right|$ 和 $A_{>0} := \mathrm{Aff}\left|\mathrm{Y}_{>0}^{(1)}\right|$，其中 $\mathrm{Y}^{(1)} = \mathrm{Y}_0^{(1)} \vee \mathrm{Y}_{>0}^{(1)} \vee \mathrm{Y}^{(1)}$ 是内类，$\mathrm{Y}_0^{(1)}$ 是零半径类，$\mathrm{Y}_{>0}^{(1)}$ 是正半径类（不含内类），而 $\mathrm{Y}^{(1)}$ inner 是内类。于是由引理 2.2.4 和命题 2.2.10 可知，$A_{>0} \subset A_0^{\perp}$ 和 $A_0 \subset A_{>0}^{\perp}$。由 A_0 和 $A_{>0}$ 的正交性，存在 $\mathbb{R}^n$ 的一个旋转 Q，使得

$$QA_0 \subset \mathbb{R}^{k'-1} \times \mathbf{0}^{n-k'-1} \times [0, +\infty) \tag{150}$$

$$QA_{>0} \subset \mathbf{0}^{k'-1} \times \mathbb{R}^{n-k'-1} \times (-\infty, 0). \tag{151}$$

设 $\mathcal{Y}^{(2)} := QTf\mathcal{Y}$。其断言是 $\mathcal{Y}^{(2)} \cong \mathcal{Y}$，且 $\mathcal{Y}^{(2)}$处于等边标准形 .
显然，$\mathcal{Y}^{(2)} \cong \mathcal{Y}$，因为 $\mathcal{Y}^{(2)} = QTf\mathcal{Y}$。设 $r_i^{(2)}$ 与 $c^{(2)}$ 分别表示 $\mathcal{Y}^{(2)}$ 的半径和中心。由 f 的构造，$r_1^{(2)}$，.....，$r_{k-1}^{(2)} = r$。因此，由定理 2.2.12，$\left\|c_i^{(2)} - c_j^{(2)}\right\|^2 = 1 - 2r^2$，故 $\mathcal{Y}^{(2)}$ 的正半径非内中心位于一个正单纯形上。因此，$\mathcal{Y}^{(2)}$ 处于等边标准形。

□

定理 2.6.10 指出，极大等距间距总是具有等边标准形。事实表明，此类标准形在等距变换下是不变量，如下列命题所示。
命题 2.6.11 (等边标准形的不变性)。 设 Y、$Y' \in$ 属于等距间距集 ES，且存在等距变换 f，使得 $fY = Y'$。那么 Y 和 Y' 的等边标准形相同。

证明。 显然，所有等距变换都保持等距间距的类数不变。同样显然，半径为 > 0 的类经等距变换后会映射到半径为 > 0 的类。因此，两个极大等距间距必须具有相同的类总数，以及相同数量的半径为 0 和半径为 > 0 的类。因此，命题 2.6.9 中记号所表示的 k 和 k' 相同。所以，它们的等边标准形的中心相同。

□

2.7 等距间距的签名

命题 2.6.11 表明，标准形在等距变换下保持不变。一个自然的问题是，这个不变量能否刻画等距类？也就是说，如果两个极大等距间距的等边标准形的中心重合，它们是否等距？在满足一个自然的维数计数条件时，答案是肯定的。为使由此得到的定理表述尽可能简洁，我们引入以下定义。它是对具有等边标准形的等距间距的一种组合描述。
定义 2.7.1 （等距间距的签名）。 如果一对自然数和自然数列表 $(m,\ (d_1,\ \dots\dots,\ d_k))$ 满足 $m,\ d_1,\ \dots\dots,\ d_k \in \mathbb{N}$，则称其为一个签名。我们用 $\mathcal{S}$ 表示签名集。我们称 m 为该签名的零半径项，$d_1,\ \dots\dots,\ d_k$ 为该签名的正半径项，并称 d_1 为内项。

如果 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距 处于等边标准形，我们称Y 的签名，记作 sig$\mathcal{Y}$，其定义如下

$$(\#(r = 0), \dim A_1, \dim A_2, \dots \dim A_k) \tag{152}$$

其中 #$(r = 0)$ 表示$\mathcal{Y}$ 的零半径中心数量，并且

1。如果$\mathcal{Y}$具有重合的中心，则按以下顺序排列： $A_1, \ldots, A_k$，使得 dim $A_1 \geq \cdots \geq$ dim A_k，

2. 如果$\mathcal{Y}$的中心不重合，那么 1 是$\mathcal{Y}$的内类，并且 $A_2, \ldots, A_k$ 按维数从$\cdots \geq$到 A_k排序。

如果$\mathcal{Y} \in$ 等距间距 与某个$\mathcal{Y}' \in$ 等距间距 等距，其中$\mathcal{Y}'$处于等边标准形，则定义 sig $\mathcal{Y}$:= sig$\mathcal{Y}'$。⌢我们定义映射 sig : 等距间距 $\to \mathcal{S}$，将$\mathcal{Y} \mapsto$映射到 sig $\mathcal{Y}$，该映射将等距间距对应到签名。我们称 $m + \sum_{i=1}^{k} d_i$ 为签名 s的和 。

请注意，只有当签名在等距间距的等距变换下保持不变时，定义 2.7.1 才有意义。对于极大等距间距，情况确实如此，以下引理将予以证明。

⌢**引理 2.7.2**（签名在等距变换下不变）。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距 且 f 为等距变换。那么，sig $\mathcal{Y}$ = sig $f\mathcal{Y}$。

⌢证明。 首先，我们证明一个辅助结果：如果$\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}' \in$ 等距间距 彼此等距且处于等边标准形，那么 sig$\mathcal{Y}$ = sig $\mathcal{Y}'$。结合定理 2.6.10，即可推出该引理。

⌢设$\mathcal{Y}$, $\mathcal{Y}' \in$ 等距间距 且$\mathcal{Y} \cong \mathcal{Y}'$。由命题 2.6.11，$\mathcal{Y}$ 和$\mathcal{Y}'$ 的等边标准形具有相同的中心。根据命题 2.6.11 证明中的相同论证，它们的签名中的长度项和半径为 0 的项也相同。

注意，如果 f是 Y_i的旋转或压缩与拉伸，则 dim Y_i = dim fY_i。此外，如果 f是$\mathcal{Y}$的重新着色，那么$\mathcal{Y}$ 和 $f\mathcal{Y}$ 的类总数相同。因此，将$\mathcal{Y}$的非零半径类的维数排序后，必然与$\mathcal{Y}'$一致。因此，它们的签名在非零分量上也相同。所以 sig$\mathcal{Y}$ = sig $\mathcal{Y}'$。

□

⌢**命题 2.7.3**（由签名确定重合中心）。 设 $\mathcal{Y} \in$等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$ 且 $s =$特征映射 $\mathcal{Y}$其中 $s = m$; $d_1, \ldots, d_k$。那么 $\mathcal{Y} \in$ ⌢是等距间距 $=$ 当且仅当 $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$。

⌢证明。 设 $\mathcal{Y} \in$ 是等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$。由推论 2.3.14

$$n = \dim \tilde{A} + \sum_{i=1}^{I} \dim A_i = \dim \tilde{A} + \sum_{i=1}^{k} d_i. \tag{153}$$

若$\mathcal{Y}$的中心重合，则 dim $\tilde{A}$ = dim 仿射包 $c_1, \ldots, c_I = 0$，因此 $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$。

若$\mathcal{Y} \in$ ⌢是等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$ 且 $n = \sum_{i=1}^{k} d_i$，则方程 153 表明 $0 =$ dim $\tilde{A}$，因此 $c_1 = \cdots = c_I$。 □

顾名思义，命题 2.7.3 表明，仅凭签名即可判定一个极大等距间距是否具有重合中心。下面的引理是引理 2.7.2 的推论，对后续计算很有用。

引理 2.7.4 (特征映射 $\mathcal{Y}$ = 特征映射$\mathcal{Y}'$ 蕴含 $\mathcal{Y}$与 $\mathcal{Y}'$ 的等边标准形旋转等距⌢且重新着色). 设 $\mathcal{Y}$,$\mathcal{Y}' \in$ 等距间距$(\mathbb{R}^n, I)$, 特征映射 $\mathcal{Y}$ = 特征映射 $\mathcal{Y}'$，二者均处于等边标准形。则下列结论成立。

⌢*1. 若 (i)* $I \geq 3$ 或 *(ii)* $Y \in$等距间距$_{\neq}$之一成立，则 Y 与 Y' 旋转等距且重新着色。

⌢*2.* 若 $I \leq 2$ 且 $Y \in$ 等距间距$_{=}$，且 特征映射 Y = 特征映射Y'，则 Y 与 Y' 经旋转等距、重新着色以及压缩与拉伸。

⌢证明。 有两种情形。我们首先考虑 $\mathcal{Y} \in$等距间距$_{=}$的情形。注意，若 $\mathcal{Y}$ 的中心重合，则由特征映射 $\mathcal{Y}$ = 特征映射 $\mathcal{Y}'$ 以及命题 2.7.3，$\mathcal{Y}'$的中心同样重合。反之由同一论证亦成立。

首先，假设 $I \geq 3$。根据推论 2.6.3， $r_i = r_i' = \sqrt[\vee]{2}$ 对每个 i都成立。根据引理2.2.2， V_i（分别为 V_i）两两正交且构成直和。此外，由于特征映射$\mathcal{Y}$ = 特征映射$\mathcal{Y}'$，我们可以通过重新着色 σ，对其排序

类 $\mathcal{Y}$和 $\mathcal{Y}'$，使得 dim V_i = dim $V_{\pi i}$。因此，引理 B.0.8 适用，存在一个旋转，使得$\mathcal{Y} = U\mathcal{Y}'$。

$\widehat{}$现在我们考虑 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$\neq$ 的情形。定义 V_1、……、V_I，V_{I+1}如下。对于 $i = 1$、……、I，定义 V_i为 A_i 的差空间和 V_{I+1} A 的差空间。类似地定义 $V_{\pi 1}$、……、$V_{\pi I+1}$。注意， V_i（分别地， $V_{\pi i}$）构成直和（由命题 2.2.10），因此引理 B.0.8 适用，并存在一个旋转使得 $V_i = UV_{i}$。由定理 2.2.12，存在一个重新着色（双射） σ: {1、……、 k} $\to$ {1、……、 k}，使得

$$S_{r_i}^{n-1}(c_i) \cap A_i = S_{r'_{\sigma(i)}}^{n-1}(c'_{\sigma(i)}) \cap A'_i. \tag{154}$$

由极大性可知，这意味着 $Y_i = Y'_{\sigma(i)}$ 注意到 $r_i = r'_{\sigma(i)}$，因为二者都处于等边标准形。因此，$\Sigma U\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$。

最后，假设 $I = 2$ 与$\mathcal{Y}$ 的中心重合。那么，定理 2.2.12 中的方程 19 只有一种情形，即 $i = 1$ 和 $j = 2$，此时方程为

$$\|c_1 - c_2\| = 0 = \sqrt{1 - r_i^2 - r_j^2}. \tag{155}$$

因此，对$\mathcal{Y}$ 和$\mathcal{Y}'$ 进行压缩与拉伸，即可使 $r_1 = r_2 = \sqrt[\vee]{2} = r'_1 = r'_2$ 直接对齐。然后，应用与 $I > 2$ 和中心重合时相同的论证。 □

注记 2.7.5。 注意，引理 2.7.4 中 $I > 2$ 或$\mathcal{Y}$ 的中心不重合这一条件是必要的。考虑图 6a 和图 6b 所示的示例$\mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}' \in \widehat{}$等距间距(2， $\mathbb{R}^2$)。显然，不存在旋转能将$\mathcal{Y}_1$ 映射到 $f\mathcal{Y}_1$。

根据签名的定义，我们可以证明以下定理：极大等距间距的等距类由其签名确定。

定理 2.7.6 （极大等距间距等距当且仅当它们具有相同的签名）。$\widehat{}$设 $\mathcal{Y}$,$\mathcal{Y}' \in$ 等距间距。那么，$\mathcal{Y} \cong \mathcal{Y}'$ 当且仅当 特征映射 $\mathcal{Y}$ = 特征映射 $\mathcal{Y}'$。

证明。 正向结论由引理 2.7.2 立即得到，它蕴含特征映射 $\mathcal{Y}$ = 特征映射$\mathcal{Y}'$。

反过来，设特征映射 $\mathcal{Y}$ = 特征映射 $\mathcal{Y}'$，并令 f（分别为 f'）是将 $\mathcal{Y}$（分别将 $\mathcal{Y}'$）变换为其等边标准形的等距变换。那么，由引理 2.7.4，存在旋转 U、重新着色 σ以及压缩与拉伸 $\tilde{f}$, $\tilde{f}'$（除非 $I = 2$，否则它们都是恒等变换），使得 $\tilde{f}\sigma U f\mathcal{Y} = \tilde{f}_I f_I \mathcal{Y}'$，因此 $f_{I-1}\tilde{f}^{I-1}\tilde{f}\sigma U f\mathcal{Y} = \mathcal{Y}'$。因此，$\mathcal{Y} \cong \mathcal{Y}'$。 □

注记 2.7.7（签名的几何解释）。 鉴于定理 2.7.6，显然极大等距间距的签名是其等距类的组合描述符。它也具有直观的几何意义。若特征映射 $\mathcal{Y} = (m, (d_1, \ldots, d_k))$，则 m 是 $\mathcal{Y}$ 的零半径中心的个数， k 统计 $\mathcal{Y}$ 中半径为 > 0 的类的个数， d_1 是内类的维数， d_i 是类 Y_i 的维数，其中非内层类已按维数递减排序。

将签名写成 $(m, (d_1, \ldots, d_k))$ 而非序列 $d_0, d_1, \ldots, d_k$ 的原因，是为了表明 m 与其他 d_i 具有不同的解释。 m 统计类的个数，而 d_i统计各个类的维数。

几何解释尤其有用，因为即使$\mathcal{Y}$ 不是等边标准形，也适用。

$\widehat{}$**命题 2.7.8** (签名的性质)。 设 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$， $n \geq 1$ 且 特征映射 $\mathcal{Y} = (m, (d_1, \ldots, d_k))$。则有以下结论。

1. $k \geq 1$. 2. $I = m + k$. 3. 若 $Y \in \widehat{}$等距间距$_=$，则 $n = \sum_{i=1}^{k} d_k$ 且 $m + k \geq 2$。此外，若 $I = 2$，则 $m \leq 1$；若 $I > 2$，则$m = 0$。4. 若 $Y \in \widehat{}$等距间距$_\neq$，则 $m + k \geq 3$ 且 $n = m + k - 2 + \sum_{i=1}^{k} d_k$。

证明。 设$\mathcal{Y}$ 处于等边标准形。

1. 如果 $I=1$，$\mathcal{Y}$ 不是极大的。如果 $I\geq 2$，那么其中一个类的半径必须为 >0，因此 $k>0$。

2. $\mathcal{Y}$ 中的类总数为半径 0 类 m，加上正半径类 k。

3. 这恰好是命题 2.7.3，再加上以下信息：如果 $I>2$，那么 $m=0$ 是必要的。这一点可由推论 2.6.3 得出。

4. 首先，我们证明 $\mathcal{Y}\in$ 等距间距$\neq$ 蕴含 $m+k\geq 3$。这由推论 2.3.7 中的公式 52 得出。根据推论 2.3.14，

$$n=\dim\tilde{A}+\sum_{i=1}^{I}\dim A_i \tag{156}$$

$$=I-2+\sum_{i=1}^{k}\underbrace{\dim A_i}_{d_i}+\sum_{i=k+1}^{I}\underbrace{\dim A_i}_{=0} \tag{157}$$

$$=I-2+\sum_{i=1}^{k}d_i, \tag{158}$$

其中 k，k'，$E_{\ell,\ k}$，以及 $E_{1,\ k'}$ 分别表示定义 2.6.8 中的量。

□

命题 2.7.8 表明，签名必须满足某些约束，才能对应于极大等距间距。下一个命题表明，这些条件恰好刻画了极大等距间距的签名。

命题 2.7.9（由签名构造等距间距）。设 $s=$（m、（d_1、.....、d_k）是一个签名，$n\geq 1$且 $k\geq 1$。则有以下结论。

1. 若 $m+k\geq 3$ 存在一个 $Y\in$ 等距间距$\neq(m+k,\mathbb{R}^{m+k-2+\sum_{i=1}^{k}d_i})$，使得 特征映射$Y=s$。

2. 若 $m=0$ 且 $k\geq 1$，则存在一个 $Y\in$ 等距间距$_{=}(k,\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{k}d_i})$，使得 特征映射$Y=s$。

3. 若 $m=1$ 且 $k\leq 1$，则存在一个 $Y\in$ 等距间距$_{=}(2,\mathbb{R}^{d_1})$，若 $k=1$ 且 $Y\in$ 等距间距$_{=}(1,\mathbb{R}^{0})$，若 $k=0$，使得特征映射$Y=s$。

证明。令 $I:=m+k$。证明两部分的思路，都是通过调用命题 2.6.9，具体构造一个等边标准形的极大等距间距。

首先，我们证明 1。定义 $\mathcal{Y}$ 如下所示的一个候选极大等距间距。令 $r\in(0,\frac{\sqrt{2}}{2})$，并定义

$$\alpha_0=\frac{1}{2(m+1)}\sqrt{\frac{2k(m+1)}{1-2r^2k'-2r^2+k+m}} \tag{159}$$

$$\alpha_{>0}=\frac{1-2r^2}{2k}\sqrt{\frac{2k(m+1)}{1-2r^2k'-2r^2+k+m}}. \tag{160}$$

令 $n:=m+k-2+\sum_{i=1}^{k}d_k$。对于每个 $i=1,\ldots,m+k$，如果 $i\leq k$，则定义 $n_i:=d_i$；如果 $i>k$，则定义 $n_i:=0$。令 $e_1,\ldots,e_n$。对于每个 $i=1,\ldots,m+k$，定义

$$V_i:=\operatorname{span}\left\{e_{m+k+1+\sum_{j=1}^{i-1}d_j},\ldots,e_{m+k+\sum_{j=1}^{i}d_j}\right\}. \tag{161}$$

注意，$\operatorname{span}\{e_1,\ldots,e_{m+k}\}\bigoplus_{i=1}^{m+k}V_i=\mathbb{R}^{m+k-2+\sum_{i=1}^{k}d_k}$，其中直和来自标准正交性，而张成空间来自维数计数。定义 $c_1,\ldots,c_{k-1}$ 为嵌入在 $\mathbb{R}^{k-2}\times\left\{\mathbf{0}^{n+1-k}\right\}\times\{\alpha_{>0}\}$ 中的 $E_{\ell,k-1}$ 的顶点，并令 $c_{k+1},\ldots,c_{k+m}$ 为嵌入在 $\left\{\mathbf{0}^{k-2}\right\}\times\mathbb{R}^{m-1}\times\left\{\mathbf{0}^{n+2-k-m}\right\}\times\{\alpha_0\}$中的$E_{1,m}$ 的顶点，再令 $c_k=\mathbf{0}^n$。对于每个 $i=1,\ldots,m+k$，令

$$A_i=c_i+V_i,\quad Y_i:=S_r^{n-1}(c_i)\cap A_i. \tag{162}$$

其中

$$r_i \coloneqq \begin{cases} r & \text{if } i < k \\ \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1-2r^2}{2(k+k'-2k'r^2-2r^2+1)}} & \text{if } i = k \\ 0 & \text{if } i > k \end{cases}. \tag{163}$$

现在我们证明$\mathcal{Y} \coloneqq \bigsqcup_{i=1}^{m+k} Y_i \in \overset{\frown}{\text{等距间距}}(m+k, \mathbb{R}^{m+k-2+\sum_{i=1}^{k} d_k})$。首先，我们通过验证推论 2.2.13 来证明$\mathcal{Y} \in$ 等距间距。显然，第 2 点和第 3 点均满足。剩下的只有验证方程 22。需要考虑五种情况。对于这五种情况，我们采用简写 $c_{>0}^* \coloneqq \mathbf{0}^{n-1} \times \alpha_{>0}$ 和 $c_0^* \coloneqq \mathbf{0}^{n-1} \times -\alpha_0$。

情况 1。 i, j 对应正半径非内类。于是

$$\|c_i - c_j\|^2 = 1 - 2r^2. \tag{164}$$

注意，类 i 和 j 的半径为 r。

情况 2。 i, j 对应零半径类。于是显然

$$\|c_i - c_j\|^2 = 1. \tag{165}$$

情况 3。类 i, j 满足： i 是正半径类，而 j 是零半径类。于是，经过一番直接但繁复的计算可得

$$\|c_i - c_j\|^2 = \|c_i - c_{>0}^*\|^2 + \|c_{>0}^* - c_0^*\|^2 + \|c_j - c_0^*\|^2 \tag{166}$$

$$= \frac{m}{2(m+1)} + (\alpha_0 + \alpha_{>0})^2 + \frac{2r^2 + k - 1}{2k} \tag{167}$$

$$= 1 - r^2. \tag{168}$$

情形 4。类 i 是正半径类， $j = k$ 是内类。接下来，通过另一项直接但繁琐的计算可得

$$\|c_i - c_k\|^2 = \|c_i - c_{>0}^*\|^2 + \|c_{>0}^* - \mathbf{0}^n\|^2 + \|\mathbf{0}^n - c_k\|^2 \tag{169}$$

$$= \frac{2r^2 + k - 1}{2k} + \alpha_1^2 + r_k^2 \tag{170}$$

$$= 1 - r^2 - r_k^2. \tag{171}$$

情形 5。类 i 是零半径类， $j = k$ 是内类。于是

$$\|c_i - c_k\|^2 = \|c_i - c_0^*\|^2 + \|c_0^* - \mathbf{0}^n\|^2 + \|\mathbf{0}^n - c_k\|^2 \tag{172}$$

$$= \frac{m}{2(m+1)} + \alpha_0^2 + r_k^2 \tag{173}$$

$$= 1 - r_k^2. \tag{174}$$

现在我们验证 $\mathcal{Y}$ 是极大的。假设 $\mathcal{Y} \subsetneq \mathcal{Y}'$ ，从而 $\mathcal{Y}'$ 是极大的。由

$$\operatorname{Aff}(c_1, \ldots, c_{m+k}) \bigoplus_{i=1}^{m+k} V_i = \mathbb{R}^{m+k-2+\sum_{i=1}^{k} d_k}, \tag{175}$$

$\overset{\frown}{\text{可知}}$ $I' = m + k$。显然， $\mathcal{Y}' \in \overset{\frown}{\text{等距间距}}\neq$，因此 $\mathcal{Y}'$ 满足命题 2.3.15。于是， $c_1', \ldots, c_I'$ 构成单纯形加垂心。根据公式 175，可得 $V_i \subset V_{ri}$，因此 $\operatorname{Aff}(c_1', \ldots, c_{m+k}') \subset \operatorname{Aff}(c_1, \ldots, c_{m+k})$。于是，对于每个 i，都有 $c_i = c_i'$。因此，$\mathcal{Y}' \subset \mathcal{Y}$，且 $\mathcal{Y}$ 是极大的。

最后，还需证明 $\operatorname{sig}\mathcal{Y} = s$。 $\mathcal{Y}$ 有 m 个零半径类（每个 $E_{1,m}$ 的顶点对应一个）、 k 个正半径类（每个 $E_{\ell, k-1}$ 的顶点对应一个，另加一个内类），并且 $d_1, \ldots, d_k$ 正如公式 161 中 V_i 的定义所述。

现在我们验证2.。令 $c_1 = \cdots = c_k = \mathbf{0}$。设 $e_1, \ldots, e_{\sum_{i=1}^{k} d_k}$ 为 $\mathbb{R}^{\sum_{i=1}^{k} d_k}$的标准正交基。令

$$V_i \coloneqq \operatorname{span}\left\{ e_{1+\sum_{j=1}^{k-1} d_j}, \ldots, e_{\sum_{j=1}^{k} d_j} \right\} \tag{176}$$

并定义

$$Y_i \coloneqq S^{n-1}_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(\mathbf{0}) \cap V_i. \tag{177}$$

$\mathcal{Y} \coloneqq \sqcup_i^{m+k} Y_i$。我们验证 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距。 </style}如果 $i \neq j$，那么

$$\|y_i - y_j\|^2 = \|y_i - c_i\|^2 + \|c_i - c_j\|^2 + \|y_j - c_j\|^2 \tag{178}$$

$$= \frac{1}{2} + 0 + \frac{1}{2} = 1. \tag{179}$$

因此，$\mathcal{Y} \in$ 等距间距。通过计数，显然 $\mathcal{Y} \in$ 等距间距$(k,\ \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^k d_i})$。极大性可由本证明第一部分中的相同论证得出。最后，$\mathcal{Y}$的中心按定义重合，因此 $\mathcal{Y} \in \widehat{\ }$等距间距$_{=}(k,\ \mathbb{R}^{\sum_{i=1}^k d_i})$。现在证明 3。若 $m = 1$，$k = 0$，则可考虑由 $Y_1 \coloneqq \{\mathbf{0}\}$ 给出的间距。该间距在 $\mathbb{R}^0 = \{\mathbf{0}\}$ 中是极大的。若 $m = 1,\ k = 1$，则令 $Y_1 \coloneqq \{\mathbf{0}\}$，并令 $Y_2 \coloneqq S_1^{d_1 - 1}(\mathbf{0})$。

□

命题 2.7.9 引出了以下定义，它描述了与 等距间距$(I,\ \mathbb{R}^n)$ 中的签名相对应的签名。

定义 2.7.10（有效签名）。给定 I、$n \in \mathbb{N}$。我们将 I、n-有效签名 的集合记为 $\mathcal{S}(I$、$n)$，定义为集合

$$\mathcal{S}(I,n) \coloneqq \left\{ s \in \mathcal{S} \colon k, m \geq 0, \quad m + k \leq I, \quad m + k + \sum_{i=1}^{k} d_k - 2 \leq n \right\}. \tag{180}$$

当 I、n 明确时，我们将 $\mathcal{S}(I$、$n)$ 简称为有效签名的集合。我们通过 $\hat{\ }\hat{\ }\mathcal{S}_{=}$ 和$\mathcal{S}_{\neq}$ 定义 $\mathcal{S}$ 的两个子集，具体为

$$\hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n) \coloneqq \left\{ s \in \mathcal{S}(I,n) \colon m + k = I > 2, \quad m + k + \sum_{i=1}^{k} d_k = n + 2 \right\}, \tag{181}$$

$$\hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n) \coloneqq \left\{ s \in \mathcal{S}(I,n) \colon m + k = I, \quad \sum_{i=1}^{k} d_k = n, \quad \begin{cases} m = 0 & \text{if } I \geq 1 \\ m = 1 & \text{if } I \leq 2 \end{cases} \right\}. \tag{182}$$

借助这两个定义，前面的若干结果可以表述得更加简洁。

$\widehat{\ }$**推论 2.7.11**（等距间距的 *ES*）。以下结论成立。

1. 定理 *2.7.6*。极大等距间距的等距类由其签名刻画。*2.* 命题 *2.7.8* 第 *2* 点。若 $Y \in \widehat{\ }ES_{=}(I, \mathbb{R}^n)$，则 特征映射 $Y \in \hat{\ }S_{=}(I, n)$。*3.* 命题 *2.7.8* 第 *3* 点。若 $Y \in \widehat{\ }ES_{\neq}(I, \mathbb{R}^n)$，则 特征映射 $Y \in \hat{\ }S_{\neq}(I, n)$。*4.* 命题 *2.7.9* 第 *1* 点。映射

$$\operatorname{sig}|_{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,\mathbb{R}^n)} \colon \widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I, \mathbb{R}^n) \to \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I, n) \tag{183}$$

是一个满射。

5. 命题 *2.7.9* 点 *2.*、*3.* 和 *4.* 该映射

$$\operatorname{sig}|_{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,\mathbb{R}^n)} \colon \widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I, \mathbb{R}^n) \to \hat{\mathcal{S}}_{=}(I, n) \tag{184}$$

是一个满射。

证明。所有断言均可通过展开定义立即得证。 □

鉴于推论 2.7.11，将映射经过商集，并将特征映射 sig 视为等距类与签名之间的映射，是合理的。以下命题将对此加以证明。

命题 2.7.12（特征映射作为 $\widehat{\ }$等距间距的等距类上的映射）。令 $\text{等距间距}(I,\mathbb{R}^n)\cong$ 表示$\widehat{\ }$等距间距（I，$\mathbb{R}^n$）的由旋转、平移、重新着色以及压缩与拉伸生成的等价类。类似地定义 $\text{等距间距}_{=}(I,\mathbb{R}^n)\cong$ 和 $\text{等距间距}_{\neq}(I,\mathbb{R}^n)\cong$。我们可以认为

$$\operatorname{sig}\colon \frac{\widehat{\mathcal{ES}}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong} \to \mathcal{S}(I,\mathbb{R}^n) \tag{185}$$

并且类似地

$$\operatorname{sig}|_{\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong}} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong} \to \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n), \tag{186}$$

$$\operatorname{sig}|_{\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong}} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong} \to \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n). \tag{187}$$

证明。唯一需要验证的是，特征映射$\mathcal{Y}$ = 特征映射$\mathcal{Y}'$，当 $\mathcal{Y}\cong\mathcal{Y}'$ 特征映射时。这已在定理 2.7.6 中得到证明。 □

为便于记号，我们有时省略该限制，并将特征映射$|_{\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong}}$记为特征映射，对$\cong$特征映射$|_{\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,\mathbb{R}^n)}{\cong}}$也同样如此 当根据上下文显而易见时。

现在我们可以陈述并证明主要结果。

定理 2.7.13（特征映射在极大等距间距上是双射）。以下所有映射都是双射。

$$\operatorname{sig}\colon \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong} \to \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n), \tag{188}$$

$$\operatorname{sig}\colon \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong} \to \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n), \tag{189}$$

$$\operatorname{sig}\colon \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong} \to \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n), \tag{190}$$

$$\operatorname{sig}\colon \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong} \to \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n). \tag{191}$$

简而言之，特征映射 是从等距类到相容签名空间的双射 .

$\widehat{\ }$证明。设 I,n 固定。证明 $\text{sig: 等距间距}_{=(I,n)\cong} \to \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n)$ 和 $\text{sig : 等距间距}^{\neq}{}_{(I,n)\cong} \to \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n)$ 是双射的过程完全相同。根据命题 2.7.12，该映射是良定义的。它是满射的证明见推论 2.7.11 的第 4 点和第 5 点。它在等价类上是单射的证明见定理 2.7.6。由此可知，这两个映射都是双射。

$\widehat{\ }$证明 $\text{sig:}\bigcup_{I,n\in\mathbb{N}\text{ 等距间距}_{=}(I,\cong}{}^{n} \to \bigcup_{I),n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n)$ 和 $\text{sig :}\bigcup_{I,n\in\mathbb{N}\text{ 等距间距}\neq(I,n)\cong} \to \bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n)$ 的过程可归结为证明

$$\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong} \cap \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I',n')}{\cong} = \emptyset, \quad \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong} \cap \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I',n')}{\cong} = \emptyset \tag{192}$$

and

$$\hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n) \cap \hat{\mathcal{S}}_{=}(I',n') = \emptyset, \quad \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n) \cap \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I',n') = \emptyset. \tag{193}$$

每当 $I\neq I'$ 或 $n\neq n'$。

为证明公式 192，若 $I\neq I'$，则$\mathcal{Y}\in$等距间距(I) 与$\mathcal{Y}'\in$ 等距间距(I') 的元素数量不同。若 $n\neq n'$，则 $|\mathcal{Y}|$ 与 $|\mathcal{Y}|'$ 位于不同的空间中。

Sum	签名	I	n s.t. $s \in \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n)$	图
4	(1,(3))	2	3	12c
4	(0,(4))	1	4	
4	(0,(3,1))	2	4	
4	(0,(2,2))	2	4	
4	(0,(2,1,1))	3	4	
4	(0,(1,1,1,1))	4	4	
3	(1,(2))	2	2	11b
3	(0,(3))	1	3	12e
3	(0,(2,1))	2	3	12f
3	(0,(1,1,1))	3	3	12g
2	(1,(1))	2	1	10a
2	(0,(2))	1	2	11c
2	(0,(1,1))	2	2	11d
1	(1,())	1	0	9
1	(0,(1))	1	1	10b

表 1: $\bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{}\mathcal{S}_{=}(I,n)$ 中所有和不超过四的签名，以及它们的类数量和使其达到最大值的环境维数。如果使 s 达到最大值的环境维数不超过 3，则图列中会有一个条目，引用一幅绘制 $\mathsf{sig}^{-1}\, s$ 的图。

为证明公式 193，若 $s \in \hat{}\mathcal{S}_{=}(I,\ n) \cap \hat{}\mathcal{S}_{=}(I',\ n')$，则根据 $I = m + k = I'$，并根据 $n = m + k - 2 + \sum_{i=1}^{k} d_k = n'$（推论 2.7.11 的第 2 点和第 3 点）。当 $s \in \hat{}\mathcal{S}_{\neq}(I,\ n) \cap \hat{}\mathcal{S}_{\neq}(I,\ n)$ 时，同样的证明也成立。

□

Remark 2.7.14 ($\hat{}\mathcal{S}_{=} \cap \hat{}\mathcal{S}_{\neq} \neq \emptyset$). 鉴于定理 2.7.13，一个自然的后续问题是 if

$$\left(\bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n) \right) \cap \left(\bigcup_{I,n\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n) \right) \stackrel{?}{=} \emptyset. \tag{194}$$

⌒如果公式 194 成立，那么它将意味着 $\mathsf{sig} : \bigcup_{n,I} \mathcal{ES}(\cong_n) \to \bigcup_{n,I),I} (\mathcal{S}_{=}(I,n) \cup \mathcal{S}_{\neq}(I,n))$ 是一个双射。事实并非如此。确实，$\hat{}\mathcal{S}_{=}(I,n) \cap \hat{}\mathcal{S}_{\neq}(I,n) = \emptyset$，但直接计算表明

$$(0,(2,1,1)) \in \hat{\mathcal{S}}_{=}(3,4) \cap \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(3,5). \tag{195}$$

定理 2.7.13 表明，等距间距可通过理解其签名来加以概括。命题 2.7.9 给出了生成所有签名的简单规则。将二者结合起来，我们可以生成 等距间距$(I,\mathbb{R}^n)$ 的全部⌒元素，在等距变换意义下。

例 2.7.15 （ $\mathbb{R}^1$、 $\mathbb{R}^2$ 和 $\mathbb{R}^3$ 中等距间隔的枚举）。 鉴于定理 2.7.13，对于给定的 n，我们可以通过计算来枚举 等距间距$(I,\mathbb{R}^n)$

$$\mathsf{sig}^{-1} \left(\bigcup_{I\in\mathbb{N}} \hat{\mathcal{S}}_{=}(I,n) \cup \hat{\mathcal{S}}_{\neq}(I,n) \right). \tag{196}$$

一种直接的做法是选择一个目标和 N，并分别使用算法 1 和算法 2 来 ^ ^ ^ ^ 生成所有和为 N 的 $\mathcal{S}_{=}$ 与 $\mathcal{S}_{\neq}$。然后，对于每个 $s \in \mathcal{S}_{=} \cup \mathcal{S}_{\neq}$，我们可以使用方程 181 和 182 计算 I 与 n，使得 $s \in \hat{}\mathcal{S}_{=}(I,n)$ 和 $s \in \hat{}\mathcal{S}_{\neq}(I,n)$。

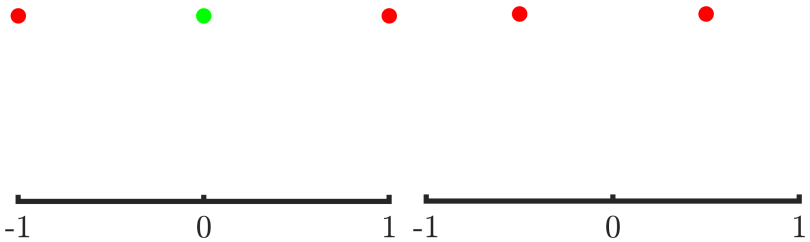
^ 作为这一想法付诸实践的一个例子，在表 1中，我们计算$\mathcal{S}_{=}$中所有和为四或更小的签名。^ 在表 2中，我们计算$\mathcal{S}_{\neq}$中所有和为四或更小的签名。由此，我们得到当 $n = 0$ （见图 9） $n = 1$ （见图 10）、 $n = 2$ （见图 11）以及 $n = 3$ （见图 12）时，所有⌒等距间距$(I,\mathbb{R}^n)$的签名。

⌒我们通过计算$\bigcup_{I=1,\ldots,\infty \text{等距间距}(I,n)\cong}$ 中的元素个数，来结束关于签名的这一节。在以下命题中， p: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ 表示数论中的分拆函数。也就是说， $p(n)$是将 n 写成自然数之和的不同方式的个数。

Sum	签名，s	I	n 使得 $s \in$秒≠(I, n)	图
4	(3,(1))	4	3	12a
4	(2,(2))	3	3	12b
4	(2,(1,1))	4	4	
4	(1,(2,1))	3	4	
4	(1,(1,2))	3	4	
4	(1,(1,1,1))	4	5	
4	(0,(2,1,1))	3	5	
4	(0,(1,2,1))	3	5	
4	(0,(1,1,1,1))	4	6	
3	(2,(1))	3	2	11a
3	(1,(1,1))	3	3	12d
3	(0,(1,1,1))	3	4	

表 2：和不超过四的 s 等距间距，$n \in \mathbb{N}$ ˆ$\mathcal{S}$≠$(I,\ n)$ 的所有签名，以及其达到最大值时对应的类数和环境维数。如果 s 达到最大值时的环境维数不超过 3，则图列中会有一项引用展示 $\mathrm{sig}^{-1}\, s$ 的图。

图 9： $\mathbb{R}^0$ 中可嵌入的$\mathcal{Y} \in \widehat{\ }$等距间距的唯一元素，其签名为 (1,())。



(a) (1,(1)) (b) (0,(1))

图 10： $\mathbb{R}^1$中可嵌入的$\mathcal{Y} \in \widehat{\ }$等距间距的两个元素。

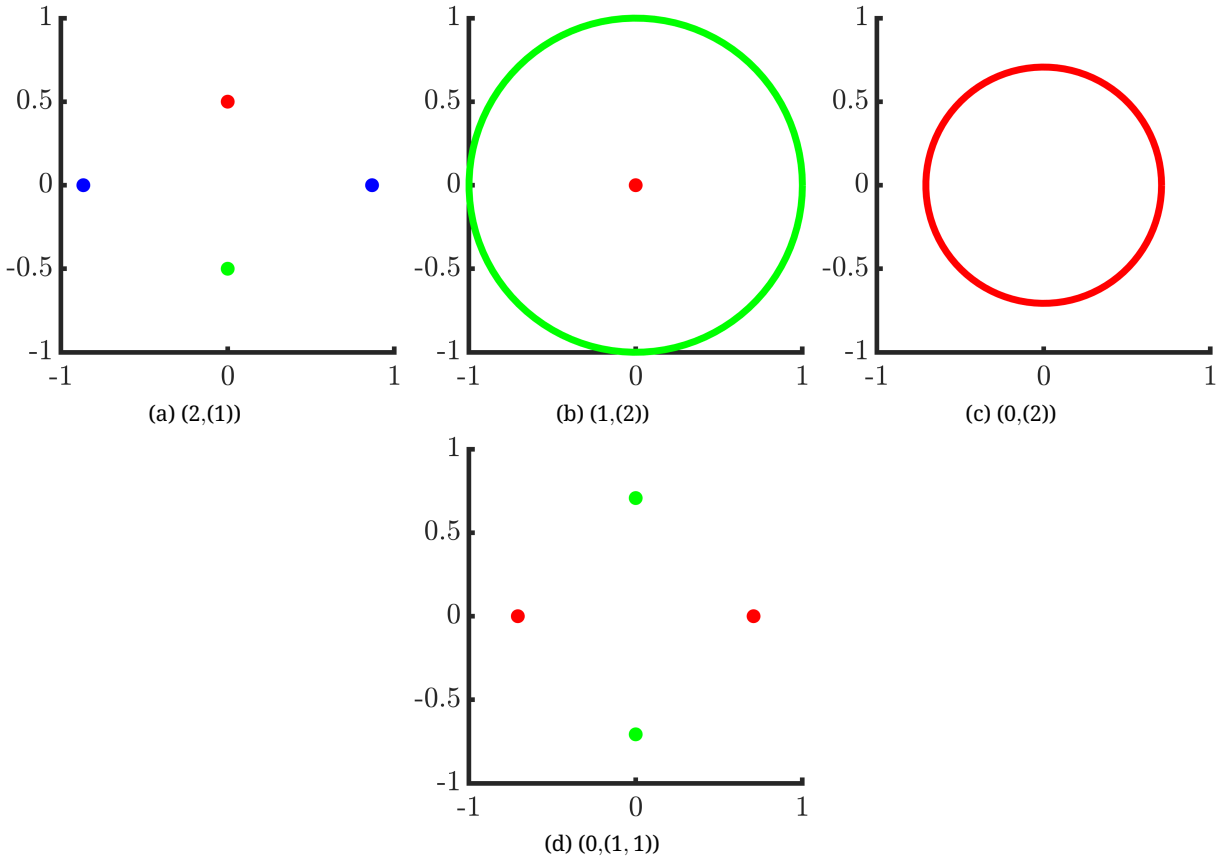


图 11：$\mathcal{Y} \in \widehat{\text{等距间距}}$ 中可嵌入 $\mathbb{R}^2$ 的四个元素的图。

算法 1 生成所有 $\hat{\mathcal{S}}_=$ 和为 N

要求： N，目标和 **结果**：所有集合 $\hat{\mathcal{S}}_=$ 和为 N

$\mathcal{S}_= \leftarrow \{\}$
如果 $N = 1$ **则** ▷ 当 $m = 1$
  $\mathcal{S}_= \leftarrow \{(1,0)\}$
else
  $\mathcal{S}_= \leftarrow \{(1,(N-1))\}$
结束条件判断
对于 $p \in$ 分拆(N) **执行** ▷ 分拆返回 p，这是一个由非零整数组成的元组，其和为 N。
  $\mathcal{S}_= \leftarrow \mathcal{S}_= \cup \{(0,p)\}$
结束循环
返回 $\mathcal{S}_=$

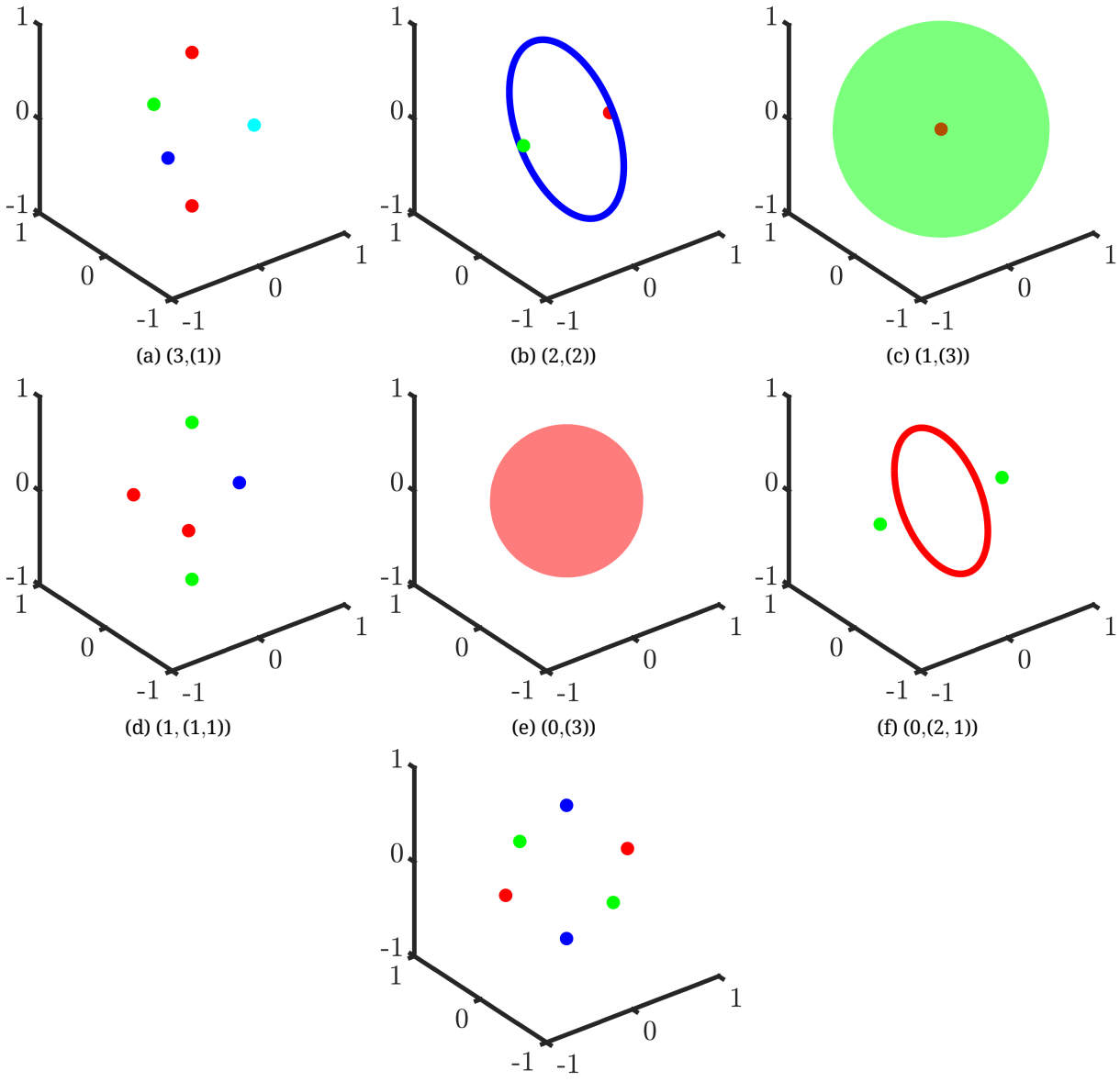


图 12：可嵌入于 $\mathbb{R}^3$中的$\mathcal{Y} \in \widehat{\ }$等距间距的七个元素的图。

ˆ 算法 2 生成和为 N 的 S≠ ˆ 要求： N，目标和 结果：所有和为 N 的 S≠ 的集合S$_{\neq}$ ←{} 对于 $m \in \{0, N-1\}$，执行 对于 $d_1 \in \{1, N-m\}$，执行 对于 $p \in$ partition$(N-m-d_1)$，执行 ▷ partition 返回 p，一个由非零整数组成且其和为$N-m$的元组。 如果 $m + \#(p) \geq 2$ 则 ▷ #(p) 表示 pS$_{\neq}$ ← S$_{\neq}$ ∪{s} 的长度 结束 如果 结束 对于 结束 对于 结束 对于 返回 S≠

命题2.7.16（最大等距间隔计数）。 设 $n \in \mathbb{N}$ 给定。则以下结论成立。

$$\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong}\right) = 1 + p(n) \tag{197}$$

$$\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong}\right) = \sum_{i=1}^{n-1} p(i) \tag{198}$$

$$\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}(I,n)}{\cong}\right) = \sum_{i=0}^{n} p(i) \tag{199}$$

证明。 首先我们证明公式 197。根据定理 2.7.13，$\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I\ n)}{\cong}\right) = \#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \mathcal{S}_{=}(I,\ n)\right)$。对于固定的 n，公式 182 有两种情况：当 $m=1$ 且 $I=2$ 时，以及当 $m=0$ 当 $I \geq 2$ 时。

若 $m=1$，则 $k=1$ 且 $d_1 = n$ （除非 $n=0$，此时为 $k=0$）。因此，当 $n=0$ 时，存在一个取值为 (1,(n)) 或 $(1,())$ 的签名。

若 $m=0$，则签名具有形式 $(0,(d_1,d_2,\ldots,d_k))$。由约束 $\sum_{i=1}^{k} d_k = n$， n 的每个分拆对应一个签名。

将这两种情形求和，我们得到 $\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \mathcal{S}_{=}(I,n)\right) = 1 + p(n)$。这就证明了式 197。

现在我们证明式 198。同样，根据定理 2.7.13，$\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I\ n)}{\cong}\right) = \#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \mathcal{S}_{\neq}(I,n)\right)$。我们使用式 181。重新排列各项并利用 $m+k=I$，我们得到

$$\sum_{i=1}^{k} d_k = n + 2 - I. \tag{200}$$

因此，对于每个 $I \geq 3$， $n+2-I$ 的每个分拆都对应一个形式为 $(I-k,(d_1,\ldots,d_k))$ 的签名。于是，

$$\#\left(\bigcup_{I=1,\ldots,\infty} \mathcal{S}_{\neq}(I,n)\right) = \sum_{I=3}^{n+1} p(n+2-I) = \sum_{i=1}^{n-1} p(i) \tag{201}$$

其中，最后一个等式是将 $i := n+2-I$ 代入得到的。这就证明了公式 198。

公式 199 由备注 2.3.10 和定理 2.7.13 得出，因此

$$\#\left(\bigcup_{I=1,\dots,\infty}\frac{\widehat{\mathcal{ES}}(I,n)}{\cong}\right)=\#\left(\bigcup_{I=1,\dots,\infty}\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{\neq}(I,n)}{\cong}\right)+\#\left(\bigcup_{I=1,\dots,\infty}\frac{\widehat{\mathcal{ES}}_{=}(I,n)}{\cong}\right)=1+\sum_{i=1}^{n}p(i) \tag{202}$$

□

2.8 用于检验等距间距的算法

本节介绍一种算法，用于检验有限点集是否位于某个等距间隔上，其灵感来自推论 2.2.13。令人惊讶的是，所得到算法的运行时间与待检验点数呈线性关系，远快于朴素算法的二次运行时间（即直接为每一对颜色不同的点计算 $\|y_i-y_j\|$ ）。该算法包含以下步骤

1. 使用格拉姆-施密特标准正交化计算 A_i。2. 通过对 A_i 进行正交投影来计算 c_i 。3. 验证对于每个 $y_i\in Y_i$ 和 i, $\|c_i-y_i\|$ 都是常数。4. 检查各中心是否按正确间距排列。

该算法见 3。数值 $d_i\in\mathbb{N}$ 是空间 A_i 的维数，并根据格拉姆-施密特标准正交化的输出隐式定义。

定理 2.8.1 (算法 3 的正确性)。 设 $Y:=\{Y_i\}_{i=1}^{I}$ 且每个 $Y_i\subset\mathbb{R}^n$ 均为有限集。那么，如果在 Y 上运行算法 *3*，则

1. 算法 *1* 将运行并输出 *True* 或 *False*，最多需要 $O(n^2\#(Y)+n^2I^2)$ 次运算 $s.$

2. 当 $Y\in$为等距间距时，它将返回 *True*；否则返回 *False*。

证明。 首先，我们计算 算法 3 各部分的运行时间。以下报告的时间均按每个类 $i\in\{1,\dots,I\}$.

1. 构造 A_i。格拉姆-施密特标准正交化需要 $O(N_inid_i)$ 次运算。2. 验证 A_i 的正交性需要 $O(d_id_jI)$。3. 验证 $\|y_i-c_i\|$ 为常数需要 $O(N_in)$ 次运算。~ ~ ~ ~4. 验证 V_i 与 V的正交性需要 $O(d_id)$，其中 $d=$ 维 V。5. 间距检查步骤需要 $O(In)$ 次运算。

将上述估计相加可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{I}N_ind_i+d_id_jI++d_i\tilde{d}nN_i+nI &\le n^2\#(\mathcal{Y})+n^2I^2+n^2+nI\#(\mathcal{Y})+nI^2\\ &\le n^2\#(\mathcal{Y})+n^2I^2+n^2+2nI\#(\mathcal{Y})\\ &\le 2\left(n+1\right)^2\#(\mathcal{Y})+n^2(I^2+1).\end{aligned}$$

这证明了第 1 点。
现在证明第 2 点。显然，如果运行该算法并返回 true，则意味着以下结论成立。

1. V_i两两正交。2. $r_i>0$ 如果 $A_i>0$ （在 V_i 的构造中隐含）。˜3. 每个 A_i 都与 A 正交。

算法 3 等距间隔的验证

要求： I，以及族 $\{Y_i\}_{i=1}^{I}$，其中 $Y_i = \left\{ y_i^{(1)}, \ldots, y_i^{(N_i)} \right\}$

对 $i \in I$ **执行** ▷ 形式 A_i

$\left\{ e_i^{(1)}, \ldots, e^{(d_i)}{}_i \right\}$ = 格拉姆-施密特 $\left(y_i^{(1)} - y_i^{(1)} \text{、} \ldots\ldots \text{、} y_i^{(N_i)} - y_i^{(1)} \right)$ ▷格拉姆-施密特正交化

结束循环

对于 $i, \ j \in I \times I$ **执行** ▷ 验证 A_i 与 V_i的正交性

对于 $k_i, \ k_j \in \{1, \ldots\ldots, \ d_i\} \times \{1, \ldots\ldots, \ d_j\}$ **执行**

如果 $\left\langle e_i^{(k_i)}, e^{(k_j)}{}_j \right\rangle \neq 0$ **则返回** 假

结束如果

结束循环

结束循环

对于 $i \in 1, \ldots, I$ **执行** ▷ 检查 $\|y_i - c_i\|$ 是否为常数

$c_i \leftarrow$ 投影$_{A_i}\, y^{(1)}_{i+1}$

$r_i \leftarrow \left\| c_i - y^{(1)} \right\|$

对于 $k \in \{2, \ldots, N_i\}$ **执行**

如果 $\left\| y^{(k)} - c_i \right\| \neq r_i$ **那么**

返回 假

结束如果

结束循环

结束循环

$\left\{ \tilde{e}^{(1)}, \ldots \tilde{e}^{(\tilde{d})} \right\} = GS(c_1 - c_2, \ldots, c_1 - c_I)$

对于 $i = 1, \ldots, I$ **执行** ▷验证 V_i 与.....正交 $\tilde{V}$.

对于 $k_i \in \{1, \ldots, d_i\}, \tilde{k} \in \{1, \ldots, d\}$ **执行**

如果 $\left\langle e_i^{(k_i)}, \tilde{e}^{(\tilde{k})} \right\rangle \neq 0$ **，则**

返回 假

结束如果

结束 for

结束 for

对于 $i, j \in \{1, \ldots, I\}^2, i \neq j$ **执行** ▷检查各中心的间距

如果 $\|c_i - c_j\|^2 + r_i^2 + r_j^2 \neq 1$ **则**

返回 假

结束 if

结束 for

返回 True

4. $Y_i \subset S_{r_i}^{n-1}(c_i)$ $\cap A_i$。 5. 方程 19 成立。

因此，根据定理 2.2.12，当且仅当 $\mathcal{Y}$ ∈等距间距 时，算法 3 返回 True。 □

3 致谢

作者谨向 Matthew Biesecker 和 Greg Conner 致以诚挚谢意，感谢他们对手稿提出的诸多意见。尤其感谢 Matt 对编辑细节的仔细审阅，以及 Greg 提出的许多叙事建议。作者获得了美国国家科学基金会奖项 #2418909 LEAPS-MPS：拓扑机器学习与冷冻电子显微镜项目的资助，同时也获得了 CAPITAL Services Inc. 的支持。

参考文献

[1] Christopher M Bishop 和 Hugh Bishop。深度学习：基础与概念。Springer Nature，2023。

[2] Peter Brass、William OJ Moser 和 J´anos Pach。离散几何中的研究问题。施普林格，2005。.[3] Ludwig Danzer 和 Branko Gr¨unbaum。关于 P. Erdős 和 V. L. Klee 提出的两个凸体问题。《数学杂志》，79：95–99，1962。[4] Allan L Edmonds、Mowaffaq Hajja 和 Horst Martini。垂心单形及其中心。《数学进展》，47(3)：266–295，2005。[5] E Egerv´ary。关于垂心单纯形。《塞格德大学学报》，9：218–226，1940。[6] Paul Erd¨os。关于 n 个点的距离集合。《美国数学月刊》，53(5)：248–250，1946。[7] Hugo Hadwiger。古今 ¨论凸 ¨体，第368卷。施普林格，1955。[8] Murray S Klamkin、Kit Hanes 和 Mark D Meyerson。垂心之上再有垂心：10453。《美国数学月刊》，105(6)：563–565，1998。[9] Clinton M Petty。闵可夫斯基空间中的等边集。《美国数学会会刊》，29(2)：369–374，1971。[10] Alexander Soifer。《数学着色书：着色数学与其创造者多彩的人生》。施普林格科学与商业媒体，2008。[11] Frank Thomas。《生命的幻象》。纽约：海伯利安，1995。

记号

本节总结本文所用的记号。所有记号均在首次使用处定义。本节作为参考。

笔画

1. 集合 Y 始终表示某个满足 $Y_i \subset \mathbb{R}^n$ 的 I 的 $\sqcup_{i=1}^{I} Y_i$ 。2. 字母 i、j 和 k 表示类别标签。始终假定，对于所考虑的任意I ，有 i、j、$k \in \{1, \ldots, I\}$。3. 一个类是指某个 $i = 1$、$\ldots I$ 的 $Y_i \in$ Y。指标 i 称为类 Y_i 的类别标签。4. 集合 A_i 表示仿射包 Y_i，见定义 2.2.3。5. 集合等距间距$(I, \mathbb{R}^n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中具有 I 个类的等距点的集合。见定义 2.1.1。当 I 和 $\mathbb{R}^n$ 已明确或不重要时，将其记为等距间距。6. 字母 I 表示类的个数。7. 在图中，颜色用于表示类。相同颜色的点属于同一类。8. 群 $E(n)$ 表示 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得群。9. 字母 V 表示一个线性子空间。 V_i 表示 A_i的差向量空间，见定义 2.2.3。10. 字母 $c_i \in \mathbb{R}^n$ 和 $r_i \in \mathbb{R}$ 表示 Y_i 的中心和半径，见定义 2.2.8。11. 集合 $S_r^m(c)$ 表示嵌入在 $\mathbb{R}^{m+1}$ 中、半径为 r 、中心为 c 的 m 球面。12. 记号 E_ℓ、n 是边长为 ℓ 、具有 n 个顶点的嵌入的正单纯形。13. S 指签名，见定义 2.7.1。14. $\mathbf{0}^n$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 中的零向量。当 n 明确或不重要时，将其省略。

算子

1. 范数 $\|\cdot\|$ 表示 $\mathbb{R}^n$ 上的欧几里得范数，其中 n ，而 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 表示 $\mathbb{R}^n$上的欧几里得内积。2. 记号 $|\mathcal{Y}|$:$= \cup_{i=1}^{I} Y_i$。也就是说， $|\mathcal{Y}|$ 表示将 $\mathcal{Y}$ 视为 $\mathbb{R}^n$的子集。3. 算子 Aff X 表示包含 $X \subset \mathbb{R}^n$的最小仿射子空间。4. proj$_X$ 表示到 X 上的正交投影，其中 X 是 $\mathbb{R}^n$的一个仿射子空间。

5. 记号 $\triangle_{xyz\dots}$ 表示一个嵌入的三角形或单纯形，其顶点为 x， y， z，.....。6. 记号 $\angle xyz$ 表示由直线 xy 和 yz形成的角。7. 对于集合 S，#(S)表示 S的基数。

变音符号、修饰符

1. 对于与类相关的对象（如中心、半径等），下标表示它们所属的类。例如， r_i 是与类 Y_i关联的半径， A_i 是与类 Y_i关联的最小仿射空间，等等。2. 当作出不失一般性的选择时，附在变量后的撇号表示不同的元素。例如，给定 $\mathrm{Y} \in \mathrm{ES}(I, \mathbb{R}^n)$， Y' 表示 $\mathrm{ES}(I, \mathbb{R}^n)$ 中的另一个元素。如果 $y_i \in Y_i$，那么 y_i' 表示 Y_i 中的另一个元素。3. 有时在作出不失一般性的选择后，需要考虑许多不同的元素。这种情况下，我们避免使用过多的撇号，而改用括号中的上标。例如，我们不写 Y、Y′、Y″、.....，而写 $\mathrm{Y}^{(1)}$、$\mathrm{Y}^{(2)}$、$\mathrm{Y}^{(3)}$、.....。4. 变音符号 $\widehat{\cdot}$表示包含意义下的极大性。例如，ES 表示极大等距间距的集合，S 表示极大签名的集合，等等。5. 上标 $\cdot^*$ 表示将 $\cdot$ 正交投影到某个仿射子空间上。这用于调用引理 2.3.1 的结果。

B 背景

定义 B.0.1 定义（仿射集）。 设 U 是一个向量空间，且 $A \subset U$。我们称 A 仿射 if

$$V \coloneqq \{u - v \colon u, v \in U\} \tag{203}$$

是一个线性子空间。我们称 V 是 A的差空间。

我们称 如果两个仿射空间的差空间正交，则称它们正交。

给定一个点集 $\{x_i\}_{i=1}^n$，我们定义

$$\mathrm{Aff}(\{x_i\}_{i=1}^n) \tag{204}$$

为包含点$\{x_i\}_{i=1}$的最小仿射集。

我们可以用几种不同的方式刻画仿射集，这些方式都很有用。

命题 B.0.2 （ A的刻画）。设 U 是一个向量空间的子集。以下各项等价。

1. A 是包含 U的最小仿射集。
2. A 是所有包含 U的仿射集的交集。
3. 令 m 为最大数，使得对于成对的 $((y_i, y_i'))_{i=1}^m$，向量 $y_1 - y_1', \dots, y_m - y_m'$ 线性无关。那么对于任意 $y \in U$， A 可表示为

$$A = y + \operatorname{span}\{y_1 - y_1', \dots, y_m - y_m'\}. \tag{205}$$

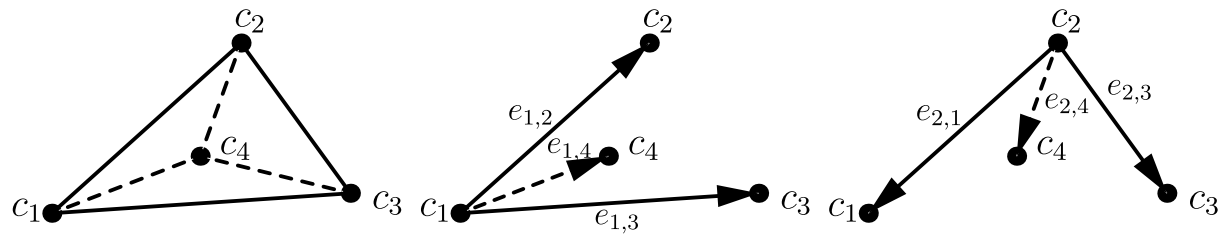
证明。 证明见图 13。显然，$\triangle$ 的每条棱都可以表示为沿着 $\triangle$某个顶点出发的棱上的向量之差。 □

定义 B.0.3 （凸包）。 给定集合 $X \subset \mathbb{R}^n$， X 的凸包是包含 X 的最小凸集。

等价地，它是所有包含 X 的凸集的交集。

定义 B.0.4 （反射算子）。 给定点 $x \in \mathbb{R}^n$ 和子集 $X \subset \mathbb{R}^n$，算子 $\mathrm{refl}_x X$ 是将 X 中所有点关于 x 反射的算子。

接下来，我们必须证明一个关于单形几何性质的抽象结论。这个证明与等距间距并无明显关联，但对于后续证明是必要的。



(a) 单纯形△ (b) 棱$\{e_{1,1},\ldots,e_{1,4}\}$ (c) 棱$\{e_{2,1},\ldots,e_{2,4}\}$

图 13：命题 B.0.2 背后的思路。

命题 B.0.5 (包含点的仿射空间)。 设 $\triangle$ 是 I 中的点。对于任意 $i,j\in\{1,\ldots,I\}$，定义 $e_{i,j}:=x_i-x_j$。则有以下结论。

1. 对于任意 i,j,

$$\operatorname{span}\{e_{i,1},\ldots,e_{i,I}\}=\operatorname{span}\{e_{j,1},\ldots,e_{j,I}\}. \tag{206}$$

˜*2.* 定义 $V:=$张成空间 $\{e_{i,1},\ldots,e_{i,I}\}$，并令 V为 $\mathbb{R}^n$的一个线性子空间。则以下陈述等价

˜*(a)* V 与 V 正交。*(b)* 存在一个 $i\in\{1,\ldots,I\}$，使得 V对每个 $e_{i,j}$ 都正交，其中 $j\in\{1,\ldots,I\}$。*(c)* 对每个 $e_{i,j}$， V都与之正交，其中 $i,j\in\{1,\ldots,I\}$。

证明。 首先，我们证明 1。定义

$$\tilde{V}_i:=\operatorname{span}\{e_{1,1},\ldots,e_{1,I}\}\quad \tilde{V}_j:=\operatorname{span}\{e_{j,1},\ldots,e_{j,I}\}. \tag{207}$$

˜ ˜我们旨在证明 $V_i=V_j$。注意，对任意 k,

$$e_{i,k}=\underbrace{e_{i,j}}_{\in\tilde{V}_j}+\underbrace{e_{j,k}}_{\in\tilde{V}_j}\in\tilde{V}_j \tag{208}$$

˜ ˜ ˜ ˜ ˜因此 $V_i\subset V_j$。在上述计算中交换 i 和 j 的角色，得到 $V_j\subset V_i$，故 $V_i\subset V_j$，从而证明 1。

˜首先，我们证明 2.a 蕴含 2.b。设 V和 V正交，并给定 $i\in\{1,\ldots,I\}$。那么 V和张成空间 $\{e_{1,1},\ldots,e_{1,I}\}=$张成空间 $\{e_{i,1},\ldots,e_{i,I}\}$，所以 V与每个 $e_{i,j}$都正交。
由公式 206 可直接得出 2.c。

˜2.c 推出 2.a，因为与每个 $e_{1,1}$、.....、 $e_{1,I}$正交意味着与 V 正交。 □

命题 B.0.6 (正交中心性在面投影下是不变量)。 单纯形的垂心在某个面上的正交投影，就是该面的垂心。

设 $\triangle$ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的一个单纯形，其顶点为 x_1、.....、 x_k，且 x^* 是 $\triangle$ 的垂心。设 $J\subset\{1$、.....、 $k\}$，$\triangle_J$ 是顶点为 $\{x_j\}_{j\in J}$ 的单纯形，且 $A_J:=$仿射包$(\{x_j\}_{j\in J})$。则 投影$_{A_J}x^*$ 是 $\triangle_J$ 的垂心。

证明。 根据 x^*的正交中心性，我们有

$$\overline{x_ix^*}\in\operatorname{Aff}(x_1,\ldots,x_k)^\perp\subset A_J^\perp. \tag{209}$$

设 $i\in J$，且令 $v:=x^*-x_i$，则可写成 $v=v_\parallel+v_\perp$，其中 $v_\parallel\in A_J$ 且 $v_\perp\in A_J$。根据线性性和 $i\in J$，我们有

$$v_\parallel=(x^*-x_i)_\parallel=x^*_\parallel-x_i,\quad v_\perp=(x^*-x_i)_\perp=x^*_\perp. \tag{210}$$

令 $\alpha\in\mathbb{R}$，则由公式 209,

$$\alpha v=\alpha(x^*_\parallel-x_i)+\alpha x^*_\perp\in A_J^\perp. \tag{211}$$

因此，根据 $A_J^{\perp}$、 $\alpha(x_{\|}^{*}-x_i)$ 的子空间性， $\in A_J^{\perp}$。但是

$$\overrightarrow{x_i \operatorname*{proj}_{A_J} x^*} = \left\{\alpha(x_{\|}^{*}-x_i)\colon \alpha\in\mathbb{R}\right\}, \tag{212}$$

因此 x_i投影$_{A_J}\, x^* \in A_J^{\perp}$。 □

命题 B.0.7 （正单纯形的外接中心）。 设 $E_{\ell,\ k}$ 是一个具有 k 个点、边长为 ℓ的嵌入的正单纯形。令 c 表示 $E_{\ell,\ k}$的外接中心。那么 $\|v-c\| = \ell\sqrt{{}_2}^{\ k}{}_{(k+1)}$ ，其中 v表示 $E_{\ell,\ k}$的一个顶点。

证明。 我们可以通过将 $E_{\ell,\ k}$的顶点 $v_1,\ldots,v_k$按如下方式嵌入到 $\mathbb{R}^k$ 中，来实现其嵌入：

$$v_1 \coloneqq \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell, 0, \ldots, 0\right), \ldots, v_k \coloneqq \left(0, \ldots, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\ell\right). \tag{213}$$

由对称性， $c\coloneqq(\alpha,\ldots,\alpha)$ 对某个 $\alpha\in\mathbb{R}$ 成立。特别地，它是使表达式 $\|v_i-c\|$ 最小的那个 α。计算可得

$$\|v_i-c\|^2 = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\ell-\alpha\right)^2 + k\alpha^2 = \frac{\ell^2}{2} - \sqrt{2}\ell\alpha + \alpha^2 + k\alpha \tag{214}$$

$$= \frac{\ell^2}{2} - \sqrt{2}\ell\alpha + (k+1)\alpha^2 \tag{215}$$

当以下条件成立时，这个二次表达式取得最小值

$$\alpha = \frac{\sqrt{2}\ell}{2\,(k+1)}. \tag{216}$$

因此我们有

$$\|v_i-c\|^2 = \frac{\ell^2}{2} - \frac{2\ell^2}{2(k+1)} + \frac{2(k+1)\ell^2}{4(k+1)^2} \tag{217}$$

$$= \frac{\ell^2}{2} - \frac{\ell^2}{k+1} + \frac{\ell^2}{2(k+1)} \tag{218}$$

$$= \frac{\ell^2}{2} + \frac{\ell^2}{2(k+1)} \tag{219}$$

$$= \ell^2\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{k+1}\right) = \ell^2\frac{k}{2(k+1)} \tag{220}$$

□

引理 B.0.8 (使子空间对齐的旋转的存在性)。 设 $(V_1,\ldots,V_k)$ 和 $(V\prime_1,\ldots,V\prime_k)$ 为 k 个 $\mathbb{R}^n$ 的向量子空间元组，使得 $V_1\oplus\cdots\oplus V_k$ 且 $V\prime_1\oplus\cdots\oplus V\prime_k$。
若 维数 V_i = 维数 $V\prime_i$，则存在一个旋转 $U\in L(\mathbb{R}^n)$ 使得

$$UV_i = V_i' \tag{221}$$

对每个 $i=1,\ldots,k$ 均成立。

证明。 对每个 $i=1,\ldots,k$ n_i =维数 V_i =维数 $V\prime_i$。定义 $e_1^{(i)},\ldots,e_{n_i}^{(i)}$ 和 $f_1^{(i)},\ldots,f_{(i)n_i}$ 为正交单位向量，使得

$$V_i = \operatorname{span}\left\{e_1^{(i)},\ldots,e_{n_i}^{(i)}\right\}, \quad V_i' = \operatorname{span}\left\{f_1^{(i)},\ldots,f_{n_i}^{(i)}\right\}. \tag{222}$$

注意到，根据 $V_1,\ldots,V_k$和 $V\prime_1,\ldots,V\prime_k$直和这一条件，这些集合

$$\bigcup_{i=1}^{k}\left\{e_1^{(i)},\ldots,e_{n_i}^{(i)}\right\}, \quad \bigcup_{i=1}^{k}\left\{f_1^{(i)},\ldots,f_{n_i}^{(i)}\right\} \tag{223}$$

是线性无关且标准正交的。如有必要，将这些集合扩充为 $\mathbb{R}^n$ 的标准正交基后，我们可以考虑线性映射 $U \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$，使得 $Ue_j^{(i)} = f_j^{(i)}$ 对每个 $i \in 1, \ldots, k'$ 和 $j = 1, \ldots, \dim Y_i$ 都成立。U 将一个标准正交基映射到另一个标准正交基，因此它是一个旋转。最后，

$$UV_i = U \operatorname{span}\left\{e_1^{(i)}, \ldots, e_{n_i}^{(i)}\right\} \tag{224}$$

$$= \operatorname{span}\left\{Ue_1^{(i)}, \ldots, Ue_{n_i}^{(i)}\right\} \tag{225}$$

$$= \operatorname{span}\left\{f_1^{(i)}, \ldots, f_{n_i}^{(i)}\right\} \tag{226}$$

$$= V_i'. \tag{227}$$

□