arXiv:2602.18601v1 [math.OA] 20 Feb 2026

关于C^*-代数、表示与 Morita 等价的笔记

着眼于约化群的C^*-代数

Tyrone Crisp*

2025年11月；2026年2月修订

这些笔记对我在 CIRM-IHP 研究学校所作的讲座作了扩充阐述，该研究学校的主题为表示论与算子代数中的方法，时间为2025年1月6日至10日。其目标是阐述以下定理的一个证明：

定理 1. 对每个实约化群G，存在C^*-代数的 Morita 等价

$$C_r^*(G) \sim \bigoplus_{[L,\sigma]} C_0(\mathfrak{a}_L^*/W_\sigma') \rtimes R_\sigma.$$

（该记号的含义将在适当的时候加以说明。）

这一结果最早见于 A. Wassermann 的一篇简短札记 [Was87]（该文提及 Arthur [Art75] 的另一篇简短札记）；而复群的情形则由 Penington–Plymen [PP83] 更早解决。Wasser- mann 利用实约化群的约化 C^*-代数的这一描述，验证了（在线性约化情形下）Connes–Kasparov猜想；该猜想以指标理论的术语计算这些 C^*-代数的 K理论。我们对表示论与 Connes–Kasparov同构所内含的 C^*-代数之间联系的理解仍在不断深化：例如参见 [BCH94, Laf02, Hig08, CCH16, Afg19, CHST24, CHS24, BHY24, CHR25], 等相关研究。

这些讲义与其所记录的课程一样，旨在为刚接触这一领域的读者提供入门指引。它们并不试图全面综述整个领域；相反，我们尝试勾勒一条相对易于理解的路径，引向一个特定结果——定理 1，同时介绍本次推导中会用到的一些 C^*-代数理论基本思想。我们的目标读者是硕士、博士阶段的学生，以及其他非该领域专家的数学家，他们

*数学与统计学系，缅因大学。tyrone.crisp@maine.edu

并非 C^*-代数领域的专家。主要预备知识包括一些基础泛函分析知识，以及愿意不经证明地接受我们将要依赖的 C^*-代数基本结果。（此前若接触过有限群或紧群表示论，也会有所帮助，不过必要的事实我们已在附录中作了总结。）

我们聚焦于定理 1，因此略过了关于C^*-代数的许多基本思想，却对相对简单的结果作了详尽得多的讨论。对于希望更全面地了解C^*-代数理论及其表示的读者，我们热忱推荐 Dixmier 的经典著作 [Dix69, Dix77], 以及 Blackadar 的综述 [Bla06]。关于C^*-代数与群表示之间其他一些联系的历史概述，请参阅 Rosenberg 的综述 [Ros94]。关于希尔伯特模和 Morita 等价，请参阅 Rieffel 的综述 [Rie82], ，以及 Raeburn 和 Williams[RW98] 、Lance [Lan95]所著的书籍。

本讲义几乎完全聚焦于定理 1 中C^*-代数方面的内容：由于讲课时间有限，加之我们对相关领域不够熟悉，因此没有尝试解释我们C^*-代数计算所依赖的、实约化群表示理论中的许多深刻结果（这些结果由 Harish-Chandra、Langlands、Knapp、Stein 等人提出）。关于如何运用这些表示论结果研究 C^*-代数，更多详情可参阅例如 [CCH16] 和 [CHST24]。关于该领域更全面的论述（包括原始文献出处），可参阅例如 Knapp [Kna86] 和 Wallach [Wal88, Wal92]所著的书籍。

这些笔记的主要阐述部分是第 1 节和第 3 节：第 1 节讨论 C^*-代数及其表示的基本理论，并以 Kaplansky 的 Stone–Weierstrass 定理为高潮；第 3 节则讨论 C^*-代数的 Morita 等价概念。这两个较长的章节之后各有一个较短的章节，我们在其中简要说明如何将一般理论应用于实约化群的 C^*-代数，并给出定理 1 的证明。除 Wassermann 的简短笔记 [Was87]，之外，定理 1（的部分）的证明可见于 [CCH16], [AA22], 以及 [CHST24], ，而我们此处的阐述得益于所有这些来源，也得益于与 Pierre Clare 正在进行的工作。

我们还附上了附录，列出有限群和紧群表示理论中的一些基本事实（附录 A），并给出散见于讲义各处的习题解答——其中有些相当粗略，也没有一道特别精致（附录 B）。这些习题大多是相当常规的验证，旨在循序渐进地引导学生熟悉这一领域的一些基本计算和论证思路。

致谢：我很高兴能感谢组织者 Alexandre Afgoustidis、Anne-Marie Aubert、Pierre Clare 和 Haluk Şengün 邀请我来讲授这些课程；也感谢所有与会者，以及 CIRM 的东道主，为我们带来了一场富有启发且令人愉快的会议。我参加此次活动所获资助来自美国数学会、西蒙斯基金会和洛林大学。

1 C-代数的表示

粗略地说，这些笔记的目标是通过某种傅里叶变换，将实约化群的（约化）C-代数与一个表示空间上的函数代数对应起来。在这一计算过程中，一个重要步骤是确定傅里叶变换的值域。一般而言，要确定给定函数空间上傅里叶变换的值域，往往需要细致地权衡局部正则性与渐近行为。在我们的 C-代数框架中，情况相当直接：相关的局部正则性性质是连续性，相关的渐近行为则是在无穷远处消失。本节将介绍我们用来证明这一值域性质的工具：Kaplansky 提出的 Stone–Weierstrass 定理的一种推广。

在讨论这一点之前，我们将先介绍理解 Stone–Weierstrass 定理的内容及其正确性所需的 C*-代数及其表示的基本概念和结果。

1.1 C*-代数：基本定义和例子

定义 1.1。(1) C*-代数 是一个（定义在 $\mathbb{C}$ 上的）巴拿赫空间，配备满足 $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ 的结合双线性乘法，以及一个对合 $*: A \to A$，它是共轭线性的，满足 $(ab)^* = b^*a^*$，且通过恒等式 $\|a^*a\| = \|a\|^2$ 与范数相关。

(2) C*-代数之间的同态 $\varphi: A \to B$ 是一个与乘法和对合相容的线性映射：$\varphi(ab) = \varphi(a)\varphi(b)$ 且 $\varphi(a^*) = \varphi(a)^*$，对所有$a$、$b \in A$均成立。

注释 1.2。(1) C^*-代数不要求具有乘法单位元。本讲义中将遇到的C^*-代数几乎都没有单位元。但在许多情况下，C^*-代数的行为如同含有 1 的代数；例如，乘法映射$A \times A \to A$是满射（参见定理 1.11）。

(2) 每个C^*-代数都有范数，因此也有拓扑，但C^*-代数的同态定义并不要求连续性，因为范数完全由代数结构决定：**定理：**C^*-代数的同态自动是压缩的，且具有闭值域；单同态自动是等距的。

(3) 上述结论意味着，如果一个带对合的代数具有某个范数，使其成为C^*-代数，那么这样的范数只有一个。因此，在研究C^*-代数时，范数往往退居幕后：范数可能非常有用（因为我们可以利用完备性，通过构造一列逐步改进的近似解来得到问题的解）；但有时我们并不需要真正考虑范数。

(4) 基于大致相同的原因，C^*-代数上的 $*$ 运算自动是等距的： $\|a^*\| = \|a\|$ 对所有 $a \in A$ 都成立。

例 1.3。(1) 设 X 是一个局部紧豪斯多夫拓扑空间，并考虑由在无穷远处消失的连续函数 $\mathrm{f}: \mathrm{X} \to \mathbb{C}$ 组成的集合 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$（即：对于每个 $\varepsilon > 0$，集合 $\{\mathrm{x} \in \mathrm{X} \mid |\mathrm{f}(\mathrm{x})| \geq \varepsilon\}$ 都是紧的。）我们逐点加减函数； $\|\mathrm{f}\| := \sup_{x \in X} |\mathrm{f}(\mathrm{x})|$；并且 $\mathrm{f}^*(\mathrm{x}) := \mathrm{f}(\mathrm{x})$。这使 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$ 成为一个 C*-代数。定理：每个交换 C*-代数都同构于这种形式的一个代数。

(2) 设H 为一个复希尔伯特空间，$\mathrm{B}(H)$为所有$H \to H$上的有界算子构成的空间。算子的乘法定义为复合。令 $*$ 表示通常的伴随运算，其特征为：对所有 $\xi, \eta \in H$， $\langle \xi \mid t^*(\eta) \rangle = \langle t(\xi) \mid \eta \rangle$ 。赋予算子范数（$\|t\| = \sup_{\|\xi\|=1} \|t\xi\|$）后，$\mathrm{B}(H)$ 是一个C^*-代数。（约定：在本文中，内积 $\langle \xi \mid \eta \rangle$ 对 η线性，对 ξ共轭线性。）

(3) **定义：**我们将C^*-代数的子代数 定义为一个范数闭线性子空间，它对乘法和 $*$ 封闭。这样的子代数本身也是一个 C^*- 代数。**定理：**每个 C^*- 代数都同构于某个H上的 $\mathrm{B}(H)$的子代数。

（4）希尔伯特空间 H 上的紧算子 $\mathrm{K}(H)$ 空间是 $\mathrm{B}(H)$ 的子代数，因此是一个 C^*-代数。

(5) 结合例子 (1) 和 (4)，若 X 是局部紧豪斯多夫空间，且H是希尔伯特空间，我们考虑由连续函数f 构成的空间$C_0(X, \mathrm{K}(H))$，其中$X \to \mathrm{K}(H)$ ，这些函数在无穷远处消失（相对于H上的范数而言）。

加法、数乘、乘法以及 $*$ 都逐点定义，范数为 $\|f\| := \sup_{x\in X} \|f(x)\|$。这使 $C_0(X, \mathrm{K}(H))$ 成为一个 C^*-代数。

(6) 设 G 是一个局部紧群。对 G 上的所有积分，均相对于某个选定的左不变哈尔测度进行。由 G 上连续、紧支撑的复值函数构成的卷积代数 $C_c(G)$ 在希尔伯特空间 $L^2(G)$ 上作用为有界算子：对于 $f \in C_c(G)$ 和 $\xi \in L^2(G)$，我们定义

$$\lambda(f)\xi(g) = \int_G f(h)\xi(h^{-1}g)\,dh.$$

于是我们定义 $C^*_r(G) = \overline{\lambda(C_c(G))}$，即 $\lambda(C_c(G))$ 在算子范数下的闭包。这是群 G 的约化 C^*-代数，称为该群的约化 C^*-代数。

(7) 局部紧群还关联着其他 C^*-代数，它们是通过在不同范数下完备化 $C_c(G)$ 得到的。在本讲义中，我们只讨论约化 C^*-代数。

(8) 设 W 是一个有限群，它作用在 C^*-代数 A 上，且作用由 $*$-自同构给出：这意味着，对每个 $w \in W$，都有一个可逆线性映射 $\beta_w : A \to A$，满足 $\beta_w(ab) = \beta_w(a)\beta_w(b)$ 和 $\beta_w(a^*) = \beta_w(a)^*$；并且这些映射满足 $\beta_{w_1} \circ \beta_{w_2} = \beta_{w_1 w_2}$。由这些数据，我们构造两个新的 C^*-代数：

(i) 不动点代数

$$A^W = \{a \in A \mid \beta_w(a) = a \text{ for all } w \in W\}.$$

这是 A 的一个子代数，因此也是一个 C^*-代数，其运算继承自 A。

(ii) 交叉积

$$A \rtimes W = \left\{ \sum_{w\in W} a_w w \;\middle|\; a_w \in A \right\}$$

通过按 A 中的方式将 A 的元素相乘，按 W 中的方式将 W 的元素相乘，并令 $wa = \beta_w(a)w$（其中 $w \in W$ 且 $a \in A$），就可将其构造成一个代数。我们在 $A \rtimes W$ 上定义一个对合 $*$，令 $(aw)^* = w^{-1}a^* = \beta_{w^{-1}}(a^*)w^{-1}$。最后，我们需要在 $A \rtimes W$ 上赋予一个 C^*-代数范数。如何做到这一点的细节要到后文才会用到，因此我们将关于这一点的讨论推迟到练习 3.14。

练习 1.4. 设 W 是一个有限群，它通过同胚作用于一个局部紧豪斯多夫空间 X。对每个 $w \in W$ 以及 $f \in C_0(X)$，定义 $\beta_w(f)(x) = f(w^{-1}x)$。证明这定义了 W 在 $C_0(X)$ 上的一个作用，且其由 $*$-自同构构成；并证明 $C_0(X)^W \cong C_0(X/W)$。

练习 1.5. 设W是一个有限群，它作用于一个C^*-代数A，且作用由$*$-自同构构成。假设W是半直积$U \rtimes V$。证明公式 $\alpha_v(au) := \beta_v(a)vuv^{-1}$ 定义了V 在交叉积$A \rtimes U$上的一个作用，并求一个C^*-代数同构 $(A \rtimes U) \rtimes V \cong A \rtimes W$。

定义 1.6. 在C^*代数A中，理想 是指在范数拓扑下闭合的双边理想。

定理 1.7. 设 J 是 A 中的一个理想。

(1) 对所有 $j \in J$，均有 $j^* \in J$，因此 J 是一个 C^*-代数。

(2) 商 A/J 在商范数下是一个 C^*-代数

$$\|a + J\| = \inf_{j \in J} \|a + j\|.$$

(3) 所有预期的同构定理均成立。 □

例 1.8. 设 U 是局部紧豪斯多夫空间 X 的一个开子集。将函数从 X 限制到闭子集 X \ U，定义了一个 C^*-代数同态 $C_0(X) \to C_0(X \setminus U)$。该同态是满射（根据 Tietze 延拓定理），其核是理想 $C_0(U) \subseteq C_0(X)$。因此 $C_0(X)/C_0(U) \cong C_0(X \setminus U)$。映射 $U \mapsto C_0(U)$ 是 X 的开子集集合与 $C_0(X)$ 的理想集合之间的双射。

例 1.9。 紧算子代数 $K(H)$ 是 $B(H)$的一个理想。代数 $K(H)$本身是单的：它唯一的理想是 0 和 $K(H)$。

1.2 CC^*-代数的表示

定义 1.10。 设A是一个C^*-代数，且H 是一个希尔伯特空间。

(1) A 在H 上的一个表示 是一个同态 $\pi : A \to B(H)$。

(2) 表示 $\pi : A \to B(H)$ 称为不可约，如果$H \neq 0$，并且H 没有非平凡的非零A-不变闭子空间。（Kadison 的一个定理指出，这等价于H 完全没有非平凡非零的A-不变子空间。）

(3) 两个不可约表示 $\pi_1 : A \to B(H_1)$ 和 $\pi_2 : A \to B(H_2)$ 是等价的，或同构的，当且仅当存在一个酉算子$u: H_1 \to H_2$，使得$u\pi_1(a) = \pi_2(a)u$ 对所有$a \in A$均成立。

$\widehat{}$(4) 不可约表示的等价类集合A具有自然拓扑，其中开集与A中的理想构成双射：对于每个A中的理想J，我们将其对应到开集

$$O_J = \left\{ \pi \in \widehat{A} \,\middle|\, \pi|_J \neq 0 \right\}.$$

（通常我们不会在记号上区分表示 π与其在A中的$\widehat{}$等价类。注意，等价表示具有相同的核。）

研究C^*-代数的表示时，以下事实常常很有用：

定理 1.11 (科恩–休伊特分解)**.** 设 A 是一个 C^*-代数，X 是一个左 *Banach* A-模（即，X 是一个巴拿赫空间和左 A-模，并且$\|ax\| \leq \|a\|\|x\|$ 对所有 $a \in A$ 和 $x \in X$ 都成立。）集合 $AX = \{ax \mid a \in A, x \in X\}$ 是 X 的一个闭 A-子模。 □

例如，参见 [RW98，命题 2.33]，其中阐述了 Blanchard 给出的定理 1.11 的证明。该定理意味着，若 $\pi : A \to \mathrm{B}(H)$ 是一个不可约表示，则 $H = \{\pi(a)\xi \mid a \in A,\ \xi \in H\}$。（该定理也适用于右模，只需作显而易见的修改。）

关于C^*-代数表示的若干重要事实，源于表示与态之间的密切关系：

定义 1.12。 设A是一个C^*-代数。

(1) 若$a \in A$，则称其为正 的（记作：$a \geq 0$），如果存在某个$b \in A$，使得$a = b^*b$。（**定理：** $a \geq 0$ 当且仅当对每个表示 $\pi : A \to \mathrm{B}(H)$ 以及每个$\xi \in H$，都有 $\langle \xi \mid \pi(a)\xi \rangle \geq 0$。）

(2) A 上的一个态 是一个线性映射 $\varphi : A \to \mathbb{C}$，满足 $\|\varphi\| = 1$，且对任意$a \geq 0$，有 $\varphi(a) \geq 0$。

(3) 给定A上的一个态 φ，我们按如下方式构造一个表示 $\pi_\varphi : A \to \mathrm{B}(H_\varphi)$：

- 令$J_\varphi := \{a \in A \mid \varphi(a^*a) = 0\}$。
- $H_\varphi := \overline{A/J_\varphi}$，在范数 $\|a + J_\varphi\| = \varphi(a^*a)^{1/2}$下的完备化。
- H_φ 是一个希尔伯特空间，其内积为 $\langle a + J_\varphi \mid b + J_\varphi \rangle = \varphi(a^*b)$。
- $\pi_\varphi : A \to \mathrm{B}(H_\varphi)$ 由 $\pi_\varphi(a)(b + J_\varphi) = (ab) + J_\varphi$定义。

这就是*GNS*构造，以 Gelfand、Naimark 和 Segal 的名字命名。

这一构造与哈恩–巴拿赫定理和克赖因–米尔曼定理共同导出：

定理 1.13。 设 A 是一个 C^*-代数。

(1) A 的表示不可约，当且仅当它同构于与 A 的某个纯 态相关联的 GNS 表示：也就是说，该态不能表示为其他态的凸组合。

(2) A 的不可约表示能够分离点：也就是说，若 A 中存在 $\neq b$，则存在 A 的一个不可约表示 π，使得 $\pi(a) \neq \pi(b)$。

(3) 设 B 是 C^*-代数 A 的一个子代数，并设 $\pi : B \to \mathrm{B}(H)$ 是一个不可约表示。存在一个不可约表示 $\pi' : A \to \mathrm{B}(H')$，其中 H' 是包含 H 作为 B-不变闭子空间的希尔伯特空间，并且满足$\pi(b)\xi = \pi'(b)\xi$，对所有 $b \in B$ 以及 $\xi \in H$ 均成立。 □

1.3 补注：双交换子定理与不可约性

不可约表示有一种刻画方式，依赖于冯·诺伊曼代数理论中的一些思想。冯·诺伊曼代数并非本文笔记的重点，但不可约性条件会非常有用，因此我们简要回顾如下：

定义 1.14. 设H 为希尔伯特空间，$\mathrm{B}(H)$为作用在H上的有界线性算子所构成的C^*-代数。

(1) $\mathrm{B}(H)$上的强算子拓扑是指这样一种拓扑：算子网 $(t_i)_{i\in I}$ 收敛到算子t，当且仅当对于每个 $\xi \in H$，$t_i\xi$ 在H上的范数拓扑下收敛到$t\xi$。

(2)冯·诺伊曼代数是 $\mathrm{B}(H)$ 的一个C^*-子代数，包含 id_H，且在强算子拓扑下闭。

有点类似于C^*-代数上的范数拓扑，强算子闭包条件也具有代数方面的性质：

定理 1.15 （冯·诺依曼）**.** 一个 C^*-代数 $C \subseteq \mathrm{B}(H)$ 是冯·诺依曼代数，当且仅当 $C = C''$，其中算子集合 X 的交换子 X' 定义为

$$X' = \{t \in \mathrm{B}(H) \mid tx = xt \ for\ all\ x \in X\},$$

而双交换子X''定义为 $(X')'$。 □

显然$X' = X$〃成立，因此，C^*- 代数 $C \subseteq \mathrm{B}(H)$ 的交换子C'是一个冯·诺伊曼代数。更多关于冯·诺伊曼代数的信息，请参阅例如 [Dix57], 。

以下是我们对该定理的应用方式：

定理 1.16. 表示 $\pi : A \to \mathrm{B}(H)$ 的 C^*-代数 A 当且仅当下列等价条件之一成立时不可约：

(1) $\pi(A)' = \mathbb{C}\mathrm{id}_H$。

(2) $\pi(A)$ 在强算子拓扑下于$\mathrm{B}(H)$ 中稠密。

证明（概要）。(1) 与 (2) 的等价性由双交换子定理立即得出，因为 $(\mathbb{C}\mathrm{id}_H)' = \mathrm{B}(H)$且 $\mathrm{B}(H)' = \mathbb{C}\mathrm{id}_H$。条件 (1) 与 π 的不可约性等价，是舒尔引理的一种形式。这可由如下观察得出：π 的闭不变子空间与 $\pi(A)'$ 中的正交投影一一对应；并且每个冯·诺伊曼代数都由其投影稠密张成。（后一个事实可由自伴有界算子的谱定理推出：每个这样的算子c 都可以用谱投影的有限线性组合逼近；而这些谱投影是c的多项式在强算子拓扑下的极限。）

□

1.4 表示与理想

CC^*-代数A的表示与A的理想及商的表示之间的关系相当直接：

定理 1.17. 设 J 是 C^*-代数 A 中的一个理想。

(1) 如果 $\pi : A \to \mathrm{B}(H)$ 是 A 的一个不可约表示，那么其限制表示$\pi|_J : J \to \mathrm{B}(H)$ 要么是不可约表示，要么是零映射。

(2) 如果 $\rho : J \to \mathrm{B}(H)$ 是一个不可约表示，那么存在 A 的一个不可约表示 $\pi : A \to \mathrm{B}(H)$，使得 $\rho = \pi|_J$。

因此，J 的不可约表示恰好是那些不湮灭 J 的 A 的不可约表示在 J 上的限制。

(3) 如果 π 和 ρ 是 A 的不会湮灭 J 的不可约表示，那么 π 和 ρ 作为 A 的表示等价，当且仅当它们作为 J 的表示等价。

~(4) 映射 $\pi \mapsto \pi|_J$ 给出同胚 $O_J \xrightarrow{=} \widehat{J}$。

(5) 若 $\pi: A \to \mathrm{B}(H)$ 是一个确实 湮灭 J 的不可约表示，则映射 $\tilde{\pi}: A/J \to \mathrm{B}(H)$，$a + J \mapsto \pi(a)$ 是 A/J 的不可约表示；A/J 的每一个不可约表示都具有这种形式；并且 A 的两个湮灭 J 的不可约表示 π, ρ 等价，当且仅当 $\tilde{\pi}$ 与 $\tilde{\rho}$ 是 A/J 的等价表示。

(6) 映射 $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ 给出了 $\widehat{A \mid O_J} \xrightarrow{\cong} \widehat{/ A J}$ 之间的一个同胚。

(7) $J = A$，当且仅当 A 的所有不可约表示都不湮灭 J。
(8) 若 $J \neq A$，则 $J = \bigcap_{\pi \in \widehat{A},\ \pi(J)=0} \ker \pi$。

习题 1.18。 利用此前引用过的关于C^*-代数表示的结果，证明定理 1.17。

1.5 $C_r^*(G)$ 的不可约表示

定义 1.19。 (1) 设G 是一个局部紧拓扑群。G 的酉表示是一个同态 $\pi: G \to \mathrm{U}(H)$，它将G 映射到某个希尔伯特空间H上的酉算子群，并且关于 $\mathrm{U}(H)$上的强算子拓扑连续。（也就是说，对于每个 $\xi \in H$，函数$G \to H$，$g \mapsto \pi(g)\xi$ 应关于H上的范数连续。）

(2) 酉表示 $\pi: G \to \mathrm{U}(H)$ 是不可约的，如果H 没有非零的真G-不变闭子空间。

(3) 两个酉表示 $\pi_i: G \to \mathrm{U}(H_i)$（$i = 1, 2$）是等价的，如果 f 存在酉算子 $u: H_1 \to H_2$，满足 $u\pi_1(g) = \pi_2(g)u$ 对所有$g \in G$。

(4) G 的不可约酉表示的等价类的集合$\widehat{\ }$记为 G。

例 1.20. 对任意群 G，我们有左正则表示 $\lambda: G \to \mathrm{U}(L^2(G))$（其中 L^2 空间是关于左不变哈尔测度的），由 $(\lambda(g)\xi)(h) = \xi(g^{-1}h)$ 给出，其中 $\xi \in L^2(G)$，且 g、$h \in G$。

对于每个酉表示 $\pi: G \to \mathrm{U}(H)$，以及每个$f \in C_c(G)$，函数

$$F(\xi, \eta) = \int_G \langle \xi \mid f(g)\pi(g)\eta \rangle \, dg$$

在 H 上定义了一个有界半双线性型，因此 Riesz 表示定理表明存在一个算子 $\tilde{\pi}(\mathrm{f}) \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$，使得 $\mathrm{F}(\xi, \eta) = \langle \xi \,|\, \tilde{\pi}(\mathrm{f})\eta \rangle$。一个直接的积分变换论证表明 $\tilde{\pi}(\mathrm{f}_1 * \mathrm{f}_2) = \tilde{\pi}(\mathrm{f}_1)\tilde{\pi}(\mathrm{f}_2)$，其中 $*$ 表示关于 Haar 测度的卷积。（例如，详见 [Dix69, 13.3]。）映射 $\tilde{\pi} : \mathrm{C}_c(\mathrm{G}) \to \mathrm{B}(\mathrm{H})$ 有时称为 π 的积分形式。我们通常省略 $\sim$，而只用同一个符号 π 来表示这两个映射。我们已经见过一个这样的例子：我们用 λ既表示正则表示 $\mathrm{G} \to \mathrm{U}(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$，也表示诱导映射 $\mathrm{C}_c(\mathrm{G}) \to \mathrm{B}(\mathrm{L}^2(\mathrm{G}))$，它将 $\mathrm{f} \in \mathrm{C}_c(\mathrm{G})$ 映为卷积算子 $\lambda(\mathrm{f})$。

定义 1.21. 我们用 $\widehat{G}_r$ 表示具有如下性质的G的不可约酉表示 π的等价类集合：对所有$f \in C_c(G)$，都有 $\|\tilde{\pi}(f)\| \le \|\lambda(f)\|$。

例 1.22. (1) 设G 是一个紧群。Schur正交关系表明，G 的每个不可约表示都同构于正则表示$L^2(G)$的某个G-不变子空间。（关于紧群表示的回顾，请参见附录 A。）因此，对于每个 $\pi \in G$，以及每个$f \in C(G)$，算子 $\pi(f)$（在同构意义下）是算子 $\lambda(f)$ 在某个不变子空间上的限制，因此 $\|\pi(f)\| \le \|\lambda(f)\|$。于是 $\widehat{G} = \widehat{G}_r$。

(2) 设 $\mathrm{G} = \mathbb{R}$ 带有加法。舒尔引理表明，$\mathbb{R}$ 的每个不可约表示都是一维的，即一个连续同态 $\mathbb{R} \to \mathrm{U}(\mathbb{C})$；不难证明，每个这样的同态都具有如下形式：$\pi_y : \mathrm{x} \mapsto \mathrm{e}^{ixy}$，其中 $\mathrm{y} \in \mathbb{R}$。$\pi_y$ 的积分形式是映射$\pi_y : \mathrm{C}_c(\mathbb{R}) \to \mathbb{C}$, $\pi_y(\mathrm{f}) = \int_{\mathbb{R}} \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{ix}\mathrm{y}\, \mathrm{d}\,\mathrm{x}$，我们认出这就是傅里叶变换 $\hat{\mathrm{f}}(\mathrm{y})$（的一种可能的归一化形式）。另一方面，$\lambda(\mathrm{f})$ 是 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 上的算子，表示与 f 的卷积。用 $\mathrm{L}^2(\mathbb{R})$ 上的（酉）傅里叶变换作共轭，可将此算子变为逐点乘以 f 的傅里叶变换 $\hat{}$ 的算子，其范数为 $\sup_{x \in \mathbb{R}} |\mathrm{f}(\mathrm{x})|$。因此，$|\pi_y(\mathrm{f})| \le \|\lambda(\mathrm{f})\|$，由此得出，对于每个 $\mathrm{y} \in \mathbb{R}$，都有 $\pi_y \in \widehat{\mathbb{R}}_r$。于是 $\widehat{\mathbb{R}} = \widehat{\mathbb{R}}_r$。同样的论证适用于每个阿贝尔群。

(3) 对于大多数实约化群，我们有 $\widehat{G} \neq \widehat{G}_r$。例如，平凡的一维表示 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R}) \to \mathrm{U}(\mathbb{C})$ 不属于 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{R})_r$。在这些讲义中，我们不会尝试解释原因，因为要全面讨论这个主题（*amenability*），就需要专门开设一门课程。相反，我们只引用一个由 Harish-Chandra 和 Cowling–Haagerup–Howe–[CHH 88]，提出的定理，该定理刻画了对于这些讲义重点讨论的群G，集合$\widehat{G}_r$。

定理 1.23. 设 G 是一个实约化群。属于 G_r 的 G 的不可约酉算子表-$\widehat{\ }$示，恰好是温和的 表示；而且，这些表示恰好是其矩阵系数函数 $g \mapsto \langle \pi(g)\xi \mid \eta \rangle$ 在 G 的中心模意义下属于 $L^{2+\varepsilon}$ 类的那些表示。

以下说明了为什么 $\widehat{G_r}$ 对我们计算 $C^*{}_r(G)$（反之亦然）很重要：

引理1.24。 设 G 为局部紧群。将 G 的每个不可约酉表示 π 映至其积分形式 $\pi : C_c(G) \to \mathrm{B}(H_\pi)$ 的映射，诱导出一个双射 $G_r \cong C_r^*(G)$。

$\widehat{\ }$证明（概要）。G_r 的定义确保，不可约酉表示 π 的积分形式能够通过连续性延拓到 $\mathrm{C}^*\,\mathrm{r}(\mathrm{G})$，当且仅$\widehat{\ }$当 $\pi \in \mathrm{G}_r$。一个逼近论证表明，对于 G 的酉表示π_1, π_2，酉算子 $\mathrm{u} : \mathrm{H}_1 \to \mathrm{H}_2$ 满足对所有 $\mathrm{g} \in \mathrm{G}$ 均有 $\mathrm{u}\pi_1(\mathrm{g}) = \pi_2(\mathrm{g})\mathrm{u}$，当且仅当积分形式满足对每个 $\mathrm{f} \in \mathrm{C}_c(\mathrm{G})$ 均有 $\mathrm{u}\pi_1(\mathrm{f}) = \pi_2(\mathrm{f})\mathrm{u}$。因此，将 G 的每个不可约酉表示映至其积分形式的映射，诱导出一个良定义的单射 $\widehat{\mathrm{G}_r} \to \widehat{{}^*_r(\ )\mathrm{C}\,\mathrm{G}}$。为证明该映射是满射，我们首先注意到，G 在 $\mathrm{C}_c(\mathrm{G})$ 上的左平移作用 λ 对范数 $\|\lambda(\mathrm{f})\|$ 是等距的，因此可延拓为 G 在 $\mathrm{C}^*\,\mathrm{r}(\mathrm{G})$ 上的等距作用（它并非通过 C^*-代数自同构实现，而是通过所谓的酉乘子实现）。现在，给定一个不可约表示$\pi : \mathrm{C}^*\,\mathrm{r}(\mathrm{G}) \to \mathrm{B}(\mathrm{H})$，我们通过将 $\mathrm{H} =$ 与 $\{\pi(\mathrm{f})\xi \mid \mathrm{f} \in \mathrm{C}^*\mathrm{r}\,(\mathrm{G}), \xi \in \mathrm{H}\}$ 对应起来（定理 1.11），得到一个酉表示 $\mathrm{G} \to \mathrm{U}(\mathrm{H})$，其积分形式为 π，然后令 $\pi(\mathrm{g})(\pi(\mathrm{f})\xi) := \pi(\lambda(\mathrm{g})\mathrm{f})\xi$。

□

$\widehat{\ \ \ }$注记1.25。定义 1.10 中描述的 $\mathrm{C}_r^*(\mathrm{G})$ 上的拓扑，通过双射 $\mathrm{G}_r \cong \mathrm{C}_r^*(\mathrm{G})$ 在 G_r 上诱导出一个拓扑。这个拓扑有一种非常自然的描述：若存在单位向量 $\xi_i \in \mathrm{H}_i$ 和 $\xi \in \mathrm{H}$，使得矩阵系数函数网 $\mathrm{g} \mapsto \langle \pi(\mathrm{g})\xi_i \mid \xi_i \rangle$ 在 G 的紧子集上一致收敛到函数 $\mathrm{g} \mapsto \langle \pi(\mathrm{g})\xi \mid \xi \rangle$，则不可约酉表示 $\pi_i : \mathrm{G} \to \mathrm{U}(\mathrm{H}_i)$（或其等价类）构成的网收敛到不可约表示 $\pi : \mathrm{G} \to \mathrm{U}(\mathrm{H})$。详情参见 [Dix69, 18.1]。

我们对实约化群G 的$C^*{}_r(G)$ 的计算，是通过运用关于G 的温和表示的定理，将$C^*{}_r(G)$ 的不可约表示与其他看起来更简单的C^*-代数的不可约表示对应起来而完成的。我们现在将逐步建立关于这些看起来更简单的代数所需的结果。

1.6 $C_0(X)$ 的不可约表示

舒尔引理表明，交换C^*-代数$C_0(X)$的每一个不可约表示 π都是一维的，即一个C^*-代数同态$\pi : C_0(X) \to \mathbb{C}$。Riesz 表示定理表明， π 是关于某个测度的积分，而乘法性质 $\pi(fg) = \pi(f)\pi(g)$ 表明该测度必定是在单个点处的求值：因此$\pi(f) = ev_x(f) := f(x)$，对某个$x \in X$。若表示ev_x与ev_y等价，则它们具有相同的核。若$x \neq y$，则存在函数$f \in C_0(X)$，使得$f(x) = 0 \neq f(y)$，从而$ev_x \ncong ev_y$。因此，映射$x \mapsto ev_x$是从X到$C_0(X)$的一个双射。再稍加工作，便可证明：

定理 1.26. 映射 $x \mapsto ev_x$ 是 $X \to C_0(X)$ 之间的同胚。

练习 1.27. 我们已经证明映射 $x \mapsto ev_x$ 是双射。现在证明它是同胚。

1.7 $K(H)$ 的不可约表示

练习 1.28. 若 H 是非零希尔伯特空间，则恒等表示 $K(H) \to B(H)$ 是不可约的。

定理 1.29. $K(H)$ 的每个不可约表示都等价于恒等表示 $K(H) \to B(H)$。

证明（概要）。我们利用这样一个事实：每个从 $K(H) \to \mathbb{C}$ 到复数域的有界线性映射都具有 $k \mapsto \mathrm{trace}(tk)$ 的形式，其中 t 是某个迹类算子。（参见例如 [Dix69, 4.1.2][1]。）由此可推出，$K(H)$ 上的纯态恰好是映射 $\varphi_\xi : k \mapsto \langle \xi | k\xi \rangle$，其中 ξ 是 H 中的单位向量。映射 $K(H) \to H, k \mapsto k\xi$ 继而诱导出从 GNS 希尔伯特空间 H^{φ_ξ} 到 H 的酉同构，它将 GNS 表示π^{φ_ξ}与恒等表示 $K(H) \to B(H)$ 交织起来。 □

1.8 $C_0(X$ 的不可约表示，$K(H))$

设 X 是一个局部紧豪斯多夫空间，并设 H 是一个非零希尔伯特空间。

定理 1.30. (1) 对于每个 $x \in X$，映射

$$ev_x : C_0(X, K(H)) \to K(H), \qquad ev_x(k) = k(x)$$

[1]英语翻译的读者请注意，在推论 4.1.3 的证明中，“具有正迹的算子”应改为“正迹类算子”。

是一个不可约表示。

(2) $C_0(X<style\ id='4',\ K(H))$ 的每个不可约表示都等价于某个唯一的 $x \in X$ 对应的 ev_x。

证明（概要）。每个求值映射 $C_0(X, \mathrm{K}(H)) \to \mathrm{K}(H)$ 都是满射，因此也是不可约表示。

要证明每个不可约表示都具有这种形式，首先注意到，显然 $\mathrm{C_0(X, K(H))}$ 是一个 $\mathrm{C_0(X)}$-模。若 $\pi: \mathrm{C_0(X, K(H))} \to \mathrm{B(H_\pi)}$ 是一个不可约表示，那么 $\mathrm{H}\pi$ 中的每个元素都可写成 $\pi(\mathrm{k})\xi$ 的形式，其中 $\mathrm{k} \in \mathrm{C_0(X, K(H))}$，且 $\xi \in \mathrm{H}\pi$（定理 1.11）；公式 $\rho(\mathrm{f})(\pi(\mathrm{k})\xi) := \pi(\mathrm{f\,k})\xi$（其中 $\mathrm{f} \in \mathrm{C_0(X)}$，$\mathrm{k} \in \mathrm{C_0(X, K(H))}$，且$\xi \in \mathrm{H}\pi$）定义了一个表示 $\rho : \mathrm{C_0(X)} \to \mathrm{B(H_\pi)}$。舒尔引理保证每个 $\rho(\mathrm{f})$ 都是一个数量算子，因此存在唯一的 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$，使得对每个 $\mathrm{f} \in \mathrm{C_0(X)}$，都有 $\rho(\mathrm{f}) = \mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{id}_{H_\pi}$。表示 π 在理想 $\{\mathrm{k} \in \mathrm{C_0(X, K(H))} \mid \mathrm{k(x)} = 0\}$ 上取平凡值，因此 π 可通过商映射分解

$$\mathrm{ev}_x : C_0(X, \mathrm{K}(H)) \xrightarrow{k \mapsto k(x)} \mathrm{K}(H).$$

现在，定理 1.29 蕴含 π 等价于 ev_x。 □

1.9 直和的不可约表示

若A_i $(i \in I)$ 是一族C^*-代数，则定义直和

$$\bigoplus_{i \in I} A_i = \{(a_i)_{i \in I} \mid \|a_i\| \to 0 \text{ as } i \to \infty\}.$$

这是一个C^*-代数，代数运算按坐标进行，范数为 $\|(a_i)_{i \in I}\| = \sup_{i \in I} \|a_i\|$。

练习 1.31。证明:
(1) $\bigoplus_{i \in I} A_i$ 的每个不可约表示都经由投影到某个直和项A_i分解。

(2) 直和的两个不可约表示等价，当且仅当它们通过同一个 A_i 分解，并且作为 A_i 的表示等价。

1.10 $\mathrm{K}(H)^W$ 的不可约表示

设 $\pi: W \to \mathrm{U}(H)$ 是有限群 W 的一个酉表示。公式$\alpha_w(t) = \pi(w)t\pi(w)^*$ 定义了 W 通过 $*$-自同构在 C^*-代数 $\mathrm{B}(H)$上的一个作用，该作用限制为在理想 $\mathrm{K}(H)$上的作用。我们将计算

不动点代数 $\mathrm{K}(H)^W$的不可约表示，所用依据是附录 A 中回顾的有限群W 表示相关事实。

我们将H 分解为其等型子空间的直和 $\bigoplus_{\rho\in\widehat{W}} H_{\pi,\rho}$ 。舒尔引理表明，当 $\rho \ncong \sigma$ 时，不存在非零的 W-等变映射 $H_{\pi,\rho} \to H_{\pi,\sigma}$ ，因此我们有

$$\mathrm{K}(H)^W = \bigoplus_{\rho\in\widehat{W}} \mathrm{K}(H_{\pi,\rho})^W.$$

练习 1.31 给出了一个同一对应

$$\widehat{\mathrm{K}(H)^W} \cong \bigsqcup_{\rho\in\widehat{W}} \widehat{\mathrm{K}(H_{\pi,\rho})^W}.$$

与附录 A (7) 中一样，对于每个 $\rho \in \widehat{W}$，我们考虑由 W-等变线性映射 $H\rho \to H$ 构成的希尔伯特空间 $\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$，其内积为 $\langle r \mid s\rangle = \text{迹}(r^* s)$。

练习 1.32. 证明：

(1) 对每个$t \in \mathrm{B}(H_{\pi,\rho})^W$，公式$s \mapsto t\circ s$定义了一个有界线性映射 $\varphi_{\pi,\rho}(t) \in \mathrm{B}(\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W)$。

(2) 映射 $\varphi_{\pi,\rho}\colon \mathrm{B}(H_{\pi,\rho})^W \to \mathrm{B}(\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W)$ 是 C^*-代数的同构。

(3) $\sim\varphi_{\pi,\rho}$ 限制为 $\mathrm{K}(H_{\pi,\rho})^W \xrightarrow{=} \mathrm{K}(\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W)$的同构。

提示： 使用附录 A(7) 中的同构 $\mu_{\pi,\rho}\colon H_\rho \otimes \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W \to H_{\pi,\rho}$。

由于 C^*-代数 $\mathrm{K}(\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W)$ 只有一个不可约表示等价类（定理 1.29），我们得出：

定理 1.33. 设 $\pi\colon W \to \mathrm{U}(H)$ 是有限群 W 的酉表示，并考虑 C^*-代数

$$\mathrm{K}(H)^W = \{k \in \mathrm{K}(H) \mid \pi(w)k = k\pi(w) \text{ for all } w \in W\}.$$

(1) 对于 H 中出现的 W 的每个不可约表示 ρ ，复合

$$\mathrm{K}(H)^W \xrightarrow{k\mapsto\pi(e_\rho)k} \mathrm{K}(H_{\pi,\rho})^W \xrightarrow[\cong]{\varphi_{\pi,\rho}} \mathrm{K}(\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W)$$

是一个不可约表示，我们也将其记作 $\varphi_{\pi,\rho}$。（换句话说，$\varphi_{\pi,\rho}(k)\colon s \mapsto k \circ s$，其中 $k \in \mathrm{K}(H)^W$，且 $s \in \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$。）

(2) $\mathrm{K}(H)^W$ 的每个不可约表示都与 $\varphi_{\pi,\rho}$ 等价，其中 $\rho \subseteq \pi$。

(3) φ_{π,ρ_1} 和 φ_{π,ρ_2} 作为$\mathrm{K}(H)^W$ 的表示等价，当且仅当 ρ_1和 ρ_2 作为 W 的表示等价。 □

1.11 $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$的不可约表示

现在我们将考虑C^*-代数$C_0(X, \mathrm{K}(H))$和 $\mathrm{K}(H)^W$ 的一种常见推广。为引出这一概念，可以将$C_0(X, \mathrm{K}(H))$ 视为希尔伯特空间丛$X \times H$ （平凡丛）上的自同态代数，该丛以X为底空间；并将 $\mathrm{K}(H)^W$ 视为W-等变希尔伯特空间H 上的自同态代数（我们可以将其看作以单个点为底空间的丛）。本节将通过考察W-等变希尔伯特空间丛上的自同态的C^*-代数，结合这两种情形。事实证明，这类代数对于理解实约化群G的$C^*{}_r(G)$ 至关重要。

定义 1.34. 设 X 为局部紧豪斯多夫空间，配备有限群 W 通过同胚给出的作用，并设 H 为希尔伯特空间。W 在 (X, H) 上的作用是 W 在积空间 $X \times H$ 上通过同胚给出的作用，使得

(1) 投影 $X \times H \xrightarrow{(x,\xi)\mapsto x} X$ 是 W-等变的（即，$w(x, \xi) \mapsto wx$）；且

(2) 对每个 $w \in W$ 以及每个 $x \in X$，映射 $I_{w,x} : H \to H$ 定义为该复合

$$I_{w,x} : H \xrightarrow{\xi\mapsto(x,\xi)} \{x\} \times H \xrightarrow{\text{act by } w} \{wx\} \times H \xrightarrow{(wx,\xi)\mapsto\xi} H$$

是酉线性映射。

例 1.35. 若 $X = \{x\}$ 为单点，则 W 在 (X, H) 上的作用与 $w \mapsto I_{w,x}$ 所给出的 W 在 H上的酉表示是同一回事。

习题 1.36。 (1) 假设 W 作用于 (X, H)，如定义 1.34 所述。证明算子 $I_{w,x} : H \to H$ 具有以下性质：

(i) 对每个 $x \in X$ 以及所有 $w_1, w_2 \in W$，都有 $I_{w_1,w_2x} \circ I_{w_2,x} = I_{w_1w_2,x}$。

(ii) 对每个 $w \in W$，函数 $x \mapsto I_{w,x}$ 在强算子拓扑下连续。（也就是说，对每个 $\xi \in H$，函数 $X \to H$，$x \mapsto I_{w,x}\xi$，都是连续的。）

(2) 设 X 是一个带有 W作用的空间，H 是一个希尔伯特空间，并假设 $\{I_{w,x} : H \to H \mid w \in W, x \in X\}$ 是一族满足上述性质 (i) 和 (ii) 的酉算子。证明公式 $w(x, \xi) := (wx, I_{w,x}\xi)$定义了 W 在 (X, H) 上的作用，其含义见定义 1.34。

因此，W 在 (X, H) 上的作用，与W 在X上的作用，以及一族酉算子$I = \{I_{w,x} \in \mathrm{U}(H) \mid w \in W, x \in X\}$满足性质 (i) 和 (ii)，是同一回事。

习题 1.37. 设W作用于 (X, H)。对于每个$k \in C_0(X, \mathrm{K}(H))$ 以及每个$w \in W$，我们令 $\alpha_w(k)\colon X \to \mathrm{K}(H)$ 为函数

$$\alpha_w(k)(x) = I_{w,w^{-1}x}\, k(w^{-1}x) I_{w^{-1},x}. \tag{1.38}$$

函数 $\alpha_w(k)$ 关于 $\mathrm{K}(H)$ 上的强算子拓扑是连续的，因为算子族 $I_{w,x}$ 在 x 中强算子连续（习题 1.36）。证明 $\alpha_w(k)$ 实际上关于 $\mathrm{K}(H)$ 上的范数 拓扑是连续的，从而映射 α_w 定义了 W 在C^*-代数$C_0(X, \mathrm{K}(H))$ 上的一个作用。

习题 1.39. 设 X 是一个带有有限群 W 作用的空间，并考虑希尔伯特空间 ℓ^2 W，其标准正交基为 $\{\delta_v \mid v \in W\}$。对于每个 $x \in X$ 和 $w \in W$，令 $I_{w,x} \in U(\ell^2 W)$ 为左平移算子 $I_{w,x} = \lambda_w\colon \delta_v \mapsto \delta_{wv}$。容易验证这些算子满足习题 1.36 中的条件 (i) 和 (ii)，因此它们定义了 W 在 $(X, \ell^2 W)$ 上的作用，进而如习题 1.37 所述，定义了 W 在 $C_0(X, \mathrm{K}(\ell^2 W))$ 上的作用。W 在 X 上的作用也诱导出 W 在 $C_0(X)$ 上的作用，定义为 $\beta_w(f)(x) = f(w^{-1}x)$，其中 $f \in C_0(X)$，$x \in X$；由此得到交叉积 C^*-代数 $C_0(X) \rtimes W$。对于每个 $f \in C_0(X)$、$w \in W$ 和 $x \in X$，令 $\varphi(f w)(x)$ 为 $\ell^2 W$ 上由 $\delta_v \mapsto f(wv^{-1}x)\delta_{vw^{-1}}$ 定义的算子。证明此公式给出了 C^*-代数的同构$\sim\colon C_0(X) \rtimes W \xrightarrow{=} C_0(X, \mathrm{K}(\ell^2 W))^W$。

回到一般情形，本节的目标是计算与 X 上的 W 作用相关联的作用 (1.38) 的不动点代数 $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$ 的不可约表示。

对于每个 $x \in X$，令 $W_x = \{w \in W \mid wx = x\}$。映射 $I_x : w \mapsto I_{w,x}$ 是 W 的酉表示，作用在 H 上。我们用 H_x（而非 H^{I_x}）表示配备了该表示的希尔伯特空间 H；并用 $\varphi_{x,\rho}$（而非 $\varphi_{I_x,\rho}$）表示定理 1.33 中与 ρ 对应的 $\mathrm{K}(H_x)^{W_x}$ 的不可约表示。

定理 1.40。 设 X、W、H 和 I 如上所述。

(1) 对于每个 $x \in X$ 以及 I_x 中出现的每个 $\rho \in W_x$，映射

$$\pi_{x,\rho} = \varphi_{x,\rho} \circ \mathrm{ev}_x : C_0(X, \mathrm{K}(H))^W \to \mathrm{B}(\mathrm{HS}(\rho, I_x)^{W_x}), \quad \pi_{x,\rho}(k)\colon s \mapsto k(x) \circ s$$

是一个不可约表示。

(2) $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$ 的每个不可约表示都等价于 $\pi_{x,\rho}$ 其中 x 和 ρ任取。

(3) 如(1) 所示的两个不可约表示 π_{x_1,ρ_1} 和 π_{x_2,ρ_2} 等价，当且仅当存在某个 $w \in W$，使得 $x_2 = wx_1$，并且 W_{x_2} 的表示 ρ_2 等价于 $w\rho_1 : v \mapsto \rho_1(w^{-1}vw)$的表示。

因此，映射 $(Wx, \rho) \mapsto \pi_{x,\rho}$ 是集合之间的双射

$$\{(Wx, \rho) \mid Wx \in W\backslash X,\ \rho \in \widehat{W_x},\ \rho \subseteq I_x\}$$

与 $\left(C_0(X, \mathrm{K}(H))^W\right)$。

证明（概要）。首先注意，求值映射 $\mathrm{ev}_x : \mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W \to \mathrm{K}(\mathrm{H})^{W_x}$是满射：为证明这一点，给定 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}(\mathrm{H})^{W_x}$，取函数 $\mathrm{h} \in \mathrm{C}_0(\mathrm{X})$，使得 $\mathrm{h}(\mathrm{x}) = 1$，且对所有 $\mathrm{y} \in \mathrm{W}\,\mathrm{x} \setminus \{\mathrm{x}\}$，$\mathrm{h}(\mathrm{y}) = 0$。函数 $\mathrm{hk} : \mathrm{y} \mapsto \mathrm{h}(\mathrm{y})\mathrm{k}$ 属于 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))$，而函数

$$f := \frac{1}{|W_x|} \sum_{w \in W} \alpha_w(hk) \tag{1.41}$$

属于 $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$，且满足 $f(x) = k$。这一满射性确保求值映射 ev_x 与不可约表示 $\varphi_{x,\rho}$ 的复合是一个不可约表示。

为了证明 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$的每个不可约表示都等价于某个 $\pi_{x,\rho}$s，回想一下，定理 1.13 指出，$\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$的每个不可约表示，都是 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))$ 的一个不可约表示在某个不可约的、$\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$-不变子空间上的限制。$\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))$ 的不可约表示是求值映射 $\mathrm{k} \mapsto \mathrm{k}(\mathrm{x}) \in \mathrm{K}(\mathrm{H})$（定理 1.30）。我们上文提到，在这种表示下，$\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$的像是 W_x-等变紧算子构成的子代数 $\mathrm{K}(\mathrm{H})^{W_x}$，因此，H 的每个不可约 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$-不变子空间，都等价于定理 1.33 中所确定的不可约表示$\varphi_{x,\rho}$ 之一。

接下来取 $x \in X$，以及一个出现在 I_x 中的W_x 的不可约表示 ρ。令 $w\rho : W_{wx} \to \mathrm{U}(H_\rho)$ 为不可约表示 $w\rho(v) = \rho(w^{-1}vw)$。该映射

$$\theta : \mathrm{HS}(\rho, I_x)^{W_x} \to \mathrm{HS}(w\rho, I_{wx})^{W_{wx}}, \qquad s \mapsto I_{w,x} \circ s$$

是一个酉同构，它交织表示$\pi_{x,\rho}$ 和 $\pi_{wx,w\rho}$。

最后，假设表示 π_{x_1,ρ_1} 和 π_{x_2,ρ_2} 等价。代数 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})^W$（即 X 上 W-不变的 C_0 函数）通过逐点乘法作用于 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$。对于每个 $\mathrm{h} \in \mathrm{C}_0(\mathrm{X})^W$、$\mathrm{k} \in \mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W$ 以及 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$，我们有 $\mathrm{ev}_x(\mathrm{hk}) = \mathrm{h}(\mathrm{x})\,\mathrm{ev}_x(\mathrm{k})$，因此 $\pi_{x,\rho}(\mathrm{hk}) = \mathrm{h}(\mathrm{x})\pi_{x,\rho}(\mathrm{k})$ 对每个 W_x 都成立。由于表示 π_{x_1,ρ_1} 和 π_{x_2,ρ_2} 等价，它们的核相同，这意味着每个在 x_1 处取值为零的 $\mathrm{h} \in \mathrm{C}_0(\mathrm{X})^W$

在 x_2 处也必须取值为零。如果 x_1 和 x_2 位于不同的 W-轨道，那么我们可以（利用乌雷松引理，再像 (1.41) 中那样取平均）构造一个函数 $h \in C_0(X)^W$，使它在 x_1 处取值为零，而在 x_2 处不为零。因此必有 $x_2 = wx_1$，其中某个 $w \in W$。上一段的论证继而表明，π_{x_1,ρ_1}——我们假设它与 π_{x_2,ρ_2} 等价——也与 $\pi_{x_2,w\rho_1}$ 等价。这意味着 φ_{x_2,ρ_2} 和 $\varphi_{x_2,w\rho_1}$ 作为 $K(H_{x_2})^{W_{x_2}}$ 的表示等价，因此由定理 1.33 可知，ρ_2 和 $w\rho_1$ 作为 W 的表示等价。

“因此”部分可直接由 (1)、(2) 和 (3) 得出。 □

习题 1.42. 设 $X = \mathbb{R}$，并设 W 为群 $\{1,w\}$，它有两个元素，作用于 $\mathbb{R}$，作用方式为 $wx = -x$。对每个 x 令

$$I_{1,x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad I_{w,x} = \begin{bmatrix} e^{ix} & 0 \\ 0 & -e^{-ix} \end{bmatrix} \in U(\mathbb{C}^2).$$

检查此定义是否给出了 W 在 $(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ 上的作用；将对偶 $\widehat{\ }\left(C_0(\mathbb{R}, K(\mathbb{C}^2))^W\right)$ 作为集合计算；并证明此对偶作为拓扑空间是非豪斯多夫的。

1.12 CCR C^*-代数

定义 1.43. 一个 C^*-代数 A 称为 *CCR*（即 完全连续表示），或 极限型，如果对每个不可约表示 $\pi: A \to B(H)$ 我们有 $\pi(A) \subseteq K(H)$（等价地，$\pi(A) = K(H)$：见下文。）

例 1.44。 前几节的计算表明，$C_0(X)$、$K(H)$、$C_0(X, K(H))$ 以及 $C_0(X, K(H))^W$ 都是 CCR。CCR C^*-代数的子代数（定理 1.13）、商（定理 1.17）和直和（练习 1.31）也都是 CCR。

定理 1.45 (Harish-Chandra)。 实约化群 G 的约化群 C^*-代数 $C^* r(G)$ 是 *CCR*。

证明（概要）。 Harish-Chandra 证明了 G 的每个不可约酉表示都是可容许的：也就是说，对于 G 的每个极大紧子群 K、每个 K 的不可约表示 ρ 以及 G 的每个不可约酉表示 π，同型分量子空间 $H_{\pi,\rho}$ 都是有限维的。

下面说明这为何意味着 $C^* r(G)$ 是 CCR：对于每个有限子集 $F \subset \widehat{K}$，令 $e_F = \sum_{\rho \in F} e_\rho \in C(K)$，其中 e_ρ 如 (A.1) 所示。可容许性意味着，对于每个 $\pi \in \widehat{G_r}$ 和每个有限 $F \subset \widehat{K}$，投影 $\pi(e_F)$ 都具有有限秩。

现在，C(K)通过在 K 上卷积作用于 $C_c(G)$。练习 1.46（见下文）表明，对于每个 $f \in C_c(G)$，算子 $\pi(f)$ 是有限秩算子 $\pi(e_F * f) = \pi(e_F)\pi(f)$的范数极限，因此 $\pi(f)$ 是紧的。由于 $C_c(G)$ 在 $C^* r(G)$ 中稠密，这便得到所需的 $\pi(C^* r(G)) \subseteq K(H_\pi)$。 □

练习 1.46。 对于每个 $f \in C_c(G)$，我们有 $\|f - e_F * f\|_{C_r^*(G)} \to 0$，其中 F 遍历 K 的有限子集所组成的有向集。（提示：将其归结为一个关于 L^2 收敛的断言，然后使用分解 $L^2(G) \cong \bigoplus_{\rho \in \hat{K}} L^2(G)_\rho$，其中 K 通过左平移作用于 $L^2(G)$。）

1.13 Kaplansky 的 Stone–Weierstrass 定理

定义 1.47。 若 B 是 C^*-代数 A的一个分离[2] 子代数，则称其满足：

(1) A的每个不可约表示限制到 B后仍然不可约；以及 (2) A的不等价不可约表示限制到 B后仍然不等价。

C^*-代数 A具有*Stone–Weierstrass* 性质 （SWP），如果 A的唯一分离子代数就是其自身A。

例子 1.48. 设 $A = C_0(X)$。由定理 1.26 可知，A 的每个不可约表示都等价于映射 $\mathrm{ev}_x : f \mapsto f(x)$，且恰好对应一个 $x \in X$。子代数 $B \subseteq A$ 是分离的，当且仅当：

(1) 对每个 $x \in X$，存在某个 $b \in B$ 使得 $b(x) \neq 0$；并且

(2) 对 X 中的每一对点 $x \neq y$，存在某个 $b \in B$ 使得 $b(x) \neq b(y)$。

因此，通常的 Stone–Weierstrass 定理表明，对每个 X，$C_0(X)$ 都具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。

练习 1.49. 假设 B 在 A中是分离的。证明映射 $\pi \mapsto \pi|_B$（将 A的每个不可约表示映为其到 B的限制）诱导一个≁同胚 $\hat{A} \xrightarrow{=} \hat{B}$。

定理 1.50 (Kaplansky)。 每个 *CCR* C^*-代数都具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。

我们将详细证明一种特殊情形：$A = C_0(X, K(H))$；接着考察一个例子，其中$A = C_0(X, K(H))^W$；最后概述一般情形的证明。完整证明见 [Dix69, 11.1.6]，相关结果和历史背景见 [AA82]。

[2]Dixmier 使用术语 丰

证明 K(H) 具有斯通-魏尔斯特拉斯性质： 由于K(H)只有一个不可约表示，子代数$B \subseteq$K(H) 是分离的，当且仅当包含映射$B \hookrightarrow$B(H) 是一个不可约表示。

如果这种不可约性成立，那么双交换子定理（定理 1.16）便蕴含 B 在强算子拓扑下稠密于 B(H)——因此尤其稠密于 K(H)：也就是说，对于每个 $k \in$K(H)，都存在一个由 B 中的元素构成的网 $(b_i)_{i\in I}$，使得对于每个 $\xi \in H$，都有 $b_i\xi \to k\xi$。

回忆一下，每个有界线性映射 K(H) $\to \mathbb{C}$ 都可写成 $k \mapsto \mathrm{trace}(tk)$ 的形式，其中 H 上的某个迹类算子为 t。因此，下面的练习蕴含：在 B 上为零的有界线性映射 K(H) $\to \mathbb{C}$ 只有零映射；进而，哈恩–巴拿赫定理保证 B =K(H)。 □

练习 1.51. 设 t 是 H 上的迹类算子。证明线性映射 K(H) $\to \mathbb{C}$，$k \mapsto \mathrm{trace}(tk)$，在强算子拓扑下连续。

证明 $C_0(X,$ K(H)) 具有斯通-魏尔斯特拉斯性质：（见 Elliott– Olesen [EO74] 和 Takahasi [Tak76]。）

设 B 是 C^*-子代数，且能分离 $A = C_0(X,$ K(H))中的点。

断言 1： B的不可约表示（按等价分类）恰好是求值映射 ev$_x : B \to$ K(H)，其中 $x \in X$。

断言 1 的证明： 参见练习 1.49。

断言 2： 对每个闭子集 $Y \subseteq X$，令

$$J_Y = \{b \in B \mid b(y) = 0 \text{ for all } y \in Y\}.$$

若 ev$_x(J_Y) = 0$，则 $x \in Y$。

断言 2 的证明：假设 ev$_x$(J$_Y$) = 0，因此 B 的不可约表示 ev$_x$ 可经由商 B/J$_Y$分解。相差一个同构后，我们有 B/J$_Y \subseteq$ C$_0$(Y, K(H，并应用定理 1.13 得出结论：B/J$_Y$ 的不可约表示 ev$_x$ 可扩展为 C$_0$(Y, K(H)) 的不可约表示。C$_0$(Y, K(H)) 的不可约表示是 y $\in$Y 对应的 ev$_y$s，因此 x $\in$Y。

断言 3： 若I 和J 是C^*-代数C 中的理想，则$I + J$ 是一个理想；并且对每个$c \in I + J$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，都可以写成$c = c_I + c_J$，其中$c_I \in I$，$c_J \in J$，$\|c_I\| < (1+\varepsilon)\|c\|$，且 $\|c_J\| < (2+\varepsilon)\|c\|$。

断言 3 的证明： 证明$I+J$是一个理想的过程大多是常规的，除了需要断言$I+J$在范数下是闭的；为证明这一点，注意商映射$A\to A/J$作为C^*-代数的同态是连续的，并将C^*-代数I映射到A/J的一个闭子代数上。

对于第二个断言：对每个$c\in I+J$，当然可以将其写成$c=c'_I+c'_J$，其中某些$c'_I\in I$和$c'_J\in J$。典范同构$(I+J)/J\cong I/(I\cap J)$是一个C^*-代数同构，因此是等距的，这意味着

$$\inf_{j\in J}\|c+j\|=\inf_{k\in I\cap J}\|c'_I+k\|.$$

左侧至多为$\|c\|$，因此我们可以找到$k\in I\cap J$，使得$\|c'_I+k\|<(1+\varepsilon)\|c\|$。令$c_I=c'_I+k\in I$，且$c_J=c-c_I=c'_J-k\in J$。根据构造，$\|c_I\|<(1+\varepsilon)\|c\|$，并且$\|c_J\|\le\|c\|+\|c_I\|<(2+\varepsilon)\|c\|$。

断言 4： $J_Y+J_Z=J_{Y\cap Z}$且$J_Y\cap J_Z=J_{Y\cup Z}$对所有闭子集Y、$Z\subseteq X$均成立。

断言 4 的证明： 等式$J_Y\cap J_Z=J_{Y\cup Z}$由定义立即可得。包含关系$J_Y+J_Z\subseteq J_{Y\cap Z}$也显而易见。要证明反向包含，只需（由定理 1.17）证明：B的每个不可约表示若湮灭理想J_Y+J_Z，也会湮灭$J_{Y\cap Z}$。如果ev_x湮灭J_Y+J_Z，那么$\mathrm{ev}_x(J_Y)=\mathrm{ev}_x(J_Z)=0$，因此断言 2 确保$x\in Y\cap Z$，于是$\mathrm{ev}_x(J_{Y\cap Z})=0$，证毕。

断言 5： B是$C_b(X)$-子模，其中A是$C_b(X)$的子代数；$X\to\mathbb{C}$表示有界连续函数代数。

断言 5 [的证明74]： $C_b(X)$中的每个元素都可以写成满足条件的函数f的线性组合，因此只需证明，对于所有这样的f以及所有$b\in B$，都有$fb\in B$。给定这样的f、正整数n以及$i\in\{0,1,\dots,n\}$，我们考虑闭子集

$$Y_i=\left\{x\in X\;\middle|\;f(x)\notin\left(\frac{i-1}{n},\frac{i+1}{n}\right)\right\}$$

X的闭子集。关于f的假设确保了$\bigcap_{i=0}^{n}Y_i=\emptyset$，因此由断言 4 可知$J_{Y_0}+\cdots+J_{Y_n}=J_\emptyset=B$。

现在取$b\in B$。反复应用断言 3（其中ε足够小，使得$(2+\varepsilon)(1+\varepsilon)^{n-2}<3$），可知我们可以写成$b=b_0+b_1+\cdots+b_n$，其中

$b_i \in J^{Y_i}$ 且 $\|b_i\| < 3\|b\|$ 对每个 i 都成立。定义 $c_n = \sum_{i=0}^{n} i_n b_i \in B$。对于每个 $x \in X$，我们有

$$\|(f\,b)(x) - c_n(x)\| = \left\| \sum_{i=0}^{n} (f(x) - \tfrac{i}{n}) b_i(x) \right\| \leq \sum_{i=0}^{n} \left| f(x) - \tfrac{i}{n} \right| \|b_i(x)\|.$$

若 $x \in Y_i$，则 $b_i(x) = 0$，因为 $b_i \in J^{Y_i}$。若 $x \notin Y_i$，则 $f(x) \in \left(i_{-1}n, i_{+1}n\right)$，因此 $\left|f(x) - i\,n\right| < {}^{1}n$。第二种情况至多出现两次，因为每个实数至多属于区间 $\left(i_{-1}n, i_{+1}n\right)$ 中的两个。回想 $\|b_i\| < 3\|b\|$，继续上述计算可得

$$\|(f\,b)(x) - c_n(x)\| \leq 2 \times \tfrac{1}{n} \times 3\|b\|.$$

因此，序列 $c_n \in B$ 收敛到 $fb \in C_0(X, K(H))$；由于 B 在范数下是闭的，我们得出 $f\,b \in B$。 □

断言6： $B = A$.

断言的证明 6 [Tak76]： 取定 $a \in A$ 和 $\varepsilon > 0$。令 $Y = \{x \in X \mid \|a(x)\| \geq \varepsilon\}$（X 的一个紧子集），并令 $U_0 = X \setminus Y$。

对于每个 $x \in X$，映射 $ev_x : B \to K(H)$ 都是满射（因为 ev_x 是 B 的不可约表示，且 K(H) 具有 SWP）。因此，对于每个 $x \in Y$，我们都可以找到 $b_x \in B$，使得 $b_x(x) = a(x)$；由连续性可知，可以找到 x 的一个开邻域 U_x，使得对于所有 $y \in U_x$，都有 $\|b_x(y) - a(y)\| < \varepsilon$。由紧致性可知，可以找到 Y 的一个有限子集 $\{x_1, \ldots, x_n\}$，使得 $Y \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} U_{x_i}$。为简化记号，我们令 $b_i := b_{x_i}$，并令 $U_i := U_{x_i}$，其中 $i = 1, \ldots, n$。开集 $U_0, U_1, \ldots, U_n$ 覆盖 X，我们令 $\{h_0, h_1, \ldots, h_n\}$ 为从属于该覆盖的单位分解。[3] 定义 $b = \sum_{i=1}^{n} h_i b_i$。断言 5 保证 $b \in B$，且对于每个 $x \in X$，都有

$$\begin{aligned} \|(a-b)(x)\| &= \left\| \left(a h_0 + \sum_{i=1}^{n} (a - b_i) h_i \right)(x) \right\| \\ &\leq h_0(x)\|a(x)\| + \sum_{i=1}^{n} h_i(x)\|a(x) - b_i(x)\| < \sum_{i=0}^{n} h_i(x)\varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

由于 B 在 A 中是闭的，我们得出 $B = A$。 □

[3] 这意味着，h_i 是 $X \to [0,1]$ 上的连续函数；对所有 $x \notin U_i$，都有 $\sum_{i=0}^{n} h_i(x) = 1$；并且对所有 $x \in X$，都有 $h_i(x) = 0$。局部紧豪斯多夫空间的有限开覆盖总是存在这样的单位分解。

一些习题

习题 1.52. 设A 是一个C^*-代数，且有一个理想J，使得J 和A/J 都具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。证明A具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。推论：如果有$A = J_0 \supseteq J_1 \supseteq \cdots \supseteq J_n = 0$，其中每个$J_i$ 都是J_{i-1} 中的一个理想，并且每个商J_{i-1}/J_i 都具有斯通-魏尔斯特拉斯性质，那么A具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。

习题 1.53。 考虑由 2×2 可逆矩阵组成的群

$$W = \langle s, t \rangle \quad \text{where} \quad s = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{and} \quad t = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

这个群以显然的方式作用于平面 $\mathbb{R}^2$。（它是顶点为 $(\pm 1, 0)$、$(0, \pm 1)$ 的正方形的对称群。）

对于每个 $x \in \mathbb{R}^2$ 和每个 $w \in W$，我们定义 $I_{w,x} = w$，并将其视为 $\mathbb{C}^2$ 上的酉算子。设 $A = C_0(\mathbb{R}^2, \mathrm{M}_2)^W$，其中 $\mathrm{M}_2 = \mathrm{K}(\mathbb{C}^2)$ 是由 2×2 矩阵构成的 C^*- 代数，且 W 按照 (1.38) 中的方式作用于 $C_0(\mathbb{R}^2, \mathrm{M}_2)$。求一个有限合成列 $A = J_0 \supseteq J_1 \supseteq \cdots \supseteq 0$，使其商 J_{i-1}/J_i 具有斯通-魏尔斯特拉斯性质，并由此得出 A具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。

任意 CCR A的斯通–魏尔斯特拉斯证明概要： 设 A是一个 CCR C^*-代数。

- 证明：若A具有一个（可能无限的）合成列，且其所有商都具有斯通-魏尔斯特拉斯性质，则A具有斯通-魏尔斯特拉斯性质。
- 证明A具有一个合成列，其商均为具有豪斯多夫 f

谱。

- 每个谱为豪斯多夫的 CCR C^*-代数A $\widehat{\ }$$A$都同构于一个由紧算子连续场 的$C0$ 截面构成的C^*-代数，其中这些连续场取值于C^*-代数。
- 我们为$A = C_0(X, \mathrm{K}(H))$ 给出的证明很容易推广到一般的连续场。

详情请参见 [Dix69, 11.1.6] 。

2 实约化群 I 的约化C^*-代数

现在我们简要说明，上一节的结果如何在实约化

群的约化C [-代数与表示参数空间上的某个紧算子值函数空间之间建立傅里叶型同构。关于实约化群的表示背景，请参见 [Kna86, Wal88, Wal92]；关于这一C^*-代数计算的详情，请参见 [CCH16]。

设 G 是一个实约化群。固定一个抛物子群P 的 Levi 因子L，其中P 是G的子群。（例如：$G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$，$P$ 是分块上三角矩阵组成的子群，而L 是相应的分块对角矩阵组成的子群。）群L 有 Langlands 分解$L = M_L \times A_L$，其中 M_L 有紧中心，而A_L 通过指数映射与其李代数 $\mathfrak{a}_L$ 同构。

设 σ 是离散系列 表示M_L：也就是说， σ 是M_L 在希尔伯特空间H_σ上的不可约酉表示，其矩阵系数$m \mapsto \langle \sigma(m)\xi \mid \eta \rangle$ 是L^2 函数。注意，这类表示可能存在（例如，如果M_L 是紧的，或者如果$M_L \cong \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$），也可能不存在（例如，如果$M_L \cong \mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ 且$n \geq 3$。）

每个 $\mathbb{R}$-线性泛函$\chi \in \mathfrak{a}^*{}_L$ 给出一个酉特征 $\chi : e^x \mapsto e^{i\chi(x)}$，属于$A_L$。用这些特征标对 σ 作扭变，我们得到L的一族酉表示$\{\sigma \otimes \chi \mid \chi \in \mathfrak{a}^*{}_L\}$。

抛物子群P分解为半直积$L \ltimes N$，其中N 是P的幺幂根基。L 的酉表示 $\sigma \otimes \chi$ 可沿商映射$P \to L$拉回，从而给出P的酉表示。这些表示再经由酉诱导产生G的酉表示$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi)$。将$L$ 的表示转化为G 的表示的这一过程称为抛物诱导。

抛物诱导表示$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi)$最初定义在由$P$-等变函数$G \to H_\sigma$构成的希尔伯特空间上；$P$在$H_\sigma$ 上的作用依赖于 χ，因此该希尔伯特空间亦然。但岩泽分解$G = KP$（其中K 是G的一个适当的极大紧子群）表明，从G 到K 的函数限制给出G上的P-等变函数与K上的$P \cap K$-等变函数之间的一个双射。由于$P \cap K$ 包含在M_L中，而诸表示 $\sigma \otimes \chi$ 在其上完全一致，我们得出结论：表示$\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi)$ 均可实现在同一个希尔伯特空间上。我们将该空间记为$\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma$。（这就是抛物诱导的紧致图像。）

每个表示 $\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi)$ 都是温和的，因此诱导出一个 C*-代数表示 $\mathrm{C}^*\mathrm{r}(\mathrm{G}) \to \mathrm{B}(\mathrm{Ind}_P^G \mathrm{H}_\sigma)$（参见定理 1.23）。$\sigma$ 是 M_L的平方可积表示，且 P 在 G 中余紧，这一事实保证 $\mathrm{C}^*\mathrm{r}(\mathrm{G})$ 通过紧算子作用于 $\mathrm{Ind}_P^G \mathrm{H}\sigma$。此外，黎曼–勒贝格引理的一个变体保证，对于每个 $f \in \mathrm{C}^*\mathrm{r}(\mathrm{G})$，函数 $\chi \mapsto \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi)(f)$ 是一个从 $\mathfrak{a}^*\mathrm{L}$ 到 $\mathrm{K}(\mathrm{Ind}_P^G \mathrm{H}_\sigma)$的 C_0 函数。因此我们

得到了一个 C^*-代数同态

$$\pi_{(L,\sigma)} : C_r^*(G) \to C_0(\mathfrak{a}_L^*, \mathrm{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)).$$

一般而言，这个映射 $\pi_{(L,\sigma)}$ 既不是单射，也不是满射。如下文所示，同时考虑所有可能的对 (L,σ)，即可弥补单射性方面的缺陷。$\pi_{(L,\sigma)}$ 不满射，则与表示 $\mathrm{Ind}^G{}_P(\sigma \otimes \chi)$之间存在交织算子有关。魏尔群 $\mathrm{Norm}_G(A_L)/L$ 通过共轭作用于M_L 和A_L 的酉对偶，而W_σ 表示该魏尔群中保持 σ同构类不变的稳定子。Knapp 和 Stein 的归一化交织算子理论表明，对每个$w \in W_\sigma$ 和每个 $\chi \in \mathfrak{a}^*{}_L$，都存在一个酉算子$I_{w,\chi}$，作用于 $\mathrm{Ind}^G{}_P H_\sigma$，并满足

$$I_{w,\chi}\,\mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes \chi)(g) = \mathrm{Ind}_P^G(\sigma \otimes w\chi)(g) I_{w,\chi} \tag{2.1}$$

对所有 g ∈ G 均成立。对每个 w ∈ W_σ，映射 $\chi \mapsto I_{w,\chi}$ 关于强算子拓扑连续。Knapp 在 [Kna82] 中证明，我们可以作出安排，使得对于所有 w_1，$w_2 \in W_\sigma$ 和所有 $\chi \in \mathfrak{a}^*$ L，$I_{w_2}, w_1 \chi I_{w_1,\chi} = I_{w_2} w1, \chi$。也就是说，算子 $I_{w,\chi}$ 在对 $(\mathfrak{a}^*$ L, Ind^G P $H_\sigma)$ 上定义了 W_σ 的作用，其含义见定义 1.34（参见习题 1.36）。此作用按照 (1.38) 所述，诱导出 W_σ 在 C*-代数 $C_0(\mathfrak{a}^*$ L, K(Ind^G P H_σ)) 上的作用；我们将此作用的不动点子代数记为 $C_0(\mathfrak{a}^*$ L, K(Ind^G P H $_\sigma$))$^{W_\sigma}$。算子 $I_{w,\chi}$ 的交织性质 (2.1) 确保映射 $\pi_{(L,\sigma)}$ 将 C* r(G) 映入这个不动点代数。

定理2.2。 设 G 是一个实约化群。这些映射 $\pi_{(L,\sigma)}$ 合起来给出一个 C^*-代数同构

$$\bigoplus_{[L,\sigma]} \pi_{(L,\sigma)} : C_r^*(G) \xrightarrow{\cong} \bigoplus_{[L,\sigma]} C_0(\mathfrak{a}_L^*, \mathrm{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma},$$

其中，直和取遍上述各对 (L,σ) 所对应的 G-共轭类。

证明（概要）。 我们必须证明同态 $\bigoplus \pi_{(L,\sigma)}$ 具有以下性质：

(1) 该同态映入直和：也就是说，对于每个 $a \in C^*{}_r(G)$ 以及每个 $\varepsilon > 0$，在共轭意义下，只有有限多个 (L,σ)s 使得 $\sup_{\chi \in \mathfrak{a}_L^*} \|\mathrm{Ind}^G{}_P(\sigma \otimes \chi)(a)\| \geq \varepsilon$；

(2) 该同态是单射的；也就是说，对于每个$a \in C^*{}_r(G)$，存在某个(L, σ) 以及某个$\chi \in \mathfrak{a}^*{}_L$，使得$\mathrm{Ind}^G{}_P(\sigma \otimes \chi)(a) \neq 0$；并且

(3) 该同态满射地映射到直和上。

这三个断言中的每一个都依赖于表示论中的一个重要定理。

断言 (1) 源于 Harish-Chandra 的一个定理 [HC66, 引理70], , 该定理表明, G 的极大紧子群 K 的每个不可约表示, 在 $\mathrm{Ind}_{P}^{G}(\sigma\otimes\chi)$ 中仅对有限多个 $[L,\sigma]$ s 出现。由此可知, 对于每个 $\rho\in\widehat{K}$, 都有 $\pi_{(L,\sigma)}(e_{\rho}C^{*}_{r}(G))=0$, 除有限多个 $[L,\sigma]$ 外均成立; 这里 e_{ρ} 是 ρ-等型投影, 如 (A.1) 中所述。由于子空间 $e_{\rho}C^{*}_{r}(G)$ 的张成在 $C^{*}_{r}(G)$ 中稠密（参见练习 1.46）, 这就证明了断言 (1)。

断言 (2) 源于 Langlands 的一个定理 [Lan89, 引理 4.10] 以及 Trombi [Tro77, 推论 6.2], , 该定理表明, 每个 G 的温和不可约酉表示——因此, 每个 $C^{*}_{r}(G)$ 的不可约表示——都作为某个 $\mathrm{Ind}_{P}^{G}(\sigma\otimes\chi)$ 中的一个直和项出现。

最后, 断言 (3) 由 Harish-Chandra 的另一条定理得出 [HC76, 38 定理 1], 该定理指出, 算子 $I_{w,\chi}$ （及其线性组合）是表示 $\mathrm{Ind}_{P}^{G}(\sigma\otimes\chi)$之间唯一的交织算子。另一方面, 定理 1.40 意味着, $I_{w,\chi}$s 也是 $\bigoplus_{[L,\sigma]}C^{0}(\mathfrak{a}^{*}_{L},\mathrm{K}(\mathrm{Ind}_{P}^{G}H_{\sigma}))^{W_{\sigma}}$ 的不可约表示之间的交织算子, 因此 Stone–Weierstrass 定理保证, $C^{*}_{r}(G)$ 在同态 $\bigoplus_{[L,\sigma]}\pi_{(L,\sigma)}$ 下的像等于该直和。

□

3 希尔伯特模与 Morita 等价

在许多 C^{*}-代数理论的应用中, 包括本文关注的表示论计算, 这些 C^{*}-代数本身并不像它们的某些不变量那么重要, 例如它们的谱和 K-理论。Morita 等价为我们提供了一种用一个 C^{*}-代数替换另一个的方式, 同时保持这些不变量不变。

在代数中, Morita 等价通常定义为模范畴之间的等价, 并且可以证明, 每个这样的等价都由与某种特定双模作张量积给出。在C^{*}-代数理论中, 基于双模的定义先出现, 我们将采用这一思路。本部分内容大多归功于 Rieffel; 概览及更详细的参考文献见 [Rie82], 详细论述见 [RW98] 或 [Lan95]。

3.1 希尔伯特模

定义 3.1。 一个右希尔伯特模, 其上的代数为 C^{*}-代数 B, 是一个 $\mathbb{C}$-向量空间E, 它是一个右B-模, 并且配备了一个取值于B的内积

〈|〉：E × E → B，满足：(1) 〈$\xi|\eta$〉关于 η 线性，关于 ξ 共轭线性。(2) 对所有 ξ、$\eta \in$ E 和 $b_1, b_2 \in$ B，〈$\xi b_1|\eta b_2$〉 $= b_1^*$〈$\xi|\eta$〉b_2。(3) 对所有 ξ、$\eta \in$ E，〈$\eta|\xi$〉 = 〈$\xi|\eta$〉*。(4) 对所有 $\xi \in$ E，〈$\xi|\xi$〉 ≥ 0，且仅当 $\xi = 0$ 时，〈$\xi|\xi$〉 $= 0$。(5) E 在范数 $\|\xi\|_E = \|\langle\xi|\xi\rangle\|^{1/2}$ B 下完备。

（左希尔伯特模的概念也以类似的方式定义。在这些笔记中，除非另有说明，“希尔伯特模”均指“右希尔伯特模”。）

注 3.2. 定义 3.1 中的条件 (1)–(4) 表明，(5) 中的函数$\| \|_E$ 实际上是E上的一个范数。证明这一点的一种标准方法是先证明〈$\eta|\xi$〉〈$\xi,|\eta$〉 $\leq \|\xi\|^2_E$〈$\eta|\eta$〉在 C^*- 代数 B 中成立（参见，例如，[RW98，引理 2.5]）。对这个 C^*- 代数值的柯西–施瓦茨不等式取范数，可得柯西–施瓦茨不等式 $\| \langle\xi|\eta\rangle \| \leq \|\xi\|\|\eta\|$，由此可推出 $\| \|_E$ 满足三角不等式。

例 3.3. 每个C^*-代数B 都是自身上的希尔伯特模，其内积为〈$b_1|b_2$〉 $= b_1^* b_2$。希尔伯特模范数等于C^*-代数范数。

例 3.4. 设H 是一个希尔伯特空间（视为 $\mathbb{C}$ 上的右模）。H 上的 $\mathbb{C}$-值内积使 H 成为一个希尔伯特 $\mathbb{C}$-模。

例 3.5. 设 H 是一个希尔伯特空间，X 是一个局部紧豪斯多夫空间。那么 C_0(X , H) 是 C*-代数 C_0(X) 上的希尔伯特模：其模结构由逐点乘法定义，而 C_0(X)-值内积为 〈$\xi|\eta$〉(x) := 〈ξ(x)|η(x)〉（其中 $\xi, \eta \in C_0$(X , H) 且 x $\in$X。）

下面这个事实在处理希尔伯特模时有时很有用：

引理 3.6. 若 E 是希尔伯特 B-模，则 E 中的每个元素都可以写成 ξb 的形式，其中 $\xi \in E$，且 $b \in B$。

证明（提纲）。这由定理 1.11 得出，并结合以下断言：元素 ξb 在 E 中张成稠密子空间。关于后一断言的证明，见[RW98，第 2 命题。31]（事实上，该命题证明了每个 $\xi \in E$ 都可以唯一地写成 η〈$\eta|\eta$〉 的形式，其中 $\eta \in E$。） □

习题 3.7. 设 E 是右 Hilbert B-模。

(1) 证明子集 $J = \mathrm{span}\{\overline{\langle \xi | \eta \rangle} \in B \mid \xi, \eta \in E\}$ 是 B 中的一个理想。

如果这个理想 J 等于 B，我们就称 E 是 B 上的满模。注意，E 显然是一个以 J 为系数代数的满右希尔伯特模。

(2) 证明：若 $H \neq 0$，则 H) 上的 $C_0(X$ 作为右 $C_0(X)$-希尔伯特模是满的。

习题 3.8。 (1) 设 E 和 F 是希尔伯特 B-模。在 $E \oplus F$ 这个 B-模直和上，我们定义一个取值于 B 的内积：$\langle (\xi_1, \eta_1) | (\xi_2, \eta_2) \rangle := \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle + \langle \eta_1 | \eta_2 \rangle$。证明这个内积使 $E \oplus F$ 成为一个希尔伯特 B-模。

(2) 设 V 是一个有限维希尔伯特空间，设 E 是一个定义在 B 上的希尔伯特模，其中 C^*-代数。在张量积 $V \otimes_{\mathbb{C}} E$ 上，我们定义 $(v \otimes \xi)b := v \otimes \xi b$，并定义 $\langle v_1 \otimes \xi_1 | v_2 \otimes \xi_2 \rangle := \langle v_1 | v_2 \rangle \langle \xi_1 | \xi_2 \rangle \in B$。证明这些定义使 $V \otimes_{\mathbb{C}} E$ 成为一个希尔伯特 B-模。

3.2 希尔伯特模上的算子

定义 3.9. 设 E 和 F 是以 C^*-代数 B 为基的希尔伯特模。

(1) 若存在一个线性映射 $t^* : F \to E$，使得对所有 $\xi \in E$ 和 $\eta \in F$ 均满足 $\langle \eta | t\xi \rangle = \langle t^* \eta | \xi \rangle$，则称线性映射 $t : E \to F$ 为可伴随。所有此类映射组成的集合记为 $\mathrm{L}_B(E, F)$。

(2) B-紧 （或简称紧的）线性映射 $E \to F$ 是指属于以下线性映射的线性张成在算子范数下的闭包中的映射：$|\eta\rangle \langle \xi| : E \to F,\ \zeta \mapsto \eta \langle \xi | \zeta \rangle$，其中 $\eta \in F$ 且 $\xi, \zeta \in E$。所有此类映射组成的集合记为 $\mathrm{K}_B(E, F)$。

与希尔伯特空间的情形不同，希尔伯特模之间的有界线性映射不一定可伴随：

习题 3.10. 将 C^*-代数 $C([0,1])$ 及其理想 $C_0((0,1])$ 都视为 $C([0,1])$ 上的希尔伯特模，如例 3.3 所示。证明包含映射 $C_0((0,1]) \hookrightarrow C([0,1])$ 不是可伴随的。

然而，类似于 $B = \mathbb{C}$ 情形中的论证确实可以证明：

命题 3.11. (1) 希尔伯特 B-模之间的每个可伴映射都是有界且 B-线性的；并且每个 B-紧线性映射都是可伴的。

(2) $\mathrm{L}_B(E, F)$ 是从 E 到 F 的所有有界线性映射所构成的巴拿赫空间中的一个算子范数闭子空间；而 $\mathrm{L}_B(E) := \mathrm{L}_B(E, E)$ 是一个 C^*-代数。

(3) $\mathrm{K}_B(E,\ F)$是$\mathrm{L}_B(E,\ F\ )$中的一个算子范数闭子空间，而$\mathrm{K}_B(E)\colon=\mathrm{K}_B(E,\ E)$是$C^*$-代数$\mathrm{L}_B(E)$中的一个理想。 □

练习 3.12。 设H是一个希尔伯特空间，并考虑希尔伯特$C_0(X)$-模$C_0(X,\ H)$（例 3.5）。证明 $\mathrm{K}_{C_0(X)}\big(C_0(X、\ H)\big)\cong C_0(X、\ \mathrm{K}(H))$。

练习 3.13。 设E 是一个希尔伯特B-模。将B 视为例 3.3 中的希尔伯特B-模。

(1) 证明 $\mathrm{K}_B(E,B)=\{\ \langle\xi|\colon\ \eta\mapsto\ \langle\xi\,|\,\eta\rangle\ \ |\ \xi\in E\}$。

(2) 推出，将每个$b\ \in B$ 映射到乘法算子$m_b:B\xrightarrow{c\mapsto bc}B$ 的映射给出了C^*-代数$B\ \xrightarrow{\cong}$与$\mathrm{K}_B(B)$之间的同构。

(3) 证明公式〈〈$k\,|\,l$〉〉 $:=k^*l$，对于k、$l\ \in\mathrm{K}_B(E、\ B)$，使 $\mathrm{K}_B(E、B)$成为 $\mathrm{K}_B($ $E)$这一C^*-代数上的满希尔伯特模。提示： 考虑C^*-代数 $\mathrm{K}_B(E\ \oplus B)$，其中$E\ \oplus$ B 是习题 3.8 中的希尔伯特B-模。用矩阵形式可以写成

$$\mathrm{K}_B(E\oplus B)=\begin{bmatrix}\mathrm{K}_B(E) & \mathrm{K}_B(E,B)\\ \mathrm{K}_B(B,E) & \mathrm{K}_B(B)\end{bmatrix},$$

其中，每个矩阵项中的紧算子空间都等距嵌入。

(4) 现在假设 E 是 B 上的满模。证明，将 $b\ \in B$映射到映射 $\mathrm{K}_B(E,B)\xrightarrow{k\mapsto m_b\circ k}\mathrm{K}_B(E,B)$ 的映射，是 C^*-代数 $B\ \xrightarrow{\cong}\mathrm{K}_{\mathrm{K}_B(E)}\big(\mathrm{K}_B(E,B)\big)$ 的同构。

(5) 现在考虑 $\mathrm{K}_B(B,E)$。证明，内积 $\langle k\,|\,l\rangle\ :=k^*l$ 使 $\mathrm{K}_B(B,E)$ 成为 $\mathrm{K}_B(B)\cong B$ 上的右希尔伯特模，并且将$\xi\in E$ 映射到算子 $|\xi\rangle:b\ \mapsto\ \xi b$ 的映射，是希尔伯特 B-模 $E\ \xrightarrow{=}\mathrm{K}_B(B,E)$之间的保内积同构。

考察希尔伯特模上的算子，可以方便地解决我们在例 1.3(8.ii) 中留下的一个待解决问题：交叉积 C^*-代数上的范数定义。

习题 3.14. 设 B 是一个 C*-代数，带有有限群 W 的一个作用 β，该作用由 $*$-自同构给出。考虑张量积 $\ell^2\mathrm{W}\ \otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{B}$，它是如习题 3.8 中所述的希尔伯特 B-模。对于每个 $\mathrm{b}\ \in\mathrm{B}$ 和 $\mathrm{w}\ \in\mathrm{W}$，令 t_{bw}为作用在 $\ell^2\mathrm{W}\ \otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{B}$ 上的算子，其定义为 $\mathrm{t}_{bw}(\delta_v\otimes\mathrm{a})=\delta_{wv}\otimes\beta_{v^{-1}}\mathrm{w}^{-1}(\mathrm{b})\mathrm{a}$。（这里，$\{\delta_v\ |\ \mathrm{v}\ \in\mathrm{W}\}$ 表示 $\ell^2\mathrm{W}$ 的标准正交基。）证明映射 $\mathrm{bw}\ \mapsto\mathrm{t}_{bw}$ 给出了从 B 到 $*$-代数 $\mathrm{B}\ \rtimes\mathrm{W}\ \to\mathrm{L}_B(\ell^2$ $\mathrm{W}\ \otimes_{\mathbb{C}}\mathrm{B})$ 的一个单同态，因此$\|\sum_{\mathrm{w}}\mathrm{b}\ \ {}_w\mathrm{w}\|:=\|\sum_{\mathrm{w}}\mathrm{t}\ \ {}_{b_w}\mathrm{w}\|_{\mathrm{L}_B(\ell^2\mathrm{W}\otimes\mathrm{B})}$ 是 B $\rtimes\mathrm{W}$ 上的一个 C*-代数范数。

3.3 Morita 等价

定义 3.15. 设 A 和 B 是 C^*-代数。从A到B 的*Morita* 等价 是一个满希尔伯特B-模E，并配备一个C^*-代数的同构$\varphi A \xrightarrow{\cong} \mathrm{K}_B(E)$。如果存在从$A$ 到B的 Morita 等价，我们就称A和B 这两个C^*-代数是*Morita* 等价 （记作：$A \sim B$）。

备注 3.16。定义还有一种等价表述：从 A 到 B 的 Morita 等价是一个 A-B-双模 E，它既是满左 Hilbert A-模（内积为 $[\,|\,]$），也是满右 Hilbert B-模（内积为 $\langle\,|\,\rangle$），并且满足 $[\xi \mathrm{b}\,|\,\eta] = [\xi\,|\,\eta \mathrm{b}^*]$、$\langle \mathrm{a}\xi\,|\,\eta\rangle = \langle \xi\,|\,\mathrm{a}^*\eta\rangle$ 以及 $[\xi\,|\,\eta]\zeta = \xi\langle\eta\,|\,\zeta\rangle$，其中 ξ、η、$\zeta \in \mathrm{E}$，$\mathrm{a} \in \mathrm{A}$，$\mathrm{b} \in \mathrm{B}$。利用与练习 3.13 类似的论证，可以证明这个定义与定义 3.15 等价。

例子 3.17。 设 H 是一个非零希尔伯特空间。

(1) H 是从 $\mathrm{K}(H)$到 $\mathbb{C}$的 Morita 等价。

(2) 对于每个局部紧豪斯多夫空间 X，$C_0(X,\ H)$ 是从 $C_0(X,\ \mathrm{K}(H))$ 到 $C_0(X)$的 Morita 等价。

以下是关于 Morita 等价的一些重要事实：

定理 3.18。 (1) *Morita* 等价是一种等价关系。 [Rie74]

(2) $A \sim B$ 当且仅当 $A \otimes \mathrm{K}(H) \cong B \otimes \mathrm{K}(H)$，只要 A 和 B 具有可数近似单位（本笔记中关注的所有 C^*-代数都是如此）。 [BGR77]

(3) 如果 $A \sim B$，那么 A 与 B 同胚，且 A 和 B 的 K-理论同构。[Rie74, BGR77, Kas88]

(4) $A \sim B$ 当且仅当 A 和 B 的算子模范畴等价。[Ble01]

(5) 如果 A 和 B 都有 1，那么 $A \sim B$ 当且仅当 A 和 B 作为环是 *Morita* 等价的（也就是说，它们的纯代数模范畴是等价的。） [Bee82]

□

练习 3.19。 利用练习 3.13 证明 Morita 等价具有对称性：若 $A \sim B$，则 $B \sim A$。

练习 3.20. 设A_i 和B_i 是两个C^*-代数族（由$i \in I$索引），且对每个i，都有$A_i \sim B_i$。证明 $\bigoplus_i A_i \sim \bigoplus_i B_i$。

3.4 等变希尔伯特模

设有限群W 通过 $*$-自同构 β_w作用在C^*-代数B 上。

定义 3.21. 一个W-等变 希尔伯特B-模是一个希尔伯特B-模E，并配备一族可逆线性算子 $\gamma_w : E \to E$，满足$\gamma_w(\xi b) = \gamma_w(\xi)\beta_w(b)$、$\langle \gamma_w\xi \,|\, \gamma_w\eta\rangle = \beta_w(\langle \xi \,|\, \eta\rangle)$，且$\gamma_{w_1}\circ\gamma_{w_2} = \gamma_{w_1w_2}$，对所有$w$、$w_1, w_2 \in W$、$\xi$、$\eta \in E$以及$b \in B$均成立。

练习 3.22. 设E 是一个W-等变希尔伯特B-模。证明，公式 $\alpha_w(k) := \gamma_w k \gamma^{-1}{}_w$（其中$w \in W$ 且$k \in \mathrm{K}_B(E)$）定义了W 在C^*-代数$\mathrm{K}_B(E)$上的一个作用。

例 3.23. 设 W 按定义 1.34 中的方式作用于一对 (X , H)（参见习题 1.36）：也就是说，设 W 通过同胚映射作用于空间 X，并且有一族强算子连续酉算子 $\mathrm{I}_{w,x}$ 作用在希尔伯特空间 H 上，满足对所有 $\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2 \in \mathrm{W}$ 及所有 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$，都有 $\mathrm{I}_{w_1,\mathrm{w}_2\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{w_2,\mathrm{x}} = \mathrm{I}_{w_1\mathrm{w}_2,\mathrm{x}}$。令 β 表示 W 在 $\mathrm{B} = \mathrm{C}_0(\mathrm{X})$ 上的诱导作用（即 $\beta_w \mathrm{f}(\mathrm{x}) = \mathrm{f}(\mathrm{w}^{-1}\mathrm{x})$），并对每个 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，令 γ_w 表示希尔伯特 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$-模 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{H})$ 上由 $\gamma_w\xi(\mathrm{x}) := \mathrm{I}_{w,w^{-1}\mathrm{x}}(\xi(\mathrm{w}^{-1}\mathrm{x}))$ 定义的线性映射。练习：验证这些算子使 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{H})$ 成为一个 W-等变希尔伯特 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X})$-模，并验证练习 3.22 中定义的 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H})) \cong \mathrm{K}_{C_0(\mathrm{X})}(\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{H}))$ 上的 W- 作用与式 (1.38) 中定义的作用相同。

存在一种等变希尔伯特模的交叉积构造，它与C^*-代数的交叉积构造相兼容（参见 例 1.3(8.ii)）：

定义 3.24. 设E 是一个W-等变希尔伯特B-模。我们将向量空间$E \rtimes W := \left\{ \sum_{w\in W} \xi_w w \;\middle|\; \xi_w \in E \right\}$ 赋予右$B \rtimes W$-模结构，定义 $(\xi w_1)(b w_2) := \xi\beta_{w_1}(b) w_1 w_2$，；并在$E \rtimes W$ 上赋予$B \rtimes W$-值内积，其定义为

$$\langle \xi_1 w_1 \,|\, \xi_2 w_2\rangle := w_1^{-1}\langle \xi_1 \,|\, \xi_2\rangle w_2 = \beta_{w_1^{-1}}(\langle \xi_1 \,|\, \xi_2\rangle) w_1^{-1} w_2.$$

定理 3.25. 这些定义使 $E \rtimes W$ 成为一个 *Hilbert* $B \rtimes W$ -模；若 E 是 B 上的满模，则它是 $B \rtimes W$ 上的满模。我们有 $\mathrm{K}_{B\rtimes W}(E \rtimes W) \cong \mathrm{K}_B(E) \rtimes W$，其中 W 在$\mathrm{K}_B(E)$上的作用如练习 *3.22* 所述。

证明（概要）。直和 $E \oplus B$ 是一个希尔伯特 B-模，如习题 3.8 所示。它以自然的方式成为一个 W-等变希尔伯特 B-模：每个 $w \in W$ 都通过算子 $(\xi, b) \mapsto (\gamma_w(\xi), \beta_w(b))$作用于 $E \oplus B$。这个 W 在 $E \oplus B$上的作用会在 C^*-代数 $\mathrm{K}_B(E \oplus B)$上诱导出一个 W 作用，如练习 3.22 所示。使用

同一性 $E \cong \mathrm{K}_B(B, E)$（练习 3.13）将 $E \rtimes W$ 嵌入为 $\mathrm{K}_B(E \oplus B) \rtimes W$的一个闭子空间，然后注意到定义 3.24 中定义的内积，是 $\mathrm{K}_B(E \oplus B) \rtimes W$上的标准内积 $\langle k \mid l \rangle = k^* l$ 在 $E \rtimes W$ 上的限制。

关于满性的断言很容易由以下观察得出：对于所有$\xi, \eta \in E$和 $w \in W$，我们有 $\langle \xi 1_W \mid \eta w \rangle = \langle \xi \mid \eta \rangle w$。

关于紧算子的断言：给定 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}_B(\mathrm{E})$ 和 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，在 $\mathrm{E} \rtimes \mathrm{W}$ 上定义算子 $\varphi(\mathrm{kw})$，令 $\varphi(\mathrm{kw})\colon \xi \mathrm{v} \mapsto \mathrm{k}(\gamma_w \xi)\mathrm{wv}$（其中 $\xi \in \mathrm{E}$ 且 $\mathrm{v} \in \mathrm{W}$。）验证这是一个从 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E}) \rtimes \mathrm{W}$ 到可伴算子 $\mathrm{L}_{B \rtimes W}(\mathrm{E} \rtimes \mathrm{W})$ 所成 C^*-代数的 C^*-代数同态。对于 $\xi, \eta \in \mathrm{E}$ 和 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，我们有 $\varphi(|\xi\rangle\langle\eta|\mathrm{w}) = |\xi 1_W\rangle\langle\gamma_{w^{-1}}\eta \mathrm{w}^{-1}| \in \mathrm{K}_{B \rtimes W}(\mathrm{E} \rtimes \mathrm{W})$，这表明 φ将 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E}) \rtimes \mathrm{W}$ 映满到 $\mathrm{K}_{B \rtimes W}(\mathrm{E} \rtimes \mathrm{W})$。映射 φ 还是单射，因为若 $\mathrm{a} = \sum_{\mathrm{w} \in \mathrm{W}} \mathrm{k}_w \mathrm{w} \in \ker \varphi$，那么对于每个 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ 和每个 $\xi \in \mathrm{E}$，我们有 $0 = \varphi(\mathrm{a})(\xi 1_W) = \sum_{\mathrm{w}} \mathrm{k}_w(\gamma_w \xi)\mathrm{w}$，这表明对所有 w 都有 $\mathrm{k}_w \circ \gamma_w = 0$；又由于这些$\gamma_w$可逆，我们得出对所有 w 都有 $\mathrm{k}_w = 0$。 □

现在我们将看到，除了构造交叉积 $E \rtimes W$ 之外，还可以将等变希尔伯特模 E 本身转化为一个希尔伯特 $B \rtimes W$- 模。正如我们将在定理 3.27 的证明中看到的，这两种构造密切相关。

定义 3.26. 设 E 是一个 W-等变希尔伯特 B-模。我们通过定义 $\xi b w := \gamma_{w^{-1}}(\xi b) = \gamma_{w^{-1}}(\xi)\beta_{w^{-1}}(b)$，将 E 构造成 $B \rtimes W$ 上的右模，并赋予 E 一个取值于 $B \rtimes W$ 的内积

$$\langle\langle \xi \mid \eta \rangle\rangle := \sum_{w \in W} \langle \xi \mid \gamma_w \eta \rangle w.$$

定理 3.27. 上述定义使 E 成为一个希尔伯特 $B \rtimes W$ -模，并且我们有

$$\mathrm{K}_{B \rtimes W}(E) = \mathrm{K}_B(E)^W = \{k \in \mathrm{K}_B(E) \mid \gamma_w k = k \gamma_w \text{ for all } w \in W\}.$$

证明（概要）。设 $E \rtimes W$ 是定理 3.25 中的希尔伯特 $B \rtimes W$-模。映射

$$\psi : E \to E \rtimes W, \qquad \psi(\xi) = |W|^{-1/2} \sum_{w \in W} \gamma_{w^{-1}}(\xi) w$$

满足 $\psi(\xi b w) = \psi(\xi) b w$ 以及 $\langle\langle \xi \mid \eta \rangle\rangle = \langle \psi(\xi) \mid \psi(\eta) \rangle$，对所有 $\xi, \eta \in E$、$b \in B$ 和 $w \in W$均成立。因此，赋予了定义 3.26 中的乘法和内积的E，与希尔伯特B-模$B \rtimes W$的一个$B \rtimes W$-子模酉同构。现在只需验证E 在范数下是完备的

$\|\ \|_{\langle\langle\ |\ \rangle\rangle}$，该范数由内积 $\langle\ \langle\ |\ \rangle\ \rangle$ 诱导。为此，我们证明该范数与$E\|\ \|$ 上的原范数等价。一方面，我们有

$$\|\xi\|^2_{\langle\langle\ |\ \rangle\rangle} = \left\|\sum_{w\in W}\langle\xi\,|\,\gamma_w\xi\rangle w\right\| \le |W|\|\xi\|^2$$

（利用柯西–施瓦茨不等式，以及 γ_ws 是等距的这一事实。）另一方面，取任意满足 $\|\xi\| = 1$的 $\xi \in E$。由于元素 $\langle\xi\,|\,\xi\rangle\ \in B$是正的，因此可以将其写成$aa^*$，其中$a\ \in B$。于是有$\|a\| = \|aa^*\|^{1/2} = \|\xi\| = 1$。利用练习 3.14 中的嵌入$t : B\ \rtimes W\ \hookrightarrow \mathrm{L}_B(\ell^2 W\ \otimes B)$，由柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|\xi\|^2_{\langle\langle\ |\ \rangle\rangle} \ge \|\langle\delta_{1_W}\otimes a\,|\,t_{\langle\langle\xi\,|\,\xi\rangle\rangle}(\delta_{1_W}\otimes a)\rangle\| = \|a^*\langle\xi\,|\,\xi\rangle a\| = \|a\|^4 = 1,$$

这表明$\|\xi\|_{\langle\langle\ |\ \rangle\rangle}\ \ge \|\xi\|$。

现在证明关于紧算子的断言：对所有 $\xi,\eta\in\mathrm{E}$，算子$|\xi\rangle\ \rangle\ \langle\ \langle\eta|\in\mathrm{K}$ $_{B\rtimes W}(\mathrm{E})$等于 $\sum_{\mathrm{w}\in\mathrm{W}}\ \gamma_{w^{-1}}|\xi\rangle\ \langle\eta|\gamma_w$，显然它属于 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E})^W$。取闭线性张成可得 $\mathrm{K}_{B\rtimes W}(\mathrm{E})\subseteq\mathrm{K}_B(\mathrm{E})^W$。另一方面，同样的计算表明，对每个 $\mathrm{k}\ \in\mathrm{K}_B(\mathrm{E})$，都有 $\sum_{\mathrm{w}\in\mathrm{W}}\ \gamma_{w^{-1}}\mathrm{k}\gamma_w\in\mathrm{K}_{B\rtimes W}(\mathrm{E})$；而对每个 $\mathrm{k}\ \in\mathrm{K}_B(\mathrm{E})^W$，都有 $\sum_{\mathrm{w}\in\mathrm{W}}\ \gamma_{w^{-1}}$ $\mathrm{k}\gamma_w\ =\ |\mathrm{W}\ |\mathrm{k}$。因此 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E})^W\subseteq\mathrm{K}_{B\rtimes W}(\mathrm{E})$。 □

注 3.28。 定理 3.27 与*Green–Julg* 定理 [Jul81],密切相关。该定理指出，定义 3.26 中的构造（以及将其推广到W 为紧群的情形）给出了从W-等变K理论（针对B）到K理论（针对$B\ \rtimes W$）的同构。

3.5 $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$ 的 Morita 等价

再次考虑第 1.11 节中的情形：X 是一个局部紧豪斯多夫空间，W 是一个通过同胚作用于 X 的有限群，H 是一个希尔伯特空间，并且给定了一个强算子连续的酉算子族 $\mathrm{I}\ =\{\mathrm{I}_{w,x}\in\mathrm{U}(\mathrm{H})\,|\,\mathrm{w}\ \in\mathrm{W},\mathrm{x}\ \in\mathrm{X}\}$，满足 $\mathrm{I}_{w_1,\mathrm{w}_2\mathrm{x}}\,\mathrm{I}_{\ w_2,\mathrm{x}}\ =\mathrm{I}_{w_1}$ $_{\mathrm{w}_2,\mathrm{x}}$。如例 3.23 所述，我们可以利用这些算子将 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X},\mathrm{H})$ 视为一个 W-等变希尔伯特 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}\ )$-模。定理 3.27 说明了如何将这个等变希尔伯特模转化为一个 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}\ )\rtimes\mathrm{W}$ 上的希尔伯特模，使得

$$\mathrm{K}_{C_0(X)\rtimes W}(C_0(X,H)) = \mathrm{K}_{C_0(X)}(C_0(X,H))^W \cong C_0(X,\mathrm{K}(H))^W$$

(参见练习 3.12)，其中 W作用于 $C_0(X,\mathrm{K}(H))$，如 (1.38) 所示。

令$J\ \subseteq C_0(X)\rtimes W$表示由$\{\ \langle\ \langle\xi\,|\,\eta\rangle\ \rangle\ \ |\,\xi,\overline{\eta\in C_0(X,H)}\}$张成的闭理想。模$C_0(X,H)$因而实现了$C_0(X,\mathrm{K}(H))^W\sim J$之间的 Morita 等价。

我们的目标是在一些附加假设下描述这个理想J；在研究实约化群G时出现的$C^*_r(G)$情形将满足这些假设。

为说明这些假设为何重要，先假设所有算子$I_{w,x} \in \mathrm{U}(\mathrm{H})$都是恒等算子的标量倍数；在约化群的背景下，这种情况几乎不会发生，但这个设想仍然很有启发性。在这种情况下，W 对 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))$的作用 α简化为 $\alpha_w(\mathrm{k})(\mathrm{x}) = \mathrm{k}(\mathrm{w}^{-1}\mathrm{x})$，于是我们有 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))^W \cong \mathrm{C}_0(\mathrm{X}/\mathrm{W}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))$，而我们知道它与交换 C^*-代数 $\mathrm{C}_0(\mathrm{X}/\mathrm{W})$ Morita 等价。

一般而言，这个结论并不成立，因为 Morita 等价保持谱，而 $C_0(X/W) \cong X/W$是豪斯多夫的，而我们知道（例如，，由习题 1.42 可知）$C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$的谱可能不是豪斯多夫的。不过，这个思想实验至少表明，关注哪些 $I_{w,x}$s 是标量会有所帮助。

定义 3.29. 给定上述的X、W、H和I，对每个$x \in X$，我们定义

$$W'_x = \{w \in W_x \mid \text{the operator } I_{w,x} \text{ is a scalar multiple of the identity } \mathrm{id}_H\}.$$

容易验证，对每个$w \in W$和每个$x \in X$，都有$wW'_x w^{-1} = W'_{wx}$。特别地，W'_x是W_x的正规子群。

我们将在以下附加假设下进行讨论：

定义 3.30. (1) 若算子族I满足归一化条件，则称其满足归一化条件；也就是说，对每个$x \in X$和每个$w \in W'_x$，都有$I_{w,x} = \mathrm{id}_H$。

(2) 若I满足归一化条件，则称其也满足完备性条件，如果对每个$x \in X$，由$w \mapsto I_{w,x}$定义的表示$W_x \to \mathrm{U}(H)$包含W_x的每个在W'_x上平凡的不可约酉表示的一个副本。

定义 3.31. 给定上述的X、W、H和I，我们考察$C_0(X) \rtimes W$的以下子集：

$$C(X, W, I) = \left\{ \sum_{w \in W} f_w w \in C_0(X) \rtimes W \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall x \in X,\ \forall w' \in W'_x,\ \forall w \in W: \\ f_{w'w}(x) = f_w(x) \end{array} \right\}.$$

注意，$C(X、W、I)$仅通过H和I所定义的子群系统$W'_x \subseteq W_x$而依赖于它们。

习题 3.32. 证明 $C(X, W, I)$ 是 $C_0(X) \rtimes W$中的一个理想。（提示：先考虑 W 在X上传递作用的情形；然后利用同态下理想的原像以及理想的交集仍为理想这一事实。）

定理 3.33. 如果 I 满足完备性和归一化条件，那么 C^*-代数 $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$ 与 $C(X, W, I)$ *Morita* 等价。

证明（概要）。上文指出，将定理 3.27 应用于 W-等变 Hilbert $C_0(X)$-模 $C_0(X, H)$，可得到 $C_0(X, \mathrm{K}(H))^W$与理想之间的 Morita 等价

$$J = \overline{\mathrm{span}}\{\langle\!\langle \xi \mid \eta \rangle\!\rangle \in C_0(X) \rtimes W \mid \xi, \eta \in C_0(X, H)\}$$

它属于 $C_0(X) \rtimes W$。我们的目标是证明 $J = C(X, W, I)$。

为节省篇幅，我们记 $C = C(X, W, I)$。容易验证，对于所有 $\xi, \eta \in C_0(X, H)$，都有 $\langle \langle \xi \mid \eta \rangle \rangle \in C$，因此 $J \subseteq C$。由于 J 和 C 都是 $C_0(X) \rtimes W$中的理想，要证明它们相等，只需证明 $C_0(X) \rtimes W$ 的每个湮灭 J 的不可约表示也湮灭 C（定理 1.17(7)）。

在同构意义下，$\mathrm{C_0(X)} \rtimes \mathrm{W}$ 的每个不可约表示都是如下复合：先取习题 1.39 中的同构 $\varphi : \mathrm{C_0(X)} \rtimes \mathrm{W} \to \mathrm{C_0(X, K(\ell^2 W))^W}$，再与定理 1.40 中的某个不可约表示 $\pi_{x,\rho} : \mathrm{C_0(X, K(\ell^2 W))^W} \to \mathrm{B(HS(H\rho, \ell^2 W)^{W_x})}$ 复合。给定一点 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$，以及一个在 $\mathrm{W'x}$ 上作用平凡的不可约表示 $\rho \in \widehat{\mathrm{W}_x}$，可以利用完备性条件构造一个函数 $\xi \in \mathrm{C_0(X, H)}$，使得 $\pi_{x,\rho}(\varphi(\langle\langle \xi \mid \xi \rangle\rangle)) \neq 0$。以下是一种构造方法。完备性条件意味着存在酉算子 $\mathrm{u} : \mathrm{H}\rho \xrightarrow{\sim} \mathrm{H}$，满足对所有 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}_x$，$\mathrm{I}_{w,x} \circ \mathrm{u} = \mathrm{u} \circ \rho(\mathrm{w})$。给定一个非零的 $\mathrm{s} \in \mathrm{HS(H}\rho, \ell^2 \mathrm{W})^{W_x}$，令 $\zeta := \mathrm{s}^* \delta_1 \in \mathrm{H}\rho$。我们有 $\zeta \neq 0$，因为至少存在一个 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}_x$，以及至少存在一个 $\eta \in \mathrm{H}\rho$，使得 $\langle \delta_w \mid \mathrm{s}\eta \rangle \neq 0$；又由于 s 是 W_x-等变的，故有 $\langle \delta_w \mid \mathrm{s}\eta \rangle = \langle \mathrm{s}^* \delta_1 \mid \rho(\mathrm{w})\eta \rangle$。现在取一个函数 $\xi \in \mathrm{C_0(X, H)}$，使得 $\xi(\mathrm{x}) = \zeta$，并且对轨道 $\mathrm{W\,x}$ 中的每个 $\mathrm{y} \neq \mathrm{x}$，都有 $\xi(\mathrm{y}) = 0$。展开定义可得等式

$$\left\langle \delta_1 \middle| (\pi_{x,\rho} \circ \varphi)(\langle\!\langle \xi \mid \xi \rangle\!\rangle)(s)(\zeta) \right\rangle = \sum_{w \in W_x} |\langle \zeta \mid \rho(w)\zeta \rangle|^2 > 0,$$

因此，$\pi_{x,\rho} \circ \varphi$ 的不可约表示在理想J上非零。换言之，如果$C_0(X) \rtimes W$的不可约表示$\pi_{x,\rho} \circ \varphi$ 湮灭J，那么 ρ 在W_x上是非平凡的。

另一方面，直接计算可知，对于每个 $\mathrm{c} \in \mathrm{C}$、$\mathrm{x} \in \mathrm{X}$ 和 $\mathrm{w}' \in \mathrm{W'x}$，都有 $\varphi(\mathrm{c})(\mathrm{x}) = \lambda_{w'} \varphi(\mathrm{c})(\mathrm{x})$属于 $\mathrm{K}(\ell^2 \mathrm{W})$。这意味着，如果 $\rho \in \widehat{\mathrm{W}_x}$ 在 $\mathrm{W'x}$ 上非平凡，那么 $\pi_{x,\rho} \circ \varphi$ 会湮灭 C。因此，$\mathrm{C_0(X)} \rtimes \mathrm{W}$ 的每个湮灭 J 的不可约表示也会湮灭 C，故 $\mathrm{J} = \mathrm{C}$。

□

4 实约化群的约化C^*-代数 II

设G 是一个实约化群。定理2.2（结合练习 3.20）表明，为了理解$C^*_r(G)$的 Morita 等价，只需考察直和项$C_0(\mathfrak{a}_L^*, \mathrm{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}$中的一个。因此，我们现在固定$L$，它是$G$的抛物子群$P$的 Levi 子群，并固定$L$的紧生成部分上的一个离散系列表示 σ。对于每个$\chi \in \mathfrak{a}_L^*$，我们考虑正规子群

$$W'_{\sigma,\chi} := \{w \in W_{\sigma,\chi} \mid \text{the operator } I_{w,\chi} \in \mathrm{U}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma) \text{ is a scalar}\}$$

χ在W_σ中稳定子的。令$W_{r,\sigma} := W'_{\sigma,0}$。

我们的计算依赖于 Knapp 和 Stein 的以下定理。

定理 4.1 ([KS80，定理 13.4 和引理 14.1])。

(1) 交织算子 $I_{w,\chi}$ 可作归一化，使得对所有 $\chi \in \mathfrak{a}_L^*$ 以及所有 $w \in W_{r,\sigma,\chi}$，$I_{w,\chi} = \mathrm{id}_{\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma}$。

(2) 假设 $I_{w,\chi}$ 按照第 *(1)* 部分进行归一化，则对每个 $\chi \in \mathfrak{a}_L^*$，表示 $W_{\sigma,\chi}$ $w \mapsto I \xrightarrow{w\chi} \mathrm{U}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)$ 都包含 $W_{\sigma,\chi}$ 的每个在 $W_{r,\sigma,\chi}$ 上平凡的不可约酉表示的一份副本。

(3) 对每个 $\chi \in \mathfrak{a}_L^*$，我们有 $W_{r,\sigma,\chi} = W_{\sigma,\chi} \cap W'_\sigma$。

(4) 存在一个子群 $R_\sigma \subseteq W_\sigma$，使得 $W_\sigma = W'_\sigma \rtimes R_\sigma$。 □

我们现在可以完成对 $C^*_r(G)$ 的计算，精确到 Morita 等价：

定理 4.2. 对于定理*2.2*中的每个直和项，存在一个 *Morita* 等价

$$C_0(\mathfrak{a}_L^*, \mathrm{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma} \sim C_0(\mathfrak{a}_L^*/W'_\sigma) \rtimes R_\sigma.$$

证明（概要）。定理 4.1 的第 (1) 和 (2) 部分表明，交织算子族 $I_{w,\chi}$ 满足定义 3.30 的归一化条件和完备性条件，因此定理 3.33 推出，Hilbert $C_0(\mathfrak{a}_L^*) \rtimes W_\sigma$-模 $C_0(\mathfrak{a}_L^*, \mathrm{Ind}_P^G H_\sigma)$给出了 C^*-代数 $C_0(\mathfrak{a}_L^*, \mathrm{K}(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma}$与理想

$$C(\mathfrak{a}_L^*, W_\sigma, I) = \left\{ \sum_{w \in W_\sigma} f_w w \in C_0(\mathfrak{a}_L^*) \rtimes W_\sigma \;\middle|\; \begin{array}{c} \forall \chi \in \mathfrak{a}_L^*,\ \forall w' \in W'_{\sigma,\chi},\ \forall w \in W_\sigma : \\ f_{w'w}(\chi) = f_w(\chi) \end{array} \right\}$$

在 $C_0(\mathfrak{a}^*_L) \rtimes W_\sigma$。

分解 $W_\sigma = W'_\sigma \rtimes R_\sigma$ 给出了同构 $C_0(\mathfrak{a}^* L) \rtimes W_\sigma \cong (C_0(\mathfrak{a}^* L) \rtimes W'_\sigma) \rtimes R_\sigma$（练习 1.5）。事实 $W'_{\sigma,\chi} = W_{\sigma,\chi} \cap W'_\sigma$ 对每个 χ 都成立，这意味着该同构限制为理想 $C(\mathfrak{a}^* L, W_\sigma, I) \subseteq C_0(\mathfrak{a}^* L) \rtimes W_\sigma$ 与理想 $C(\mathfrak{a}^* L, W'_\sigma, I) \rtimes R_\sigma \subseteq (C_0(\mathfrak{a}^* L) \rtimes W'_\sigma) \rtimes R_\sigma$ 之间的同构。

C^*-代数 $C(\mathfrak{a}^* L, W'_\sigma, I)$ 只取决于算子 $I_{w,\chi}$ 中哪些是标量，对于 $w \in W'_\sigma \cap W_{\sigma,\chi} = W'_{\sigma,\chi}$。在此情形下，答案是它们全都是标量（因为这就是 $W'_{\sigma,\chi}$ 的定义）。这与希尔伯特空间 $\mathbb{C}$ 上的算子 $\mathrm{id}_{w,\chi} := \mathrm{id}$ 的答案相同，因此 $C(\mathfrak{a}^* L, W'_\sigma, I) = C(\mathfrak{a}^* L, W'_\sigma, \mathrm{id})$。定理 3.33 表明，双模 $C_0(\mathfrak{a}^* L, \mathbb{C})$ 在 $C(\mathfrak{a}^* L, W'_\sigma, \mathrm{id})$ 与 $C_0(\mathfrak{a}^* L, K(\mathbb{C}))^{W'_\sigma} \cong C_0(\mathfrak{a}^* L/W'_\sigma)$ 之间给出了 Morita 等价。

群 R_σ 与 $C(\mathfrak{a}^* L、 W'_\sigma、 \mathrm{id})、 C_0(\mathfrak{a}^* L、 \mathbb{C})$ 和 $C_0(\mathfrak{a}^* L/W'_\sigma)$ 相容地作用，因此定理 3.25 的构造使我们能够将 Morita 等价 $C_0(\mathfrak{a}^* L、 \mathbb{C})$ 提升为 $C_0(\mathfrak{a}^* L、 \mathbb{C}) \rtimes R_\sigma$ 之间的 Morita 等价，其中一方为 $C(\mathfrak{a}^* L、 W'_\sigma、 \mathrm{id}) \rtimes R_\sigma$，另一方为 $C_0(\mathfrak{a}^* L/W'_\sigma) \rtimes R_\sigma$。综合以上结果，我们得到

$$C_0(\mathfrak{a}^*_L, K(\mathrm{Ind}_P^G H_\sigma))^{W_\sigma} \sim C(\mathfrak{a}^*_L, W_\sigma, I) \cong C(\mathfrak{a}^*_L, W'_\sigma, \mathrm{id}) \rtimes R_\sigma \sim C_0(\mathfrak{a}^*_L/W'_\sigma) \rtimes R_\sigma.$$

□

结合定理 2.2 和 4.2，得到定理 1。

A 紧群的表示

本附录列举了一些关于紧群（例如有限群）的酉表示的事实，这些事实用于计算实约化群的约化 C^*-代数。相关参考资料包括塞尔[Ser77] 的著作（有限情形）以及 Bröcker–tom Dieck [BtD85 的第二至第三章],等。

设 W 是一个紧致拓扑群，并选取一个 Haar 测度 dw。（因此 $f \mapsto \int_W f(w)\, dw$ 是一个正线性映射 $C(W) \to \mathbb{C}$，满足 $\int_W f(w_1 w w_2)\, dw = \int_W f(w)\, dw$。）我们有：

（1）W 的每个不可约酉表示都是有限维的。

（2）W 的每个酉表示都同构于不可约表示的直和。

(3) 正则表示 $\lambda : G \to L^2(G)$ 包含 G 的每个不可约表示的一个副本。

(4) 对于每个不可约酉表示 $\rho : W \to \mathrm{U}(H_\rho)$，我们令 W 上的$e\rho \in C(W)$ 为函数

$$e_\rho(w) = \frac{\dim H_\rho}{\mathrm{volume}(W)} \overline{\mathrm{trace}(\rho(w))}. \tag{A.1}$$

(5) 设 $\pi: \mathrm{W} \to \mathrm{U}(\mathrm{H}_\pi)$ 是一个酉表示。对于每个不可约表示 ρ，算子 $\pi(\mathrm{e}_\rho) \in \mathrm{B}(\mathrm{H}_\pi)$ 是一个与每个 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$ 中的 $\rho(\mathrm{w})$ 交换的正交投影。该投影的像 $\mathrm{H}_{\pi,\rho} := \pi(\mathrm{e}_\rho)\mathrm{H}_\pi$ 是 H_π 中最大的子空间，它作为 W 的表示同构于 ρ 的多个副本的直和。这个 $\mathrm{H}_{\pi,\rho}$ 称为 H_π 的 ρ-同型分量子空间。我们称 ρ 出现在 π 中或包含于其中，并记作 $\rho \subseteq \pi$，如果 $\mathrm{H}_{\pi,\rho} \neq 0$。

(6) 如果 ρ 和 σ 是不等价的不可约表示，则 $H_{\pi,\rho} \perp H_{\pi,\sigma}$；并且 $H_\pi = \bigoplus_{\rho \in \widehat{\ } w} H_{\pi,\rho}$。（直和取遍 W 的不可约酉表示等价类的一组代表。）

(7) 固定一个表示 π 和一个不可约表示 ρ。令 $\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$表示满足$s : H_\rho \to H_\pi$ satisfying $s\rho(w) = \pi(w)s$ for all$w \in W$的线性映射空间。由于 $\dim H_\rho < \infty$，该映射空间在 Hilbert–Schmidt内积 $\langle r \mid s \rangle = \mathrm{trace}(r^* s)$下构成一个希尔伯特空间。映射

$$\mu_{\pi,\rho} : H_\rho \otimes \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W \to H_{\pi,\rho}, \qquad \zeta \otimes s \mapsto (\dim H_\rho)^{1/2} s(\zeta)$$

是一个酉同构，满足

$$\mu_{\pi,\rho} \circ (\rho(w) \otimes \mathrm{id}_{\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W}) = \pi(w) \circ \mu_{\pi,\rho}$$

对所有$w \in W$均成立。

(8) 令 $\rho : W \to \mathrm{U}(H_\rho)$ 为W的一个不可约表示。对于向量$\xi, \eta \in H\rho$，我们考虑矩阵系数函数

$$c_{\xi,\eta} : W \to \mathbb{C}, \qquad c_{\xi,\eta}(w) := \langle \rho(w)\xi \mid \eta \rangle.$$

$c\xi$、η是连续的，因而特别是平方可积的。*Schur* 正交关系表明

$$\langle c_{\xi,\eta} \mid c_{\xi',\eta'} \rangle_{L^2(W)} = (\dim H_\rho)^{-1} \overline{\langle \xi \mid \xi' \rangle_{H_\rho}} \langle \eta \mid \eta' \rangle_{H_\rho}.$$

B 习题解答

练习 1.4. 对每个 $f \in C_0(X)^W$，令 $\varphi(f): X/W \to \mathbb{C}$ 由 $f(Wx) := f(x)$ 定义。证明 $\varphi(f) \in C_0(X/W)$，并且 $\varphi: C_0(X) \to C_0(X/W)$ 是 C^*-代数的同态。如果 $\varphi(f) = 0$，则 $f = 0$，这是显然的。如果 $Wx \neq Wy$，则由乌雷松引理，我们可以找到 $f \in C_0(X)$，使得 $f(wx) = 1$ 对所有 $w \in W$ 成立，并且 $f(wy) = 0$ 对所有 $w \in W$ 成立。令 $h = \sum_{w \in W} \beta_w(f)$。这个函数是 W-不变的，并且有 $\varphi(h)(Wx) \neq 0$ 以及 $\varphi(h)(Wy) = 0$。因此斯通–魏尔斯特拉斯定理蕴含 φ 是满射。 □

练习 *1.5*。 通过常规计算可验证，每个 α_v 都是 C^*-代数 $A \rtimes U$ 的自同构；$\alpha_{v_1 v_2} = \alpha_{v_1}\alpha_{v_2}$；并且该线性映射

$$\varphi : (A \rtimes U) \rtimes V \to A \rtimes W, \qquad \varphi\big((au)v\big) := a(uv)$$

是 C^*-代数之间的同构。 □

习题 1.18。（1）设 $\pi(J) \neq 0$。集合 $K = \{\xi \in H \mid \pi(j)\xi = 0$ 对所有 $j \in J\}$ 是 H 的一个闭的、 A- 不变子空间。由于 π 不可约且 $\pi(J) \neq 0$，必有 $K = 0$。现在设 H' 是 H 的一个闭的、J-不变子空间。于是集合 JH' 是 H 的一个闭的 A-不变子空间，因此 $JH' = H$ 或 $JH' = 0$。若 $JH' = H$，则 $H' = H$；而若 $JH' = 0$，则 $H' \subseteq K = 0$，从而 $H' = 0$。因此 $\pi|_J$ 是不可约的。

(2) 定理 1.13 的第 (3) 部分蕴含，ρ 是不可约表示 π 在 $A \to B(H')$ 上对 J-不变子空间 $H \subseteq H'$ 的限制。由于 $\pi|_J$ 不可约，我们必有 $H = H'$，因此 $\rho = \pi|_J$。

(3) 设 $u: H_\rho \to H_\pi$ 是一个酉算子，且对所有 $j \in J$，都有 $u\rho(j) = \pi(j)u$。分解定理（定理 1.11）蕴含，每个 $\xi \in H_\rho$ 都可写成 $\rho(j)\eta$，其中某个 $j \in J$ 和 $\eta \in H_\rho$ 如此；对每个 $a \in A$，我们有

$$u\rho(a)\xi = u\rho(aj)\eta = \pi(aj)u\eta = \pi(a)\pi(j)u\eta = \pi(a)u\rho(j)\eta = \pi(a)u\xi.$$

因此，u 是作为 A 的表示的 π 与 ρ 之间的等价。另一个蕴含很容易证明。

(4) 第 (1)-(3) 部分蕴含，限制到 O_J 的给出一个双射的开子集是满足 $J' \subseteq J$ 的 $O_{J'}$。证明限制映射是一个同胚，只需证明 $O_{J'} \subseteq O_J$ 当且仅当 $J' \subseteq J$。由定义可立即得出，若 $J' \subseteq J$，则 $O_{J'} \subseteq O_J$。反过来，假设 $J' \not\subseteq J$。那么，非零 C^*-代数 $J'/(J' \cap J)$ 有一个不可约表示 π。由于 $J'/(J' \cap J)$ 是 A/J 中的一个理想，π 可扩张为一个不可约表示

属于 A/J，将其拉回到 A 后，我们得到一个不可约表示 $\pi \in \widehat{A}$，满足 $\pi|_J = 0$ 和 $\pi|_{J'} \neq 0$；因此 $\pi \in O_{J'} \setminus O_J$，从而 $O_{J'} \not\subseteq O_J$。

(5) 由同构定理立即得出。

(6) 第一部分表明，$\widehat{A/J}$ 的每个元素都可以表示为 A 的某个不可约表示 π，使得 $J \subseteq \ker \pi$。我们在上文看到，该条件等价于 $J \subseteq J'$。另一方面，$\widehat{A/J}$ 的开子集形如

$$O_K = \left\{ \tilde{\pi} \in \widehat{A/J} \;\middle|\; \tilde{\pi}|_K \neq 0 \right\}$$

对于理想 $K \subseteq A/J$。同构定理之一指出，映射 $J' \mapsto J'/J$ 是 $J' \subseteq A$ 中包含 J 的理想集合与 A/J 的理想集合之间的双射。因此，映射 $\pi \mapsto \tilde{\pi}$ 在 $\widehat{A} \setminus O_J$ 与 $\widehat{A/J}$ 的开子集集合之间诱导出一个双射。

(7) 若 $J = A$，则没有任何不可约表示湮灭 J，因为不可约表示按定义是非零的。若 $J \neq A$，则非零的 C^*-代数 A/J 有一个不可约表示（由定理 1.13），将其拉回到 A，我们便得到一个湮灭 J 的不可约表示。

(8) 设 K 表示给定的交集。显然 J 包含于 K。对于反向包含，设 π 是 K 的一个不可约（因而非零）表示。第 (2) 部分表明 π 可延拓为 A 的一个不可约表示，且该表示不能湮灭 J（否则由 K 的定义将得到 $K \subseteq \ker \pi$）。因此第 (7) 部分表明 $J = K$。

□

练习 *1.27.* 回忆一下，对每个理想 $J \subseteq C_0(X)$，我们都关联了一个开子集

$$O_J := \left\{ \mathrm{ev}_x \in \widehat{C_0(X)} \;\middle|\; \exists j \in J \text{ with } \mathrm{ev}_x(j) \neq 0 \right\}.$$

我们有

$$\mathrm{ev}^{-1}(O_J) = \{x \in X \mid \exists j \in J \text{ with } j(x) \neq 0\}.$$

这是 X 的一个开子集，因为每个 $j \in J$ 都是连续函数。因此映射 $\mathrm{ev} : X \to C_0(X)$ 是连续的。

还需证明 ev 是开映射。设 $U \subseteq X$ 是一个开集，并令 $J := \{ j \in C_0(X) \mid j|_{X \setminus U} = 0 \}$。$J$ 是 $C_0(X)$ 中的一个理想——它是限制同态 $C_0(X) \to C_0(X \setminus U)$ 的核——我们断言 $\mathrm{ev}(U) = O_J$。若 $x \in U$，则根据乌雷松引理，可以找到某个 $j \in J$，使得 $j(x) \neq 0$。因此 $\mathrm{ev}_x \in O_J$。反过来，若 $\mathrm{ev}_x \in O_J$，则存在某个 $j \in J$，使得 $j(x) \neq 0$；根据 J 的定义可知，必有 $x \in U$。

□

练习 *1.28.* 设 V 是 H 的一个非零 $\mathrm{K}(H)$-不变子空间，设 $\eta \in V$ 是一个单位向量，并对每个 $\xi \in H$，考虑紧算子 $|\xi\rangle\langle\eta|\colon \zeta \mapsto \langle\eta\,|\,\zeta\rangle\,\xi$。我们有 $\xi = |\xi\rangle\langle\eta|(\eta) \in \mathrm{K}(H)$ $V = V$，因此 $V = H$。 □

练习 1.31。对于 (1)：设 $\mathrm{A} = \bigoplus_{\mathrm{i}\in\mathrm{I}} \mathrm{A}_i$，并设 $\pi : \mathrm{A} \to \mathrm{B}(\mathrm{H})$ 是一个不可约表示。对每个 i，我们都有一个典范嵌入 $\mathrm{A}_i \hookrightarrow \mathrm{A}$，而集合 $\mathrm{H}_i := \pi(\mathrm{A}_i)\mathrm{H}$ 是 H 的 A-不变子空间，因此要么 $\mathrm{H}_i = 0$，要么 $\mathrm{H}_i = \mathrm{H}$。当 $\mathrm{i} \neq \mathrm{j}$ 时，我们有 $\mathrm{H}_i \perp \mathrm{H}_j$，所以至多有一个 H_i非零。由于 $\pi(\mathrm{A}) \neq 0$，恰有一个 i 满足 $\pi(\mathrm{A}_i) \neq 0$。于是 π可通过投影 $\mathrm{A} \to \mathrm{A}_i$分解。

对于 (2)：如果 $u\colon H \to H'$ 是 π 与另一个不可约表示 π'之间的等价，那么u限制在每个 i 上，都是一个酉同构 $H_i \to H'$，这意味着 π 和 π' 都通过同一个直和项 A_i分解，并且u 是由此得到的 A_i表示之间的等价。 □

练习 *1.32.* Schur正交性保证，对于每个$s \in \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$，都有$s(H_\rho) \subseteq H_{\pi,\rho}$，因此复合$t \circ s$（其中$t \in \mathrm{B}(H_{\pi,\rho})^W$）有定义。$W$-等变映射的复合仍是$W$-等变的，因此$ts \in \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$。我们有

$$\|ts\|_{\mathrm{HS}}^2 = \mathrm{trace}(s^*t^*ts) = \mathrm{trace}(t^*tss^*) \le \|t^*t\|\,\mathrm{trace}(s^*s) = \|t\|^2\|s\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

这表明映射 $\varphi_{\pi,\rho}(t)\colon s \mapsto ts$ 在 $\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$ 上有界。简单计算可得，$\varphi_{\pi,\rho}$ 是 C^*-代数的同态。

固定$t \in \mathrm{B}(H_{\pi,\rho})^W$。对于每个 $\zeta \in H_\rho$ 以及$s \in \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$，我们有

$$t\mu_{\pi,\rho}(\zeta \otimes s) = (\dim H_\rho)^{1/2} ts(\zeta) = \mu_{\pi,\rho}(\zeta \otimes \varphi_{\pi,\rho}(t)s).$$

因此，若 $\varphi_{\pi,\rho}(t) = 0$，则有$t\mu_{\pi,\rho} = 0$；又由于$\mu_{\pi,\rho}$ 是映到$H_{\pi,\rho}$ 上的酉同构，这意味着$t = 0$。因此，$\varphi_{\pi,\rho}$ 是单射。

接下来我们将证明，当 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}(\mathrm{H}_{\pi,\rho})^W$ 时，$\varphi_{\pi,\rho}(\mathrm{k})$ 是 $\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$ 上的紧算子。为此，我们先暂时不考虑群 W，而考虑由所有从 H_ρ 到 H 的线性映射构成的希尔伯特空间 $\mathrm{HS}(\rho,\pi)$，并赋予其 Hilbert–Schmidt内积。每个有界算子 $\mathrm{t} \in \mathrm{B}(\mathrm{H})$ 都通过复合定义了一个线性映射 $\psi(\mathrm{t}) \in \mathrm{B}(\mathrm{HS}(\rho,\pi))$，而映射 $\psi : \mathrm{B}(\mathrm{H}) \to \mathrm{B}(\mathrm{HS}(\rho,\pi))$ 是 C*-代数的同态。给定秩一算子 $\mathrm{k} = |\xi\rangle\langle\eta|$，其中$\xi,\eta \in \mathrm{H}$，映射 $\psi(\mathrm{k})$ 可分解为以下复合

$$\mathrm{HS}(\rho,\pi) \xrightarrow{s \mapsto \langle s^*\eta|} H_\rho^* \xrightarrow{\langle\zeta| \mapsto |\eta\rangle\langle\zeta|} \mathrm{HS}(\rho,\pi).$$

希尔伯特空间 H_ρ^* 是有限维的，因此 $\psi(k)$ 是有限秩的。由连续性可知，$\psi(\mathrm{K}(H)) \subseteq \mathrm{K}(\mathrm{HS}(\rho,\pi))$。特别地，对于每个 $k \in \mathrm{K}(H_{\pi,\rho})^W$

算子 $\psi(k)$ 是紧的，因此该算子在子空间 $\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W \subseteq \mathrm{HS}(\rho,\pi)$ 上的限制也是紧的。这个限制恰好是$\varphi_{\pi,\rho}(k)$。因此 $\varphi_{\pi,\rho}$ 将紧算子映射为紧算子。

最后我们证明，$\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$ 上的每个有界算子$\varphi_{\pi,\rho}(t)$都具有如下形式：对于某个$t \in \mathrm{B}(H_{\pi,\rho})^W$，并且当$s$是紧算子时，这个$t$也是紧的。固定$s \in \mathrm{B}(\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W)$，并考虑$H_{\pi,\rho}$上的算子$t$，其定义为复合

$$H_{\pi,\rho} \xrightarrow{\mu^*_{\pi,\rho}} H_\rho \otimes \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W \xrightarrow{\mathrm{id}_{H_\rho}\otimes s} H_\rho \otimes \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W \xrightarrow{\mu_{\rho,\pi}} H_{\pi,\rho}.$$

交织关系 $\mu_{\pi,\rho}\circ(\rho(w)\otimes \mathrm{id}_{\mathrm{HS}(\rho,\pi)^W}) = \pi(w)\circ\mu_{\pi,\rho}$ 确保$t \in \mathrm{B}(H_{\pi,\rho})^W$。由于$H_\rho$是有限维的，如果$s$是紧算子，那么算子$\mathrm{id}^{H_\rho} \otimes s$是紧的，因此$t$也是紧的。对于每个$r \in \mathrm{HS}(\rho,\pi)^W$以及 $\zeta \in H_\rho$，我们有

$$\begin{aligned}\mu^*_{\pi,\rho}\varphi_{\pi,\rho}(t)(r)\zeta &= \mu^*_{\pi,\rho} t r(\zeta) = (\mathrm{id}_{H_\rho}\otimes s)\mu^*_{\pi,\rho}(r(\zeta))\\ &= (\dim H_\rho)^{-1/2}\zeta\otimes s(r) = \mu^*_{\pi,\rho}s(r)(\zeta).\end{aligned}$$

在左侧乘以 $\mu_{\pi,\rho}$ 得到 $\varphi_{\pi,\rho}(t)(r)\zeta = s(r)(\zeta)$，由于这对所有$r$ 以及 ζ 都成立，我们得出 $\varphi_{\pi,\rho}(t) = s$，如所要求。 □

习题 1.36。首先假设 W 作用于 (X, H)。投影 $X \times H \to X$ 为 W-等变的假设意味着，W 在 $X \times H$ 上的作用由 $w(x,\xi) = (wx, I_{w,x}\xi)$ 给出。比较等式两边的 H 坐标 $(w_1w_2)(x,\xi) = w_1(w_2(x,\xi))$，可得恒等式 (i)；而 (ii) 中的映射 $x \mapsto I_{w,x}\xi$ 是以下连续映射的复合：

$$X \xrightarrow{x\mapsto(x,\xi)} X\times H \xrightarrow{\text{act by } w} X\times H \xrightarrow{\text{project}} H.$$

现在，对于第 (2) 部分，假设我们有一族满足条件 (i) 和 (ii) 的酉算子 $I_{w,x}$。与第 (1) 部分证明中的同一观察表明，公式 $w(x,\xi) := (wx, I_{w,x}\xi)$ 定义了 W 在 $X \times H$ 上的作用（仅在集合层面），且投影映射 $X \times H \to X$ 是 W-等变的。为了说明该作用是连续的，固定 $w \in W$，并设 (x_i,ξ_i) 是 $X \times H$ 中收敛到 (x,ξ) 的一个网。我们需要证明网 $w(x_i,\xi_i) = (wx_i, I_{w,x_i}\xi_i)$ 收敛到 $w(x,\xi) = (wx, I_{w,x}\xi)$。我们假设 W 在 X 上的作用是连续的，因此 wx_i 显然收敛到 wx。在 H 坐标中，我们有

$$\|I_{w,x_i}\xi_i - I_{w,x}\xi\| \le \|I_{w,x_i}\xi_i - I_{w,x_i}\xi\| + \|I_{w,x_i}\xi - I_{w,x}\xi\|,$$

第一个直和项收敛到 0，因为每个 I_{w,x_i} 都是酉算子，且 ξ_i收敛到 ξ；第二个直和项则由条件 (ii) 收敛到 0。 □

习题 *1.37.* 固定 $k \in C_0(X、\mathrm{K}(H))$、$x \in X$以及 $w \in W$。假设 x_i是 X中的一个网，收敛到 x。为节省篇幅，记 $y := w^{-1}x$和 $y_i := w^{-1}x_i$。

固定 $\varepsilon > 0$。由于 k 连续，我们可以找到 I_1，使得 $\mathrm{i} > \mathrm{I}_1$ 蕴含$\|\mathrm{k}(\mathrm{y}_i) - \mathrm{k}(\mathrm{y})\| < \varepsilon$。由于 k(y)是一个紧算子，我们可以找到一个有限秩算子 $\mathrm{f} = \sum^{n} \mathrm{m}=1 |\eta_m\rangle \langle\xi_m|$，满足 $\|\mathrm{k}(\mathrm{y}) - \mathrm{f}\| < \varepsilon$。将 f 延拓为 X 上的 C_0 函数，使得对所有 $\mathrm{i} > \mathrm{I}_1$，都有 $\mathrm{f}(\mathrm{y}_i) = \mathrm{f}(\mathrm{y}) = \mathrm{f}$。注意，此时对 $\mathrm{i} > \mathrm{I}_1$，我们有

$$\|k(y_i) - f\| \le \|k(y_i) - k(y)\| + \|k(y) - f\| < 2\varepsilon.$$

由于酉算子族 $I_{w,x}$是强算子连续的，我们可以找到 $I_2 > I_1$，使得 $i > I_2$ 蕴含

$$\|(I_{w,y_i} - I_{w,y})\xi_m\| < \frac{\varepsilon}{n\|\eta_m\|} \quad \text{and} \quad \|(I_{w,y_i} - I_{w,y})\eta_m\| < \frac{\varepsilon}{n\|\xi_m\|}$$

对所有 m。我们有

$$\begin{aligned}\|\alpha_w(k)(x_i) - \alpha_w(k)(x)\| \\ \le \|\alpha_w(k-f)(x_i)\| + \|\alpha_w(f)(x_i) - \alpha_w(f)(x)\| + \|\alpha_w(f-k)(x)\|.\end{aligned}$$

依次对右侧的三个直和项进行估计，当 $i > I_2$，时，我们得到 $\|\alpha_w(k)(x_i) - \alpha_w(k)(x)\| < 5\varepsilon$。

这表明 $\alpha_w(\mathrm{k}): \mathrm{X} \to \mathrm{K}(\mathrm{H})$ 是一个范数连续函数。由于算子 $\mathrm{I}_{w,w^{-1}\mathrm{x}}$ 和 $\mathrm{I}_{w^{-1}}$, x 都是酉算子，因此当 $\mathrm{x} \to \infty$ 时，我们有 $\|\alpha_w(\mathrm{k})(\mathrm{x})\| = \|\mathrm{k}(\mathrm{w}^{-1}\mathrm{x})\| \to 0$, 所以 $\alpha_w(\mathrm{k}) \in \mathrm{C}_0(\mathrm{X}, \mathrm{K}(\mathrm{H}))$。每个 α_w 都是 C^*-代数自同构，且 $\alpha_{w_1\mathrm{w}_2} = \alpha_{w_1} \circ \alpha_{w_2}$，这一事实可由习题 1.36 中的恒等式 (i) 轻易得出。 □

习题 *1.39*。 容易验证，映射 $fw \mapsto \varphi(fw)$ 是从 $C_0(X) \rtimes W$到 $C_0(X, \mathrm{K}(\ell^2 W))^W$ 的 $*$-同态。定义映射 $\psi: C_0(X, \mathrm{K}(\ell^2 W))^W \to C_0(X) \rtimes W$如下:

$$\psi(f) = \sum_{w \in W} \langle \delta_1 \mid f(\,)\delta_w \rangle w,$$

其中 $\langle \delta_1 \mid f(\,)\delta_w \rangle \in C_0(X)$ 表示函数 $x \mapsto \langle \delta_1 \mid f(x)\delta_w \rangle$。验证$\psi$ 是 φ的逆映射。 □

练习 *1.42.* 要验证我们在 $(\mathbb{R}, \mathbb{C}^2)$ 上有一个作用，只需验证对于每个 $x \in \mathbb{R}$，$I_{w,-xI_{w,x}} = I_{1,x}$，这显然成立。

对于每个$x \neq 0$，我们有$Wx = \{x, -x\}$，以及$W_x = \{1\}$，后者只有一个不可约表示（平凡的一维表示）。因此，$C_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W$对每个轨道$\{x, -x\}$ 都有一个不可约表示，其中$x \neq 0$。对于$x = 0$，我们有$Wx = \{x\}$，且$W_x = W$有两个不可约表示:

平凡表示（$w \mapsto 1$）和符号表示（$w \mapsto -1$）。这两个表示都出现在表示I_0：$w \mapsto \left[\begin{smallmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{smallmatrix}\right]$中，因此轨道$\{0\}$给出了$C_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W$的两个不等价不可约表示。因此我们有

$$\left(C_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W\right)\widehat{} = \{\pi_{x,\mathrm{triv}} \mid x > 0\} \sqcup \{\pi_{0,\mathrm{triv}}, \pi_{0,\mathrm{sign}}\}.$$

具体来说，对于每个 $k \in C_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W$ 以及每个 $x \geq 0$，我们有 $\pi_{x,\mathrm{triv}}(k) = k(x) \in \mathrm{B}(\mathbb{C}^2)$；而 $\pi_{0,\mathrm{triv}}(k) = k(0)_{1,1}$（对角矩阵$k(0)$相对于标准基的左上角元素）以及 $\pi_{0,\mathrm{sign}}(k) = k(x)_{2,2}$（右下角元素）。

要证明对偶是非豪斯多夫的，我们将证明点 $\pi_{0,\mathrm{triv}}$和 $\pi_{0,\mathrm{sign}}$ 不能被开集分离。回忆一下，$\widehat{\left(\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W\right)}$中的开集 O_J 与 $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W$中的理想 J 相对应：当且仅当 $\pi_{x,\rho}|_J \neq 0$时，我们有 $\pi_{x,\rho} \in \mathrm{O}_J$。设 J 是 $\mathrm{C}_0(\mathbb{R}, \mathrm{K}(\mathbb{C}^2))^W$中的一个理想，使得 $\pi_{0,\mathrm{triv}} \in \mathrm{O}_J$。那么 J 必须包含一个函数 j，使得 $\mathrm{j}(0)_{1,1} \neq 0$，这保证了对于某个非空区间 $(0, \varepsilon)$中的所有 x，都有 $\mathrm{j}(\mathrm{x})_{1,1} \neq 0$。因此，对于所有 $\mathrm{x} \in (-\varepsilon, \varepsilon)$，都有 $\pi_{x,\mathrm{triv}}(\mathrm{j}) = \mathrm{j}(\mathrm{x}) \neq 0$，所以开集 O_J对所有 $\mathrm{x} \in (0, \varepsilon)$都包含 $\pi_{x,\mathrm{triv}}$。同样的论证表明，每个包含 $\pi_{0,\mathrm{sign}}$ 的开集都包含某个非空区间 $\{\pi_{x,\mathrm{triv}} \mid \mathrm{x} \in (0, \delta)\}$，因此点 $\pi_{0,\mathrm{triv}}$ 和 $\pi_{0,\mathrm{sign}}$ 没有不相交的开邻域。

□

练习 1.46。一个直接的估计表明，对于每个 $\mathrm{h} \in \mathrm{C}_c(\mathrm{G})$，都有 $\|\mathrm{h}\|_{C_r^*(\mathrm{G})} = \|\lambda(\mathrm{h})\|_{\mathrm{B}(L^2(\mathrm{G}))} \leq \|\mathrm{h}\|_{L^1(\mathrm{G})}$，因此只需证明在 L^1 范数下的收敛。由于 f 有紧支撑，且 K 是紧的，因此存在 G 的一个紧子集 C，使得对每个 F，都有 $\mathrm{support}(\mathrm{f} - \mathrm{e}_F * \mathrm{f}) \subseteq \mathrm{C}$；于是由柯西–施瓦茨不等式可得 $\|\mathrm{f} - \mathrm{e}_F * \mathrm{f}\|_{L^1(\mathrm{G})} \leq \mathrm{volume}(\mathrm{C})^{1/2} \|\mathrm{f} - \mathrm{e}_F * \mathrm{f}\|_{L^2(\mathrm{G})}$。因此只需证明在 L^2范数下的收敛，而该收敛性可由 $\mathrm{L}^2(\mathrm{G}) = \bigoplus_{\rho \in \widehat{\mathrm{K}}} \mathrm{L}^2(\mathrm{G})_\rho$ 的同型分解得到。

□

练习 *1.49*。 定义 1.47 中的条件 (1) 表明，将表示从 A限制到B 会得到一个定义良好的映射 $r : A \to B$。条件 (2) 确保该映射是单射，而定理 1.13 的第 (3) 部分则表明它是满射。

为证明r 是一个同胚，设J 是A中的一个理想。我们声称，对每个 $\pi \in \widehat{A}$，$\pi|_J = 0$ 当且仅当 $\pi|_{J \cap B} = 0$。一个蕴含显然成立；对于另一个，注意若 π 湮灭$J \cap B$，则 π 诱导出$B/(J \cap B)$的一个不可约表示。根据同构定理之一，我们有$B/(J \cap B) \subseteq A/J$，因此定理 1.13 蕴含存在$A$ 的一个不可约表示 ρ，它湮灭 J，且其对B 的限制与 π等价。于是，定义 1.47 中的性质 (2) 确保 ρ 作为A的表示与 π等价，因此$J \subseteq \ker \rho = \ker \pi$。

该断言表明 $r(O_J) = O_{B\cap J}$，其中我们回顾一下，O_J 表示 $\hat{A}$中的开子集$\{\pi \in \hat{A} \mid \pi|_J \neq 0\}$。B的每个理想都具有形式 $B \cap J$，其中 J 是 A 的某个理想：给定 B 的一个理想 K，找出 B 的一族不可约表示 $(\pi_i)_{i\in I}$，使得$\bigcap_{i\in I}(B \cap \ker \pi_i) = K$，然后取 $J = \bigcap_{i\in I} \ker \pi_i$。因此，映射 r 在 A 的开子集集合与B的开子集集合之间诱导出一个双射。 □

练习 1.51。由线性性，只需在强算子拓扑下考虑 $k_i \to 0$，且 t 为正。将 $t = \sum_j c_j |\delta_j\rangle\langle\delta_j|$ 写成某个标准正交基 $\{\delta_j\}$ 和标量 $c_j \geq 0$ 的形式。给定 $\varepsilon > 0$，找出 n，使得 $\sum_{j\geq n}^{\infty} c_j < \varepsilon / \sup \|k_i\|$。（注意，根据一致有界原理，$\|k_i\|$s 有界。）然后找出 I，使得 $i > I$ 蕴含 $\|k_i\delta_j\| < \varepsilon/(n \sup_l c_l)$ 对所有 $j \leq n$ 都成立。对于 $i > I$,

$$\operatorname{trace}(tk_i) = \sum_{j=1}^{\infty}\langle\delta_j \mid tk_i\delta_j\rangle = \sum_{j=1}^{\infty} c_j\langle\delta_j \mid k_i\delta_j\rangle = \sum_{j\leq n} c_j\langle\delta_j \mid k_i\delta_j\rangle + \sum_{j>n} c_j\langle\delta_j \mid k_i\delta_j\rangle.$$

右侧第一个和的绝对值不超过 $\left(\sup_{l\leq n} c_l\right)\sum_{j=1}^{n} \|k_i\delta_j\| < \varepsilon$，第二个和的绝对值不超过 $\left(\sum_{j>n} c_j\right)\sup_i \|k_i\| < \varepsilon$。 □

习题 *1.52*。 设B 是A的一个分离子代数。我们断言，$B/(B \cap J${v15>在A/J中是分离的，并且$B \cap J$ 在J中是分离的。如果这一断言成立，那么斯通-魏尔斯特拉斯性质保证$B \cap J = J$ 以及$B/J = A/J$，由此很容易得出$A = B$。

为证明这一断言，我们先考虑 $B/(B \cap J)$和 A/J。设 $\pi : A/J \to B(H)$是一个不可约表示。于是，映射 $a \mapsto \pi(a + J)$ 是 A 的一个不可约表示。由于 B 在 A 中是分离的，映射 $b \mapsto \pi(b + J)$ 是 B 的一个不可约表示，这意味着 $b + (B \cap J) \mapsto \pi(b + J)$ 是 $B/(B \cap J)$的一个不可约表示。因此，满足了“分离”的定义中的性质（1）。对于第二个性质，注意到 π 和 ρ 作为 $B/(B \cap J)$ 的表示等价，当且仅当它们到 B 的拉回等价；又由于 B 在 A 中是分离的，这意味着 π 和 ρ 作为 A 的表示等价，因此作为 A/J 的表示也等价。

接下来要证明 $B \cap J$ 在 J中是分离的。回忆一下（定理 1.17），J 的每个不可约表示，都是某个不湮灭J的A 的不可约表示限制到J 所得的限制表示。设 π 是这样一个表示。限制表示 $\pi|_{B\cap J}$ 是不可约表示 $\pi|_B$限制到$B \cap J$ 所得的限制表示，因此只要 $\pi|_{B\cap J}$ 非零，它就是不可约的。若 π 湮灭 $B \cap J$，那么 π 就定义了商 $B/(B \cap J)$的一个不可约表示。我们已经证明

上文已证明$B/(B\cap J)=A/J$，所以 π必定湮灭J。我们假设 π不湮灭J，因此 π 不可能湮灭 $B\cap J$。由此，$B\cap J$ 具有“分离”的定义中的性质 (1)。为证明它也具有性质 (2)，设 π、ρ 是A的不可约表示，它们限制到J后均非零，且限制到$B\cap J$后等价。于是 $\pi|_B$ 等价于 $\rho|_B$；又由于B 在A中是分离的，我们得出 π 与 ρ 作为A的表示是等价的，因而作为J的表示也等价。

“推得”部分通过对n进行归纳法即可得出：若$n=1$ 则$A=A/0$ 具有斯通-魏尔斯特拉斯性质，无需证明。对于归纳步骤，我们有一个短正合列 $0\to J_1\to A\to A/J_1\to 0$，其中$A/J_1$ 具有 SWP（根据假设），而J_1 具有 SWP（根据归纳假设），因此由上文已证结果可知A也具有 SWP。 □

习题 *1.53*。 设$J_0=A$。令 $\varphi_0:J_0\to M_2$ 为映射$f\mapsto f(0)$，并令$J_1:=\ker\varphi_0$。φ_0 的像是 $\mathbb{C}\mathrm{id}_2$，单位矩阵的标量倍数，因为这是与每个$w\in W$都交换的唯一矩阵。因此$J_0/J_1\cong\mathbb{C}$，这显然具有 SWP。

接下来考虑集合

$$X=\{(x,0)\mid x>0\}\quad\text{and}\quad Z=\{(x,x)\mid x>0\}.$$

对于每个 $x\in X$，我们有 $W_x=\{1,s\}$；而对于每个 $z\in Z$，我们有 $W_z=\{1,t\}$。令 $\varphi_1:J_1\to C_0(X,M_2)\oplus C_0(Z,M_2)$ 为映射 $\varphi_1(f)=(f|_X,f|_Z)$，并令 $J_2:=\ker\varphi_1$。由于对每个 $x\in X$ 都有 $W_x=\langle s\rangle$，且对每个 $z\in Z$ 都有 $W_z=\langle t\rangle$，因此我们有

$$\varphi_1(J_1)=C_0(X,s')\oplus C_0(Z,t')$$

其中 $s'=\{k\in M_2\mid ks=sk\}=\left\{\begin{bmatrix}a&0\\0&b\end{bmatrix}\right\}$，而 $t'=\{k\in M_2\mid kt=tk\}=\left\{\begin{bmatrix}a&b\\b&a\end{bmatrix}\right\}$。$C^*$-代数 s' 和 t' 都同构于 $\mathbb{C}\oplus\mathbb{C}$，因此 $J_1/J_2\cong C_0(X,s')\oplus C_0(Z,t')$ 是 $C_0(\mathbb{R})$的若干份直和，因而具有 SWP。

现在考虑集合

$$P=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x>0,\ 0<y<x\}.$$

对于每个$x\in P$，我们都有 $W_x=\{1\}$。因此，函数限制给出了一个 C^*-代数同构 $\varphi_2:J_2\to C_0(P,M_2)$。我们知道 $C_0(P,M_2)$ 具有斯通-魏尔斯特拉斯性质，因此取 $J_3=0$，合成列 $A=J_0\supset J_1\supset J_2\supset 0$ 具有所需的性质。习题 1.52 现在推出A具有 SWP。 □

习题 *3.7*。 第 (1) 部分由内积的性质可轻易得出。对于 (2)：令 $J\subseteq C_0(X)$ 为由 $\{\langle\xi\mid\eta\rangle\mid\xi,\eta\in C_0(X,H)\}$张成的理想。对于每个$x\in X$

我们可以找到一个在x处不为零的函数$j \in J$：令$\xi \in C_0(X, H)$为一个在x处不为零的函数，然后取$j = \langle \xi | \xi \rangle$。现在，定理 1.17 的第 (7) 部分保证$J = C_0(X)$。□

习题 *3.8*。对于第 (1) 部分：定义 3.1 的条件 (1)–(3) 很容易验证。要验证条件 (4) 和 (5)，注意定义 1.12 的 (a) 部分中以表示刻画正性的结果表明，若 a 和 b 是C^*-代数中的正元素，则$a + b$ 是正的，并且$\|a + b\| \geq \max\{\|a\|, \|b\|\}$。

对于第 (2) 部分：为V 选取一组标准正交基，即可将$V \otimes E$ 识别为 $\dim V$ 个E的直和（按照第 (1) 部分的意义）。□

习题 *3.10*。将包含映射记为t，并假设该映射有一个伴随$t^*: C([0,1]) \to C_0((0,1])$。伴随关系意味着$t^*$将常值函数 $1 \in C([0,1])$ 映射为C^*-代数$C_0((0,1])$的乘法单位元；但这个代数没有乘法单位元。□

练习 *3.12*. 每个$k \in C_0(X, \mathrm{K}(H))$都定义了$C_0(X, H)$上的一个线性算子：该算子通过逐点乘法作用，且这些算子都可伴随（其伴随由逐点取伴随给出）。这样，我们可以将$C_0(X, \mathrm{K}(H))$视为C^*-代数 $\mathrm{L}_{C_0(X)}(C_0(X, H))$（可伴算子代数）的一个子代数。

对于所有 $\xi, \eta \in \mathrm{C_0(X, H)}$，算子 $|\eta\rangle\langle\xi| \in \mathrm{K}_{C_0(X)}(\mathrm{C_0(X, H)})$都是由函数 $(x \mapsto |\eta(x)\rangle\langle\xi(x)|) \in \mathrm{C_0(X, K(H))}$给出的逐点乘法，因此 $\mathrm{K}_{C_0(X)}(\mathrm{C_0(X, H)}) \subseteq$包含于 $\mathrm{C_0(X, K(H))}$。为证明二者相等，注意到 $\mathrm{K}_{C_0(X)}(\mathrm{C_0(X, H)})$是 $\mathrm{C_0(X, K(H))}$中的一个理想，因此只需证明（由定理 1.17(7)）$\mathrm{C_0(X, K(H))}$的每个不可约表示在这个理想上都非零。这里所说的不可约表示就是点求值。对于每个 $x \in X$，我们取一个函数 $\xi \in \mathrm{C_0(X, H)}$，满足 $\xi(x) \neq 0$，从而得到算子 $|\xi\rangle\langle\xi| \in \mathrm{K}_{C_0(X)}(\mathrm{C_0(X, H)})$，它在 x 处非零。□

练习 3.13。（1）：根据紧算子的定义，我们有 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E, B}) = \mathrm{span}\{|b\rangle\langle\xi| \mid b \in B, \xi \in E\}$。一方面，我们有$|b\rangle\langle\xi| = \langle \xi b^* |$；另一方面，我们知道（根据引理 3.6），每个$\xi \in E$都可以写成 ηb，其中 $\eta \in E$且$b \in B$，从而得到$\langle\xi| = |b^*\rangle\langle\eta|$。最后，检查$\{\langle\xi| \mid \xi \in E\}$已经是 $\mathrm{L}_B(\mathrm{E, B})$中的一个关于算子范数闭的线性子空间。

对于 (2)：首先验证 $b \mapsto m_b$ 是 C^*-代数 $B \to \mathrm{L}_B(B)$之间的同态；然后利用第 (1) 部分，并令 $E = B$，从而得出该同态是满射 $B \to \mathrm{K}_B(B)$。最后，注意到 $\|m_b(b^*)\| = \|b\|^2$，即可看出该同态是单射。

对于 (3)：容易验证 〈〈 | 〉〉 满足定义 3.1 中的性质 (1)–(3)。为验证性质 (4) 和 (5)，我们先注意到，对每个 $k \in \mathrm{K}_B(E,B) \subset \mathrm{K}_B(E \oplus B)$，算子 $\langle k\,|k\rangle = k^*k \in \mathrm{K}_B(E)$ 显然是 $\mathrm{K}_B(E \oplus B)$ 的一个正元素；而用表示刻画正性的性质（来自定义 1.12）保证：若元素 a 属于 C^*-代数 A，且它在 A中为正并属于子代数 B，那么 a 作为 B的元素也为正。此外，我们有

$$\|\langle k\,|\,k\rangle\|_{\mathrm{K}_B(E)} = \|\langle k\,|\,k\rangle\|_{\mathrm{K}_B(E\oplus B)} = \|k^*k\|_{\mathrm{K}_B(E\oplus B)} = \|k\|^2_{\mathrm{K}_B(E\oplus B)} = \|k\|^2_{\mathrm{K}_B(E,B)}.$$

由于我们知道 $\mathrm{K}_B(E,B)$ 在算子范数下是一个巴拿赫空间，因此这就完成了证明：〈〈 | 〉〉 </style>使 $KE,B)$ 成为一个希尔伯特 $\mathrm{K}_B(E)$-模。该模是满的，因为对于所有 $\xi, \eta \in E$，都有 〈〈 〈η|| 〈ξ|〉 〉 $= |\eta\rangle$ 〈ξ|，而 $\mathrm{K}_B(E)$（按定义）由这些 $|\eta\rangle$ 〈ξ| 稠密张成。至此，(3) 的证明完成。

对于 (4)：给定 $\xi, \eta \in$ E，算子 $\big|\langle\xi|\big\rangle\big\langle\langle\eta|\big| \in \mathrm{K}_{\mathrm{K}_B(\mathrm{E})}(\mathrm{K}_B(\mathrm{E}, \mathrm{B}))$ 将紧算子 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}_B(\mathrm{E}, \mathrm{B})$ 映射为算子 〈ξ| 〈〈 〈η|| k〉〉 $= \langle\xi| \circ |\eta\rangle \circ \mathrm{k} = \mathrm{m}_{\langle\xi\,|\,\eta\rangle} \circ \mathrm{k}$。此计算一方面表明，$\mathrm{K}_B(\mathrm{E})$ 上的每个紧算子（作用于 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E}, \mathrm{B})$）都具有 m_b 的形式。另一方面，由于 E 是满的 B-模，此计算还表明每个 m_b 都是 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E}, \mathrm{B})$ 上的紧算子。因此，映射 $\mathrm{b} \mapsto \mathrm{m}_b$。是从 B 到 $\mathrm{K}_{\mathrm{K}_B(\mathrm{E})}(\mathrm{K}_B(\mathrm{E}, \mathrm{B}))$ 的满射。容易验证此映射是 C^*-代数的同态。为了证明此映射是同构，假设对所有 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}_B(\mathrm{E}, \mathrm{B})$，都有 $\mathrm{m}_b \circ \mathrm{k} = 0$。那么对所有 $\xi, \eta \in$E，都有 $\mathrm{b}\langle\xi\,|\,\eta\rangle = \mathrm{m}_b \circ \langle\xi|(\eta) = 0$。由于 E 是满 B-模，元素 $\langle\xi\,|\,\eta\rangle$ 张成 B 的一个稠密子空间，因此对每个 $\mathrm{a} \in$B，都有 $\mathrm{ba} = 0$。于是$\|\mathrm{b}\|^2 = \|\mathrm{bb}^*\| = 0$，所以 $\mathrm{b} = 0$。

对于第 (5) 部分：如同第 (4) 部分，给定的内积使 $\mathrm{K}_B(\mathrm{B}, \mathrm{E})$ 成为 $\mathrm{K}_B(\mathrm{B})$ 上的右希尔伯特模，这一事实可由将 $\mathrm{K}_B(\mathrm{B}, \mathrm{E})$ 嵌入 C^*-代数 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E} \oplus \mathrm{B})$得出。同构 $\mathrm{K}_B(\mathrm{B}) \cong$ B来自第 (2) 部分。由于每个 $\xi \in$ E都可写成 $\eta\mathrm{b}$，其中 $\eta \in$ E且 $\mathrm{b} \in$ B，因此算子 $|\xi\rangle = |\eta\rangle\langle\mathrm{b}^*|$ 是 B-紧的。同一等式还表明，$\mathrm{K}_B(\mathrm{B}, \mathrm{E})$ 由 $|\xi\rangle$ s稠密张成。直接计算可验证，映射 $\xi \mapsto |\xi\rangle$ 是保持内积的（因此尤其是等距的）希尔伯特 B-模之间的映射；由于这个等距映射的像在 $\mathrm{K}_B(\mathrm{B}, \mathrm{E})$ 中稠密，该映射是满射。

□

练习 *3.14.* 计算！例如，要证明t_{bw} 是可伴随的，我们设

$t^{*}{}_{bw} = t^{(bw)^{*}}$，计算得

$$\begin{aligned}
&\langle \delta_{v_1} \otimes a_1 \,|\, t_{bw}(\delta_{v_2} \otimes a_2)\rangle = \langle \delta_{v_1} \otimes a_1 \,|\, \delta_{wv_2} \otimes \beta_{v_2^{-1}w^{-1}}(b)a_2\rangle \\
&= \langle \delta_{v_1} \,|\, \delta_{wv_2}\rangle a_1^{*}\beta_{v_2^{-1}w^{-1}}(b)a_2 = \langle \delta_{w^{-1}v_1} \,|\, \delta_{v_2}\rangle \left(\beta_{v_1^{-1}}(b^{*})a_1\right)^{*} a_2 \\
&= \langle \delta_{w^{-1}v_1} \otimes \beta_{v_1^{-1}w}(\beta_{w^{-1}}(b^{*}))a_1 \,|\, \delta_{v_2} \otimes a_2\rangle = \langle t_{(bw)^{*}}(\delta_{v_1} \otimes a_1) \,|\, \delta_{v_2} \otimes a_2\rangle. \quad \square
\end{aligned}$$

练习 *3.19*。 设E 是从A 到B的 Morita 等价。利用练习 3.13 的第 (3) 部分，以及给定 Morita 等价数据中的同构 $A \cong \mathrm{K}_B(E)$ ，我们可以将 $\mathrm{K}_B(E,B)$ 赋予一个满右希尔伯特A模。接着，练习 3.13 的第 (4) 部分给出一个同构 $B \cong \mathrm{K}_A(\mathrm{K}_B($ $E,B))$，因此 $\mathrm{K}_B(E,B)$ 是从B 到A的 Morita 等价。

□

练习 *3.20*。 对每个i ，设E_i 是从A到B的 Morita 等价，且带有同构 $\varphi_i : A_i \to \mathrm{K}_{B_i}(E_i)$。构造$c_0$-直和

$$E = \bigoplus_i E_i := \{(\xi_i)_{i\in I} \mid \|\xi_i\| \to 0 \text{ as } i \to \infty\},$$

并验证定义 $\langle (\xi_i)_i \,|\, (\eta_i)_i\rangle = (\langle \xi_i \,|\, \eta_i\rangle)_i$ 使E 成为$B = \bigoplus_i B_i$上的希尔伯特模；对于该模，映射 $\bigoplus_i \varphi_i : \bigoplus_i A_i \to \bigoplus_i \mathrm{K}_{B_i}(E_i) = \mathrm{K}_B(E)$是一个同构。

□

练习 3.22。首先利用定义 3.21 中的等式证明，对于所有 ξ、η、$\zeta \in \mathrm{E}$ 以及 $\mathrm{w} \in \mathrm{W}$，都有 $\gamma_w|\xi\rangle\langle\eta|\gamma^{-1}\mathrm{w}\ \zeta = |\gamma_w\xi\rangle\langle\gamma_w\eta|\zeta$。特别地，$\gamma_w|\xi\rangle\langle\eta|\gamma^{-1}\ \mathrm{w}$ 属于 $\mathrm{K}_B(\mathrm{E})$，因此由线性性和连续性可得，对于所有 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}_B(\mathrm{E})$，都有$\alpha_w(\mathrm{k}) \in \mathrm{K}_B(\mathrm{E})$ 。容易看出，每个 α_w 都是代数自同构，而等式 $\alpha_w(|\xi\rangle\langle\eta|) = |\gamma_w\xi\rangle\langle\gamma_w\eta|$ 意味着，对于所有 $\mathrm{k} \in \mathrm{K}_B(\mathrm{E})$，也有 $\alpha_w(\mathrm{k}^{*}) = \alpha_w(\mathrm{k})^{*}$。由假设 $\gamma_{w_1}\gamma_{w_2} = \gamma_{w_1\mathrm{w}_2}$，可得 $\alpha_{w_1}\alpha_{w_2} = \alpha_{w_1\mathrm{w}_2}$。

□

习题 3.32. 对于每个 $\mathrm{x} \in \mathrm{X}$，我们按照定义 3.31，通过将注意力限制在轨道 $\mathrm{W}\,\mathrm{x}$ 中 y 所对应的算子 $\mathrm{I}_{w,y}$ 上，定义 $\mathrm{C}(\mathrm{W}\,\mathrm{x}, \mathrm{W}, \mathrm{I}) \subseteq \mathrm{C}(\mathrm{W}\,\mathrm{x}) \rtimes \mathrm{W}$。将函数从 X 限制到 $\mathrm{W}\,\mathrm{x}$，得到一个 C^{*}代数$\pi_{W\mathrm{x}}$ 的同态：$\mathrm{C}_0(\mathrm{X}) \rtimes \mathrm{W} \to \mathrm{C}(\mathrm{W}\,\mathrm{x}) \rtimes \mathrm{W}$。由于 $\mathrm{C}(\mathrm{X}, \mathrm{W}, \mathrm{I})$ 是由逐点条件定义的，我们有

$$C(X,W,I) = \bigcap_{x\in X} \pi_x^{-1}(C(Wx,W,I)).$$

理想的原像和交集仍是理想，因此只需证明$C(Wx、W、I)$是$C(Wx) \rtimes W$中的一个理想。由于$C(Wx) \rtimes W$是有限维的，我们不必考虑验证其在范数下的闭性；常规的代数运算可以确认，$C(Wx、W、I)$对每个$fw \in C(Wx) \rtimes W$的左右乘法都封闭。

□

参考文献

[AA82] C. A. Akemann 和 J. Anderson。《C*-代数的 Stone-Weierstrass 问题》。载于《不变子空间及其他主题》（罗马尼亚蒂米什瓦拉，/赫库兰，1981），《算子理论进展与应用》第6卷，第15–32页。Birkhäuser，巴塞尔，1982。[AA22] A. Afgoustidis 和 A.-M. Aubert。《经典 p 进群的 C*-块与交叉积》。《国际数学研究通讯》，(22):17849–17908，2022。[Afg19] A. Afgoustidis。《实约化群与 Cartan运动群之间的类比：Connes-Kasparov 同构的证明》。《泛函分析杂志》，277(7):2237–2258，2019。[Art75] J. Arthur。《关于约化李群 Schwartz空间的一个定理》。《美国国家科学院院刊》，72(12):4718–4719，1975。[BCH94] P. Baum、A. Connes 和 N. Higson。《适当作用的分类空间与群 C*-代数的 K-理论》。载于《C*-代数：1943–1993》（美国德克萨斯州圣安东尼奥，1993），《当代数学》第167卷，第240–291页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1994。[Bee82] W. Beer。《核 C*-代数的 Morita 等价》。《纯粹与应用代数杂志》，26(3):249–267，1982。[BGR77] L. G. Brown、P. Green 和 M. A. Rieffel。《C*-代数的稳定同构与强Morita等价》。《太平洋数学杂志》，71(2):349–363，1977。[BHY24] J. Bradd、N. Higson 和 R. Yuncken。《算子K理论与经验表示》。https://arxiv.org/abs/2412.18924，2024。[Bla06] B. Blackadar。《算子代数》，《数学科学百科全书》第122卷。施普林格出版社，柏林，2006。C*-代数与冯·诺伊曼代数理论，《算子代数与非交换几何》第三卷。[Ble01] D. P. Blecher。《关于 C*-代数的 Morita基本定理》。《斯堪的纳维亚数学》，88(1):137–153，2001。

[BtD85] T. Bröcker 和 T. tom Dieck。《紧李群的表示》，《数学研究生教材》第 98 卷。施普林格出版社，纽约，1985 年。[CCH16] P. Clare、T. Crisp 和 N. Higson。通过 C*代数和 Hilbert C*模实现抛物诱导与限制。《组合数学》，152(6):1286–1318，2016 年。[CHH88] M. Cowling、U. Haagerup 和 R. Howe。几乎 L^2 矩阵系数。《纯粹与应用数学杂志》，387:97–110，1988 年。[CHR25] P. Clare、N. Higson 和 A. Román。实约化群约化 C*代数的 Mackey 嵌入。https://arxiv.org/abs/ 2508.02504，2025 年。[CHS24] P. Clare、N. Higson 和 Y. Song。关于 Connes-Kasparov 同构，II。《日本数学杂志》，19(1):111–141，2024 年。[CHST24] P. Clare、N. Higson、Y. Song 和 X. Tang。关于 Connes-Kasparov 同构，I。《日本数学杂志》，19(1):67–109，2024 年。[Dix57] J. Dixmier。《希尔伯特空间中的算子代数（冯·诺依曼代数）》，《科学文集》第 XXV 分册。《科学报告》。Gauthier-Villars，巴黎，1957 年。[Dix69] J. Dixmier。《C*代数及其表示》，《科学文集》第 XXIX 分册。《科学报告》。Gauthier-Villars 出版社，巴黎，1969 年。第二版。[Dix77] J. Dixmier。《C*代数》，《北荷兰数学文库》第 15 卷。North-Holland 出版公司，阿姆斯特丹—纽约—牛津，1977 年。Francis Jellett 从法文译出。[EO74] G. A. Elliott 和 D. Olesen。Dauns-Hofmann 定理的一个简单证明。《斯堪的纳维亚数学》，34:231–234，1974 年。[HC66] Harish-Chandra。半单李群的离散系列。II. 特征标的显式确定。《数学学报》，116:1–111，1966 年。[HC76] Harish-Chandra。实约化群上的调和分析。III. Maass-Selberg 关系与 Plancherel 公式。《数学年刊》（第 2 辑），104(1):117–201，1976 年。

[Hig08] N. Higson。Mackey类比与 K-理论。载于《群表示、遍历理论与数学物理：献给 George W. Mackey》，《当代数学》第 449 卷，第 149–172 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2008 年。[Jul81] P. Julg。等变K理论与交叉积。《巴黎科学院报告：数学 I 辑》，292(13):629–632，1981 年。[Kas88] G. G. Kasparov。等变KK理论与 Novikov猜想。《数学发明》，91(1):147–201，1988 年。[Kna82] A. W. Knapp。半单群交织算子的交换性。《组合数学》，46(1):33–84，1982 年。[Kna86] A. W. Knapp。《半单群表示论》，普林斯顿数学丛书第 36 卷。普林斯顿大学出版社，新泽西州普林斯顿，1986 年。基于例子的概述。[KS80] A. W. Knapp 和 E. M. Stein。半单群的交织算子。II.《数学发明》，60(1):9–84，1980 年。[Laf02] V. Lafforgue。Banach KK理论与 Baum-Connes猜想。载于《国际数学家大会论文集》第 II 卷（北京，2002），第 795–812 页。高等教育出版社，北京，2002 年。[Lan89] R. P. Langlands。实代数群不可约表示的分类。载于《半单李群上的表示论与调和分析》，数学调查专著第 31 卷，第 101–170 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1989 年。[Lan95] E. C. Lance。《Hilbert C*模》，伦敦数学会讲义系列第 210 卷。剑桥大学出版社，剑桥，1995 年。算子代数学家的工具箱。[PP83] M. G. Penington 和 R. J. Plymen。复半单李群的狄拉克算子与主系列。《泛函分析杂志》，53(3):269–286，1983 年。[Rie74] M. A. Rieffel。C*代数的诱导表示。《数学进展》，13:176–257，1974 年。[Rie82] M. A. Rieffel。算子代数的 Morita 等价。载于《算子代数及其应用》第 1 部分（安大略省金斯顿，1980），纯数学专题讨论会论文集第 38 卷，第 285–298 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1982 年。

[Ros94] J. Rosenberg. C^*-代数与群表示的 Mackey 理论。载于 C^*-代数：*1943–1993*（美国德克萨斯州圣安东尼奥，*1993*），收入《当代数学》第 167 卷，第 150–181 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1994 年。[RW98] I. Raeburn 和 D. P. Williams。《Morita 等价与连续迹 C》*-代数，收入《数学调查与专著》第 60 卷。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，1998 年。[Ser77] J.-P. Serre。《有限群的线性表示》，收入《数学研究生教材》第 42 卷。施普林格出版社，纽约—海德堡，法文版，1977 年。[Tak76] S.-e. Takahasi. 关于 CCR-代数豪斯多夫谱的 Stone-Weierstrass 定理的一个简单证明。《斯堪的纳维亚数学》，38(2):304–306，1976 年。[Tro77] P. C. Trombi. 实半单李群的温和谱。《美国数学杂志》，99(1):57–75，1977 年。[Wal88] N. R. Wallach。《实约化群 I》，收入《纯粹与应用数学》第 132 卷。学术出版社，美国马萨诸塞州波士顿，1988 年。[Wal92] N. R. Wallach。《实约化群 II》，收入《纯粹与应用数学》第 132-II 卷。学术出版社，美国马萨诸塞州波士顿，1992 年。[Was87] A. Wassermann. 关于对连通实约化线性李群的 Connes–Kasparov 猜想的一个证明。《巴黎科学院报告：数学 I 辑》，304(18):559–562，1987 年。