arXiv:2602.18587v1 [math.GR] 20 Feb 2026

Kunen 关于拟群定理中的结构性不动点原理

Takao Inou´e

日本大阪大和大学信息学部*

2026年2月21日

摘要

Kunen 证明，满足穆芳型恒等式（$N1$）的拟群必为环。我们将这一论证重新表述为集合范畴**Set** 中的不动点提取原理。由 $N1$ 可规范地得到一个幂等自同态 $j : G \to G$。其不动点对象 Fix(j) = Eq(j, id_G) 可分裂为一个收缩。 $N1$-对称性迫使 j 对（正则）平移作用取余等化，因此 j 经由终对象分解。于是 Fix(j) $\cong 1$，从而得到唯一的全局单位元。这为 Kunen 原有的代数证明 [1]提供了一种概念上的重新表述。

关键词： 拟群；环；穆芳恒等式；不动点原理；幂等元分裂；对称性坍缩；范畴化重述。

2020年数学主题分类： 20N05（主要）；18A20（次要）。

*电子邮件：inoue.takao@yamato-u.ac.jp；个人电子邮件：takaoapple@gmail.com[我更希望使用我的个人电子邮件地址进行通信。]

目录

1 引言 2 2 拟群与穆芳恒等式 3 3 不动点提取器 j**:** $G \to G$ **34 幂等性与不动点对象 4 5 平移作用与余等化子塌缩 5 6 集合范畴中的不动点坍缩引理 6 7 固定部分的范畴论塌缩 77.1** 对 Kunen 定理的应用.8 7.2 不动点与单位元.8**8 Kunen 定理作为不动点提取原理 8 9 讨论 9 10 结论 10**

1 引言

拟群与环构成非结合代数结构的一个核心类别，它们通过保留除法的可解性并放宽结合性来推广群。其中，穆芳型恒等式在控制类群行为得以恢复的程度方面起着根本作用。

Kunen 的一个经典结果表明，任何满足穆芳恒等式 ($N1$) 的拟群都必然具有双侧单位元，因而构成一个环。这一结果引人注目：一个纯粹的乘法恒等式迫使中性元存在，而无需事先假定它。Kunen 的原始证明通过一系列精细的等式变形进行，这些变形利用了 ($N1$) 的特定代数形式。

本文旨在对 Kunen 定理作出概念上清晰的重新表述。我们不沿用等式变换，而是提炼出论证背后的结构机制。

我们证明，$(N1)$ 会在底层集合上典范地诱导出一个幂等自同态，其不动点对象在拟群平移的作用下具有传递性。随后，一般的范畴坍缩原理迫使该不动点对象成为终对象，从而得到唯一的不动点。

这种方法表明，Kunen 定理是由对称性坍缩驱动的一种结构性不动点原理 的实例，而非源于对角化或显式计算。所得证明简短、自成一体，并凸显了一种可能在当前设定之外仍具有独立意义的机制。

2 拟群与穆芳恒等式

定义 2.1. 一个拟群 是带有二元运算 $\cdot$ 的集合 G：$G\times G\to G$，使得对每个 $a,b\in G$ 方程 $a\cdot x=b$ 与 $y\cdot a=b$ 均有唯一解。

我们照常记左除法与右除法：

$a\backslash b:=$ 为使得 $a\cdot x=b$ 成立的唯一 x，　　$b/a:=$ 为使得 $y\cdot a=b.$ 成立的唯一 y

于是 $a\cdot(a\backslash b)=b$，且 $(b/a)\cdot a=b$。

定义 2.2。 拟群 $(G,\ \cdot)$ 满足 *Kunen* 恒等式 $N1$ 当且仅当

$$(N1)\quad ((xy)z)y=x\big(y(zy)\big).$$

3 不动点提取器 $j:\ G\to G$

以下构造归功于 Kunen [1]。我们从范畴论的角度重新诠释它。

定义 3.1。定义映射 $j,\ k:\ G\to G$ 如下

$$j(x):=x\backslash x,\qquad k(x):=x/x.$$

等价地，对于所有 x，$x\cdot j(x)=x$ 且 $k(x)\cdot x=x$。

引理 3.2（双侧局部单位元）。 假设（$G,\cdot$）满足（$N1$）。那么，对于所有 x，j（x）$=k$（x）。因此，将 j 记作这个公共映射，我们有

$$x\cdot j(x)=x,\qquad j(x)\cdot x=x\qquad(\forall x\in G).\tag{1}$$

证明。 原始的代数推导见 Kunen [1], 定理 2.3。 □

注记 3.3。 对于下文的范畴论发展，推导引理 3.2 的具体过程并非关键；重要的是，$(N1)$ 能够典范地构造出一个满足 (1) 的自同态 $j\colon G \to G$。

4 幂等性与不动点对象

引理 4.1（值的幂等性）。 假设 $(N1)$。那么

$$j(x) \cdot j(x) = j(x) \tag{1}$$

证明。 这可由 $(N1)$ 的一个特化得到；参见 Kunen [1]。 □

命题 4.2（幂等自同态）。 自同态 $j\colon G \to G$ 在**集合范畴**中是幂等的：

$$j \circ j = j.$$

证明。 根据定义， $j(j(x))$ 是唯一满足 $j(x) \cdot t = j(x)$ 的元素 t。由引理 4.1，$t = j(x)$ 是这样的一个解；由唯一性可得 $j(j(x)) = j(x)$。 □

定义 4.3（不动点对象）。 将 j 在 **集合范畴**中的不动点对象定义为等化子

$$\mathrm{Fix}(j) := \mathrm{Eq}(j, \mathrm{id}_G) \hookrightarrow G.$$

具体而言，$\mathrm{Fix}(j) = \{x \in G \mid j(x) = x\}$。

注 4.4（幂等元分裂 $=$ 不动部分）。 在**集合范畴**中，每个幂等元都可分裂。设 $J := \mathrm{im}(j) \subseteq G$。那么 j 限制为一个收缩 $G \to J$，其截面为 $\iota\colon J \hookrightarrow G$：

$$G \xrightarrow{j} J \xrightarrow{\iota} G, \qquad j\iota = \mathrm{id}_J, \quad \iota j = j.$$

此外，对于幂等的 j，有 $\mathrm{Fix}(j) = \mathrm{im}(j)$：事实上， $x = j(x)$ 当且仅当 $x \in \mathrm{im}(j)$。因此，由 j 提取出的“不动部分”恰好是 J。

5 平移作用与余等化子坍缩

对于每个 $a \in G$，定义左平移 L_a： $G \to G$，其定义为 $L_a(x) = a \cdot x$。每个 L_a 都是一个双射。

引理 5.1（平移的正则性）。固定 $u \in G$。则映射

$$\phi_u : G \to G, \qquad a \mapsto a \cdot u$$

是一个双射。特别地，对于任意 x、$y \in G$，存在唯一的 $a \in G$ 使得 $L_a(x) = y$。

证明。这正是拟群公理： $a \cdot u = y$ 有唯一解a。

□

命题 5.2（正则平移族的余等化子）。设 $\{L_a\}_{a \in G}$ 是 G 上的左平移族。在 **集合范畴**中，所有映射L_a： $G \to G$ 的余等化子是终对象映射 $!$: $G \to 1$。等价地，G 上满足对所有 a、x 均有 $x \sim L_a(x)$ 的最小等价关系 $\sim$ 是平凡关系（所有元素都等价）。

证明。固定 $u \in G$。根据引理 5.1，对于任意 x，$y \in G$，存在 a 使得 $L_a(x) = y$。因此 $x \sim y$ 属于由 $x \sim L_a(x)$ 生成的同余关系。于是所有元素都变得等价，因此余等化子是 $G \to 1$。 □

范畴论中的“定点定理步骤”

来自 $(N1)$ 的关键补充条件是 j（在左侧）具有平移不变性，即 j 使族 $\{L_a\}$ 余等化：

引理 5.3（平移不变性 / 一致对合（Kunen 恒等式 (3)））。假设 $(N1)$ 以及引理 *4.1*（幂等性）。那么对所有 x，$y \in G$，

$$(x \cdot j(y)) \cdot j(y) = x. \tag{3'}$$

等价地，对每个固定的 y，右平移 $R_{j(y)}$： $G \to G$，$R_{j(y)}(x) = x \cdot j(y)$ 是一个对合： $R_{j(y)} \circ R_{j(y)} = \text{恒等}_G$。

证明。固定 $x,\ y \in G$ 并记 $u := j(y)$。以 Kunen 的形式应用（$N1$）

$$((a \cdot b) \cdot c) \cdot b \;=\; a \cdot \big(b \cdot (c \cdot b)\big)$$

作如下代换 $a := x$, $b := u$, $c := u$。我们得到

$$\big((x \cdot u) \cdot u\big) \cdot u = x \cdot \big(u \cdot (u \cdot u)\big). \tag{$*$}$$

由引理 4.1（应用于 y），可得 $u \cdot u = u$。因此，(∗) 的右端可化简为

$$x \cdot \big(u \cdot (u \cdot u)\big) = x \cdot (u \cdot u) = x \cdot u.$$

因此，(∗) 化为

$$\big((x \cdot u) \cdot u\big) \cdot u = x \cdot u. \tag{$**$}$$

由于 $(G,\ \cdot)$ 是一个拟群，映射 $R_u\colon\ G \to G,\ t \mapsto t \cdot u$ 是双射。因此，我们可以在 (∗∗) 中约去公共右因子 u，得到

$$(x \cdot u) \cdot u = x,$$

即 $(x \cdot j(y)) \cdot j(y) \;= x$。 □

定理 5.4 （不动点坍缩）。假设（$N1$）。则 $j\colon\ G \to G$ 为常值。等价地，在**集合范畴**中，$\mathrm{Fix}(j) \cong 1$。

证明。 根据引理 7.2，映射 j 使所有左平移都相等：$j \circ L_a = j$对每个 a 都成立。根据命题 5.2，$\{L_a\}$ 的余等化子是 $!: G \to 1$。因此，j 唯一地通过 1 分解：

$$G \xrightarrow{!} 1 \xrightarrow{e} G,$$

因此，j 是常值映射，其值为 $e(*) \in G$。由于对于幂等映射 j，$\mathrm{Fix}(j) = \mathrm{im}(j)$，我们有 $\mathrm{Fix}(j) \;= \{e(*)\}$，即 $\mathrm{Fix}(j) \cong 1$。 □

6 集合范畴中的一个不动点塌缩引理

我们首先以抽象形式提炼出这一坍缩现象背后的范畴论机制。

引理 6.1 (传递作用下的不动点塌缩**)**。设 X 是一个非空集合，且 $e : X \to X$ 是一个幂等自同态。假设 X 配备了一个双射族 $\{\alpha_i : X \to X\}_{i\in I}$，满足：

(i)（传递性）对于所有 x、$y \in X$，存在 $i \in I$，使得 $\alpha_i(x) = y$。

(ii)（余等化）对于所有 $i \in I$，都有 $e \circ \alpha_i = e$。

那么 e 是常值的。等价地，不动点对象

$$\mathrm{Fix}(e) = \mathrm{Eq}(e, \mathrm{id}_X)$$

是一个单元素集。

证明。设 $x, y \in X$。根据传递性，取 i 使得 $\alpha_i(x) = y$。于是

$$e(y) = e(\alpha_i(x)) = e(x),$$

所以 e 是常值的。由于 e 是幂等的，其像等于其不动点集，因此该集合只包含一个元素。 □

7 不动部分的范畴塌缩

设 $(G, \cdot)$ 为一个满足 $(N1)$ 的拟群。如同 Kunen 的构造，定义$j : G \to G$ 如下

$$x \cdot j(x) = x, \qquad j(x) \cdot x = x.$$

可以验证 j 是幂等的。

注 7.1（关于等式 $j = k$）。在 Kunen 的原始证明中，等式$j(x) = k(x)$ 由 $(N1)$ 经等式变形导出。这一步在代数上是实质性的，因为它将基于左除法和右除法的单位元提取器等同起来。

从范畴论视角来看，这个等式体现了左平移与右平移作用之间的结构对称性。拟群具有两个先验上彼此不同的左平移与右平移作用。穆芳恒等式 $(N1)$ 强制这两种作用彼此相容，使相应的两个局部单位元提取器重合。因此，恒等式 $j = k$ 所体现的不仅是一个计算事实，更是在两种平移对称性下出现的共同不变量。

引理 7.2. 对于每个 $a \in G$，左平移 $L_a(x) = a \cdot x$ 满足

$$j \circ L_a = j.$$

因此，幂等元 j 等化了所有左平移。

7.1 Kunen 定理的应用

现在我们验证上述情形满足引理 6.1 的假设。

双射族由左平移 $L_a(x) = a \cdot x$ 给出。

传递性由拟群性质推出：对于任意 $x,\ y \in G$，存在唯一的 a 使得 $a \cdot x = y$。

由引理 7.2 可得余等化，该引理表明 $j \circ L_a = j$ 对所有 a 均成立。

因此，适用引理 6.1，且 j 为常值。

7.2 不动点与单位元

令 $J = \mathrm{Fix}(j)$。由于 j 为常值，J 只含一个元素，记为 e。

由于 $e \in J$，我们有 $j(e) = e$。根据 j 的定义方程，

$$x \cdot j(x) = x, \qquad j(x) \cdot x = x,$$

并利用 j为常值这一点，我们得到

$$x \cdot e = x, \qquad e \cdot x = x \quad (\forall x \in G).$$

因此，e 是一个双侧单位元。

8 Kunen 定理作为固定点提取原理

定理 8.1 (Kunen)。 每个满足 $(N1)$ 的拟群都是一个环。

证明。 根据前面的论证，j 是取值为 e 的常值函数。因此，e 是一个双侧单位元。所以，$(G,\ \cdot)$ 是一个环。 □

概念总结

穆芳恒等式（$N1$）自然地产生一个幂等自同态 $j\colon G \to G$。将其分裂便可提取出一个不动点对象 J。拟群的平移在 J 上传递作用，从而迫使该作用的余等化子成为终对象。因此， J 退化为单元素集，其唯一元素就是全局单位元。这便将 Kunen 定理阐释为集合范畴中的不动点提取原理。

9 讨论

当前的重述表明，Kunen 定理由一种结构性不动点原理所支配，而非依赖临时的方程操弄。关键对象是幂等自同态 $j\colon G \to G$，它由穆芳恒等式（$N1$）规范地诱导而来。随后，通过拟群的可迁平移对称所驱动的不动点对象的范畴塌缩，推导出单位元的存在。

与对角不动点论证不同，此处的不动点源自对称性坍缩：一个将可迁自同构族等化的幂等映射，必定经由终对象分解。这使 Kunen 定理置身于更广阔的范畴图景之中；在这一图景里，不变量从高度对称的代数作用中涌现。

注 9.1（与 Lawvere 不动点定理的比较）。 Lawvere 不动点定理断言，在笛卡尔闭范畴中，若存在弱点满射 $e\colon A \to X^A$，则每个自同态 $f\colon X \to X$ 都有一个不动点。该定理抽象了支撑 Cantor 定理、G¨odel 不完备性以及自指现象的对角论证。

本文所展示的机制具有不同的性质。在这里，穆芳恒等式（$N1$）规范地生成一个幂等自同态 $j\colon G \to G$。我们并非诉诸对角化或自我应用，而是通过幂等元分裂提取一个不动点对象，并证明拟群的平移对称性会迫使该对象坍缩为终对象。因此，单位元作为由对称性坍缩所强制的唯一不动点而产生。

从这个意义上说，Kunen 定理体现了一种由代数对称驱动、而非由对角自指驱动的结构性不动点原理。

因此，在更广阔的范畴固定点现象领域中，本文的结果是对 Lawvere 定理的补充，而非与之相似的结果。

注记 9.2（超越 **集合范畴**）。 不动点坍缩引理仅依赖于两个结构特征：幂等元的分裂，以及传递自同构族的终对象余等化子的存在性。

因此，在任何幂等完备（柯西完备）且存在此类余等化子的范畴中，同样的不动点坍缩机制也适用。

例如，格罗滕迪克拓扑斯——如位点上的层范畴——都是幂等完备的，并且具有余等化子。在这类情形下，当前论证可以在内部表述，从而得到一种由对称性驱动的不动点坍缩现象。这表明，非结合代数与几何或层论框架之间可能存在潜在联系。

10 结论

我们已经证明，关于穆芳拟群的 Kunen 定理可以在集合范畴 **Set** 中，借助结构性不动点原理，得到一种清晰且概念透明的重新表述。穆芳恒等式（$N1$）自然地诱导出一个幂等自同态，其分裂提取出一个不动点对象。随后，拟群平移的作用迫使该对象坍缩为终对象，从而得到唯一的不动点。这个不动点恰好与所得环的单位元重合。

除了对 Kunen 原始论证作概念上的澄清外，本文的重新表述还凸显了一种通过对称性坍缩产生不动点的范畴论机制。这种机制不同于对角线不动点构造（如 Lawvere 定理），并揭示了一类互为补充的不动点现象：它们由代数对称驱动，而非自指。

参考文献

[1] K. Kunen, 《穆芳拟群》, 《代数杂志》183 (1996), 231–234。

[2]S. Mac Lane, 《工作数学家的范畴论》, 第 2 版, 施普林格, 1998。

井上隆夫′大和大学信息学部 日本大阪府吹田市片山町
2-5-1，邮编564-0082 inoue.takao@yamato-u.ac.jp（工作邮箱）takaoapple@gmail.com（我更常用个人邮箱）