arXiv:2602.18597v1 [math.FA] 20 Feb 2026

热方程与 ℓ^p上的霍奇拉普拉斯算子谱的独立性

PHILIPP BARTMANN、MATTHIAS KELLER

摘要。我们研究单纯复形上与霍奇拉普拉斯算子相关的热方程。借助近期发展的磁薛定谔算子研究技术，我们证明了 ℓ^2，上热半群核的 Davies-Gaffney-Grigoryan 型估计，并据此在适当的曲率和体积增长条件下，将半群扩展至 ℓ^p 上的 $p \in [1,\infty]$ 。此外，在曲率形式有界且体积增长一致次指数的假设下，我们证明了霍奇拉普拉斯算子谱的 p-独立性。尽管本文主要关注单纯复形上的霍奇拉普拉斯算子，所得结果实际上适用于图上的一般正磁薛定谔算子。

目录

1. 引言 1 2. ℓ^2 5上的磁薛定谔算子与半群 2.1. 图上的磁薛定谔算子 5 2.2. ℓ^2 6上的磁薛定谔半群 2.3. Davies-Gaffney-Grigoryan 引理 7 3. ℓ^p 9上的磁薛定谔半群 3.1. 形式有界势的情形 10 3.2. 指数体积增长的情形 13 3.3. 生成元的作用 16 3.4. 解析性与抛物型方程 17 4. ℓ^p-谱的独立性 17 4.1. 一致正测度与谱包含 18 4.2. ℓ^p-谱的独立性 20 5. 加权单纯复形 23 5.1. 加权单纯复形上的拉普拉斯算子 23 5.2. 加权单纯复形的结果 25 5.3. 组合权重的结果 27 参考文献 29

1. 引言

在黎曼几何中，霍奇拉普拉斯算子最为人熟知的作用，是在著名的Hodge 定理中将其核与紧流形上的de Rham 上同调联系起来。此外，它的谱还编码了几何

信息，因此在过去一个世纪里，它得到了广泛研究，并由此形成了谱几何这一领域。近年来，人们对各种离散空间上的霍奇理论日益关注 [Che18, For03, GLYZ25, HJ13, JMZ26, MHJ22] ；这一研究可追溯到 Eckmann 的开创性工作 [Eck44]。理解几何如何与霍奇拉普拉斯算子的解析性质相互作用，一种自然的方式是考察与之关联的热方程，研究热量如何随时间在给定空间中演化和扩散。热方程的 L^2-理论由来已久，并且借助谱定理，在连续情形 [Cha84, Dod76, Dod83, DM97, d R84, Str83]以及图的离散情形 [Bar17, BHY15, KLW21, Gri18, Woj08], 中都已得到充分理解；另可参见关于单纯复形和超图的近期研究 [HL18, Mug25, MKBJ22]。尤其是 Dodziuk 的研究弥合了连续与离散情形之间的鸿沟，参见例如 [Dod76, DM98]。对于流形，关于更一般的 L^p-空间也有大量文献 [CCH06, Cha05, CL25, Mag16, Str83] ；这些研究揭示了更多有趣而微妙的现象，例如 L^p-上同调、 L^p-Hodge 分解以及 L^p 中黎斯变换的有界性，并探讨了它们与热半群的联系。特别是， L^p 中半群生成元的谱的行为及其对 p 的依赖性，已受到广泛关注，研究对象包括作用于函数上的拉普拉斯算子和薛定谔型算子 [CKK19, HV86, HV87, Stu93], 以及作用于形式上的此类算子 [Cha05]。在 [Bra22] 中，这一理论被推广到更广泛的一类度量空间。

对于单纯复形等离散空间， ℓ^2-理论已在许多情形中得到改造，连续情形中的许多结果也有离散类比。然而，这大多是针对有限单纯复形完成的 [Dod76, HJ13] ，直到最近人们才开始关注无穷情形，[ATH15, Che18, EJ25b, EJ25a, HL18, Mas09]。特别是， ℓ^p-理论在图框架之外似乎在很大程度上尚未被探索 [BHK13, CHQ$^+$21, CCH20]。这里一个值得注意的例外是 [JM21], 但它同样只考虑有限复形。

在本文中，我们通过研究热半群的 ℓ^p-理论以及 ℓ^p-生成元的谱理论，朝着填补这一空白迈出一步，并旨在为后续发展奠定基础。为此，我们首先建立热半群核的 Davies-Gaffney-Grigoryan 型估计。这推广了 [HL18]中关于有界拉普拉斯算子的结果，并回答了其中提出的关于无界算子的问题。随后，我们将利用这些估计，在关于内在度量的适当体积增长假设下，把半群从 ℓ^2 延拓到 ℓ^p、 $1 \leq p \leq \infty,$ 。这使得我们能够求解 ℓ^p. 中具有初始条件的相应热方程。此外，我们还将探讨另外两个可将半群延拓到 $\ell^p,$ 的准则，即 ℓ^p 中拉普拉斯算子的有界性以及 Forman 曲率的型有界性。

基于这些结果，在一致次指数体积增长和曲率界的条件下，我们证明了霍奇拉普拉斯算子谱与 p 无关。我们的研究结果不仅证明了黎曼几何中经典结果的离散类比 [Bra22, Cha05, Stu93], 而且只需相当弱的假设。具体而言，我们不需要假设一致曲率下界，只需曲率形式有界；也不需要任何先验热核界，只需 Davies-Gaffney-Grigory'an 界。本文证明了这一界，并且对于给定的内在度量，它总是成立。此外，在下文讨论的组合情形中，我们甚至完全不需要曲率假设。

首先，我们考虑定义在带标准权重的组合单纯复形 Σ 上的霍奇拉普拉斯算子，这是一个自然的实例，可应用于我们更一般的结果。有关加权单纯复形这一一般情形的详情，请参阅第5节，其中回顾了 [BK25] 中的相关设定。因此，设 Σ 是一个带标准权重的组合单纯复形，并考虑作用于所有 k 形式直和上的霍奇拉普拉斯算子 $\omega = \oplus_k \omega_k$

$$\Delta^H = \delta\partial + \partial\delta,$$

其中， δ 和 ∂ 分别是余边界算子和边界算子。在 [BK25],中，证明了二次型

$$Q^H(\omega) = \|\delta\omega\|_2^2 + \|\partial\omega\|_2^2$$

定义在紧支撑形式上的算子是可闭的，因此产生了一个作用于 ℓ^2上的正自伴算子 Δ_2^H。

我们关注两个几何概念：曲率界和体积增长界。对于曲率，我们考虑 Forman 曲率 c^H，它自然地作为离散Bochner-Weitzenböck公式中针对 Δ^H,[For03]的势出现。具体而言，对于具有 $k = \dim(\tau)$ 的 $\tau \in \Sigma$，我们有，参见 [BK25，第 6 节。1]

$$c^H(\tau) = 2(k+1) + (k+2)\#\{\sigma \succ \tau\} - \sum_{\rho \prec \tau} \#\{\tau' \succ \rho\},$$

其中， $\prec$ 和 $\succ$ 指复形上的关联关系。尽管 Δ_2^H是一个正算子， c^H 仍可能取负值。我们考虑负部 $c_-^H = -(c^H \wedge 0)$ 相对于 Q^H形式有界的情形，即存在 M， $C \geq 0$，使得对于所有紧支撑的 $\varphi \in C_c(\Sigma)$

$$\|\sqrt{c_-^H}\varphi\|_2^2 \leq MQ^H(\varphi) + C\|\varphi\|_2^2.$$

在这种情况下，我们称 Σ 具有形式有界曲率，其界为 M。这一假设很自然，因为它在控制 Δ_2^H解析性质的同时，推广了一致曲率下界。

关于体积增长，我们考察 Σ 的1-骨架上相对于组合图度量的球的增长，该度量定义如下:

$$d(v,w) = \min\{n \mid \text{there is a path } v = v_0 \sim \ldots \sim v_n = w\}.$$

这里， $v \sim w$ 表示图上的通常邻接关系，即 v 和 w 在 Σ. 的1-骨架中由一条边连接。我们假设1-骨架是连通的，并考察球 $B_r(v) = \{w \in \Sigma_0 \mid d(v,w) \leq r\}$ 相对于 d 的增长。若存在 $C > 0$，使得对所有 $v \in \Sigma_0$、 $r > 0$，均有.....，则称该复形具有(一致)指数增长，其增长率为 $\nu \geq 0$。

$$\#B_r(v) \leq C\mathrm{e}^{\nu r}.$$

类似地，若对所有 $\varepsilon > 0$，都存在 $C_\varepsilon > 0$，使得对所有 $v \in \Sigma_0$， $r > 0$，则称其具有(一致)次指数体积增长。

$$\#B_r(v) \leq C_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon r}.$$

或许有人会问，为什么在这里组合距离就足以满足我们的需求。原因在于，在组合情形下，指数体积界会自动推出有界性，参见命题 5.2 和引理 5.7。对于加权单纯复形，情况则不同，详见第5节。

我们的目标是研究 $t > 0$ 和 $x \in \Sigma$的热方程

$$-\Delta^H \omega_t(x) = \frac{d}{dt}\omega_t(x) \tag{HE}$$

对于各种初始条件 ω_0. 对于 $\omega_0 \in \ell^2$，经典理论通过半群 $\omega_t = \mathrm{e}^{-t\Delta_2^H}\omega_0$中的谱定理来处理这一问题。我们称 (HE) 可在求解 ℓ^p 对于 $p \in [1,\infty]$，如果对所有初始条件 $\omega_0 \in \ell^p$，都存在一个函数 $[0,\infty) \to \ell^p, t \mapsto \omega_t$，使得 $t \mapsto \omega_t(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，在 $(0,\infty)$ 上可微，并且对所有 $t > 0$ 和 $x \in \Sigma$都满足 (HE)。此外，如果存在定义在 ℓ^p 上的强连续半群 S_p，使得 HE 的一个解可表示为 $\omega_t = S_p(t)\omega_0$ （对所有初始条件 $\omega_0 \in \ell^p$. ），我们就称 (HE) 在 ℓ^p 上由强连续半群求解 。我们证明主要结果的以下特殊情形。

定理 1.1 （热方程）。 设 Σ 是一个组合单纯复形。

(a) 假设 Σ 具有形式有界曲率，界为 $M \geq 0$。那么，对于区间$I = (2\frac{M+1}{M} - 2^{\sqrt{M+1}}{M}, 2\frac{M+1}{M} + 2^{\sqrt{M+1}}{M})$ 内的所有 p，（热方程）都可由作用在 ℓ^p 上的强连续半群求解，其中 $I = (1,\infty)$ 如果 $M = 0$。*(b)* 假设 Σ 至多具有指数增长。那么，对于所有 $p \in [1,\infty]$, （热方程）都可由作用在 ℓ^p 上的强连续半群求解。

事实上，如果我们进一步假设初始条件 ω_0 属于该半群生成元的定义域，那么在 (a) 中，区间 I 边界处的 p 也可以求解热方程（HE）。更具体地说，我们的结果表明， ℓ^2-半群可扩张为作用在 ℓ^p 上的强连续半群，其中 $p \neq \infty$ 取相应闭区间内的值。然而，当 p 取 I 边界处的值时，所得半群不一定是解析的，因此不会自动映射到其生成元的定义域。我们将该半群的生成元记为 $-\Delta_p^H$，将谱记为 $\sigma(\Delta_p^H)$。

利用这些关于热方程的结果，我们在适当的几何条件下建立霍奇拉普拉斯算子谱的 p-独立性。具体而言，我们证明如下定理。

定理 1.2 (p-谱的独立性)**.** 设 Σ 为具有次指数增长的组合单纯复形。则对所有 $p \in [1,\infty]$, 我们有

$$\sigma(\Delta_p^H) = \sigma(\Delta_2^H).$$

在 [BK25], 中，我们建立了加权单纯复形上霍奇拉普拉斯算子的框架，并证明了它们可表示为带符号薛定谔算子。这一视角不仅统一了各种离散拉普拉斯算子，也为运用薛定谔算子理论中的技巧开辟了道路。这将在我们对热方程以及霍奇拉普拉斯算子谱性质的分析中发挥关键作用。更确切地说，我们将在更一般的情形下证明上述结果，即势的负部形式有界的正磁薛定谔算子。这些将在下一节中引入；我们在那里证明关键的Davies-Gaffney-Grigoryan 型估计，并在第3节中利用这些估计，将 ℓ^2 上生成的半群延拓到 ℓ^p 空间并求解抛物方程。最后，在第4节中，我们研究谱的 p-独立性。上文所述霍奇拉普拉斯算子的结果随后作为特例在第5节中得出。

我们用 $\#A$ 或 $|A|$表示有限集 A的基数。此外， C 或 C''表示可能逐行变化的常数。

2. ℓ^2上的磁薛定谔算子与半群

在本节中，我们考虑加权图上的磁薛定谔算子。在 [BK25], 中，我们已证明霍奇拉普拉斯算子可以表示为磁薛定谔算子。因此，本节的结果尤其适用于霍奇拉普拉斯算子。关于图上算子的背景，我们参阅[KLW21、GKS16、Sch20]。

2.1. 图上的磁薛定谔算子。设 X 为一个离散集，并用 $C(X)$ 表示 X. 上所有复值函数构成的空间。相应地，用 $C_c(X)$ 表示 X. 上所有有限支撑函数构成的空间。对于离散集A 以及一个绝对可和或正函数 $f \in C(A)$，我们采用如下记号

$$\sum_A f = \sum_{x \in A} f(x).$$

函数 $m : X \to (0, \infty)$ 可通过定义$m(A) = \sum_A m$ （ $A \subseteq X.$ ）扩张为 X 上的一个具有全支撑的测度。我们称 (X, m) 为一个离散测度空间。与 (X, m) 相关的 ℓ^p-空间$p \in [1, \infty)$ 按照通常方式定义为

$$\ell^p = \ell^p(X, m) = \left\{ f \in C(X) \mid \|\omega\|_p^p = \sum_X m|f|^p < \infty \right\}$$

and

$$\ell^\infty = \ell^\infty(X) = \left\{ f \in C(X) \mid \|\omega\|_\infty = \sup_X |f| < \infty \right\}.$$

空间 ℓ^2 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\langle f, g \rangle = \sum_X mfg.$

图 b 在 (X, m) 上是一个对称函数 $b : X \times X \to [0, \infty)$，其对角线为零，并满足

$$\sum_{y \in X} b(x, y) < \infty$$

对所有 $x \in X$ 均成立。此外，我们令 $o : X \times X \to \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ 为满足 $o(x, y) = \overline{o(y, x)}$ 的函数，对所有 $x, y \in X.$ 均成立。我们称 o 为 $X.$上的磁势 。最后，令 $c : X \to \mathbb{R}$ 为一个（电）势。我们称 (b, o, c) 在 (X, m) 上构成一个磁薛定谔图。若对所有 $x \in X$，均有 $\#\{y \in X \mid b(x, y) > 0\} < \infty.$，则称该图为局部有限

与 (b, o, c) 在 (X, m) 上相关联的磁薛定谔算子 $\mathcal{H}$ 定义在

$$F = \{f \in C(X) \mid \sum_{y \in X} b(x, y)|f(y)| < \infty \text{ for all } x \in X\}$$

其作用方式为

$$\mathcal{H}f(x) = \frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x, y) \left(f(x) - o(x, y)f(y)\right) + \frac{1}{m(x)} c(x)f(x).$$

为了在 ℓ^2 上引入自伴限制，我们在 $C_c(X)$ 上定义相应的半双线性型。对于函数 $f \in C(X)$，记

$$\nabla_o f(x, y) = f(x) - o(x, y)f(y) \quad \text{and} \quad \nabla f(x, y) = f(x) - f(y).$$

格林公式 [GKS16, 引理 2.1.] 随后指出，对于 $\varphi \in C_c(X)$ 和 $f \in F$，有

$$\sum_X m\mathcal{H}f\overline{\varphi} = \frac{1}{2}\sum_{X\times X} b\nabla_o f\overline{\nabla_o\varphi} + \sum_X cf\overline{\varphi} = \sum_X mf\overline{\mathcal{H}\varphi}.$$

对于 $\varphi, \psi \in C_c(X)$，我们令

$$Q(\varphi,\psi) = \frac{1}{2}\sum_{X\times X} b\nabla_o\varphi\overline{\nabla_o\psi} + \sum_X c\varphi\overline{\psi}.$$

我们假设 Q 是正的，即对于所有 $\varphi \in C_c(X)$

$$Q(\varphi) := Q(\varphi,\varphi) \geq 0.$$

每当 Q 在 ℓ^2, 上可闭时，我们仍用 Q 表示其闭包，其定义域为 $D(Q)$。相应的定义在 ℓ^2 上的正自伴算子记为 $H = H_2$.

假设。 我们假设 (b, o, c) 是定义在 (X, m) 上的磁薛定谔图，且 Q 在 ℓ^2上为正且可闭。

关于 Q可闭性的判据，参见 [GKS16]。本文中特别相关的一种情形是具有形式有界势的形式。若对于所有$\varphi \in C_c(X)$，势 c 相对于 Q 满足形式界 M，$C \geq 0$ ，则称其形式有界

$$\|\sqrt{c_-/m}\varphi\|_2^2 \leq MQ(\varphi) + C\|\varphi\|_2^2,$$

其中 $c_- = -(c \wedge 0)$ 是 c. 的负部。在 [GKS16, 命题 2.8.] 中证明了，若 c 形式有界，则 Q 在 ℓ^2中可闭。注意，正如引言中所指出的，形式有界势对应于霍奇拉普拉斯算子的形式有界曲率。然而，正如 [BK25]中所讨论的，即使不对曲率作任何假设，霍奇拉普拉斯算子的形式也总是正且可闭的。

2.2. 上的磁薛定谔半群 ℓ^2。 谱定理导出了一个强连续压缩半群 $S_2 : [0,\infty) \to \mathcal{B}(\ell^2)$, $S_2(t)f = \mathrm{e}^{-tH}f$，其中 $\mathcal{B}(\ell^2)$ 是作用于 ℓ^2 上的有界算子，并且其特征对于 $t \geq 0$ 由其积分核给出

$$p_t : X \times X \to \mathbb{C}, \qquad p_t(x,y) = \frac{\langle \mathrm{e}^{-tH}1_x, 1_y\rangle}{m(x)m(y)}.$$

令 $K \subseteq X$ 为有限，并令 $\ell^2(K, m) = C(K)$。我们有典范包含$\iota_K : \ell^2(K, m) \to \ell^2$，它通过将函数从 K 延拓为零至 X 而得到。其伴随 ι_K^* 由将 ℓ^2 中的函数限制到 K. 给出。我们定义作用于 $\ell^2(K, m)$ 上的算子 H_K 为

$$H_K f(x) = \frac{1}{m(x)}\sum_{y\in K} b(x,y)\left(f(x) - o(x,y)f(y)\right) + \frac{1}{m(x)}c_K(x)f(x),$$

其中 $c_K(x) = c(x) + \sum_{y\in X\setminus K} b(x, y)$。根据构造， H_K 是与二次型 $Q_K = Q\,|_{\ell^2(K,\, m)}$ 相关联的自伴正算子，并生成半群 e^{-tH_K}.

现在令 K_n, $n \in \mathbb{N}$ 为 X 的一个有限子集穷竭，即满足 $K_n \subseteq K_{n+1}$ 和 $\bigcup_n K_n = X$. 的有限子集。于是，我们得到如下半群的强收敛结果，见 [GKS16, 命题 2.20]。

命题 2.1 （半群收敛）。 假设 Q 在 ℓ^2. 上为正且可闭。设 $t \geq 0$ 和 K_n 是一个穷竭。那么，

$$\iota_{K_n} \mathrm{e}^{-tH_{K_n}} \iota_{K_n}^* \to \mathrm{e}^{-tH} \text{ strongly in } \ell^2 \text{ as } n \to \infty.$$

2.3. **Davies-Gaffney-Grigoryan 引理**。 本小节中，我们证明一个适用于磁薛定谔算子的 Davies-Gaffney-Grigoryan 型引理。这推广了 [BHY15, BHY17]的结果。

考虑关于图 b （位于 (X, m), 上）的一个内在度量 d，即一个伪度量 d，使得对所有 $x \in X$

$$\frac{1}{m(x)} \sum_{y \in X} b(x,y) d(x,y)^2 \leq 1.$$

我们将 d的跳跃大小 s定义为

$$s = \sup_{x \sim y} d(x,y),$$

其中 $x \sim y$ 表示上确界取遍所有满足 $b(x, y) > 0$. 的数对 $x, y \in X$

假设。 我们固定一个跳跃尺度有限的内在度量 d $s > 0$.

令 $\sigma(H_2)$ 表示 $H = H_2$. 的 ℓ^2-谱。令

$$\lambda_2 = \inf \sigma(H_2).$$

定理 2.2 (Davies-Gaffney-Grigoryan)。 对所有 f, $g \in \ell^2$, $A =$ supp f, $B =$ supp g 均有

$$|\langle \mathrm{e}^{-tH} f, g \rangle| \leq \exp\left(-\lambda_2 t - \frac{t}{s^2} \zeta\left(\frac{sd(A,B)}{t} \right) \right) \|f\|_2 \|g\|_2,$$

其中

$$\zeta(r) = \left(r \operatorname{arcsinh}(r) - \sqrt{1+r^2} + 1 \right).$$

取顶点 x、$y \in X$ 的特征函数 1_x, 1_y, 由定理 2.2 可得估计

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{\exp(-\lambda_2 t - (t/s^2)\zeta(sd(x,y)/t))}{\sqrt{m(x)m(y)}}.$$

证明分为两个主要步骤。首先，我们证明有限子集 $K \subseteq X$, 上的能量泛函满足衰减估计，这推广了 [BHY17, 引理 3.2] 中的结果，使其适用于磁薛定谔算子。其次，我们利用命题 2.1 中的半群收敛，将结果推广到整个空间 X。

下一个引理已在 [BHY15, BHY17], 中针对图、在 [HL18] 中针对具有有界拉普拉斯算子的单纯复形加以证明，并最终可追溯至关于流形的结果 [Dav92, Gaf59]。我们将其推广到有限子集上的磁薛定谔算子。我们称函数 $\omega : X \to \mathbb{R}$ 关于 d 是利普希茨的，其利普希茨常数为$\kappa > 0$，如果对于所有 $x, y \in X$，都有 $|\omega(x) - \omega(y)| \leq \kappa d(x, y)$。此外，对于

$U \subseteq X$，如果函数 $u\colon [0,\infty) \times U \to \mathbb{R}$ 被称为在 U上的抛物型方程的解，则 $t \mapsto u_t(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续，在 $(0,\infty)$ 上可微，并且满足

$$-\mathcal{H}u_t(x) = u_t'(x)$$

对所有 $t > 0$ 和 $x \in U$，其中 u_t 通过延拓为 0 定义在 $X \setminus U$ 上，而 u_t' 表示 u_t的时间导数

引理 2.3。设 $K \subseteq X$ 是一个有限子集。设 ω 是一个有界实值利普希茨函数，其利普希茨常数为 $\kappa > 0$，并设 u 是定义在 K上的抛物型方程的一个解。那么，

$$t \mapsto \exp\left(2\lambda_2(K)t - \frac{2t}{s^2}(\cosh\frac{\kappa s}{2} - 1)\right)E_u(t)$$

关于 $t \geq 0$是非增的，其中 $\lambda_2(K)$ 是 H_K 的最小特征值，并且

$$E_u(t) = \sum_K m|u_t|^2 \mathrm{e}^{\omega}.$$

证明。我们紧密遵循 [BHY17, 引理 3.2] 的证明。设 $(f \otimes g)(x,y) = f(x)g(y)$，$x, y \in X$。对 $t \mapsto E_u(t)$ 关于时间求导，并利用抛物型方程和格林公式，得到

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}E_u(t) &= 2\sum_K m\mathrm{Re}(\overline{u_t}u_t')\mathrm{e}^{\omega} = -2\sum_K m\mathrm{Re}(\overline{u_t}H_K u_t)\mathrm{e}^{\omega} = -2\mathrm{Re}\,Q(u_t, \mathrm{e}^{\omega}u_t)\\ &= -2Q(u_t\mathrm{e}^{\omega/2}) - 2\sum_{K\times K} b\mathrm{Re}\left[\overline{o}\cdot(\mathrm{e}^{\omega/2}u_t \otimes \mathrm{e}^{\omega/2}\overline{u}_t)\right]\left(1 - \cosh\left(\nabla \mathrm{e}^{\omega/2}\right)\right)\\ &\leq -2\lambda_2(K)E_u(t) + \frac{2}{s^2}(\cosh\frac{\kappa s}{2} - 1)E_u(t),\end{aligned}$$

其中，最后一步用到了 ω 的利普希茨性质，以及 d 是跳跃大小为 s 的内蕴度量这一事实（关于具体估计的细节，参见 [BHY17, 引理 3.2]）。这就证明了该引理。□

有了这些准备，我们现在可以证明定理 2.2。

定理 *2.2* 的证明。我们只证明函数

$$t \mapsto \exp\left(2\lambda_2 t - \frac{2t}{s^2}(\cosh\frac{\kappa s}{2} - 1)\right)E(t), \qquad t \geq 0,$$

是非增的，其中

$$E(t) = \|\mathrm{e}^{\omega/2}S_2(t)u\|_2^2$$

对于任意初始条件 $u \in \ell^2$ 以及 ω 任意利普希茨函数，其利普希茨常数为 $\kappa > 0$. 一旦完成这一点，证明的其余部分将完全按照 [HL18，定理 1.2] 或 [BHY17，定理 1.1]进行。

首先，取有限集的一个穷竭 $K_n \subseteq X$，$n \in \mathbb{N}$。由于

$$\lambda_2 = \inf_{\varphi \in C_c(X), \|\varphi\|=1} Q(\varphi)$$

由此很容易得出 $\lambda_2 = \lim_{n\to\infty}\lambda_{2,n}$ 其中 $\lambda_{2,n} = \lambda_2(K_n)$ 是 H_{K_n} 的最小特征值。此外，根据命题 2.1，我们有

$$u_{n,t} = \iota_{K_n}\mathrm{e}^{-tH_{K_n}}\iota_{K_n}^* u \to S_2(t)u \quad \text{in } \ell^2.$$

由于 e^{ω} 有界，我们得出

$$\exp\left(2\lambda_2 t - \frac{2t}{s^2}(\cosh\frac{\kappa s}{2} - 1)\right)E(t) = \lim_{n\to\infty}\exp\left(2\lambda_{2,n} t - \frac{2t}{s^2}(\cosh\frac{\kappa s}{2} - 1)\right)E_{u_n}(t).$$

所需的单调性现在由引理 2.3 得出。 □

下面的推论直接由定理 2.2 得出，并给出显式的热核估计。其灵感来自 [BHK13, Lemma 3.7]，但常数 C_β更优。具体而言，当 $\beta > 0$. 足够小时，常数 C_β 可以任意小。这将在下一节中派上用场。

推论 2.4。对于所有 $\beta > 0$，存在常数 $C_\beta = s^{-2}(\cosh(\beta s) - 1)$，使得对于所有 $t \geq 0$、x、$y \in X$,

$$|p_t(x,y)| \leq \frac{1}{\sqrt{m(x)m(y)}}\mathrm{e}^{-\beta d(x,y)+C_\beta t-\lambda_2 t}.$$

证明。考虑函数

$$f(r) = s^{-2}\left(rs\operatorname{arcsinh}(sr) - \sqrt{1+r^2s^2}+1\right) - \beta r$$

对于 $r \geq 0.$，直接计算可得 $f'(r) = s^{-1}\operatorname{arcsinh}(rs) - \beta$，且 $f''(r) > 0$.。因此， f 在 $r_0 = \sinh(s\beta)/s.$ 处取得最小值。于是,

$$f(r) \geq f(r_0) = \frac{1-\cosh(\beta s)}{s^2}.$$

观察到 $(t/s^2)\zeta(sd(x,\ y)/t) = t(f(d(x,\ y)/t) + \beta d(x,\ y)/t)$.

□后，该结论由定理 2.2 得出。

3. ℓ^p上的磁薛定谔半群

本节旨在探究半群$S_2(t) = \mathrm{e}^{-tH_2}$ 可一致地扩张为 ℓ^p 上的强连续半群 S_p 的条件，其中 $p \in [1,\infty]$. 一致地是指，对于所有 $t \geq 0.$，在 $\ell^2 \cap \ell^p$ 上有 $S_2(t) = S_p(t)$。对于由狄利克雷型导出的图拉普拉斯算子，这是马尔可夫性质的一个众所周知的推论 [Dav07, KLW21]。然而，对于磁薛定谔算子，这通常并不显然。

我们先回顾一些以这种方式得到的半群的一般事实。设$1 \leq p < \infty$ 和 $-H_2$ 分别为 S_2 和 S_p 的生成元。若$p > 1$, 则对于 q，我们还可在 ℓ^q 上得到强连续半群 S_q，其中 p.是 p.的 Hölder 对偶。这是由 S_2的对称性、 ℓ^p 与 ℓ^q的对偶性，以及 $\ell^p \cap \ell^q$ 在 ℓ^q. 中的稠密性得出的。此外，对于所有 $t \geq 0$，有 $S_p(t) = (S_q(t))^*$, 且 $H_p = (H_q)^*$，其中 $*$ 表示算子的巴拿赫空间伴随。这也意味着谱之间存在如下关系： $\sigma(H_p) = \sigma(H_q)^*$，其中 $*$ 表示复共轭，即谱会沿实轴翻转。只要 S_1 存在，我们便直接在 ℓ^∞ 上定义 $S_\infty(t) = (S_1(t))^*$，以及 $H_\infty = (H_1)^*$. 。这里需要注意，由于 $\ell^1 \cap \ell^\infty$ 在 ℓ^∞. 中不稠密， S_∞ 通常不会是强连续的，而仅是弱-$*$-连续的。这些半群彼此一致，也就是说，对于所有 $1 \leq p$、$q \leq \infty$，在 $\ell^p \cap \ell^q$. 上有 $S_p = S_q$

我们提出了两个判据，以确保 S_2 一致地延拓至 ℓ^p. 。第一个判据可视为霍奇拉普拉斯算子情形下的曲率条件，即假设势 c的负部满足形式界。第二个判据则是关于距离球相对于

具有有限跳跃尺度的内在度量 d 的体积增长所作的假设。

同样，在本节中，我们始终假设（b，o，c）是定义在（X，m）上的磁薛定谔图，并且 Q 在 ℓ^2 中可闭且为正。

3.1. 形式有界势的情形。 以下结果是本小节的主要定理。回顾一下，λ_2 表示 H_2 的 ℓ^2-谱底，而 c称为形式有界，界为 $M > 0$ 和 $C \geq 0$，如果对所有 $\varphi \in C_c(X)$，都有$\|\sqrt{c_-/m}\varphi\|_2^2 \leq MQ(\varphi) + C\|\varphi\|_2^2$。我们将算子 $T\colon \ell^p \to \ell^q$的算子范数记为$\|T\|_{p,q}$，其中 p，$q \in [1,\infty]$.

定理 3.1 (形式有界势)。 假设 c 是形式有界的，界为$M > 0$和 $C \geq 0$。对于所有 $p \in I = [2\frac{M+1}{M} - 2\frac{\sqrt{M+1}}{M}, 2\frac{M+1}{M} + 2\frac{\sqrt{M+1}}{M}]$和所有$t \geq 0$，$S_2(t)$作为 ℓ^p 上的算子是有界的，并且

$$\|S_2(t)\|_{p,p} \leq \mathrm{e}^{-D_p t},$$

其中 $D_p = (C_p - M(1-C_p))\ \lambda_2 - C(1-C_p)$ $C_p = 4\frac{p-1}{p^2}$。特别地，S_2可一致地延拓为定义在 ℓ^p. 上的强连续半群 S_p

定理 3.1 的灵感来自 [Mag16, Proposition 3.3], ，而后者本身依赖于 [LS96] 中的思想。注意到 $C_p = 4\frac{p-1}{p^2} \in [0,1]$，并且对于 $p \in I$，我们有 $C_p - M(1-C_p) \geq 0$。为证明这一点，记二次型 Q 在 $C_c(X)$ 上的正部为

$$q = Q + \frac{c_-}{m}.$$

引理 3.2。 设 $f \in C_c(X)$ 且 $p \in [1,\infty)$。那么，

$$\operatorname{Re} q(f, f|f|^{p-2}) \geq 4\frac{p-1}{p^2} q(f|f|^{(p-2)/2}).$$

证明。 我们根据以下逐点估计推出该结论。取定 $x, y \in X$，并令 $|f(x)| \geq |f(y)|$.。假设 $f(x) \neq 0$.。令$C_p = 4\frac{p-1}{p^2}$.。注意到$1 - C_p = (\frac{p-2}{p})^2$.。回忆$\nabla_o f = f(x) - o(x,y)f(y)$且 $\nabla f = f(x) - f(y)$。那么

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Re}(\nabla_o f \overline{\nabla_o (f|f|^{p-2})}) - C_p \left|\nabla_o (f|f|^{\frac{p-2}{2}})\right|^2 \\
&\quad = (1-C_p)\left(|f(x)|^p + |f(y)|^p\right) \\
&\qquad - \operatorname{Re}\left(o(x,y) f(y)\overline{f(x)}\right)\left(|f(x)|^{p-2} + |f(y)|^{p-2} - 2C_p |f(x)f(y)|^{\frac{p-2}{2}}\right) \\
&\quad \geq (1-C_p)\left(|f(x)|^p + |f(y)|^p\right) \\
&\qquad - |f(x)f(y)|\left((\nabla|f|^{\frac{p-2}{2}})^2 + 2(1-C_p)|f(x)f(y)|^{\frac{p-2}{2}}\right) \\
&\quad = (1-C_p)\left(\nabla|f|^{\frac{p}{2}}\right)^2 - |f(x)||f(y)|\left(\nabla|f|^{\frac{p-2}{2}}\right)^2 \\
&\quad = |f(x)|^p \left(\left(\frac{p-2}{p}\right)^2 \left(1 - \left(\frac{|f(y)|}{|f(x)|}\right)^{\frac{p}{2}}\right)^2 - \frac{|f(y)|}{|f(x)|}\left(1 - \left(\frac{|f(y)|}{|f(x)|}\right)^{\frac{p-2}{2}}\right)^2\right) \\
&\quad \geq 0,
\end{aligned}$$

其中，我们在最后一步利用该不等式得出其为正。

$$\left(\frac{p-2}{p}\right)^2 (1 - t^{p/2})^2 \geq t(1 - t^{\frac{p-2}{2}})^2$$

对所有 $t \in [0,1]$, $p \in [1,\infty)$，这由 [LS96, 引理 2.1, 不等式 (2.4)] 得出。情形 $f(x) = 0$ 是显然的。将两边乘以 $b(x, y)$，再将势的正部加到两边，并对 x, y 求和，即得所述结论。□

注。可以用与引理 3.2 非常相似的方法证明以下估计

$$\kappa(p) q(f|f|^{(p-2)/2}) \geq \operatorname{Re} q(f, f|f|^{p-2})$$

对所有 $f \in C_c(X)$ 和 $p \in [1,\infty)$，其中

$$\kappa(p) = \sup_{t \in (0,1)} \frac{(1+t)(1+t^{p-1})}{(1+t^{p/2})^2}.$$

证明用到了以下估计

$$t(1 - t^{\frac{p-2}{2}})^2 \leq (\kappa(p) - 1)(1 + t^{p/2})^2$$

对所有 $t \in [0,1]$，该估计可由 [LS96, 引理 2.1, 不等式 (2.5)] 推得。

我们还指出，以下关于 ℓ^2 上强连续半群的延拓引理本身也很有意义。

引理 3.3。设 $(T(t))$ 是 ℓ^2 上的一个强连续半群，满足

$$\|T(t)f\|_p \leq e^{-At} \|f\|_p$$

对所有 $f \in C_c(X)$ 以及某个 $A \in \mathbb{R}$ 和某个 $1 \leq p < \infty$ 成立。因此，$(T(t))$ 可延拓为 ℓ^p 上的强连续半群，且具有相同的界。

证明。由于 $C_c(X)$ 在 ℓ^p 中稠密，我们可以将所有 $t \geq 0$ 对应的 $T(t)$ 延拓为 ℓ^p.上的有界算子 $T_p(t)$。于是算子族 $(T_p(t))$ 显然满足半群性质 $T_p(s+t) = T_p(s)T_p(t)$，因为该性质在稠密子空间 $C_c(X)$ 上成立。

要证明强连续性，只需证明对所有 $f \in C_c(X)$，$\lim_{t \to 0^+} \|T_p(t)f - f\|_p = 0$，因为 $C_c(X)$ 在 ℓ^p 中稠密，并且我们已经知道 T_p 是指数有界的。设 $f \in C_c(X)$ 且 $K = \operatorname{supp} f$. 由于 $T_p = T$ 在 $C_c(X)$ 上，且 T是强连续的，由 K 的有限性和逐点收敛可得

$$\lim_{t \to 0^+} \sum_K m|T_p(t)f - f|^p = \sum_K m \lim_{t \to 0^+} |T(t)f - f|^p = 0.$$

同理，我们还有 $\sum_K m|T_p(t)f|^p \to \sum_K m|f|^p$ 当 $t \to 0^+$ 时成立。因此，对于求和中剩余的部分，我们使用三角不等式以及关于 $T_p(t)$ 的界，得到

$$\begin{aligned}\sum_{X \setminus K} m|T_p(t)f - f|^p = \sum_{X \setminus K} m|T(t)f|^p &= \|T(t)f\|_p^p - \|f\|_p^p - \sum_K m(|T_p(t)f|^p - |f|^p) \\ &\leq (\mathrm{e}^{-At} - 1)\|f\|_p^p - \sum_K m(|T_p(t)f|^p - |f|^p).\end{aligned}$$

根据上述论证，右端在 $t \to 0.$ 时趋于零 □

现在我们可以证明定理 3.1。

定理 3.1 的证明。令 $f \in C_c(X)$，且 $\operatorname{supp} f \subseteq K$ 为某个有限集 $K \subseteq X$，并令 $f_t = \mathrm{e}^{-tH_K} f$, $t \geq 0$，其中 H_K 已在命题 2.1 上方定义。注意，$f_t' = -H_K f_t$. 我们通过零延拓将 $f_t \in \ell^p(K, m)$ 视为 ℓ^p 中的元素

X.于是，对于所有 $p \in I = [2\frac{M+1}{M} - 2\frac{\sqrt{M+1}}{M}, 2\frac{M+1}{M} + 2\frac{\sqrt{M+1}}{M}]$，我们有 $p \neq 1, \infty$因为 $M > 0$，从而得到

$$-\frac{1}{p}\frac{d}{dt}\|f_t\|_p^p = \sum_K m|f_t|^{p-2}\mathrm{Re}(\bar{f}_t H_K f_t) = \mathrm{Re}\, Q(f_t, f_t|f_t|^{p-2})$$
$$\geq [(C_p - M(1-C_p))\,\lambda_2 - C(1-C_p)]\,\|f_t\|_p^p = D_p\|f_t\|_p^p,$$

其中 $D_p = [(C_p - M(1-C_p))\ \lambda_2 - C(1-C_p)]$，$C_p = 4\frac{p-1}{p^2}$且$\lambda_2$是算子 H_2.的 ℓ^2-谱底。这里，不等式由引理 3.2、 c_- 的形式界以及对所有 $p \in I$.均有 $(C_p - M(1-C_p)) \geq 0$ 这一事实推出

我们所证明的内容等价于

$$\frac{d}{dt}\ln(\|f_t\|_p^p) \leq -pD_p.$$

对两边从 0 积分到 t 并取指数，得到

$$\|f_t\|_p^p \leq \mathrm{e}^{-tpD_p}\|f\|_p^p.$$

现在令 K_n， $n \geq 1$为 X 的一个由有限子集构成的穷竭。由命题 2.1可推知，对于所有 $t \geq 0$，$\mathrm{e}^{-tH_{K_n}} f$ 逐点收敛到 $S_2(t)f$，当 $n \to \infty$.时。因此，由 Fatou 引理可得

$$\|S_2(t)f\|_p^p \leq \liminf_{n\to\infty} \|\mathrm{e}^{-tH_{K_n}} f\|_p^p \leq \mathrm{e}^{-tpD_p}\|f\|_p^p.$$

S_2 可延拓为 ℓ^p 上的强连续半群这一事实，由 $C_c(X)$在 ℓ^p 中的稠密性以及引理 3.3 推出。□

定理 3.1 排除了 $p = 1.$ 的情形。不过，利用 Kato 不等式，我们可以证明，在更强的下有界势假设下，该结论仍然成立；这对应于形式界 $M = 0.$

定理 3.4（有界势）。假设势 c/m 下有界，即存在 $K \in \mathbb{R}$ 使得 $c/m \geq -K.$。那么，对于所有 $p \in [1, \infty]$ 和 $t \geq 0$,

$$\|S_2(t)\|_{p,p} \leq \mathrm{e}^{Kt}.$$

特别地， S_2 可扩展为一个强连续半群（当 $1 \leq p < \infty$ 时），以及一个弱-$*$-连续半群（当 $p = \infty.$ 时）

证明。在给定的假设下，我们可以应用 [GKS16 定理 5.2 (a)]，从而对所有 x, $y \in X$、 $t \geq 0$，得到估计

$$|p_t(x,y)| \leq \mathrm{e}^{Kt}\tilde{p}_t(x,y),$$

其中， $\tilde{p}_t$ 是由 $-\Delta$，图 $(b,\ 1,\ 0)$ 上、定义在 $(X,\ m)$ 上的拉普拉斯算子所生成的半群的核。然而， $-\Delta$ 生成一个马尔可夫半群 [KLW21，命题 2.6]，因此对所有 $x \in X$

$$\sum_{y\in X} m(y)\tilde{p}_t(x,y) \leq 1.$$

因此，对于 $f \in C_c(X)$,

$$\|S_2(t)f\|_1 \leq \mathrm{e}^{Kt}\sum_{y\in X} m(y)|f(y)| \sum_{x\in X} m(x)\tilde{p}_t(x,y) \leq \mathrm{e}^{Kt}\|f\|_1.$$

由 $C_c(X)$ 在 ℓ^1中的稠密性可知， S_2 可一致地延拓为作用于 ℓ^1. 上的半群 S_1。由引理 3.3，结论对 $p=1$ 成立。利用对偶性，我们得到作用于 ℓ^∞ 上的弱-$*$-连续半群 S_∞，其具有相同的界，并且与 $\ell^1\cap\ell^\infty$上的 S_2 相一致。然后通过插值可得结论对所有 $p\in[1,\infty]$. □均成立。

若图 b 局部有限，则定理 3.4 的陈述实际上变为一个等价命题。其论证基本上与 [JM21，定理 2.1] 中的论证相同。特别地，对于局部有限的单纯复形，这一结果刻画了霍奇拉普拉斯算子生成的半群的指数界与 Forman 曲率下有界性之间的关系。

命题 3.5。 假设 b 局部有限，且 S_2 一致地扩张为 ℓ^1. 上的强连续半群 S_1 。假设存在 $K\in\mathbb{R}$，使得对所有 $\omega\in\ell^1$ 和 $t\geq 0$，均有

$$\|S_1(t)\omega\|_1\leq \mathrm{e}^{tK}\|\omega\|_1.$$

则 c/m 下有一致界，即对所有 $x\in\Sigma$，均有

$$\frac{c(x)}{m(x)}\geq -K.$$

证明。 固定 $x\in X$，并将函数 φ_x 定义为

$$\varphi_x(y)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad y=x.\\ \overline{o(x,y)}, & \text{if}\quad b(x,y)>0.\\ 0, & \text{else.}\end{cases}$$

由局部有限性可知 $\varphi_x\in C_c(X)\subseteq D(H_2)$，这是由 [GKS16，引理 2.11] 和格林公式 [GKS16，引理 2.1] 得出的。此外，根据构造可得

$$H_2\varphi_x(x)=\frac{c(x)}{m(x)}.$$

于是，由 S_1 和 S_2 在 $C_c(X)$, 上的一致性可得

$$S_2(t)\varphi_x(x)=\langle S_2(t)\varphi_x,1_x/m\rangle=\langle\varphi_x,S_1(t)1_x/m\rangle$$

因此

$$\mathrm{Re}(S_2(t)\varphi_x(x))\leq \mathrm{e}^{tK}\|\varphi_x\|_\infty\|1_x/m\|_1=\mathrm{e}^{tK}$$

当 $\|\varphi_x\|_\infty\|1_x/m\|_1=1$时。由于 $\varphi_x\in D(H_2)$，我们得到

$$-\frac{c(x)}{m(x)}=-H_2\varphi_x(x)=\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{Re}(S_2(t)\varphi_x(x))-\varphi_x(x)}{t}\leq\lim_{t\to 0^+}\frac{\mathrm{e}^{tK}-1}{t}=K.$$

证明至此完成。 □

3.2. **指数体积增长的情形**。 设 b是 X 上的图， d是具有有限跳跃尺度的内蕴度量。若存在 $C\geq 0$，使得对于所有 $x\in X$、$r>0$，都有 b 具有（统一的）指数体积增长，其增长率为 $\nu>0$，则称 b 具有（统一的）指数体积增长。

$$m(B_r(x))\leq C\mathrm{e}^{\nu r}m(x),$$

其中， $B_r(x)$是相对于 $d.$ 、以 x 为中心、半径为 r 的度量球。若对于所有 $\varepsilon > 0$ ，都存在 $C_\varepsilon > 0$, 使得对于所有 $x \in X$、 $r > 0$, 都有 b 具有（统一的）次指数体积增长，则称 b 具有（统一的）次指数体积增长。

$$m(B_r(x)) < C_\varepsilon \mathrm{e}^{\varepsilon r} m(x).$$

本小节的主要结果如下。

定理 3.6（指数体积增长）。 假设图具有增长率为 $\nu > 0$ 的指数体积增长。那么，对于所有 $\beta > 3\nu/2$ ，存在常数$C_\beta = s^{-2}(\cosh(\beta s) - 1)$ 和 $M = M_\beta > 0$ ，使得对于所有 $t \geq 0$

$$\|S_2(t)\|_{1,1} \leq M\mathrm{e}^{(C_\beta - \lambda_2)t}.$$

特别地，半群 S_2 可一致地扩张为 ℓ^p 上的强连续半群（当 $1 \leq p < \infty$ 时），并扩张为 ℓ^∞.上的弱-$*$-连续半群

我们先指出，指数体积增长意味着组合度有界，且球内顶点的数量有上界。

引理 3.7（指数体积增长意味着度有界）。 假设图具有增长率为 $\nu > 0$ 的指数体积增长。那么， 存在 $C > 0$，使得对于所有 $x \in X$， $r > 0$

$$\#B_r(x) \leq C^2\mathrm{e}^{2\nu r}.$$

特别地，组合顶点度以 $C^2\mathrm{e}^{2\nu s}$为界，其中 $s > 0$ 是 $d.$的跳跃大小

证明。 首先，注意到指数体积增长允许对 $x, y \in X.$ 用$m(y)$来估计 $m(x)$。更精确地说，

$$m(x) \leq m(B_{d(x,y)}(y)) \leq C\mathrm{e}^{\nu d(x,y)} m(y).$$

接下来，我们对 $r > 0$观察到

$$\#B_r(x) = \sum_{y \in B_r(x)} \frac{m(y)}{m(y)} \leq C\mathrm{e}^{\nu r} \frac{m(B_r(x))}{m(x)} \leq C^2\mathrm{e}^{2\nu r}.$$

关于组合顶点度的陈述可由如下事实得出：顶点 x的邻居包含在 $B_s(x)$中。□

引理 3.8。 假设该图具有增长率为$\nu > 0$的指数体积增长。对所有 $\beta_0 > \frac{3}{2}\nu$ ， 存在 $C = C_{\beta_0} > 0$ ， 使得对所有 $\beta \geq \beta_0$,

$$\sup_{x \in X} \sum_{y \in X} \sqrt{\frac{m(y)}{m(x)}} \mathrm{e}^{-\beta d(x,y)} < C.$$

特别是，如果图具有次指数体积增长，那么对于所有满足 $C = C_\beta > 0$ 的 $\beta > 0$ ，这样的界都成立。

证明。根据柯西-施瓦茨不等式并利用引理 3.7，对于任意的 $x \in X$ 和 $\beta > \frac{3}{2}\nu$，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_{y\in X}\sqrt{\frac{m(y)}{m(x)}}\mathrm{e}^{-\beta d(x,y)} &= \frac{1}{\sqrt{m(x)}}\sum_{r=0}^{\infty}\sum_{r\le d(x,y)<r+1}\sqrt{m(y)}\mathrm{e}^{-\beta d(x,y)}\\ &\le \frac{1}{\sqrt{m(x)}}\sum_{r=0}^{\infty} m(B_{r+1}(x))^{1/2}\left(\sum_{r\le d(x,y)<r+1}\mathrm{e}^{-2\beta d(x,y)}\right)^{1/2}\\ &\le C\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{e}^{\nu r/2-\beta r}\#B_r(x)^{1/2} \le C'\sum_{r=1}^{\infty}\mathrm{e}^{3\nu r/2-\beta r} < \infty.\end{aligned}$$

“特别是”这一结论可由以下观察得出：对于次指数体积增长，我们可以任意选取足够小的 ν。□

上述引理使我们能够将半群 S_2 延拓到 ℓ^p.

定理 *3.6* 的证明。令 $f \in C_c(X)$ 且 $t \ge 0.$。然后，选取 $\beta > 3\nu/2$ 使得

$$\begin{aligned}\sum_X m|S_2(t)f| &= \sum_{x\in X} m(x)\Big|\sum_{y\in X} m(y)p_t(x,y)f(y)\Big|\\ &\le \mathrm{e}^{(C_\beta-\lambda_2)t}\sum_{y\in X} m(y)|f(y)|\sum_{x\in X}\sqrt{\frac{m(x)}{m(y)}}\mathrm{e}^{-\beta d(x,y)} \le C\mathrm{e}^{(C_\beta-\lambda_2)t}\|f\|_1.\end{aligned}$$

这里我们用到了三角不等式、推论 2.4 和引理 3.8。因此， $S_2(t)$ 可唯一延拓为 ℓ^1. 上的有界算子 $S_1(t)$。由 Riesz-Thorin 插值定理可知，对于所有 $1 \le p \le 2.$， $S_2(t)$ 也可唯一延拓为 ℓ^p 上的有界算子 $S_p(t)$。 S_p 再次构成半群这一事实，即对于 $t,\ s \ge 0$，恒等式 $S_p(t)S_p(s) = S_p(t+s)$ 成立，可由以下事实推出： S_2 是半群，且 $\ell^2 \cap \ell^p$ 在 ℓ^p 中稠密，$1 \le p < \infty$。注意到 $S_2(t)$ 是自伴的，由标准的对偶性论证可知，对于 $2 \le p \le \infty.$，同样的结论也成立。剩下要证明的是，对于 $\ell^p, 1 \le p < \infty$， S_p 是强连续的。

令 $p = 1.$ 我们已证明 S_1 是指数有界的。因此，由于 $C_c(X)$ 在 ℓ^1 中稠密，只需证明对所有 $f \in C_c(X)$，都有 $\lim_{t\to 0^+}\|S_1(t)f - f\|_1 = 0$。令 $K = \operatorname{supp} f$，并任取 $\varepsilon > 0.$ 令

$$K_1 = \{y \in X \mid \text{ there is } x \in K \text{ such that } d(x,y) \le 1\}.$$

由于我们假设体积呈指数增长，因此得到

$$m(K_1) \le C\mathrm{e}^{\nu} m(K) < \infty.$$

因此，由于 S_2 是强连续的，我们得出当 t 充分小时，

$$\sum_{K_1} m|S_1(t)f - f| = \sum_{K_1} m|S_2(t)f - f| \le m(K_1)^{1/2}\|S_2(t)f - f\|_2 < \varepsilon/2.$$

此外，由引理 3.8，我们可以取足够大的 $\beta > 3\nu$，使得

$$\|f\|_1\mathrm{e}^{-\beta/2}\sup_{x\in X}\sum_{y\in X}\sqrt{\frac{m(y)}{m(x)}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}d(x,y)} < \varepsilon/3.$$

最后，令 C_β 为推论 2.4 中的常数，并取足够小的 t，使得 $\mathrm{e}^{C_\beta t}\varepsilon/3 < \varepsilon/2$. 那么，由推论 2.4 可得

$$\begin{aligned}\sum_{X\setminus K_1} m|S_1(t)f - f| = \sum_{X\setminus K_1} m|S_2(t)f| &\le \sum_{x\in X\setminus K_1} m(x)\sum_{y\in K} m(y)|f(y)||p_t(x,y)| \\ &\le \mathrm{e}^{C_\beta t}\sum_{y\in K} m(y)|f(y)| \sum_{x\in X\setminus K_1}\sqrt{\frac{m(x)}{m(y)}}\mathrm{e}^{-\beta d(x,y)} \\ &\le \mathrm{e}^{C_\beta t}\sum_{y\in K} m(y)|f(y)| \sum_{x\in X}\sqrt{\frac{m(x)}{m(y)}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}d(x,y)}\mathrm{e}^{-\frac{\beta}{2}} \\ &\le \varepsilon\mathrm{e}^{C_\beta t}/3 < \varepsilon/2.\end{aligned}$$

总而言之，我们发现，对于足够小的 t $\|S_1(t)f - f\|_1 < \varepsilon$. 我们通过插值得到 $1 \le p \le 2$ 的强连续性，并通过标准的对偶性论证得到 $2 \le p < \infty$ 的强连续性。□

3.3. 生成元的作用。 本节给出一个判据，用于确定生成元 H_p 何时是形式薛定谔算子 $\mathcal{H}$的限制。因此，我们假设 $-H_p$ 是定义在 ℓ^p 上的强连续半群 S_p 的生成元，其中 $1 \le p < \infty$ 与半群 S_2相容。此外，只要 S_1 存在且强连续，就有 $H_\infty = (H_1)^*$。根据半群的一般理论（[EN06, KLW21]），这样的生成元确实存在。显然，$H = H_2$. 下面我们简要讨论 H_p 在 X 局部有限时的作用。

定理 3.9 (H_p**的作用)。** 设 $p \in [1,\infty]$ 和 q 分别为 ***Hölder*** 对偶。假设 $\mathcal{H}C_c(X) \subseteq \ell^q \cap \ell^2$；特别地，当 b 局部有限时，该条件成立。于是

$$H_p = \mathcal{H} \quad on\ D(H_p) \quad and \quad C_c(X) \subseteq D(H_q).$$

证明。首先，注意到在 $\ell^p \cap \ell^2$ 上，当 $\alpha > 0$. 足够大时，$(H_p+\alpha)^{-1} = (H_2+\alpha)^{-1}$；而在 $\ell^q\cap\ell^2$ 上，$(H_q+\alpha)^{-1} = (H_2+\alpha)^{-1}$。当 $p, q < \infty$ 时，由半群的一致性和拉普拉斯变换可得此结论，[EN06, 定理 1.10]；当 $p = \infty$ 或 $q = \infty$ 时，则由对偶性以及 $(H_2+\alpha)^{-1}$ 的自伴性可得。现在，设 $f \in D(H_p)$ 和 $\varphi \in C_c(X)$。我们有 $\mathcal{H}C_c(X) \subseteq \ell^2$，因此由格林公式，[GKS16，引理 2.1] 可知，$C_c(X) \subseteq D(H_2)$，且在 D 上有 $H_2 = \mathcal{H}$ (H_2)。因此，

$$\sum_X m(H_p+\alpha)f\overline{\varphi} = \sum_X m(H_p+\alpha)f\overline{(H_2+\alpha)^{-1}(\mathcal{H}+\alpha)\varphi} = \sum_X mf\overline{(\mathcal{H}+\alpha)\varphi}.$$

由此可得 $\varphi \in D(H_p^*)$，这就给出了 $q > 1$ 时的第二个结论，因为 $H_p^* = H_q$。 $q = 1$ 的情形由恒等式得出

$$\varphi = (H_2+\alpha)^{-1}(\mathcal{H}+\alpha)\varphi = (H_1+\alpha)^{-1}(\mathcal{H}+\alpha)\varphi \in D(H_1).$$

此外，通过选择 $x \in X$ 和 $\varphi = 1_x/m$，我们可以看出

$$H_p f(x) = \sum_X mf\overline{\mathcal{H}\varphi} = \mathcal{H}f(x),$$

其中，最后一个等式是由 $\mathcal{H}$, [GKS16 的引理 2.1] 中的格林公式得到的。包含关系 $\ell^p \subseteq F$ 由 $\mathcal{H}C_c(X) \subseteq \ell^q$ 和 Hölder 不等式推出。□

3.4. 解析性与抛物型方程。 这里，我们简要讨论半群 S_p 在 ℓ^p 上的解析性，以及与 H_p相关的抛物型方程的解

$$-H_p\omega_t(x) = \frac{d}{dt}\omega_t(x), \tag{PE}$$

对所有 $t > 0$, $x \in X$ 和初始条件 $\omega_0 \in \ell^p$. 在上一节中，我们讨论了何时 H_p 是形式薛定谔算子 $\mathcal{H}$ 的一个限制；在这种情况下，(PE) 确实是与 $\mathcal{H}$相关的抛物型方程。

尽管 S_p 本身不必严格满足 [EN06, Chap- ter II Definition 4.5], 中的解析性要求，但由于 S_p上的指数界，它经过谱平移后便具有解析性。换言之，我们可以找到常数 $A \in \mathbb{R}$ ，使得半群 $T(t) = \mathrm{e}^{tA}S_p(t)$ 是解析且有界的。因此，根据 [EN06, Chapter II Theorem 4.6], T将 ℓ^p 映射到其生成元 $H_p - A$的定义域中。于是， T 满足修正后的抛物型方程

$$-(H_p - A)\omega_t(x) = \frac{d}{dt}\omega_t(x)$$

对所有 $t > 0$, $x \in X$ 和初始条件 $\omega_0 \in \ell^p$ ，当且仅当 S_p 对所有 $\omega_0 \in \ell^p$.满足 (PE) 时，这一结论成立

命题 3.10。 *(a)* 若势是形式有界的，形式界为 $M > 0$，则 $\omega_t = S_p(t)\omega$ 对所有满足以下条件的初始条件 $\omega \in \ell^p$ ，都是 X 上 (PE) 的解：

$$p \in \left(2\frac{M+1}{M} - 2\frac{\sqrt{M+1}}{M}, 2\frac{M+1}{M} + 2\frac{\sqrt{M+1}}{M}\right).$$

若势下有界，则对所有 $1 < p < \infty$., 结论均成立

(b) 若图具有指数体积增长，则 $\omega_t = S_p(t)\omega$ 对所有初始条件 $\omega \in \ell^p$ 及所有 $1 < p < \infty$., 都是 X 上 (PE) 的解

证明。 由谱定理可知，半群 S_2 是解析且压缩的。由定理 3.1、3.4 和 3.6，可得 $\|S_2(t)\|_{p,p} \leq Ce^{At}$ ，分别对应于 p 及常数 $A, C \geq 0$.。于是，重标度后的半群 $T(t) = \mathrm{e}^{-tA}S_2(t)$ 在 ℓ^2 上仍是压缩且解析的，并且在 ℓ^p. 上有界。应用 Stein 插值定理的一个标准结果（参见 [Ste70，第 III 章 §2] 定理 1，或 [Lun18，定理 6.6]），可得 T 可扩张为 ℓ^r 上的解析半群，其中 r 严格介于 2 和 p. 之间。因此，对于 ℓ^r 中的所有初始条件， T 都是上述修正后的抛物型方程的解；进而，对于 ℓ^r. □中的所有初始条件， S_r 都是 (PE) 的解

4. ℓ^p-谱的独立性

上一节中，我们讨论了磁薛定谔图（b, o, c）上的 ℓ^2 半群 S_2 是否能延拓为 ℓ^p. 上的强连续半群S_p 。现在，我们研究谱 $\sigma(H_p)$ 在 p. 变化下的稳定性。

假设 S_2 能延拓为 ℓ^p 上的强连续半群 S_p ，其中某个$1 \leq p < \infty$。那么 S_p 是指数有界的，即

$$\|S_p(t)\|_p \leq Me^{At}$$

对于某些 $M \geq 1$, $A \in \mathbb{R}$，参见 [EN06，命题 1.4]。这给出了通过拉普拉斯变换表示预解式的方法

$$(H_p - \lambda)^{-1}f = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t}S_p(t)f\,\mathrm{d}t$$

对于所有 $\mathrm{Re}\lambda < -A$（参见 [EN06，定理 1.10]），其中积分按广义黎曼积分理解。特别地，我们看到那些 λ 属于预解集，记作 $\rho(H_p) = \mathbb{C} \setminus \sigma(H_p)$。下面我们讨论（次）指数体积增长的情形。

例 4.1（（次）指数体积增长）。根据上一节，对于指数为 $\nu > 0$、具有指数体积增长的图，半群 S_1 强连续且指数有界，也就是说，对于 $\beta > 3\nu/2$，有 $\|S_1(t)\|_{1,\,1} \le M_\beta \mathrm{e}^{(C_\beta - \lambda_2)t}$，其中常数为 M_β，且 $C_\beta = s^{-2}(\cosh(\beta s) - 1)$，如推论 2.4 所示。由于 S_2 是一个收缩半群，且 $\|S_2(t)\|_{2,\,2} \le \mathrm{e}^{-\lambda_2 t}$，由 Riesz-Thorin 插值定理和对偶论证可得

$$\|S_p(t)\|_p \le M_\beta^{\frac{2-r}{r}} \mathrm{e}^{\left(\frac{2-r}{r} C_\beta - \lambda_2\right)t},$$

其中 $r = \min\{p, p/(p-1)\}$. 根据上述讨论，对于所有满足 $\mathrm{Re}\lambda < -\frac{2-r}{r} C_\beta + \lambda_2$ 的情形，都有 $-\lambda \in \rho(H_p)$。具体而言，由于 $C_\beta = s^{-2}(\cosh(\beta s) - 1)$ 且 $\beta > 3\nu/2$，我们得到估计

$$\inf \sigma(H_2) \le \inf \mathrm{Re}\, \sigma(H_p) + \frac{2-r}{r s^2}(\cosh(3\nu s/2) - 1),$$

其中，s 是内蕴度量 d. 的跳跃大小。正如定理 2.2 后的注记所述，我们发现，当 $\beta > 0$. 较小时，常数 C_β 可以任意小。因此，在一致次指数体积增长的情况下，我们可以推得，对于所有 $1 \le p \le \infty$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $M = M_{\varepsilon,\,p} > 0$ 使得

$$\|S_p(t)\|_p \le M \mathrm{e}^{\varepsilon t}$$

and

$$\inf \sigma(H_2) \le \inf \mathrm{Re}\, \sigma(H_p).$$

这是对 ℓ^p-谱稳定性的初步认识。

4.1. 一致正测度与谱包含。 本节讨论一致正测度情况下 ℓ^2-谱在 ℓ^p-谱中的谱包含，即 $\inf_x m(x) > 0$. 。这一假设意味着，对于所有 $1 \le p \le q \le \infty$.，都有$\ell^p \subseteq \ell^q$

定理 4.2。设 $1 \le p < \infty$。假设 S_2 可一致地延拓为定义在 ℓ^p上的强连续半群 S_p，$p \in [1, \infty)$，并且

$$\inf_{x \in X} m(x) > 0.$$

那么，

$$\sigma(H_2) \subseteq \sigma(H_p).$$

证明。注意，如果 S_2 在 $\ell^p, p \in [1, \infty)$ 上一致地延拓为强连续半群 S_p，那么由对偶性可知，S_2 也延拓为强连续半群 S_q，其作用空间为 ℓ^q，其中 q 是 $p \ne 1$ 相应的 Hölder 对偶；若 $p = 1$，则它还延拓为 ℓ^∞ 上的弱-$*$-连续半群。无论哪种情形，我们都有 $\sigma(H_p) \cap \mathbb{R} = \sigma(H_q) \cap \mathbb{R}$.因此，由于 ℓ^2-谱为实数，不失一般性，我们可以假设 $1 \le p \le 2$，并令 q 为其 Hölder 对偶。我们提出如下断言：

Claim: $H_p \subseteq H_2 \subseteq H_q$.

若该断言成立，则预解式 $(H_p - z)^{-1}$ 与 $(H_q - z)^{-1}$ 对所有 $z \in \rho(H_p) \cap \rho(H_q)$ 均一致，因为对所有 $f \in \ell^p \subseteq \ell^q$

$$(H_q - z)(H_p - z)^{-1} f = (H_p - z)(H_p - z)^{-1} f = f = (H_q - z)(H_q - z)^{-1} f$$

并且由于（$H_q - z$）是单射。

现在，取 $z \in \rho(H_p) \cap \rho(H_q)$。于是，由预解式的一致性和插值可知，（$H_q - z$）$^{-1}$ 作为 ℓ^2. 上的算子是有界的。此外，它是 $H_2 - z$ 的逆算子，因此，$z \in \rho(H_2)$：为此，取 $f \in D(H_2)$。由该断言可得

$$(H_q - z)^{-1}(H_2 - z) f = (H_q - z)^{-1}(H_q - z) f = f.$$

另一方面，对于 $f \in \ell^2$，取 $f_n \in \ell^p$，$n \geq 0$，使得 $f_n \to f$ 属于 ℓ^2. 。于是（$H_q - z$）$^{-1} f_n = (H_p - z)^{-1} f_n \in D(H_p) \subseteq D(H_2)$，并由该断言可得

$$(H_2 - z)(H_q - z)^{-1} f_n = (H_q - z)(H_q - z)^{-1} f_n = f_n \to f.$$

由于（$H_q - z$）$^{-1}$ 在 ℓ^2 上有界，且 H_2 是闭的，我们得出（$H_q - z$）$^{-1} f \in D(H_2)$，并且

$$(H_2 - z)(H_q - z)^{-1} f = f.$$

因此，$\rho(H_p) \cap \rho(H_q) \subseteq \rho(H_2)$，从而 $\sigma(H_2) \subseteq \sigma(H_p) \cup \sigma(H_q)$。由于 $\sigma(H_2)$ 是实数且 $\sigma(H_p) \cap \mathbb{R} = \sigma(H_q) \cap \mathbb{R}$，断言得证。

剩下的工作是证明该结论。根据假设，半群 S_p 是指数有界的，并且与 S_2一致。因此，我们推断预解式 $(H_p + \alpha)^{-1}$ 和 $(H_2 + \alpha)^{-1}$ 存在，并且当 $\alpha > 0$足够大时相互一致，这直接由拉普拉斯变换得到。令 $f \in D(H_p)$。那么，当 $\ell^p \subseteq \ell^2$时，

$$f = (H_p + \alpha)^{-1}(H_p + \alpha) f = (H_2 + \alpha)^{-1}(H_p + \alpha) f \in D(H_2).$$

对两边应用 $H_2 + \alpha$ 可得

$$(H_2 + \alpha) f = (H_p + \alpha) f,$$

这意味着该结论的第一个包含关系。第二个包含关系由对偶性得到：令 $f \in D(H_2)$。那么，对于所有 $g \in D(H_p) \subseteq D(H_2)$，$1 \leq p \leq 2$，根据 H_2 的自伴性，我们有

$$\langle H_2 f, g \rangle = \langle f, H_2 g \rangle = \langle f, H_p g \rangle.$$

因此，$f \in D((H_p)^*) = D(H_q)$，且 $H_2 f = H_q f$. 这就完成了该断言的证明，从而也完成了定理的证明。□

注。如果 S_2 可扩张为作用于 ℓ^1 上的强连续半群，那么根据对偶性，我们也有

$$\sigma(H_2) \subseteq \sigma(H_1) \cap \mathbb{R} = \sigma(H_\infty) \cap \mathbb{R}$$

因此，$\sigma(H_2) \subseteq \sigma(H_\infty)$ 也成立。

在次指数体积增长的情况下，上述定理有如下直接推论。

推论 4.3。如果图具有一致次指数体积增长，且测度一致正，则对于所有 $1 \leq p \leq \infty$,

$$\inf \sigma(H_2) = \inf \operatorname{Re} \sigma(H_p).$$

证明。这直接由定理 4.2 及其前面的例 4.1 得出。□

4.2. **谱的独立性**。 本节研究势为形式有界且体积呈次指数增长时， ℓ^p 谱的独立性。

定理 4.4 （ ℓ^p-谱的独立性）。 若势是形式有界的，且图具有一致次指数体积增长，则对所有 $1 \le p \le \infty$,

$$\sigma(H_2) = \sigma(H_p).$$

上述定理的证明与图的情形 [BHK13]，以及流形的情形 [Stu93] 类似。我们需要的关键估计具有如下形式

$$\|\mathrm{e}^{-\psi}(H_2 - z)^{-1}\mathrm{e}^{\psi}\|_{2,2} < C$$

在 $\rho(H_2)$ 的紧子集上，其中 ψ 是关于度量 d 的任意有界实值利普希茨函数，且其利普希茨常数固定为 $\varepsilon > 0.$ 。不过，首先我们需要一个技术引理；该引理针对狄利克雷型，见 [GHM12, 引理 3.5]。

引理 4.5。 假设势 c 是形式有界的。设 $f \in D(Q)$ 且 ψ 是有界利普希茨函数。那么， $\psi f \in D(Q)$ 。

证明。 设 $f_n \in C_c(X)$ $n > 0$ 是关于型范数 $\|\cdot\|_Q = (Q(\cdot) + \|\cdot\|_2^2)^{1/2}.$ 的柯西序列。我们需要证明 ψf_n 也构成这样的柯西序列。显然， ψf_n 是一个 ℓ^2-柯西序列。因此，剩下只需证明：对于 $\varepsilon > 0$ 以及所有足够大的 n， m

$$Q(\psi(f_n - f_m)) < \varepsilon.$$

令 κ 为 ψ的利普希茨常数。对于任意的 $f \in C_c(X)$,

$$\begin{aligned}
0 \le Q(\psi f) &\le \sum_{X\times X} b|\nabla_o \psi|^2 + \sum_X (c \vee 0)|\psi f|^2 \\
&= \sum_{x,y\in X} b(x,y)|f(x)(\psi(x) - \psi(y)) + \psi(y)(f(x) - o(x,y)f(y))|^2 + \sum_X (c \vee 0)|\psi f|^2 \\
&\le 2\kappa^2 \sum_{x,y\in X} b(x,y)|f(x)|^2 d(x,y)^2 + 2\|\psi\|_\infty^2 \left(Q(f) - \sum_X (c \wedge 0)|f|^2\right) \\
&\le 2(\kappa^2 + C\|\psi\|_\infty^2)\|f\|_2^2 + 2(M+1)\|\psi\|_\infty^2 Q(f).
\end{aligned}$$

这里，我们用到了 d 是内蕴的，且 c 是形式有界的，其界为 M， C。将此估计应用于 $f = f_n - f_m$ 即可完成证明。□

下面的引理是定理 4.4 证明中的关键估计，也是 [BHK13 中关于图的引理 4.1] 的一个变体。

引理 4.6。 假设势是形式有界的。令 $K \subseteq \rho(H_2)$ 为紧集。那么存在常数 $\varepsilon, C > 0$ ，使得对于所有 $z \in K$ 以及所有有界实值利普希茨函数 ψ （其利普希茨常数为 ε），均有

$$\|\mathrm{e}^{\psi}(H_2 - z)^{-1}\mathrm{e}^{-\psi}\|_{2,2} < C.$$

证明。 由于 ψ 是有界利普希茨函数， $\mathrm{e}^{\pm\psi}.$ 也如此。因此，结合引理 4.5，我们可以在 $D(Q_\psi) = D(Q)$ 上定义二次型 Q_ψ ，如下：

$$Q_\psi(f,g) = Q(\mathrm{e}^{-\psi}f, \mathrm{e}^{\psi}g) - Q(f,g).$$

通过进行与 [BHK13, Lemma 4.1] 中类似的计算，可以发现存在 $C = C(s) > 0$，使得对于任意的 $\delta > 0$ 和 $0 < \varepsilon < 1$，

$$|Q_\psi(f)| \leq C\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|f\|_2^2 + \delta \left(Q(f) - \sum_X (c \wedge 0)|f|^2\right).$$

现在，由于 c 是形式有界的，我们可知，对于 $f \in D(Q)$

$$Q(f) - \sum_X (c \wedge 0)|f|^2 \leq C(Q(f) + \|f\|_2^2)$$

对于某个 $C > 0.$。将此结果与上面的估计结合，可得

$$|Q_\psi(f)| \leq C\varepsilon^2 \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) \|f\|_2^2 + C\delta\|f\|_2^2 + C\delta Q(f).$$

由 [Kat95, 定理 VI 3.9]，我们得出 $Q_\psi + Q$ 是闭的且为扇形的，因此可由扇形算子 $H_\psi.$ 表示。此外，根据同一文献，当 δ 和 ε 足够小时，$K \subseteq \rho(H_\psi)$，并且

$$\|(H_\psi - z)^{-1}\|_{2,2} < C$$

对于某个常数 $C = C(\varepsilon,\ \delta,\ K)$。$C$只依赖于 K而不依赖于 z，这是由于 K的紧致性

直接计算可得，在 D上，$H_\psi = \mathrm{e}^{\psi} H_2 \mathrm{e}^{-\psi}$ $(H_\psi) = \mathrm{e}^{\psi} D(H_2)$。因此，

$$\|\mathrm{e}^{\psi}(H_2 - z)^{-1}\mathrm{e}^{-\psi}\|_{2,2} = \|(\mathrm{e}^{\psi} H_2 \mathrm{e}^{-\psi} - z)^{-1}\|_{2,2} = \|(H_\psi - z)^{-1}\|_{2,2} < C.$$

证明至此完成。 □

在次指数体积增长的假设下，我们已在例 4.1 中证明，ℓ^p、$1 \leq p \leq \infty$ 上的半群是指数有界的。因此，预解式 $(H_p - \lambda)^{-1}$ 可以通过拉普拉斯变换表示为

$$(H_p - \lambda)^{-1} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{\lambda t} S_p(t) \mathrm{d}t$$

对所有 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0$ 均成立（其中，该公式对 $1 \leq p < \infty$ 强成立，对 $p = \infty$ 则在弱-∗-意义下成立）。由于半群 S_p 在 $1 \leq p < \infty$ 上相容，根据稠密性论证，我们得出在 $\mathrm{Re}\,\lambda < 0\}$ 上的 $\{\lambda \in \mathbb{C} \mid$ 预解式也具有相同性质。特别地，预解式 $G_\alpha = (H_p - \alpha)^{-1}$, $\alpha < 0$ 的核 g_α 与 $1 \leq p < \infty.$ 无关

g_α 的以下估计是对图上 [BHK13 引理 4.2] 的一种变体，并为定理 4.4 的证明提供必要的估计。

引理 4.7。假设势 c 是形式有界的，且图 b 具有次指数体积增长。对于每个 $\varepsilon > 0$, 存在 $\alpha < 0 < C < \infty$，使得对于所有利普希茨常数为 ε 的有界利普希茨函数 ψ，

(a) $|g_\alpha(x, y)| \leq C(m(x)m(y)^{-1/2}\mathrm{e}^{-\varepsilon d(x,y)}$ 对所有 $x, y \in X.$
(b) $\|\mathrm{e}^{\psi} G_\alpha \mathrm{e}^{-\psi} m^{1/2}\|_{1,2} \leq C$ *(c)* $\|m^{1/2}\mathrm{e}^{\psi} G_\alpha \mathrm{e}^{-\psi}\|_{2,\infty} \leq C.$

证明。 断言 (a) 由推论 2.4 和拉普拉斯变换得出。更精确地说，如推论 2.4（对于 $\varepsilon = \beta$）中那样选取 $\alpha < -C_\varepsilon$ 作为 C_ε，我们得到

$$|g_\alpha(x,y)| = \left| \int_0^\infty \mathrm{e}^{\alpha t} p_t(x,y) \mathrm{d}t \right| \leq (m(x)m(y))^{-1/2} \mathrm{e}^{-\varepsilon d(x,y)} \int_0^\infty \mathrm{e}^{(\alpha + C_\varepsilon)t} \mathrm{d}t.$$

断言 (b) 和 (c) 可直接由 [BHK13，引理 4.2] 得出。 □

结合引理 4.7 和引理 4.6 中的估计，我们现在可以证明以下关于预解式平方的关键有界性结果，其框架为 ℓ^p. [BHK13，引理 4.3]。证明同样遵循图框架。

引理 4.8。 假设势 c 是形式有界的，且图 b 具有次指数体积增长。那么，$(H_2 - z)^{-2}$ 可延拓为作用于 $\ell^p, 1 \leq p \leq \infty$ 上的有界算子，对所有 $z \in \rho(H_2)$ 均成立。此外，对于每个紧集 $K \subseteq \rho(H_2)$，存在$C > 0$，使得对所有 $z \in K$

$$\|(H_2 - z)^{-2}\|_{p,p} \leq C.$$

证明。 令 $g_z^{(2)}$ 为 $G_z^2 = (H_2 - z)^{-2}$. 的核。对于给定的紧集 $K \subseteq \rho(H_2)$，我们根据引理 4.6 选取 $\varepsilon > 0$，然后根据引理 4.7 选取 $\alpha < 0$。将预解式恒等式应用两次，可得对于 $z \in K$，

$$G_z^2 = (G_\alpha + (z-\alpha)G_\alpha G_z)(G_\alpha + (z-\alpha)G_z G_\alpha) = G_\alpha (I + (z-\alpha)G_z)^2 G_\alpha.$$

设 ψ 是一个有界利普希茨函数，其利普希茨常数为 ε.，则

$$m^{1/2}\mathrm{e}^{\psi} G_z^2 \mathrm{e}^{-\psi} m^{1/2} = (m^{1/2}\mathrm{e}^{\psi} G_\alpha \mathrm{e}^{-\psi})(I + \mathrm{e}^{\psi/2} G_z \mathrm{e}^{-\psi/2})^2 (\mathrm{e}^{\psi} G_\alpha \mathrm{e}^{-\psi} m^{1/2})$$

因此，

$$\|m^{1/2}\mathrm{e}^{\psi} G_z^2 \mathrm{e}^{-\psi} m^{1/2}\|_{1,\infty}$$

$$\leq \|m^{1/2}\mathrm{e}^{\psi} G_\alpha \mathrm{e}^{-\psi}\|_{2,\infty} \|(I + \mathrm{e}^{\psi/2} G_z \mathrm{e}^{-\psi/2})^2\|_{2,2} \|\mathrm{e}^{\psi} G_\alpha \mathrm{e}^{-\psi} m^{1/2}\|_{1,2} \leq C < \infty,$$

由上述计算以及引理 4.6 和引理 4.7 中的估计，取 $C = C(K,\ \varepsilon,\ \alpha)$。令 $U = m^{1/2}\mathrm{e}^{\psi} G_z^2 \mathrm{e}^{-\psi} m^{1/2}$.，我们便证明了 U 是一个从 ℓ^1 到 ℓ^∞ 的有界算子，因此它有一个核

$$k_U(x,y) = (m(x)m(y))^{1/2} \mathrm{e}^{\psi(x) - \psi(y)} g_z^{(2)}(x,y).$$

由霍尔德不等式，参见 [BHK13, 引理 3.5 (b)], ，我们得出 $\|k\|_\infty = \|U\|_{1,\ \infty} \leq C$，因此，对所有 $x,\ y \in X$

$$|g_z^{(2)}(x,y)| \leq C(m(x)m(y))^{-1/2} \mathrm{e}^{\psi(y) - \psi(x)}.$$

若固定 $x,\ y \in X$，并选择 $\psi\colon v \mapsto \varepsilon(d(v,\ y) \wedge d(x,\ y))$，则估计变为

$$|g_z^{(2)}(x,y)| \leq C(m(x)m(y))^{-1/2} \mathrm{e}^{-\varepsilon d(x,y)}.$$

令 $f \in \ell^1$.，则我们得到

$$\|G_z^2 f\|_1 \leq \sum_{x \in X} m(x)|f(x)| \sum_{y \in X} m(y)|g_z^{(2)}(x,y)|$$

$$\leq C \sum_{x \in X} m(x)|f(x)| \sum_{y \in X} \sqrt{\frac{m(y)}{m(x)}} \mathrm{e}^{-\varepsilon d(x,y)} \leq C' \|f\|_1.$$

最后一个不等式源于引理 3.8。这证明了关于 $p = 1$. 的结论。 $p = 2$ 的情形是显然的。我们通过插值和对偶论证得到关于 $p \in [1, \infty]$ 的一般结论。□

最后，我们终于能够按照 [BHK13]证明定理 4.4。

定理 4.4 的证明。首先，我们证明包含关系 $\sigma(H_p) \subseteq \sigma(H_2)$。对于 $z \in \rho(H_2)$，设 $g_z^{(2)}$为 $(H_2 - z)^{-2}$. 的核。则对任意固定的 x， $y \in X$ 映射 $\rho(H_2) \to \mathbb{C}$， $z \mapsto g_z^{(2)}(x, y)$是解析的。由引理 4.8，我们得出$(H_2 - z)^{-2}$ 作为 ℓ^p-有界算子族在 $\rho(H_2)$上是解析的。此外，$(H_p - z)^{-2}$ 作为 ℓ^p-有界算子族在 $\rho(H_p)$上是解析的（见 [HV86，引理 3.2]）。然而，这两个预解式对于具有负实部的 z 是一致的。由解析函数的唯一延拓，我们得出连通集 $\rho(H_2)$包含在$(H_p - z)^{-2}$的最大解析域中，该最大解析域为 $\rho(H_p)$。

现在，令 $1 \leq p < 2$ 和 q 分别为 Hölder共轭指数。由包含关系$\sigma(H_p) \subseteq \sigma(H_2) \subseteq [0, \infty)$，我们得出 $\rho(H_p) = \rho(H_q)$。此外，由拉普拉斯变换（对于 $q = \infty$ 在弱-$*$-意义下成立）可知，对于所有满足 $\mathrm{Re} z < 0$. 的 z，在 $\ell^p \cap \ell^q$ 上有 $(H_p - z)^{-1} = (H_q - z)^{-1}$。根据 [HV87，推论 1.4]，对于所有 $z \in \rho(H_p)$，在 $\ell^p \cap \ell^q$ 上有 $(H_p - z)^{-1} = (H_q - z)^{-1}$。因此，通过插值，$(H_p - z)^{-1}$ 可延拓为 ℓ^2. 上的有界算子。根据 [HV87，定理 1.2]，映射 $\rho(H_p) \to \mathcal{B}(\ell^2)$ $z \mapsto (H_p - z)^{-1}$ 是解析的。另一方面，映射 $z \mapsto (H_2 - z)^{-1}$ 在 $\rho(H_2)$上解析，而这也是它的最大解析域。现在注意到，对于所有满足 $\mathrm{Re} z < 0$的 z，都有 $(H_p - z)^{-1} = (H_2 - z)^{-1}$；这再次由拉普拉斯变换得出。因此，根据解析函数的唯一延拓，我们得出 $\rho(H_p) \subseteq \rho(H_2)$，证明至此完成。□

5. 加权单纯复形

本节介绍加权单纯复形及其相关拉普拉斯算子的基本概念和记号，遵循 [BK25] 中提出的框架。

5.1. 加权单纯复形上的拉普拉斯算子。 设 V 为可数集， Σ 为幂集 $\mathcal{P}(V)$ 的一个子集，其中包含 V. 的有限子集。我们称 Σ 为单纯复形，如果 $\sigma \in \Sigma$ 且 $\tau \subseteq \sigma$ 蕴含 $\tau \in \Sigma$. 。基数为 $k+1$ 的元素集合（称为 k-单形）记为 Σ_k。

设 $m : \hat{\Sigma} \to (0, \infty)$ 为一个函数。若 $\sum_{v \in \hat{\Sigma}_0} m(v) < \infty$，则定义 $\Sigma = \hat{\Sigma}$；否则定义为 $\hat{\Sigma} = \Sigma \backslash \{\varnothing\}$，并称 (Σ, m) 为加权单纯复形。我们始终假设权重 m 是局部可求和的，即对所有 $\tau \in \Sigma$

$$\gamma(\tau) = \sum_{\sigma \succ \tau} m(\sigma) < \infty,$$

其中，对于 τ， $\sigma \in \Sigma$ 满足 $\tau \subset \sigma$ 且 $|\sigma \backslash \tau| = 1$，我们记作 $\tau \prec \sigma$，并称 τ 是 σ 的面，或者称 σ 是 τ 的余面 。单纯形的维数 为 $\dim(\tau) = |\tau| - 1$，复形的维数为 $\dim(\Sigma) = \sup_{\tau \in \Sigma} \dim(\tau)$。

我们定义函数空间

$$F = \{\omega \in C(\Sigma) \mid \sum_{\sigma \succ \tau} m(\sigma) |\omega(\sigma)| < \infty \text{ for all } \tau \in \Sigma\}.$$

若对所有$\tau, \sigma \in \Sigma$，都有 $\delta 1_\tau(\sigma) \in \{-1, 0, 1\}$, $\delta 1_\tau(\sigma) \neq 0$ 当且仅当 $\tau \prec \sigma$，则称线性映射 $\delta : D(\delta) = C(\Sigma) \to C(\Sigma)$ 为余边界算子，并且

$$\delta\delta = 0.$$

在 $D(\partial) = F$ 上，我们定义边界算子 $\partial\colon F \to C(\Sigma)$如下：

$$\partial\omega(\rho) = \frac{1}{m(\rho)} \sum_{\tau \succ \rho} m(\tau)\omega(\tau)\theta(\rho,\tau),$$

其中 $\theta(\tau, \sigma) = \delta 1_\tau(\sigma)$。此处我们定义的是作用于函数上的余边界算子，而非文献中通常定义的作用于交替形式上的余边界算子。然而，δ 与相应的、作用于定向单纯复形上交替形式的余边界算子一一对应。这一点已在 [BK25 第 2.2] 小节中证明。对我们而言，作用于函数上的算子 δ 更为方便，并且能够将拉普拉斯算子直接解释为带符号薛定谔算子，参见 [BK25 定理 3.12]。“定向”由符号 $\theta(\tau, \sigma)$。编码。

我们考虑巴拿赫空间 $\ell^p = \ell^p(\Sigma, m)$、$1 \le p \le \infty$，其定义如上，范数为 $\|\cdot\|_p$；同样，ℓ^2 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\langle \omega, \eta\rangle = \sum_\Sigma m\omega\eta$。我们定义二次型

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^+(\omega) &= \|\delta\omega\|_2^2, & D(\mathcal{Q}^+) &= \{\omega \in C(\Sigma) \mid \|\delta\omega\|_2^2 < \infty\},\\
\mathcal{Q}^-(\omega) &= \|\partial\omega\|_2^2, & D(\mathcal{Q}^-) &= \{\omega \in F \mid \|\partial\omega\|_2^2 < \infty\},\\
\mathcal{Q}^H(\omega) &= \|\delta\omega + \partial\omega\|^2, & D(\mathcal{Q}^H) &= \{\omega \in F \mid \|\delta\omega + \partial\omega\|_2^2 < \infty\}.
\end{aligned}$$

根据 [BK25，第 3.1], 节，当限制在希尔伯特空间 ℓ^2. 上时，这些二次型稠密定义、非负且闭。对于 $\circ \in \{\pm, H\}$，相应的狄利克雷拉普拉斯算子定义为与闭二次型相关联的自伴算子

$$Q^\circ = \mathcal{Q}^\circ\,|_{D(Q^\circ)}, \qquad D(Q^\circ) = \overline{C_c(\Sigma)}^{\|\cdot\|_{\mathcal{Q}^\circ}}, \qquad \|\cdot\|^2_{\mathcal{Q}^\circ} = \mathcal{Q}^\circ + \|\cdot\|_2^2.$$

我们用 $\Delta^\circ = \Delta_2^\circ$ 表示由闭二次型 Q° 导出的正自伴算子。在 [BK25 定理 3.4] 中，证明了这些算子是形式拉普拉斯算子的限制

$$\Delta^+\omega = \partial\delta\omega, \qquad \Delta^-\omega = \delta\partial\omega, \qquad \Delta^H\omega = (\delta\partial + \partial\delta)\omega,$$

对于各自定义域中的 ω。

[BK25] 中提出的一个关键观点，是将这些拉普拉斯算子表示为带符号薛定谔算子；也就是说，存在显式的边权重 b°、取值于 $\{\pm 1\}$ 的磁势 o°，以及势 c°，使得这些拉普拉斯算子可以表示为薛定谔算子

$$\Delta^\circ = \mathcal{H}^\circ$$

其定义域适当 [（BK25，定理 3.19]）。这使我们能够在分析这些拉普拉斯算子时，运用上文所述薛定谔算子理论中的技巧。由 $c^H/m,$ 给出

$$\frac{c^H(\tau)}{m(\tau)} = \sum_{\rho \prec \tau} \frac{m(\tau)}{m(\rho)} + \sum_{\sigma \succ \tau} \frac{m(\sigma)}{m(\tau)} - \sum_{\rho \prec \tau} \sum_{\tau \neq \tau' \succ \rho} \Big| \frac{m(\tau')}{m(\rho)} - \sum_{\sigma \succ \tau, \tau'} \frac{m(\sigma)}{m(\tau)} \Big|,$$

在文献中被称为*Forman* 曲率 [For03, JM21]。因此，我们称该加权单纯复形具有形式有界曲率，如果存在 $M, C > 0$，使得对所有 $\omega \in C_c(\Sigma)$

$$\|\sqrt{c^H_-/m}\omega\|_2^2 \le M\mathcal{Q}^H(\omega) + C\|\omega\|_2^2.$$

在本节的其余部分，我们为(Σ, m)上的 b° 固定一个具有有限跳跃尺度的内在度量 d° （关于各种可能的选择，参见 [BK25第4节和第 6] 节），并按第3.2小节定义球体积。在接下来的各小节中，我们讨论上述结果在加权单纯复形上的拉普拉斯算子中的应用。

5.2. **加权单纯复形的结果**。 前几节关于磁薛定谔算子的结果，可通过将加权单纯复形上的拉普拉斯算子表示为带符号的薛定谔算子而推广至此， [BK25, 引理 3.13]。

记 Δ_2° 的谱底为 λ_2°，并将由 $-\Delta_2^\circ$在 $\ell^2(\Sigma, m)$ 上生成的半群记为 $S_2^\circ, \circ \in \{\pm, H\}$. 此外，令 p°为 S_2°.的核。

首先，我们有如下戴维斯-加夫尼-格里戈里扬估计，它回答了 [HL18, 注 1.1] 中提出的问题。回顾第 2 节定义的函数 $\zeta:\ \zeta(r) = r\operatorname{arcsinh}(r) - \sqrt{1+r^2} + 1$, $r \geq 0$. 下面的定理是定理 2.2 的直接推论。

定理 5.1 (Davies-Gaffney-Grigoryan)。 对所有 $\omega,\ \eta \in \ell^2,\ A =$ 满足 supp ω, $B =$满足 supp η, 都有

$$|\langle \mathrm{e}^{-t\Delta_2^\circ}\omega, \eta\rangle| \leq \exp\left(-\lambda_2^\circ t - \frac{t}{s^2}\zeta\left(\frac{sd^\circ(A,B)}{t}\right)\right)\|\omega\|_2\|\eta\|_2.$$

特别地，半群 $S_2^\circ(t) = \mathrm{e}^{-t\Delta_2^\circ}$ 的核 p_t° 对所有 $\sigma, \tau \in \Sigma$ 满足

$$|p_t^\circ(\sigma,\tau)| \leq (m(\sigma)m(\tau))^{-1/2}\exp\left(-\lambda_2^\circ t - \frac{t}{s^2}\zeta\left(\frac{sd^\circ(\sigma,\tau)}{t}\right)\right).$$

接下来，我们讨论半群在 ℓ^p 空间上的延拓。每当 S_2° 在 ℓ^p 上对 $1 \leq p < \infty$延拓为强连续半群 S_p° 时，我们将其在 ℓ^p 上的生成元记为 Δ_p°，并将 $\Delta_\infty^\circ = (\Delta_1^\circ)^*$ 记在 ℓ^∞. 上

在应用上述任何结果之前，我们先简要讨论 Δ_2° 有界的情形。在 [BK25 的定理 4.1] 中证明了，若

$$\sup_\Sigma(\dim + 2)\gamma/m < \infty$$

并且，当 Σ 为有限维时，这已经刻画了有界性，即 $\dim(\Sigma) = \sup_\Sigma \dim < \infty$. 在这种情况下， S_2° 由绝对收敛级数给出

$$S_2^\circ(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-t)^k \Delta_2^{\circ k}}{k!}.$$

显然，如果 Δ_2° 可扩展为 ℓ^p上的有界算子， $1 \leq p \leq \infty$，那么 S_2°也可以，因此我们得到一个作用于 ℓ^p上的解析半群 S_p°，它作为 S_2°.一致作用。因此，我们只需证明 Δ_2° 可扩展为 ℓ^p上的有界算子。由于 Δ_2° 是 δ 与 ∂ 的复合（[BK25, 定理 3.4]），问题可进一步简化为只需证明 δ 和 ∂ 在 ℓ^p. 上有界。事实证明，对于所有 $1 \leq p \leq \infty$，这一点都自动成立，除要求在 ℓ^2.上有界外，无需其他假设。

命题 5.2 (有界性)。 对于 $k \geq 0$, 令 δ_k, ∂_k 为 δ, ∂ 在$C(\Sigma_k)$上的限制。

(a) $\|\delta_k\|_{\infty,\infty} \leq k+2$ *and* $\|\partial_k\|_{1,1} \leq k+1$.

(b) 若 $C := \text{上确界}_{\Sigma}\, \gamma/m < \infty$，则

$$\|\delta\|_{1,1} \le C, \qquad \|\partial\|_{\infty,\infty} \le C.$$

特别地， ∂_k、 δ_k 在 ℓ^p 上对所有 $1 \le p \le \infty$. 均有界。此外，若$D :=$ $\sup\Sigma(\dim +2)\gamma/m < \infty$，则

$$\|\Delta_p^{\pm}\|_{p,p} \le D \quad and \quad \|\Delta_p^{H}\|_{p,p} \le 2D$$

对所有 $1 \le p \le \infty$.均成立。*(c)* 若$\dim(\Sigma) < \infty$, 则以下条件等价：*(i)* $\sup_{\Sigma} \gamma/m < \infty$.；*(ii)* 对某个（所有） $1 \le p < \infty$., δ 有界；*(iii)* 对某个（所有） $1 < p \le \infty$., ∂ 有界

证明。 令 $\omega \in C(\Sigma_k)$，并注意到 δ 的作用相当于

$$\delta\omega(\sigma) = \sum_{\tau \prec \sigma} \theta(\tau,\sigma)\omega(\tau), \ \sigma \in \Sigma.$$

此和恰有 $\dim(\sigma) + 1 = k + 2$ 项。现在，(a) 和 (b) 中针对 δ 和 $p = 1, \infty$ 的算子界可由三角不等式的简单应用得到，而针对 $1 < p < \infty$ 的算子界则由 Riesz-Thorin 插值定理得到。类似地，可得到 ∂. 相应的算子界。由于 $\mathcal{L}^- = \delta\partial$、 $\mathcal{L}^+ = \partial\delta$ 和$\mathcal{L}^H = (\delta + \partial)^2$ 是 δ 和 ∂, 的复合，它们在 ℓ^p 上也有界。结合 δ 和 ∂ 的界，可得$\|\mathcal{L}^{\pm}\|_{p,p} \le D$ 和$\|\mathcal{L}^H\|_{p,p} \le 2D$ 。因此，它们通过指数幂级数在 ℓ^p 上生成强连续半群，该半群在 $\ell^2 \cap \ell^p$上与 S_2°一致。于是，它们的生成元 Δ_p° 在 ℓ^p 上与 $\mathcal{L}^{\circ}$ 一致，因此有界，且满足相应的界。

至于 (c) 中的等价性，由 (b) 可得“(i) $\Rightarrow$ (ii)”。我们还注意到，根据对偶性和斯托克斯定理 [BK25，定理 2.9]， δ 在 ℓ^p 上有界，当且仅当 ∂ 在 ℓ^q, 上有界，其中 q 是 p. 的 Hölder 对偶。这表明 (ii) 与 (iii) 等价。最后，我们假设 (iii) 成立，即 δ 在某个 ℓ^p 上有界。于是存在 $D > 0$ ，使得对于每个 $\tau \in \Sigma$，都有

$$Dm(\tau) = D\|1_\tau\|_p^p \ge \|\delta 1_\tau\|_p^p = \sum_{\sigma \succ \tau} m(\sigma) = \gamma(\tau).$$

证明至此完成。 □

我们称函数 $[0,\infty) \to \ell^p, t \mapsto \omega_t$ 满足

$$(\mathrm{HE}^{\circ}) \qquad -\Delta_p^{\circ}\omega_t(x) = \frac{d}{dt}\omega_t(x)$$

对于初始条件 $\omega_0 \in \ell^p$ ，若 $t \mapsto \omega_t(x)$ 在 $[0,\infty)$ 上连续、在 $(0, \infty)$ 上可微，且 $\omega_t \in D(\Delta_p^{\circ})$ 对于 $t > 0$ 成立，并且对所有 $t > 0$ 和 $x \in \Sigma$满足 (HE°)，则称其为解。

注。 一般而言，并不清楚 Δ_p° 是否像 Δ°. 那样充当 δ 和∂ 的复合。对于局部有限的单纯复形，我们可以由定理 3.9 和 [BK25，定理 3.12] 推出这一点，因为此时 $\Delta_p^{\circ} = \mathcal{H}^{\circ} = \mathcal{L}^{\circ}$ 在 $D(\Delta_p^{\circ})$。 这里，$\mathcal{L}^- = \delta\partial$ 、 $\mathcal{L}^+ = \partial\delta$ 以及 $\mathcal{L}^H = (\delta + \partial)^2$ 是命题 5.2 证明中所述的形式拉普拉斯算子。这尤其适用于组合单纯复形，在这种情况下 $m \equiv 1$.

以下定理是定理 3.1、定理 3.4、定理 3.6、命题 3.10和命题 5.2的直接推论。

定理 5.3 （半群延拓）。设 $\circ \in \{\pm, H\}$。

(a) 若加权单纯复形具有形式有界曲率，界为$M > 0$，则对所有 $p \in I = [2\frac{M+1}{M} - 2\frac{\sqrt{M}+1}{M}, 2\frac{M+1}{M} + 2\frac{\sqrt{M}+1}{M}]$，半群$S_2^\circ$都可一致地延拓为 ℓ^p. 上的强连续半群 S_p° 。对于有界曲率的情形，即 $M = 0$，这对所有 $p \in I = [1, \infty)$ 均成立。在这两种情况下， $S_p^\circ(t)\omega_0$ 对所有 $\omega_0 \in \ell^p$ 以及位于 I.内部的 p 均满足 *(HE°)*。*(b)* 若加权单纯复形具有指数体积增长，则半群 S_2° 可一致地延拓为 ℓ^p 上的强连续半群 S_p°，对所有 $1 \leq p < \infty$ ，且 $S_p^\circ(t)$ ω_0 对所有 $\omega_0 \in \ell^p$ 和所有$1 < p < \infty$.均满足 *(HE°)*。*(c)* 若 $sup\Sigma(dim + 2)$ $\gamma/m < \infty$，则半群 S_2° 可一致地延拓为 ℓ^p 上的解析半群 S_p° ，且 $S_p^\circ(t)\omega_0$ 对所有 $\omega_0 \in \ell^p$和所有 $1 \leq p \leq \infty$.均满足 *(HE°)*

最后，我们得到关于 ℓ^p-谱的如下结果。我们从一致正测度假设下的谱包含关系入手，该关系可直接由定理 4.2 推出。

定理 5.4. 设 $1 \leq p < \infty$。假设 S_2°、 $\circ \in \{\pm, H\}$ 可延拓为 ℓ^p 上的强连续半群，且 $\inf_{\tau \in \Sigma} m(\tau) > 0$. 则，

$$\sigma(\Delta_2^\circ) \subseteq \sigma(\Delta_p^\circ).$$

注. 同样，若 S_2° 可延拓为 ℓ^1 上的强连续半群，则由对偶性，我们亦有 $\sigma(\Delta_2^\circ) \subseteq \sigma(\Delta_\infty^\circ)$。

最后，我们讨论形式有界曲率与次指数体积增长条件下 ℓ^p-谱的独立性。这直接由定理 4.4 得出。

定理 5.5 （ ℓ^p-谱的独立性）。 设 $\circ \in \{\pm, H\}$. 。若 c°/m 是形式有界的，且图 b° 关于d°具有一致次指数体积增长，则对所有 $1 \leq p \leq \infty$

$$\sigma(\Delta_2^\circ) = \sigma(\Delta_p^\circ).$$

5.3. **组合权重的结果**。 最后，我们讨论引言中单纯复形上组合权重这一特殊情形。若加权单纯复形 (Σ, m) 满足 $m \equiv 1$，则称其具有组合权重 。注意，由于 m. 满足局部可求和性假设，这意味着 Σ，局部有限，即每个单形都有有限个上余面。下文将证明引言中的定理 1.1 和定理 1.2。回顾一下，这里考虑的是定义在 ， 的 1-骨架上的组合图度量

$$d(v, w) = \min\{n \mid \text{there is a path } v = v_0 \sim \ldots \sim v_n = w\}$$

上；1-骨架由顶点和 1-单形组成，我们将其视为一个图。为了应用关于加权单纯复形的更抽象结果，我们需要仅凭d.在整个 Σ 上构造一个内在度量。值得注意的是，只需考虑该复形的一维数据，就能做到这一点。

引理 5.6。 设 Σ 是一个带有组合权重的加权单纯复形。若球的体积相对于组合度量 d 至多呈（次）指数增长，则 Σ 是有限维的，并且存在一种内在度量 ρ，其

在 Σ 上具有有限跳跃尺度，使得球的体积相对于 ρ 至多呈（次）指数增长。

证明。 根据引理 3.7，组合顶点度一致有界于某个 $D > 0.$ 。这也意味着 Σ 是有限维的。因此，将组合度量除以 $\sqrt{D}$ 后得到的度量是内蕴的，且具有有限跳跃尺度；我们将此度量记为 ρ。我们将 ρ 扩展到整个 Σ ，方法是

$$\rho(\sigma, \sigma') = (\dim(\Sigma) + 1)^{-1/2} \inf_{\sigma=\sigma_0 \sim \ldots \sim \sigma_n = \sigma'} \sum_{k=1}^{n} \max_{v \in \sigma_k \cap \sigma_{k-1}} \deg(v)^{-1/2}$$

对所有维数相同的 σ， σ' 如此，而对维数不同的单形则取无穷大。在 [BK25 的定理 6 证明中1], , 我们证明了 ρ 在 Σ_k上是内蕴的，其中 $1 \leq k \leq$dim(Σ)。 显然，它也具有有限跳跃尺度。此外，该文还证明，对所有 σ， $\sigma' \in \Sigma_k$，我们都能找到 $v \in \sigma$， $v' \in \sigma'$ 使得

$$d(v, v')/\sqrt{D} = \rho(v, v') \leq (\dim(\Sigma) + 1)^{1/2} \rho(\sigma, \sigma').$$

因此，我们可以根据 d 的（次）指数体积增长，得出关于相对于 ρ 的球的（次）指数体积增长，因为每个 σ 恰好包含 dim(σ) 个 $+1$ 顶点。□

引理 5.7. 设 Σ 为具有组合权重的加权单纯复形。则下列陈述等价:

(i) 球体积关于1-骨架上某个具有有限跳跃尺度的内在度量至多呈指数增长。
(ii) 球体积关于1-骨架上的组合度量至多呈指数增长。*(iii)* 1-骨架上的组合度有界。*(iv)* 余边界算子 δ 在 ℓ^p 上对某个（所有） $1 \leq p < \infty.$ 有界

在此情形下，在 Σ 上存在一个具有有限跳跃尺度的内在度量，使得球体积至多呈指数增长。此外， Δ° 在 ℓ^p 上对所有 $1 \leq p \leq \infty$ 与 $\circ \in \{\pm, H\}.$ 有界

证明. (i) ⇒(iii)：此结论由引理 3.7 推出。

(iii) ⇒ (ii)：若组合度以 $D \geq 1,$ 为界，则组合度量除以 $\sqrt{D}$ 后是具有有限跳跃尺度的内蕴度量。因此，球关于该度量至多呈指数增长，即 #B_r(x) $\leq D^{r\sqrt{D}}$。

(ii) ⇒ (i)：在引理 5.6 的证明中，我们已经看到，组合度量在用某个仅依赖于 Σ 的维数的常数进行归一化后是内蕴的。

(iii) ⇒ (iv)：设组合度以 $D.$ 为界。这已经迫使Σ 以及 $\gamma \leq D.$ 都是有限维的。因此，对每一个 $\tau \in \Sigma$ ，我们得到估计

$$\gamma(\tau)(\dim(\tau) + 2) \leq D(\dim \Sigma + 2) < \infty.$$

现在我们由命题 5.2 得出 (iv)。

(iv) ⇒(iii)：设 δ 在 ℓ^p 上对某个 $1 \leq p < \infty$有界，并选取任意顶点 $v.$ 。由于 v 的组合度恰好由 $\|\delta 1_v\|_p^p$，给出，我们得出 (iii)。

该陈述的最后一部分由引理 5.6 和命题 5.2 得出。□

我们以证明引言中的定理 1.1 和定理 1.2 作为本文的结尾。

定理 *1.1* 的证明。 由定理 3.9 和 [BK25、定理 3.12] （另见命题 5.2 后的注释），可知生成元 Δ_p^H 在 $D(\Delta_p^H)$ 上作用为形式拉普拉斯算子 $\partial\delta+\delta\partial$，其中 $1\le p\le\infty$ 适用于 ℓ^2 半群可延拓至 ℓ^p的情形。断言 (a) 直接由定理 5.3 (a) 得出。对于指数体积增长情形下的断言 (b)，由上述引理可知，1-骨架上的组合度有某个上界 $D>0.$。这意味着 Σ 是有限维的，且 $\gamma\le D.$。现在由定理 5.3 (c) 得出结论。□

定理 *1.2* 的证明。由引理 5.6 可知，存在一个定义在 Σ 上的内在度量，其跳跃大小有限，且球体积的增长至多为次指数级。此外，由引理 5.7 可知， Δ^H 在 $\ell^1.$ 上有界。因此， S_2^H可扩张为 ℓ^1 上的强连续半群 S_1^H，且 $\|S_1^H(t)\|_{1,\ 1}\le \mathrm{e}^{t\|\Delta^H\|_{1,\ 1}}$。因此，由命题 3.5 可知，曲率下有界，特别地，形式有界。故结论由定理 5.5 得出。□

致谢：作者感谢德国研究联合会的资助，并感谢 Delio Mugnolo 提供文献方面的提示。第二位作者感谢 IIAS（耶路撒冷）提供的经费支持与热情接待。

参考文献

[ATH15] Colette Anné 和 Nabila Torki-Hamza。《无限图上的高斯-博内算子》。《数学物理分析》，5(2):137–159，2015年。[Bar17] Martin T. Barlow。《图上的随机游走与热核》，伦敦数学学会讲义系列第438卷。剑桥大学出版社，剑桥，2017年。[BHK13] Frank Bauer、Bobo Hua 和 Matthias Keller。《图上拉普拉斯算子的谱》。《数学进展》，248:717–735，2013年。[BHY15] Frank Bauer、Bobo Hua 和 丘成桐。《图上的 Davies-Gaffney-Grigor'yan 引理》。《分析与几何通讯》，23(5):1031–1068，2015年。[BHY17] Frank Bauer、Bobo Hua 和 丘成桐。《图上的尖锐 Davies-Gaffney-Grigor'yan 引理》。《数学年刊》，368(3-4):1429–1437，2017年。[BK25] Philipp Bartmann 和 Matthias Keller。《一般单纯复形上的霍奇拉普拉斯算子》。arXiv 预印本，arXiv:2508.07761，2025年。[Bra22] Mathias Braun。《里奇曲率下界下 1-形式的热流》。《函数不等式、谱理论与热核》。《函数分析杂志》，283 109599，65，2022 7( ):论文编号 .。[CCH06] Gilles Carron、Thierry Coulhon 和 Andrew Hassell。《具有欧几里得端的流形上的黎斯变换与 L^p-上同调》。《杜克数学杂志》，133(1):59–93，2006年。[CCH20] Li Chen、Thierry Coulhon 和 Bobo Hua。《图上有界拉普拉斯算子的黎斯变换》。《数学杂志》，294(1-2):397–417，2020年。[Cha84] Isaac Chavel。《黎曼几何中的特征值》，纯粹与应用数学第115卷。学术出版社，奥兰多，佛罗里达州，1984年。包括 Burton Randol 撰写的一章，并附有 Jozef Dodziuk 的附录。[Cha05] Nelia Charalambous。《非紧流形上霍奇拉普拉斯算子谱的 L^p 独立性》。《函数分析杂志》，224(1):22–48，2005年。[Che18] Yassin Chebbi。《2-单纯复形的离散拉普拉斯算子》。《势分析》，49(2):331–358，2018年。[CHQ+21] Shiping Cao、Yiqi Huang、Hua Qiu、Robert S. Strichartz 和 Xiaohan Zhu。《谢尔宾斯基格上的谱分析 ℓ^2 》。《傅里叶分析及其应用杂志》，27 55，19，2021 3( ):论文编号 .。[CKK19] Zhen-Qing Chen、Daehong Kim 和 Kazuhiro Kuwae。《广义费曼-卡茨半群谱半径的 L^p独立性》。《数学年刊》，374(1-2):601–652，2019年。[CL25] Nelia Charala mbous 和 Zhiqin Lu。《形式上拉普拉斯算子的 L^p谱理论》。《函数分析杂志》，289(6):论文编号 110976，44，2025年。

[Dav92] E. B. Davies。《热核界、概率守恒与 Feller 性质》。第58卷，第99–119页。1992年。为纪念 Shmuel Agmon 70 岁生日而出版的纪念文集。[Dav07] E. Brian Davies。《线性算子及其谱》，剑桥高级数学研究丛书第106卷。剑桥大学出版社，剑桥，2007年。[DM97] Jozef Dodziuk 和 Varghese Mathai。《逼近可公度覆盖空间的 L^2 不变量：一种热核方法》。载于《Lipa 的遗产》（纽约，1995年），《当代数学》第211卷，第151–167页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1997年。[DM98] Jozef Dodziuk 和 Varghese Mathai。《逼近可公度覆盖空间的 L^2 不变量：一种组合方法》。《函数分析杂志》，154(2):359–378，1998年。[Dod76] Jozef Dodziuk。《调和形式霍奇理论的有限差分方法》。《美国数学杂志》，98(1):79–104，1976年。[Dod83] Jozef Dodziuk。《抛物型不等式的最大值原理与开流形上的热流》。《印第安纳大学数学杂志》，32(5):703–716，1983。[dR84] Georges de Rham。《可微流形：形式、流与调和形式》。施普林格，1984年。[Eck44] Beno Eckmann。《复形中的调和函数与边值问题》。《赫尔维蒂数学评论》，17:240–255，1944年。[EJ25a] Marwa Ennaceur 和 Amel Jadlaoui。《加权单纯复形上离散霍奇拉普拉斯算子本质自伴性的几何判据》。arXiv 预印本，2025年。[EJ25b] Marwa Ennaceur 和 Amel Jadlaoui。《加权单纯复形上的霍奇拉普拉斯算子：形式、闭包与本质自伴性》。arXiv 预印本，2025年。[EN06] Klaus-Jochen Engel 和 Rainer Nagel。《算子半群简明教程》。Universitext。施普林格，纽约，2006年。[For03] Robin Forman。《胞腔复形的 Bochner 方法与组合里奇曲率》。《离散与计算几何》，29(3):323–374，2003年。[Gaf59] Matthew P. Gaffney。《黎曼流形上热方程的守恒性质》。《纯粹与应用数学通讯》，12:1–11，1959年。[GHM12] Alexander Grigor’yan、Xueping Huang 和 Jun Masamune。《跳跃过程的随机完备性》。《数学杂志》，271(3-4):1211–1239，2012年。[GKS16] Batu Güneysu、Matthias Keller 和 Marcel Schmidt。《图上磁薛定谔算子的 Feynman-Kac-Itô 公式》。《概率论及相关领域》，165(1-2):365–399，2016。[GLYZ25] Alexander Grigor’yan、Yong Lin、丘成桐和 Haohang Zhang。《有向图上霍奇拉普拉斯算子的特征值》。《分析与几何通讯》，33(4):981–1023，2025年。[Gri18] Alexander Grigor’yan。《图上的分析导论》，大学讲座丛书第71卷。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2018年。[HJ13] Danijela Horak 和 Jürgen Jost。《单纯复形上组合拉普拉斯算子的谱》。《数学进展》，244:303–336，2013年。[HL18] Bobo Hua 和 Xin Luo。《单纯复形上的 Davies-Gaffney-Grigor’yan 引理》。《数学杂志》，290(3-4):1041–1053，2018年。[HV86] R. Hempel 和 J. Voigt。《$(\mathbb{R}^d)$ 中薛定谔算子的谱具有 p独立性》。《数学物理通讯》，104:243–250，1986年。[HV87] Rainer Hempel 和 Jürgen Voigt。《薛定谔算子的 L_p谱》。《数学分析与应用杂志》，121(1):138–159，1987年。[JM21] Jürgen Jost 和 Florentin Münch。《Forman 曲率的刻画》。arXiv 预印本，arXiv:2110.04554，2021年。[JMZ26] Jürgen Jost、Raffaella Mulas 和 Dong Zhang。《离散结构的谱》。剑桥高级数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，2026年。即将出版。[Kat95] Tosio Kato。《线性算子扰动理论》。数学经典。施普林格出版社，柏林，1995年。1980年版的重印本。[KLW21] Matthias Keller、Daniel Lenz 和 Radosław K. Wojciechowski。《图与离散狄利克雷空间》，数学科学基础丛书第358卷。施普林格，Cham，2021年。[LS96] V. A. Liskevich 和 Yu.Ã. Semenov。《关于马尔可夫半群的一些问题》。载于《薛定谔算子、马尔可夫半群、小波分析、算子代数》，《数学主题》第11卷，第163–217页。学院出版社，柏林，1996年。

[Lun18] Alessandra Lunardi。《插值理论》，《Appunti》第16卷。比萨高等师范学校（新系列） /讲义。比萨高等师范学校（新系列）/。Edizioni della Normale，比萨，第三版，2018年。[Mag16] Jocelyn Magniez。黎曼流形上 Hodge–de Rham 拉普拉斯算子的 Riesz 变换。《数学新闻》，289(8-9):1021–1043，2016年。[Mas09] Jun Masamune。Liouville 性质及其在无限图拉普拉斯算子中的应用。载于《几何与数论中的谱分析》，《当代数学》第484卷，第103–115页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2009年。[MHJ22] Raffaella Mulas、Danijela Horak 和 Jürgen Jost。图、单纯复形与超图：谱理论和拓扑学。载于《高阶系统》，《理解复杂系统》，第1–58页。施普林格，Cham， [2022] ©2022。[MKBJ22] Raffaella Mulas、Christian Kuehn、Tobias Böhle 和 Jürgen Jost。超图上的随机游走与拉普拉斯算子：它们何时相匹配? 《离散应用数学》，317:26–41，2022年。[Mug25] Delio Mugnolo。有向超图上的非马尔可夫热流。arXiv 预印本 arXiv:2510.17497，2025年。[Sch20] Marcel Schmidt。离散（磁）薛定谔算子的自伴实现的存在性与唯一性。载于《图与流形上的分析和几何》，《伦敦数学会讲义丛书》第461卷，第250–327页。剑桥大学出版社，剑桥，2020年。[Ste70] Elias M. Stein。与 Littlewood-Paley 理论相关的调和分析专题，《数学年刊研究》第63卷。普林斯顿大学出版社，普林斯顿，新泽西州；东京大学出版社，东京，1970年。[Str83] Robert S. Strichartz。完备黎曼流形上拉普拉斯算子的分析。《函数分析杂志》，52(1):48–79，1983年。[Stu93] Karl-Theodor Sturm。黎曼流形上一致椭圆算子的 L^p 谱。《函数分析杂志》，118(2):442–453，1993年。[Woj08] Radoslaw Krzysztof Wojciechowski。图的随机完备性。ProQuest LLC，安娜堡，密歇根州，2008年。博士论文——纽约市立大学。

Philipp Bartmann：数学研究所，波茨坦大学，14476 波茨坦，德国电子邮箱地址：philipp.bartmann@uni-potsdam.de

Matthias Keller：以色列高等研究院（IIAS），耶路撒冷希伯来大学，费尔德曼大楼，埃德蒙·J·萨夫拉校区，吉瓦特拉姆，耶路撒冷，以色列；数学研究所，波茨坦大学，14476 波茨坦，德国电子邮箱地址：matthias.keller@uni-potsdam.de