arXiv:2602.18670v1 [math.AT] 21 Feb 2026

循环群上的麦基同调代数

Daniel Dugger 与 Christy Hazel

Abstract. 设 C_n 为一个阶为 n 的循环群。本文研究常值整数 Mackey 函子$\mathbb{Z}$上的模与链复形，并进行一些相关的同调计算。在此过程中，我们为研究这些范畴开发了一系列基础工具。这些结果有助于研究 $RO(C_n)$-分次 Bredon 上同调，不过相关应用将留待后续论文讨论。

Contents

1. 引言 1
2. Mackey函子与 $\mathbb{Z}$-模的背景 4
3. 子群族及其相关理想 14
4. 循环群的同调计算 19
5. 更多 $\mathbb{Z}$-模 28
6. 等变拓扑中的应用 34
7. 群的变更 36
附录 A. 一个遗留的证明 41
参考文献 43

1. Introduction

设 G 为有限群，并令 $\mathbb{Z}_G$ （或简写为 $\mathbb{Z}$）表示取值为 $\mathbb{Z}$ 的常系数 Mackey 函子。给定 G 的一组子群 $\mathcal{F}$，令 $I_{\mathcal{F}} \subseteq \mathbb{Z}$为由元素 $1_{G/H} \in \mathbb{Z}(G/H)$ （$H \in \mathcal{F}$）生成的理想。给定两组这样的子群 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$，计算（并理解）Mackey 函子 $\mathrm{Tor}^{\mathbb{Z}}_*(\mathbb{Z}/I_{\mathcal{F}_1}, \mathbb{Z}/I_{\mathcal{F}_2})$ 和 $\mathrm{Ext}^*_{\mathbb{Z}}(\mathbb{Z}/I_{\mathcal{F}_1}, \mathbb{Z}/I_{\mathcal{F}_2})$，是 G-等变同调代数中的一个基本问题，与计算 $RO(G)$-分次 Bredon 上同调群 $H^\star_G(pt; \mathbb{Z})$ 的问题密切相关。在 [Z], 中，这一视角已十分明确：文中对素数幂阶的循环群 C_{ℓ^e} 进行了同调计算，并计算了上同调环 $H^\star_{C_{\ell^2}}(pt; \mathbb{Z})$。本文旨在研究一般循环群 C_n的情形。

正如人们或许会猜到的， C_n 的“答案”在某种意义上完全由素数幂情形的答案决定。然而，要将这一理念转化为精确的陈述，还需要一番功夫（例如， $\mathbb{Z}_{C_n}$模的范畴当然并不会分解为$\mathbb{Z}_{C_{\ell^e}}$模的范畴的乘积，也不会是诸如此类的简单情形）。事实上，这种分解式方法未必是最佳途径：举一个经典的例子，与

将循环群的群上同调视为一个整体相比，通过拼接它的局部部分来描述要困难得多。我们会发现，一旦必要的工具准备就绪，许多关于 C_n 的计算就能像素数幂情形下类似的计算一样轻松完成——只需掌握其中诀窍。

本文旨在为处理 $\mathbb{Z}$-模的范畴 $G = C_n$提供所需的基本工具，并探讨该范畴的一些同调代数。最终成果是若干基础性结果的杂集——如果你愿意，可以把它看作一场在林间轻松漫步，而不是攀登至著名观景点的跋涉。不过，第6 节略微展示了一些应用。在后续论文中，我们将使用这些工具，对 Bredon 上同调环 $H^\star_{C_n}(pt;\mathbb{Z})$ 的正则部分进行非常简洁的计算，并给出关于非正则部分的重要信息。所谓“正锥”的计算已在 [BD], 中完成，但本文发展的代数方法独立于他们的方法，并可作为有益补充。

从某种角度看，本文的结果并非开创新局。利用 Mackey函子进行同调计算是一个备受研究的课题——这里只列举 [B2], [BSW], [MQS], 和 [Z] 等少数几个例子。我们特别提及尚未发表的预印本 [Z], ，其中包含若干重要思想，预示了我们目前的工作。尽管如此，对于希望入门这一领域并进行明确计算的拓扑学家而言，现有论文的门槛实在不低。我们希望本文能作为该领域的入门读物，并使读者掌握一套具体的技巧，从而让这些计算比目前更简单、更易上手。

令 C_n 表示阶为 n且生成元为 t 的循环群。对于 $d|n$ ，令 $\mathcal{F}_d$ 表示所有阶整除 d 的子群的集合。简记为 $I_d = I_{\mathcal{F}_d}$ 。以下计算是第 4 节中所做计算的示例。

命题 1.1。 在 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模范畴中，有

$$(a)\ \underline{\mathrm{Tor}}_i(\underline{\mathbb{Z}}/I_a, \underline{\mathbb{Z}}/I_b) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}}/I_{(a,b)} & \text{if } i = 0 \text{ or } i = 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(b)\ \underline{\mathrm{Ext}}^i(\underline{\mathbb{Z}}/I_a, \underline{\mathbb{Z}}/I_b) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}}/I_{(a,b)} & \text{if } i = 0 \text{ or } i = 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$(c)\ \underline{\mathrm{Ext}}^i(\underline{\mathbb{Z}}/I_a, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}}/I_a & \text{if } i = 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

请注意，我们的约定是带下划线的对象表示 Mackey函子，因此上述结果中的同构是 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模的同构。举一个上述信息用途的例子，阿贝尔群 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_a,\ \mathbb{Z}/I_b)$ 是 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_a,\ \mathbb{Z}/I_b)$ 在平凡轨道处的取值。因此，命题 1.1(b) 表明，对于任意 ^{1} 和 a,这些 Ext b群都为零。这对谱序列计算非常有用。

上述计算让人觉得， $\mathbb{Z}/I_a$ 是阿贝尔群 $\mathbb{Z}/a$的类似物，但这里需要谨慎：某些方面确实如此，另一些方面则并非如此。 $\mathbb{Z}/a$ 最直接的类似物是 $\mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot a} \mathbb{Z}$的余核，我们将其记作 $\mathbb{Z}/a$。这些模的同调计算与阿贝尔群中的情形完全相同，预期的 Tor_1 和 Ext^1 对象也都出现，而且更高次数上的一切都消失。另一方面，模 $\mathbb{Z}/I_a$

在非等变语境下构造时（即当 $n = 1$时），只是零模：取 $\mathbb{Z}$，再对 1 取商。因此，值得牢记的一句话是： $\mathbb{Z}/I_a$ 在某些方面表现得像 $\mathbb{Z}/a$，在另一些方面则表现得像 0。

非平凡的 $\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a,\mathbb{Z})$ 尤其值得注意。这里的生成元给出了一种 Bockstein 算子，事实证明，它在理解 $H^\star_{C_n}(pt$方面发挥着重要作用。我们将在 [DH2], 中详细讨论这一点；但在此提及，是为了强调其中一些计算具有根本的重要性。

一旦 $n > 2$ 的模理论在某种技术意义上变得“野”，粗略地说，就是无法得到一类可处理的不可分解对象；而研究有限阿贝尔群时便有这样一类对象。不过，对于研究 $RO(G)$-分次 Bredon 上同调的拓扑学家而言，有些 $\mathbb{Z}$-模比其他模更为重要。最先出现在图景中的 $\mathbb{Z}$-模（自由模之外）是商 $\mathbb{Z}/I_a$ （原因见第3.13 节）。由此，$\mathrm{Tor}_*(\mathbb{Z}/I_a,\mathbb{Z}/I_b)$ 及相应的 Ext模开始出现，也就不足为奇了；但命题1.1 指出，它们并无新意。

有了$\mathbb{Z}/I_a$，模 I_a 本身很快就会出现在计算中。接下来是商 I_a/I_b 和盒积，例如 $I_a\square I_b$与（$\mathbb{Z}/I_a$）$\square I_b$。不过事实证明， $I_a\square I_b \cong I_{[a,b]}$ 与（$\mathbb{Z}/I_a$）$\square I_b \cong I_b/I_{[a,b]} \cong I_{(a,b)}/I_a$，其中（$a$， b）是最大公约数，而$[a,b]$ 是最小公倍数。我们可以继续下去，通过迭代扩张和盒积引入越来越多的模，但正如一开始所指出的，这个过程实际上不会结束——模理论实在过于复杂。尽管如此，目前列出的这些模对于正在构建工具箱的等变拓扑学家来说，是一个不错的起点。

还有一类模很快就会出现在布雷登上同调计算中。如果 a 和 b是 n的因子，其中 $a|b$ 那么可以构造一个$\mathbb{Z}$-模，称为 $\mathbb{Z}(b;\ a)$，其在每个轨道上的取值都是 $\mathbb{Z}$，作用映射全都是恒等映射，而限制映射和转移映射则全都是恒等映射或乘以相应指数。精确定义见第5.4 节。对于 n 为素数幂的特殊情形，这些 $\mathbb{Z}(b;\ a)$模此前已同时出现在 [HHR] 和 [Z]中。

模的族 $\mathbb{Z}/I_a$、 I_a、 I_a/I_b和 $\mathbb{Z}(b;\ a)$ 是计算中反复出现的基本构造。本文的目标之一是建立使用这些构造的方法。前面提到的同构 $I_a\square I_b \cong I_{[a,b]}$ 就是一个例子。再举一个例子：关于这些模的某个识别定理（见命题 4.8）被证明非常有用。

最后，我们指出，在代数拓扑中，同调代数首次发挥重要作用是在 Künneth 泛系数定理中。在 Bredon 上同调的背景下，这些当然是谱序列，因为我们在命题 1.1 中了解到，在这种情形下我们不只有 Tor_1 和 Ext^1 。第 6节将通过一些例子，简要介绍这些谱序列。

1.2. **论文结构**。 第 2、3和7 节是在一般有限群 G的背景下撰写的，希望这些内容有助于推动超出本文范围的后续研究。第 4 至 6 节则聚焦于循环群这一特定情形。

1.3. **符号与术语**。 虽然直到第 4 节我们才将讨论限定于循环群，但前面的内容中经常用它们举例。因此

我们在此介绍一些基本符号。对于循环群 C_n，我们用 t 表示选定的生成元。若 $d|n$，则 C_n 有一个大小为 d 的唯一子群，因此我们用 $C_d \subseteq C_n$ 表示这个子群。令 $\Theta_d = C_n/C_{\frac{n}{d}}$，它是大小为 d 的规范 C_n-轨道。形象地说,– Θ_d 是一条由 d 颗珠子组成的项链，群 t 的作用会将每颗珠子向左旋转一位。对于任意群 G，我们用 pt 表示轨道 G/G。

若 $a, b \in \mathbb{Z}$ 则 (a, b) 是最大公约数，而 $[a, b]$ 是最小公倍数。

注 1.4. 从第4 节开始，本文有几处需要用到一些看起来颇为奇特的迭代最小公倍数与最大公约数运算之间的恒等式。检验这类恒等式的一种方法是考察素数分解中的指数，这样最小公倍数和最大公约数就分别对应最大值和最小值。这类方程最终总会归结为迭代最大值-最小值运算之间的方程，而这些方程至多通过分类讨论即可验证。还值得注意的是，最大值和最小值彼此满足分配律（正如与和或一样），由此可得一些有用的公式，例如

$$[(x, y), (x, z)] = (x, [y, z]) \quad \text{and} \quad ([x, y], [x, z]) = [x, (y, z)],$$

而德摩根定律在最大值/最小值运算下的类似物给出

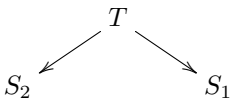
$$(\tfrac{x}{d}, \tfrac{x}{e}) = \tfrac{x}{[d,e]} \quad \text{and} \quad [\tfrac{x}{d}, \tfrac{x}{e}] = \tfrac{x}{(d,e)}.$$

1.5. **致谢**。 本文的部分工作是在第一作者访问位于罗得岛州普罗维登斯的计算与实验数学研究所期间完成的。该研究所由美国国家科学基金会资助，资助项目编号为 DMS-1929284。第一作者感谢 ICERM 和布朗大学提供了绝佳的工作环境。

2. Background on Mackey functors and $\underline{\mathbb{Z}}$-modules

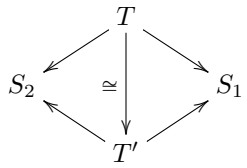
设 G为一个有限群。在本节中，我们回顾 G-Mackey函子、盒积与内部 Hom 的定义，并建立同调代数所需的机制。尽管这些材料在某种意义上是标准的——例如参见[L1] 或 [B1], 这两个例子——进行计算要求我们非常仔细地确立一些约定。因此，提供一份针对我们具体需求的自洽论述似乎是值得的。另见 [TW] 与 [W], 以了解 Mackey函子的更多背景。

我们将 $\mathcal{B}_G$ 记作**伯恩赛德范畴**（ G的）。 $\mathcal{B}_G$ 的对象是有限G-集，态射用跨来描述。给定 G-集 S_1 与 S_2，一个**跨**从 S_1 到 S_2 是如下形式的图

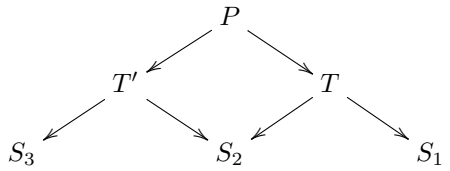


其中 T 是一个有限的 G-集合（除非另有说明，所有 G-集合之间的映射都假定为等变的）。请注意这里采用的“从右到左”约定。若存在一个

同构 $T \to T'$ 使得该图

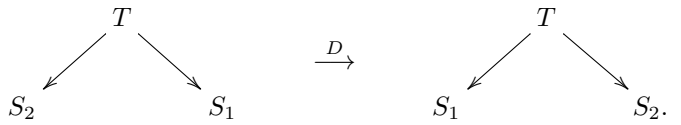


可交换。我们利用不交并将两个跨 $[S_2 \leftarrow T \to S_1]$, $[S_2 \leftarrow T' \to S_1]$ 相加，得到 $[S_2 \leftarrow T \sqcup T' \to S_1]$。注意，此运算保持等价关系。于是，态射集 $\mathcal{B}_G(S_1,\ S_2)$ 定义为等价类在不交并运算下构成的格罗滕迪克群。复合由拉回给出，即 $[S_3 \leftarrow T' \to S_2] \circ [S_2 \leftarrow T \to S_1]$ 是通过删去图中的 S_2 得到的跨



其中 P是 $T' \to S_2 \leftarrow T$的拉回。

范畴 $\mathcal{B}_G$ 具有由 G-集的笛卡尔积诱导的对称幺半结构，其中对象 pt 是单位（这里 pt 表示单点集）。它还带有一个对偶函子 $D\colon\ \mathcal{B}_G \to \mathcal{B}_G^{op}$，该函子在对象上是恒等映射，在态射上则由.....诱导



函子 D 在记账方面会很有用，因为我们会考虑涉及 $\mathcal{B}_G$的各种反变和共变函子。例如，有一个伴随同构

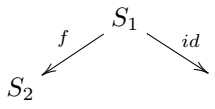
$$\mathcal{B}_G(A \times B, C) \cong \mathcal{B}_G(B, A \times C)$$

它对跨的作用显而易见。显然，这在 B 和 C中是自然的，但在 A 中的自然性稍微棘手一些，因为左边的对象关于 A是反变的，而右边的对象关于 A是共变的。公式最好写成

$$\mathcal{B}_G(A \times B, C) \cong \mathcal{B}_G(B, DA \times C),$$

这样就能确保所有变量中的函子性都正确。

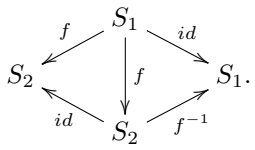
对于任意的 G-集映射 $f\colon\ S_1 \to S_2$，记 Rf为 $\mathcal{B}_G(S_1, S_2)$ 中对应于该跨的映射



用 If 表示 $D(Rf) = [S_1 \xleftarrow{id} S_1 \xrightarrow{f} S_2]$。下述初等结果非常有用：

命题 2.1. 若 $f\colon S_1 \to S_2$ 是 G-集的同构，则 $Rf = I(f^{-1})$与 $If = R(f^{-1})$ 作为 $\mathcal{B}_G$ 中的映射。

证明。 第一个来自跨的同构



对于第二个，只需取逆（或将图旋转180度）。 □

我们现在定义一个 G-Mackey函子。

定义2.2。 一个 ***G-Mackey***函子被定义为一个加性函子$M\colon\ \mathcal{B}_G^{op} \to \mathcal{A}b$。对于 G-集的映射 $f\colon\ S_1 \to S_2$，我们将 $M(Rf)$ 简记为 f^*，并将 $M(If)$ 简记为 f_*。

映射 f^* 称为**拉回**，映射 f_* 称为**前推**。

由于可加性，Mackey函子完全由其在轨道 G/H 上的取值，以及映射 f 为轨道之间映射时的映射族 f^* 和 f_* 所决定。此外，我们只需知道某些映射的 f^* 和 f_*；这些映射在复合下生成所有其他映射。显然，任意轨道映射都可以写成以下两类映射的复合：

(i) quotient maps $p : G/K \to G/H$ where $K \subseteq H$, and
(ii) right-multiplication-maps $\rho_g\colon G/K \to G/g^{-1}Kg$ given by $\rho_g(uK) = uKg = ug \cdot (g^{-1}Kg)$.

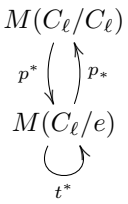
最后请注意，如果 $g \in G$ 那么跨 $I(\rho_g)$ 根据命题 $R(\rho_{g^{-1}})$ 等价于 2.1，因此 $(\rho_g)_* = (\rho_{g^{-1}})^*$。因此，右作用的前推映射由 G拉回决定。

给定 Mackey函子 M 和商映射 $p\colon G/K \to G/H$，我们将拉回 $p^*\colon M(G/H) \to M(G/K)$ 称为**限制映射**，将前推映射$p_*\colon M(G/K) \to M(G/H)$ 称为**转移映射**。给出轨道上的取值、限制映射、转移映射，以及每个轨道和每个 $g \in G$ 对应的映射 $(\rho_g)^*$，即可完整描述一个 Mackey函子。我们通常将映射 $(\rho_g)^*$ 称为**作用映射**。

当我们需要引用某个特定的商映射 p 时，将记作 p_H^K 或$p_{G/K \to G/H}$。当群 G 变得很大时，使用符号 π 来表示目标为平凡 G-轨道 G/G的投影映射会很方便。此外，当 G 是阿贝尔群时，我们常将 ρ_g 简写为 g，于是记作 $g^* = (\rho_g)^*$，等等。

例 2.3. 设 ℓ 是一个素数， C_ℓ 是一个阶为 ℓ 的循环群（为避免与商映射混淆，对于素数我们使用 ℓ 而不是 p ）。回想一下， t 始终表示 C_ℓ 的一个选定生成元。一个 C_ℓ-Mackey 函子M由两个阿贝尔群 $M(C_\ell/C_\ell)$ 和 $M(C_\ell/e)$，以及三个同态 $p_*\colon M(C_\ell/e) \to M(C_\ell/C_\ell)$、 $p^*\colon M(C_\ell/C_\ell) \to M(C_\ell/e)$ 和 $t^*\colon M(C_\ell/e) \to M(C_\ell/e)$ 组成（回想一下 $t_* = (t^*)^{-1}$）。它们必须满足 $(t^*)^\ell = id$、$t^* \circ p^* = p^*$、$p_* \circ t^* = p_*$，以及 $p^* \circ p_* = 1 + t^* + \cdots + (t^*)^{\ell-1}$。我们通常将其描绘为

使用所谓的 Lewis 图，这一名称源自 [L2]:



对于 C_{ℓ^k} Lewis图中各群构成一条长度为 $k+1$的竖线；当这条线占用过多垂直空间时，我们会改变方向，将图横向绘制而非纵向绘制。第4节将讨论一般循环群的Mackey函子。对于这些群，Lewis图会形成高维矩形格，而不是一条线，其维数等于素因子的数量。

我们定义两个重要的 Mackey函子:

定义 2.4。

（1）***Burnside***函子 A 是由$\underline{A}(-) = \mathcal{B}_G(-, pt)$ 给出的可表*Mackey*函子。

（2）常系数***Mackey***函子 $\mathbb{Z}$ 由 $\mathbb{Z}(G/H) = \mathbb{Z}$ 给出，对所有轨道 G/H均如此。限制映射和作用映射都是恒等映射。容易检查，这就迫使转移映射 p_*: $\mathbb{Z}(G/K) \to \mathbb{Z}(G/H)$ 为乘以指数 $[H : K]$。

我们将把 $1_{G/H} \in \mathbb{Z}(G/H) = \mathbb{Z}$ 记作标准生成元。因此我们有 $(p_{G/K\to G/H})_*(1_{G/H}) = 1_{G/K}$以及 $(p_{G/K\to G/H})_*(1_{G/K}) = [H : K] \cdot 1_{G/H}$。

存在一个Mackey函子之间的映射 $\underline{A} \to \underline{\mathbb{Z}}$，定义如下：对于任意轨道 G/H，映射 $A(G/H) \to \mathbb{Z}(G/H) = \mathbb{Z}$ 将一个跨 $[pt \leftarrow T \to G/H]$ 映射为第二个映射在 eH上的纤维中的元素个数。容易验证，这与拉回和前推相容，并且该映射是满射。

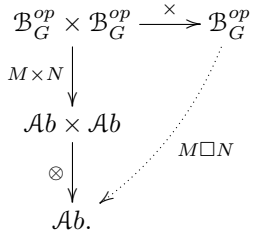
注记 2.5. 更自然的 $\mathbb{Z}$ 定义是将其视为赋值 $S \mapsto \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}\langle S\rangle, \mathbb{Z})$。关于如何将其构造成函子的讨论，请见下文命题 2.12 之前的内容。从这个角度看，映射 $A \to \mathbb{Z}$ 就更清晰了。

命题 2.6. $A \to \mathbb{Z}$ 的核是由元素 $I_{\mathbb{Z}} \subseteq \underline{A}$ 生成的子 *Mackey* 函子$(Rp_H^K \circ Ip_H^K) - [H : K] \cdot id_{G/H}$ 其中 $K \le H \le G$ 遍历所有嵌套子群对。

证明。 显然可以验证所给元素都在核中，因此得到一个满射 $A/I_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$。群 $A(G/H)$ 由跨 $[* \leftarrow X \to G/H]$ 生成，而这类跨都可以写成跨 $[* \leftarrow G/K \xrightarrow{p} G/H]$ 的和，其中 $K \le H$。这个跨又可以写成复合 $[* \leftarrow G/H \to G/H] \circ [G/H \xleftarrow{p} G/K \xrightarrow{p} G/H]$。后一个跨是$Rp \circ Ip$，因此模掉 $I_{\mathbb{Z}}$ 后，我们发现 $A(G/H)$ 中的所有元素都是$[* \leftarrow G/H \to G/H]$的倍数。也就是说， $A/I_{\mathbb{Z}}(G/H)$ 是循环的。由于 $A/I_{\mathbb{Z}} \to \mathbb{Z}$是满射，它必定是同构。□

2.7. **盒积**。给定两个 G-Mackey函子 M 和 N，**盒积** $M\square N$ 定义为 Day卷积，即下图中的左 Kan 延拓：

(2.7.1)



可以验证 A是这个乘积的单位，并且 G-Mackey 函子的范畴是一个闭对称幺半范畴（详见 [B1] ）。因此，盒积是右正合的。Mackey 函子 $\mathbb{Z}$ 是此范畴中的一个环对象（文献中常称为 Green 函子）。本文余下部分将聚焦于$\mathbb{Z}$-模。

若 R 是交换Mackey环，且 M 和 N 是 R-模，则可以根据通常的余等化子图定义 $M\square_R N$ 。与普通环论一样，对于商环 R/I，若 M 和 N 是 R/I-模，则典范商映射 $M\square_R N \to M\square_{R/I} N$是一个同构（这可由 $M\square_{R/I} N = M\square_{R/I} R/I\square_R N = M\square_R N$推出）。特别地，将此应用于 $A \to \mathbb{Z}$可得 $\square_{\mathbb{Z}} = \square$。

2.8. **$\mathbb{Z}$-模**。一个 $\mathbb{Z}$-模是 $\mathbb{Z}$ 上的模，位于 G-Mackey函子的对称幺半范畴中。因为 $A \to \mathbb{Z}$ 是满射，一个Mackey函子至多具有一个 $\mathbb{Z}$-模结构。事实上，Mackey函子 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，当且仅当复合 $I_{\mathbb{Z}}\square M \to A\square M \to M$ 为零，其中 $A\square M \to M$ 是单位同构。由于命题 2.6 给出了$I_{\mathbb{Z}}$的生成元，我们有如下有用的刻画：

命题 2.9. *Mackey*函子 M 是 $\mathbb{Z}$-模，当且仅当对所有子群 $K \leq H \leq G$，复合 $p_* \circ p^*$： $M(G/K) \to M(G/K)$ 是乘以指数 $[H : K]$。

证明。 立即可得。 □

注记 2.10. 上述命题将 $\mathbb{Z}$-模等同于代数文献中通常所称的 **上同调 Mackey 函子** 。例如，参见 [W，第 7]节。该结果本身可见于 [TW，命题 16.3]或 [Z，注记 2.13]。

$\mathbb{Z}$-模的一个重要例子类别是“不动点Mackey函子”：

定义2.11. 对于一个 $\mathbb{Z}[G]$-模 W ，定义不动点***Mackey***函子$\mathrm{FP}(W)$为由$\mathrm{FP}(W)(G/H) = W^H$所给出的 *$G$-Mackey*函子，其限制映射为包含映射，作用映射由左乘给出，转移映射为显然的“范数”映射：对于 $K \subseteq H$，转移 $W^K \to W^H$ 为 $x \mapsto \sum_{hK \in H/K} hx$。

注意到在FP(W)中，我们有 $p_* \circ p^*$ 是乘以相应子群的指数，因此FP(W)是一个 $\mathbb{Z}$-模，由命题2.9。关于FP(W)的另一种观点，见注记2.13 下文。

上述构造给出了一个函子 FP: $\mathbb{Z}[G]$–Mod $\to \mathbb{Z}$–Mod。我们还有一个求值函子 ev_G: $\mathbb{Z}$–Mod $\to \mathbb{Z}[G]$–Mod，它将 M 映射到 $M(G/e)$。可以验证，这构成一个伴随对

$$ev_G\colon \mathbb{Z}-\mathrm{Mod} \rightleftarrows \mathbb{Z}[G]-\mathrm{Mod}\colon \mathrm{FP}$$

与 ev_G 左伴随（关于此问题的另一种视角，见下文注释 2.13 ）。

下一个刻画利用了伯恩赛德范畴的一个变体。定义 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$ 为一个范畴，其对象是有限的 G-集合，态射由 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G(S,T) = \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}\langle S\rangle, \mathbb{Z}\langle T\rangle)$ 给出，并具有显然的复合映射。我们有一个函子 Q: $\mathcal{B}_G \to \mathcal{B}\mathbb{Z}_G$，它在对象上是恒等映射；映射 $\mathcal{B}_G(S,T) \to \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(S,T)$ 将一个跨 $[T \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} S]$ 映射为复合

$$\mathbb{Z}\langle S\rangle \xrightarrow{g^*} \mathbb{Z}\langle X\rangle \xrightarrow{f_*} \mathbb{Z}\langle T\rangle$$

其中 $g^*(s) = \sum_{x\in g^{-1}(s)} x$ 对于 $s \in S$ 和 $f_*(x) = f(x)$ 对于 $x \in X$。以下结果已在 [Y，定理 4 中证明。3]，并且也见于 [Z，命题 2。15]:

命题2.12。 *Mackey*函子 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，当且仅当 M 通过 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$分解。也就是说，M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，当且仅当存在一个加性函子M': $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G^{op} \to \mathcal{A}b$使得 $M = M' \circ Q$。因此，$\mathbb{Z}$-模范畴等价于加性函子范畴 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G^{op} \to \mathcal{A}b$。–

将上述结果与命题2.9 结合可知，$\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$ 可以视为由 $\mathcal{B}_G$ 施加以下关系 $Rp_{(G/K\to G/H)} \circ Ip_{(G/K\to G/H)} = [H: K] \cdot id_{G/H}$ 当 $K \le H \le G$时。

注记 2.13. 设 W 是一个 $\mathbb{Z}[G]$-模。函子 $\mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[G]}(-, W)$ 是一个加性函子 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G^{op} \to \mathcal{A}b$，将其与 Q 复合恰好得到 FP(W)。对于一个 G-集 S，存在显然的典范同构 $\mathbb{Z}\langle S\rangle \to \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(G, S)$，因此，若 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，则有自然映射

$$\mathbb{Z}\langle S\rangle \otimes M(S) \longrightarrow B\mathbb{Z}_G(G,S) \otimes M(S) \longrightarrow M(G)$$

这些映射关于左 G-作用是等变的。取伴随得到 $M(S) \to \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}\langle S\rangle, M(G)) = (\mathrm{FP}\ M(G))(S)$。这就是映射 $M \to \mathrm{FP}\ M(G)$，它构成 (ev_G, FP) 伴随的单位。

2.14. **的盒积 $\mathbb{Z}$-模。** 设 M 与 N 是两个 $\mathbb{Z}$-模，即函子 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G^{op} \to \mathcal{A}b$。盒积 $M\square_{\mathbb{Z}}N$ 定义为 Day 卷积，即图中的左 Kan 延拓；该图类似于 (2.7.1)，其中将 $\mathcal{B}_G$ 替换为 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$。可以验证，此构造给出的盒积与$M\square N$ 相同（见第 2.7 节末尾），因此我们可以放心地在盒积记号中省略 $\mathbb{Z}$，而不会造成混淆。用显式公式表示，这意味着对于任意有限G-集合 X，阿贝尔群 $(M\square N)(X)$ 是以下映射的余等化子:

$$\coprod_{C_1,C_2,D_1,D_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(X, C_1\times C_2) \otimes \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(C_1,D_1) \otimes \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(C_2,D_2) \otimes M(D_1) \otimes N(D_2)$$

$$\Downarrow\Downarrow$$

$$\coprod_{C_1,C_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2) \otimes M(C_1) \otimes N(C_2)$$

其中，左箭头仅使用 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$ 中的复合（以及笛卡尔积），右箭头则仅使用 M 和 N上的函子结构。

注意，$(M\square N)(S)$ 通常并不是 $M(S)\otimes N(S)$，尽管存在从前者到后者的自然映射。为看出这一点，令 $\Delta_S \in \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(S, S\times S)$ 为对角，即跨 $[S\times S \xleftarrow{\Delta} S \xrightarrow{=} S]$。我们有自然映射

$$M(S)\otimes N(S) \to \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(S, S\times S)\otimes M(S)\otimes N(S) \to (M\square N)(S)$$

其中第一个由 $u \mapsto \Delta_S \otimes u$ 给出，第二个来自 $(M\square N)(S)$ 的定义余等化子。虽然这种比较通常不是同构，但在一个重要情形中它是同构：

命题 2.15. 自然映射 $M(G)\otimes N(G) \to (M\square N)(G)$ 是一个同构。

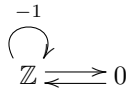
我们将证明推迟到接近第7.1节末时，届时我们已有足够的工具，使其变得非常简单。

回忆一下伴随对 $ev_G\colon \mathbb{Z}-\text{模} \rightleftarrows \mathbb{Z}[G]-\text{模}\colon FP$，其中 ev_G是左伴随。范畴 $\mathbb{Z}$–模具有盒积，而–$\mathbb{Z}[G]$–模具有张量积（在 $\mathbb{Z}$上），并带有 G的对角作用。命题2.15表明 ev_G是强幺半的，因此右伴随 FP 也是幺半的；也就是说，存在自然映射

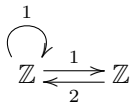
$$(\mathrm{FP}\, M)\square(\mathrm{FP}\, N) \to \mathrm{FP}(M\otimes N). \tag{2.15.1}$$

注意，FP 不一定是强幺半的，下面的例子说明了这一点。不过，由下面的推论2.24 可知，当 M 和 N 是置换模时（也就是说，是形如 G的 $\mathbb{Z}\langle S\rangle$-模，其中 S 是一个 G-集），映射（2.15.1）是同构。

例 2.16。令 $G=C_2$ 且令 $M=N=\mathbb{Z}_-$（$\mathbb{Z}$ 带符号作用）。于是$M\otimes N\cong\mathbb{Z}$，因此 $FP(M\otimes N)\cong\mathbb{Z}$。但是 $FP(M)_- = FP(N)$ 是 Mackey函子



并且 $FP(M)\square FP(N)$ 很容易验证为



（注意，这不等于 $\mathbb{Z}$，因为 p_* 与 p^* 互换了。）映射$FP(M)\square FP(N) \to FP(M\otimes N)$ 在 C_2位置上是恒等映射，在 C_2/C_2位置上是乘以 2。

2.17. 自由模。接下来，我们给出一些自由 $\mathbb{Z}$-模的构造。

定义 2.18。对于任意有限的 G-集合 S，令 F_S 为 $\mathbb{Z}$-模 $\underline{X}\mapsto \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(X, S)$。这就是“在位置 S 上由一个生成元生成的自由 $\mathbb{Z}$-模”。

将 $id\in\mathcal{B}\mathbb{Z}_G(S,S) = F_S(S)$ 记作 g_S 很有用，因为它就是前面提到的生成元。自由模 F_{pt} 为 $\mathbb{Z}$。由米田引理可得自然同构

$$\mathrm{Hom}_{\underline{\mathbb{Z}}}(F_S, M)\cong M(S),$$

它将映射 $\alpha\colon F_S\to M$送到元素 $\alpha(g_S)\in M(S)$。

例 2.19. 可以根据万有性质构造自由模：粗略来说，为了构造 F_S，只需在位置 S 放入一个生成元，并让它通过前推和拉回自由地生成其他元素。例如，设 ℓ 是一个素数，并考虑 $G = C_{\ell^2}$。三个基本轨道分别是 Θ_{ℓ^2}、Θ_ℓ和 Θ_1。下面是 F_{Θ_ℓ} 的 Lewis图：

$$\underset{\Theta_{\ell^2}}{\mathbb{Z}\langle p^*g, t^*(p^*g), \dots, (t^*)^{\ell-1}(p^*)g\rangle} \underset{p^*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} \underset{\Theta_\ell}{\mathbb{Z}\langle g, t^*g, \dots, (t^*)^{\ell-1}g\rangle} \underset{p^*}{\overset{p_*}{\rightleftarrows}} \underset{\Theta_1}{\mathbb{Z}\langle p_*g\rangle}.$$

注意麦克基关系 $t^*(p^*g) = p^*(t^*g)$ 和 $(t^*)^\ell g = g$，由此可得 $(t^*)^\ell(p^*g) = p^*g$，等等。一个很好的练习是推导 p^*、p_* 和 t^* 对图中所有元素的作用：它们都可由麦克基关系以及 g 是位置 Θ_ℓ 处的一个元素这一事实推出。

示例 2.19 中的构造方法很有用，但在复杂的例子中，人们可能会想知道如何系统地考察生成元 g的所有像。事实证明，还有另外两种描述自由模的方法——一种使用不动点Mackey函子，另一种使用指数构造——而且在某些方面，这两种方法都更加具体。这些不同的描述出奇地有用；一种论证思路往往适用于其中一种方法，却不适用于其他方法。

首先，根据 [TW，引理 16，得到以下结论4]:

命题 2.20。 对于任意 $H \leq G$，映射 $F_{G/H} \to \mathrm{FP}(\mathbb{Z}\langle G/H\rangle)$ 将 $g_{G/H}$送到元素 $eH \in \mathbb{Z}\langle G/H\rangle^H$，是一个同构。

证明。 根据我们利用 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$ 所作的论述，这几乎是不言自明的。自由模 $F_{G/H}$是 Mackey 函子 $X \mapsto \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(X, G/H)$，而 $FP(\mathbb{Z}\langle G/H\rangle)$ 是 Mackey 函子 $X \mapsto \mathrm{Hom}^{\mathbb{Z}[G]}(\mathbb{Z}\langle X\rangle, \mathbb{Z}\langle G/H\rangle)$。根据 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$的定义，二者相同。□

接下来我们描述指数构造。令 M 为一个 $\mathbb{Z}$-模，并令S为一个有限的 G-集。定义 M^S为 $\mathbb{Z}$-模 $X \mapsto M(S \times X)$。对于映射f: $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$中的 $S_1 \to S_2$，我们通过映射 $(f \times id)^*$: $M(S_2 \times X) \to M(S_1 \times X)$ 得到 $M^{S_2} \to M^{S_1}$。因此 $M^{(-)}$自然地是反变的。

值得注意的是， M^S和 M^{DS}是同一个 Mackey函子，但这两种记法在 S中的变性不同： f中的一个映射 $S_1 \to S_2$ 诱导出 $M^{S_2} \to M^{S_1}$和 $M^{DS_1} \to M^{DS_2}$。自由模 F_S 和 F_{DS}也会出现同样的现象，在本主题的许多其他地方也是如此。因此，某些公式中会包含 D，以确保两边的变性正确。

命题 2.21。 存在一个 $\mathbb{Z}$-模的自然同构 $\mathbb{Z}^{DA} \cong F_A$。

证明。 根据我们的定义， $\mathbb{Z}^{DA}(X) = \mathbb{Z}(DA \times X) = \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(DA \times X, pt)$ 且$F_A(X) = \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(X, A)$。因此，由伴随同构可得结论

$$\mathcal{B}\mathbb{Z}_G(DA \times X, pt) \cong \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(X, A \times pt) = \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(X, A),$$

它关于 X 和 A 都是自然的（后者得益于 D的存在）。 □

对于$\mathbb{Z}$-模 M和 N，令 $\mathrm{Hom}(M, N)$ 为由下式定义的 $\mathbb{Z}$-模

$$\mathrm{Hom}(M, N)(X) = \mathrm{Hom}(F_X \square M, N).$$

于是存在一个伴随

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M\square N, Q) \cong \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \underline{\mathrm{Hom}}(N,Q)).$$

函子 $\square$ 与 Hom 在 $\mathbb{Z}$-模的范畴上给出一个闭对称幺半结构。值得强调内部 Hom 与正则 Hom 之间的联系，即

$$\underline{\mathrm{Hom}}(M,N)(pt) = \mathrm{Hom}(M,N). \tag{2.21.1}$$

下述结果将我们的指数构造同时与自由模的盒运算及 Hom 运算联系起来：

命题 2.22. 存在自然同构 $F_A\square M \cong M^{DA}$，并且还存在自然同构 $\mathrm{Hom}(F_A, M) \cong M^A$。因此，注意自然同构

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F_A, \mathbb{Z}) \cong \underline{\mathbb{Z}}^A \cong F_{DA}.$$

注记 2.23. 值得强调的是，上述结果的第二个陈述表明自由模是自对偶的：$\mathrm{Hom}(F_A,\mathbb{Z}) \cong F_A$。然而，映射$F_A \to F_B$ 由~~$f \in \mathcal{B}\mathbb{Z}_G(A,B)$~~ 所诱导，对偶为映射 $F_B \to F_A$，由Df 诱导。另见例 2.28 （下文）。

证明命题 2.22 需要一些功夫，因此我们将证明推迟到附录。它可归结为 M 为自由模的情形，此时可直接根据定义加以验证。下面的结果基本上就是这一情形：出于阐述的原因，这里将其陈述为推论，但事实上它是该命题证明中的关键步骤。

推论 2.24. 存在一个自然同构 $F_A\square F_B \cong F_{A\times B}$。

证明。 我们有 $F_A\square F_B \cong (F_B)^{DA}$。然后我们观察到，对于一个 G-集 Θ，

$$(F_B)^{DA}(\Theta) = F_B(DA\times\Theta) = \mathcal{B}\mathbb{Z}(DA\times\Theta, B) = \mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta, A\times B) = F_{A\times B}(\Theta).$$

□

命题 2.22 导出几个重要的推论：

推论 2.25. 自由模 F_A 是平坦的。

证明。 通过在 G-集 S 上取值即可确定序列的正合性，而命题 2.22给出自然同构（$F_A\square M$）（S） $\cong M$（$A\times S$）。因此，若序列$M_\bullet$ 是正合的，则 $F_A\square M_\bullet$也正合，对任意 A。 □

推论2.26. 对于有限的 G-集 A 和 $\mathbb{Z}$-模 M，存在一个自然同构 $\mathrm{Hom}(F_A, M) \cong \mathrm{Hom}(F_A, \mathbb{Z})\square M$。

证明。 命题 2.22给出

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F_A, M) \cong M^A \cong F_{DA}\square M \cong \underline{\mathrm{Hom}}(F_A,\mathbb{Z})\square M.$$

□

2.27. 自由模之间的映射。 在 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$ 中，映射 $f\colon S_1 \to S_2$ 诱导出映射$F_{S_1} \to F_{S_2}$，将 $g_{S_1} \mapsto f^* $ 送到 g_{S_2}，注意到 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G(S_1, S_2) \to \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}}(F_{S_1}, F_{S_2})$ 根据米田引理是一个同构。因此，自由模之间的映射 $\bigoplus_{i=1}^{k} F_{S_i} \to \bigoplus_{j=1}^{m} F_{T_j}$ 由一组映射 $\alpha_{j,i}\colon S_i \to T_j$ 确定，这些映射可以组合成显然的 $m \times k$ 矩阵。与通常一样，复合对应于矩阵乘法。该映射将生成元 g_{S_i} 送到 $\sum_{j=1}^{l}(\alpha_{j,i})^*(g_{T_j})$。

给定 $f\colon S_1 \to S_2$，人们很容易想把诱导映射 $F_f\colon F_{S_1} \to F_{S_2}$ 记作“f”或“f^*”，后一种记法着眼于生成元上的作用。然而，系统地采用后一种约定会导出诸如 $h^* \circ f^* = (hf)^*$ 这样的公式，这与 Mackey函子的通常反变性公式存在根本冲突。因此，最好避免这种做法。我们通常将 F_f 简写为f，并记住它在生成元上的作用为 $g_{S_1} \mapsto f^* g_{S_2}$。

例 2.28. 取一个素数 ℓ 和 C_ℓ的一个生成元 t。令 M 为唯一的 $\mathbb{Z}$-模，使得 $\underline{M}(C_\ell) = 0$且 $M(pt) = \mathbb{Z}/\ell$。元素 $1 \in M(pt)$ 决定了一个映射 $\epsilon\colon F_{pt} \to M$，容易验证它是一个满射。下面可以验证是 M的一个自由分解：

$$0 \longrightarrow F_{pt} \xrightarrow{Ip} F_{C_\ell} \xrightarrow{id-Rt} F_{C_\ell} \xrightarrow{Rp} F_{pt} \xrightarrow{\epsilon} M \longrightarrow 0.$$

这里 $p\colon C_\ell \to pt$ 以及 $t\colon C_\ell \to C_\ell$是轨道范畴中的映射。注意$Rp \circ Rt = R(p \circ t) = Rp$，这是由函子性得到的。对于 $Rt \circ Ip$，回忆命题 2.1 指出 $Rt = It^{-1} = It^{\ell-1}$，因此 $Rt \circ Ip = It^{\ell-1} \circ Ip = I(p \circ t^{\ell-1}) = Ip$。这验证了我们得到的是一个链复形，而验证正合性只需再多做一点工作（这是个很好的练习，详细内容见下文命题4.18）。

将 $\mathrm{Hom}(-, \mathbb{Z})$ 应用于该分解（不含 M）可得

$$0 \longleftarrow F_{pt} \xleftarrow{Rp} F_{C_\ell} \xleftarrow{id-It} F_{C_\ell} \xleftarrow{Ip} F_{pt} \longleftarrow 0.$$

这里我们用到了同构 $\mathrm{Hom}(F_A, \mathbb{Z}) \cong \underline{F_{DA}}$，它来自命题2.22。请注意两个复形中映射的名称，以及这些名称如何遵循我们的约定。

注记 2.29。 今后，我们将把轨道范畴中的任意映射 f 与其在 $\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$中的像 Rf 等同起来。因此，在上述示例中，我们有时会省略 R，不过保留它们有助于表达得更清楚。

注记 2.30。 很快我们就会取自由分解 $F_\bullet$ 并应用 $(-)\square M$或 $\mathrm{Hom}(-, M)$。为分析这类构造，请注意，对于映射 $f\colon S \to T$属于$\mathcal{B}\mathbb{Z}_G$，一个 G-集 Θ，以及一个 $\mathbb{Z}$-模 M，命题 2.22 给出自然同构

$$\begin{array}{ccc} (F_S \square M)(\Theta) & \xrightarrow{F_f \square id_M} & (F_T \square M)(\Theta) \\ \downarrow \cong & & \cong \downarrow \\ M(S \times \Theta) & \xrightarrow{(Df \times id)^*} & M(T \times \Theta) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \underline{\mathrm{Hom}}(F_S, M)(\Theta) & \xleftarrow{\mathrm{Hom}(F_f, M)} & \underline{\mathrm{Hom}}(F_T, M) \\ \downarrow \cong & & \downarrow \cong \\ M(S \times \Theta) & \xleftarrow{(f \times id)^*} & M(T \times \Theta). \end{array}$$

注意，$(Df \times id)^*$ 也可以写作$(f \times id)_*$，这样通常更方便。

特别地，取第一个并令 $M=\mathbb{Z}$，即可恢复规范同构

$$\begin{array}{ccc} F_S(\Theta) & \xrightarrow{F_f} & F_T(\Theta) \\ \downarrow\cong & & \cong\downarrow \\ \underline{\mathbb{Z}}(S\times\Theta) & \xrightarrow{(f\times id)_*} & \underline{\mathbb{Z}}(T\times\Theta). \end{array}$$

2.31. **有理化。** 我们以一个关于有理化的漂亮结果结束本节：

命题 2.32. 对于任意 $\mathbb{Z}$-模 M，自然映射 $M\to \mathrm{FP}(M(G))$ 是一个有理等价。

证明。 在轨道 G/H 处取值，所讨论的映射为 $p^*\colon M(G/H)\to M(G)^H$，其中 $p\colon G\to G/H$ 是投影。我们有如下映射

$$M(G/H)\xrightarrow{p^*} M(G)\xrightarrow{p_*} M(G/H),$$

其中第一个映射的像落在 $M(G)^H$ 中。复合 $p_*\circ p^*$ 是乘以 $|H|$，而复合 $p^*\circ p_*$ 等于 $\sum_{h\in H}(\rho_h)^*$——也就是在 $M(G)^H$ 上乘以 $|H|$。因此，有理化后，映射 $p^*\colon M(G/H)\to M(G)^H$ 是一个同构。□

推论 2.33。 函子 FP：$\mathbb{Q}[G]$–*Mod* $\rightleftarrows \mathbb{Q}_G$–*Mod*：$ev_G$ 构成一个等价。

证明。 复合 $ev_G\circ$FP 自然同构于 id 即使在 $\mathbb{Z}$上也是如此。自然同构 FP$\circ ev_G\cong id$ 由命题 2.32给出。□

当然，上述结果并不需要对所有整数取逆，只需对 $|G|$取逆即可。

3. Families of subgroups and their associated ideals

设 G 是一个有限群。***G*-子群族** 是 $\mathcal{F}$ 的子群所构成的集合，其中 G 在取子群和共轭运算下封闭。更简言之，我们只说 $\mathcal{F}$ 在子共轭下封闭。给定这样一个子群族，令 $I_{\mathcal{F}}\subseteq\mathbb{Z}(G/H)$ 为包含所有$H\in\mathcal{F}$对应的元素 $1\in\mathbb{Z}(G/H)$ 的最小子 Mackey 函子。这是 Mackey 环 $\mathbb{Z}$中的一个理想。我们常将 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$ 作为商 $\mathbb{Z}/I_{\mathcal{F}}$的简写。

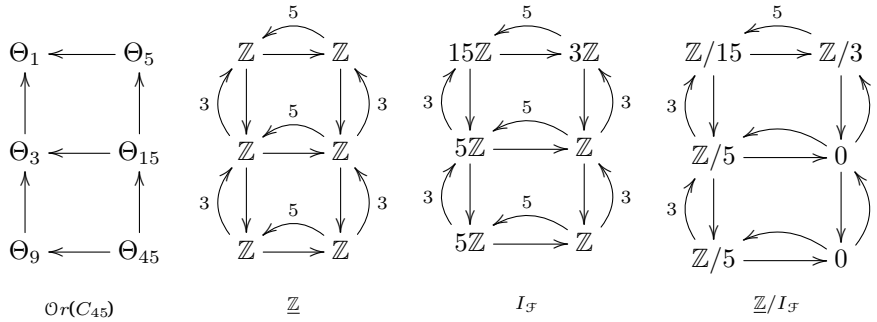
注意，元素 $1\in\mathbb{Z}(G/H)$ 确定了一个映射 $F_{G/H}\to\mathbb{Z}$。Mackey函子 $\underline{\mathbb{Z}}/\mathcal{F}$ 也可以描述为序列中的余核

$$\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} F_{G/H}\longrightarrow\underline{\mathbb{Z}}\longrightarrow\underline{\mathbb{Z}}/\mathcal{F}\longrightarrow 0$$

其中，左侧映射将每个生成元 $g_{G/H}$ 映射到 $1_{G/H}$。

例3.1。 设 $G=C_{45}$为阶为45的循环群。考虑族$\mathcal{F}=\{e,C_3\}$。从左到右，图3.1中的图3.1 依次展示了轨道范畴（未画出自同构）、Mackey函子$\mathbb{Z}_{C_{45}}$、理想 $I_{\mathcal{F}}$以及商 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$。注意，限制映射 p^* 用直箭头表示，转移 p_* 用曲线箭头表示； t^* 映射完全没有画出，因为它们都等于恒等映射。未标记映射将 $1\mapsto 1$映到。在轨道范畴中，我们将Θ_d 记作大小为 d 的唯一轨道（因此 $\Theta_d=C_{45}/C_{45/d}$）。我们可以想象在相应位置放上 1

FIGURE 1. 该 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}$、$I_{\mathcal{F}}$和 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$



在 $\Theta_{45} = C_{45}/e$ 和 $\Theta_{15} = C_{45}/C_3$ 处，并让这些 **1** 自由生成一个理想。

一般而言，$\mathbb{Z}/\mathcal{F}$ 在轨道 G/J 上的取值由以下公式给出：

命题 3.2. 对于 G 的任意子群 J，群 $(\mathbb{Z}/\mathcal{F})(G/J)$ 是循环的，其阶等于

$$\gcd\big\{[J:H]\,\big|\,H\in\mathcal{F},\ H\le J\big\}=\frac{\#J}{\operatorname{lcm}\{\#H\,|\,H\in\mathcal{F},H\le J\}}.$$

特别地，G 的阶湮灭 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$。

证明。群 $(\mathbb{Z}/\mathcal{F})(G/J)$ 是 $\mathbb{Z}(G/J)=\mathbb{Z}$ 的一个商，因此是循环群。令 $D_J=\{[J:H]\,\big|\,H\in\mathcal{F},\ H\le J\}$ 并设 $d_J=\gcd(D_J)$。

首先注意，若 $H\in\mathcal{F}$ 且 $H\le J$，则转移映射 $\mathbb{Z}(G/H)\to\mathbb{Z}(G/J)$ 将 $1_{G/H}$ 映至 $[J:H]\cdot 1_{G/J}$。由此立即可得 $d_J\cdot 1_{G/J}\in I_{\mathcal{F}}(G/J)$，因此 $(\mathbb{Z}/\mathcal{F})(G/J)$ 被 d_J 湮灭。要证明 d_J 是其确切的阶，还需要做一些额外工作。

对于 $K\in\mathcal{F}$，我们将分析映射 $f\colon\ F_{G/K}\to\mathbb{Z}$，它将生成元映至 $1_{G/K}$。我们将用到 $F_{G/K}=\mathrm{FP}(\mathbb{Z}\langle G/K\rangle, g_{G/K})$ 对应于元素 $[eK]\in\mathbb{Z}\langle G/K\rangle^K$（参见命题 2.20）。映射 $f_{G/e}\colon\ \mathbb{Z}\langle G/K\rangle\to\mathbb{Z}$（$f$ 在第 G/e 个轨道上的分量）将 $[eK]$ 映至 1_G，因此根据 G-等变性，它必须将 $[gK]$ 映至 1_G，对所有 $g\in G$ 均如此。

接下来考虑一个子群 $J\le G$。我们可以利用限制映射的图来确定 $f_{G/J}$

$$\begin{array}{ccccc} F_{G/K}(G/J) & = & \mathbb{Z}\langle G/K\rangle^J & \xrightarrow{f_{G/J}} & \mathbb{Z} \\ {\scriptstyle p^*}\downarrow & & {\scriptstyle p^*}\uparrow & & \downarrow{\scriptstyle 1} \\ F_{G/K}(G/e) & = & \mathbb{Z}\langle G/K\rangle & \xrightarrow{f_{G/e}} & \mathbb{Z}. \end{array}$$

中间的限制映射就是不动点的包含映射。将 $G/K=S_1\amalg S_2\amalg\cdots\amalg S_r$ 写成 J-集合，其中每个 S_j 都是一个 J-轨道。于是 $\mathbb{Z}\langle G/K\rangle^J$ 是自由阿贝尔群，其生成元是每个 S_j 中元素的和。回忆一下，$f_{G/e}$ 将 G/K 中的每个元素映射到 **1**，因此在复合 $f_{G/e}\circ p^*$ 下，这些和映射为

$\#S_j \cdot 1_G$。因此在 $f_{G/J}$ 下，它们映射为$\#S_j \cdot 1_{G/J}$。这表明$f_{G/J}$ 的像由数字$\#S_j$的最大公约数生成。最后注意，若 gK 是 S_j 的一个元素，那么作为 J-集合， $S_j \cong J/(J \cap gKg^{-1})$。

取遍所有可能的 $g \in G$ 和 $K \in \mathcal{F}$，我们发现 $I_{\mathcal{F}}(G/J)$ 由$m \cdot 1_{G/J}$生成，其中 m 是该集合的最大公约数

$$\big\{[J\colon J \cap gKg^{-1}] \,\big|\, K \in \mathcal{F},\ g \in G\big\}.$$

但由于 $\mathcal{F}$ 在子共轭下封闭，这恰好就是集合 D_J。因此 $(\mathbb{Z}/\mathcal{F})(G/J)$ 的阶为 d_J。□

上述结果导出了如下针对 $\mathbb{Z}$-模的“识别定理”$\mathbb{Z}/\mathcal{F}$。沿着这一思路，有一个更精简的结果，但它仅适用于循环 G ，见命题4.8。

命题 3.3。 设 $\mathcal{F}$ 是 G的一个子群族。设 M 是一个具有以下性质的 $\mathbb{Z}$-模

(1) $M(pt)$ 是一个循环阿贝尔群；
(2) 所有限制映射都是满射；并且
(3) 每个 $M(G/J)$ 的阶等于命题 3.2中的数值。
那么 $M \cong \mathbb{Z}/\mathcal{F}$。此外，对于任意生成元 $a \in M(pt)$ ，诱导映射 $\mathbb{Z} \to M$将 $1_{pt} \mapsto a$ 映射为……，可经由 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$ 分解，从而得到同构 $\mathbb{Z}/\mathcal{F} \to M$。

证明。 设 a 是 $M(pt)$ 的任意生成元，并考虑相应的映射 $f\colon \mathbb{Z} \to M$，其定义为 $1_{pt} \mapsto a$。条件 (1) 和 (2) 蕴含 f 是一个满射。对于 $H \in \mathcal{F}$，由条件 (3)， $M(G/H)$ 的阶为 0。因此， f 消去 $I_{\mathcal{F}}$，故可分解为映射 $\mathbb{Z}/\mathcal{F} \to M$（该映射必为满射）。在每个位置 G/J ，这是一个在阶相同的循环群之间的满射，因此是同构。□

注意，若 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是两个 G-族，则 $\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2$ 和 $\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ 也都是 G-族。下一个命题详细说明这些对族的运算与相应理想或商上的运算之间的关系。

命题 3.4. 设 $\mathcal{F}_1$ 和 $\mathcal{F}_2$ 是两个 G-族。那么
(a) 若 $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2$ ，则 $I_{\mathcal{F}_1} \subseteq I_{\mathcal{F}_2}$。 *(b)*
$I_{\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2} = I_{\mathcal{F}_1} + I_{\mathcal{F}_2}$。 *(c)*
$I_{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2} \subseteq I_{\mathcal{F}_1} \cap I_{\mathcal{F}_2}$。 *(d)*
$\mathbb{Z}/\mathcal{F}_1 \square \mathbb{Z}/\mathcal{F}_2 \cong \mathbb{Z}/(\mathcal{F}_1 \sqcup \mathcal{F}_2)$。

证明。 (a)–(c) 是显然的。(d) 中，对这两个序列取盒积

$$\bigoplus_{H \in \mathcal{F}_1} F_{G/H} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{F}_1 \to 0 \quad \text{and} \quad \bigoplus_{J \in \mathcal{F}_2} F_{G/J} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{F}_2 \to 0.$$

盒积的右正合性于是给出正合列

$$\bigoplus_{H \in \mathcal{F}_1} F_{G/H} \oplus \bigoplus_{J \in \mathcal{F}_2} F_{G/J} \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/\mathcal{F}_1 \square \mathbb{Z}/\mathcal{F}_2 \to 0$$

结果由第一个映射的余核显然是 $\mathbb{Z}/(\mathcal{F}_1 \cup \mathcal{F}_2)$ 得出。 □

注 3.5. (c) 部分中的子集不一定是等式。例如，取$G = C_2 \times C_2$。令 $\mathcal{F}_1 = \{e, C_2 \times e\}$ 和 $\mathcal{F}_2 = \{e, e \times C_2\}$。那么 $I_{\mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2}(G) = (4)$，而 $I_{\mathcal{F}_1}(G) \cap I_{\mathcal{F}_2}(G) = (2)$。

现在给出一些定义，这些定义有助于描述涉及模 $I_{\mathcal{F}}$ 和 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$的运算。

定义 3.6. 设 $\mathcal{F}$ 是一个子群族，且设 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模。
(1) 若对所有 $H \in \mathcal{F}$，都有 $M(G/H) = 0$，则称 M 为 **$\mathcal{F}$-零**。*(2)* $M\{\mathcal{F}\}$ 定义为所有满足对任意 $H \in \mathcal{F}$，都有 $N \subseteq M$ $(G/H) = M(G/H)$ 的子模 $N \subseteq M$ 的交。*(3)* $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M$ 是 M 的子模，由所有满足以下条件的元素 $x \in M$ 构成：对每个满足 $H \in \mathcal{F}$ 的 $f\colon G/H \to G/K$，都有 $f^*(x) = 0$。

显然，$\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M$ 在拉回下封闭。接下来，为了说明它在前推下也封闭（因此确实如所称是一个子模），注意以下事实：

引理 3.7. 设 $S \to T$ 和 $G/H \to T$ 是 G-集合之间的映射。若 $H \in \mathcal{F}$，则拉回 $G/H \times_T S$ 是不交并，其中各项为 G/K_i，且每个 $K_i \in \mathcal{F}$。
证明。点 $(aH,\ s) \in G/H \times_T S$ 的稳定子是 $aHa^{-1} \cap \mathrm{stab}_G s$，它共轭包含于 H，因此属于 $\mathcal{F}$。□

我们还利用这个引理证明以下关于与 $\mathcal{F}$-零模进行方框积的消失性质：

命题 3.8。设 $\mathcal{F}$ 为一个子群族，设 M 为一个 $\mathbb{Z}$-模，且该模是$\mathcal{F}$-零的。那么 $F_{G/H}\square M = 0$ 对每个 $H \in \mathcal{F}$均成立，并且 $I_{\mathcal{F}}\square M = 0$也成立。
证明。根据命题 2.22，我们知道 $F_{G/H}\square M \cong M^{D(G/H)}$，因此对于每个 G-集 Θ，有$[F_{G/H}\square M](\Theta) \cong M(G/H \times \Theta)$。如果 $H \in \mathcal{F}$，那么根据引理 3.7，G-集 $G/H \times \Theta$ 是不交并，由带有 $K \in \mathcal{F}$ 的 G-集 G/K 组成。但由于假设其为 $\mathcal{F}$-零的，M 在这些点中的每一个处都消失，因此 $F_{G/H}\square M = 0$。

对于第二部分，我们有一个满射 $\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} F_{G/H} \twoheadrightarrow I_{\mathcal{F}}$，因为 $I_{\mathcal{F}}$ 由元素 $1_{G/H}$ 生成，其中 $H \in \mathcal{F}$。与 M 作方框积可得一个诱导满射

$$\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} F_{G/H}\square M \twoheadrightarrow I_{\mathcal{F}}\square M.$$

由于所有的 $F_{G/H}\square M$直和项都消失了，$I_{\mathcal{F}}\square M$也随之消失。□

与经典环论一样，$\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模可以视为被理想 $I_{\mathcal{F}}$湮灭的 $\mathbb{Z}$-模。下面的命题对此作了进一步阐释：

命题 3.9。$\mathbb{Z}$-模 M 是$\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模，当且仅当 M（G/H）$= 0$ 对所有 $H \in \mathcal{F}$ 都成立（即 M 是 $\mathcal{F}$-零的）。

为证明这一点，我们先给出一个引理：

引理3.10。对于任意 $\mathbb{Z}$-模 M，$\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M$都是 $\mathcal{F}$-零的。
证明。回忆一下，我们有一个右正合序列 $\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} F_{G/H} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{F} \to 0$。与 M 作方框积，并在一个 G-集 Θ 上求值，得到

$$\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} M(G/H \times \Theta) \xrightarrow{(\pi\times id)_*} M(pt \times \Theta) \longrightarrow (\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M)(\Theta) \longrightarrow 0.$$

（这里我们使用了注记 2.30 中说明的对应关系。）现在假设 $J \in \mathcal{F}$并取 $\Theta = G/J$。那么（$\pi \times id$）$_*$：M（$G/J \times G/J$）$\to M$（$pt \times G/J$）是满射，这是因为恒等映射（$\pi \times id$）$_* \circ \Delta_* = id$。由此可得（$\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M$）（$G/J$）$= 0$，正如所需。□

命题 3.9 的证明。该引理表明 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M$ 对每个 $\mathcal{F}$-零模 $\mathbb{Z}$-模 M 都成立。若 M 是一个 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模，那么它是 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M$ 的撤回，因为 $M = \mathbb{Z}\square M \to \mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M \to M$ 是恒等映射。由于 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M$ 是 $\mathcal{F}$-零模，因此 M 也是。

反过来，假设 $\mathbb{Z}$-模 M 是 $\mathcal{F}$-零的。那么，由 $I_{\mathcal{F}}\square M = 0$ 命题 3.8，可知 $I_{\mathcal{F}}$ 消灭 M。因此， M 是一个 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模。□

我们利用 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模的这一刻画，证明两个在后续章节中会用到的最后命题。

命题 3.11。对于 M 一个 $\mathbb{Z}$-模，存在自然同构 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M \cong M/M\{\mathcal{F}\}$，使得图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}\square M & = & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M & \xrightarrow{\cong} & M/M\{\mathcal{F}\} \end{array}$$

交换。特别地， $I_{\mathcal{F}}\square M \to \mathbb{Z}\square M = M$ 的像恰好是 $M\{\mathcal{F}\}$。

证明。我们利用 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模与满足 $\mathcal{F}$-零条件的 $\mathbb{Z}$-模之间的对应关系。到 $\mathbb{Z}$-模的遗忘/包含函子有左伴随 $M \mapsto \mathbb{Z}/\mathcal{F}\square M$（按第一种方式看），也有左伴随 $M \mapsto M/M\{\mathcal{F}\}$（按第二种方式看）。因此，这两个函子自然同构。□

命题 3.12。
(a) $\mathbb{Z}$-模 M 是 $\mathcal{F}$-零的，当且仅当 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M = M$。***(b)*** 若 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且 $N \subseteq M$ 是一个 $\mathcal{F}$-零子模，则 $N \subseteq \mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M$。***(c)*** $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M$ 是 M 中最大的 $\mathcal{F}$-零子模。***(d)*** 若 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，则由 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{F}$ 诱导的映射 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/\mathcal{F}, M) \to \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, M) = M$ 是单射，且其像等于 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M$。

证明。 (a)–(c) 是简单的练习。对于 (d)，单射性由 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{F}$ 是满射这一事实得出。模 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/\mathcal{F}, M)$ 是一个 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$-模，因此是 $\mathcal{F}$-零的，所以其像包含在 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}} M$ 中。注意到从 $\mathcal{F}$-零模到 $\mathbb{Z}$-模的包含函子同时以 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}}(-)$ 和 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/\mathcal{F}, -)$ 为右伴随，即可得出结论。因此这两个函子相等。[注：也可以直接证明：将 $\mathrm{Hom}(-, M)$ 作用于右正合序列 $\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} F_{G/H} \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/\mathcal{F} \to 0$，并分析其中的情况。] □

3.13. **与 Bredon 上同调的联系**。这些模 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}$ 特别值得关注，因为它们自然出现在 $RO(G)$-分次 Bredon 上同调的语境中。设 V 为一个非零的 G-表示，并定义集合 $\mathcal{F}_V = \{H \leq G \mid V^H \neq 0\}$。不难验证，该集合构成一个子群族。我们有如下结果：

命题 3.14。设 V 为一个非零的 G-表示。则 $H^V(pt;\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/\mathcal{F}_V$。

证明。这只是对 [DH1，命题 2 的重新诠释。7]。从同构开始 $H^V(pt) \cong \pi_0(AG(S^V))$，其中 AG 表示由……生成的自由阿贝尔群

带基点空间 (S^V,∞)，其中基点 $[\infty]$ 是零元素。为简洁起见，记 M 为 $\pi_0(AG(S^V))$. 接着

$$M(G/J)=[G/J_+,AG(S^V)]_G=[S^0,AG(S^V)]_J$$

其中后者表示带基点的 J等变映射的同伦类，因此仅依赖于 V 作为 J表示。结果 [DH1，命题 2.7]表明右边的群是循环的，由映射 a 生成，该映射将非基点映到 0，且其阶等于最大公约数$\{[J\colon\ H]\,|\,H\le J,\ \ V^H\neq 0\}$。由此立即推出 M 满足命题 3.3 的条件，因此$M\cong\mathbb{Z}/\mathcal{F}_V$。□

关于与 Bredon 上同调的更多联系，见下文第6 节。

4. Homological computations for cyclic groups

本节中，我们专门讨论 $G=C_n$，即阶为 n的循环群。对任意正因子 $d|n$ ，令 $\mathcal{F}_d$ 为 G 中阶整除$\frac{n}{d}$的子群族，它同时也是 $C_{\frac{n}{d}}$的子群族。记$I_d=I_{\mathcal{F}_d}$。我们研究模 $\mathbb{Z}/I_d$的若干一般性质，计算它们的自由分解，然后对任意 $\mathbb{Z}$模 M计算 $\mathrm{Tor}_*(\mathbb{Z}/I_d,\ M)$ 与 $\mathrm{Ext}^*(\mathbb{Z}/I_d,\ M)$。

回忆一下 $\Theta_d=C_n/C_{\frac{n}{d}}$，并且如果 $a|b$那么 $p_a^b\colon\ \Theta_b\to\Theta_a$是典范投影。注意，$I_d\subseteq\mathbb{Z}$ 是由元素 $1_d\in\mathbb{Z}(\Theta_d)$ 生成的理想（等价地，对所有 $1_a\in\mathbb{Z}(\Theta_a)$，由 $d|a$生成）。例如，例 3.1 中给出的 $\mathcal{F}=\{e,C_3\}$ 的族$G=C_{45}$ 是 $\mathcal{F}_{15}$，而理想 I_{15} 由轨道 Θ_{15} 处的恒等元生成。

如果 $d|e$ ，那么注意到 $\mathcal{F}_e\subseteq\mathcal{F}_d$ ，因此 $I_e\subseteq I_d$。我们还有以下关系：

命题 4.1。如果 $d|n$ 且 $e|n$ 那么 $\mathcal{F}_d\cap\mathcal{F}_e=\mathcal{F}_{[d,e]}$ 且 $I_d+I_e=I_{(d,e)}$。

证明。 第一条结论由定义以及 $(\frac{n}{d},\frac{n}{e})=\frac{n}{[d,e]}$ 得出。

对于第二个陈述，我们知道 $I_d\subseteq I_{(d,e)}$ 与 $I_e\subseteq I_{(d,e)}$，因此 $I_d+I_e\subseteq I_{(d,e)}$。为证明另一个包含关系，只需证明 $1_{(d,e)}\in(I_d+I_e)(\Theta_{(d,e)})$。注意到在 $\Theta_{(d,e)}$ 位置，理想 I_d 包含元素 $[p^d_{(d,e)}]_*(1_d)=\ ^d{}_{(d,e)}\cdot 1_{(d,e)}$。同样，理想 I_e 包含元素 $[p^e_{(d,e)}]_*(1_e)=\ ^e{}_{(d,e)}\cdot 1_{(d,e)}$。因此这两个元素都在 I_d+I_e 中。由于 $^d{}_{(d,e)}$ 与 $^e{}_{(d,e)}$ 互素，从而 $1_{(d,e)}$ 在 I_d+I_e 中。故 $I_{(d,e)}\subseteq I_d+I_e$，并且我们已证明等式成立。□

注记 4.2. 并非每个子群族 $\mathcal{F}$ 的 C_n 都具有形式 $\mathcal{F}_d$对某个 d，但确实有 $I_{\mathcal{F}}=I_d$ 对某个 d。为看出这一点，注意到总可以写成 $\mathcal{F}=\bigcup_i\mathcal{F}_{a_i}$ 对某些因子 a_i，因此 $I_{\mathcal{F}}=\Sigma_i I_{\mathcal{F}_{a_i}}=I_{(a_1,\dots,a_s)}$由命题 3.4(b) 与4.1。

我们还注意到，命题 3.4 与 4.1的一个直接推论如下，它给出了熟知事实的一个类似物：$\mathbb{Z}/d\otimes\mathbb{Z}/e\cong\mathbb{Z}/(d,\ e)$。

推论 4.3。 设 d,e 是 n 的因子。则 $\mathbb{Z}/I_d\square\mathbb{Z}/I_e\cong\mathbb{Z}/I_{(d,e)}$。

接下来，我们证明模 $\mathbb{Z}/I_a$ 的一些有用性质。

命题 4.4。 固定 $e|n$。令 M 为一个在 Θ_d 处为$e|d$生成的 $\mathbb{Z}$-模。则 $M\square\mathbb{Z}/I_e=0$。特别地，如果 $e|d$，那么 $F_d\square\mathbb{Z}/I_e=0$ 且 $I_d\square\mathbb{Z}/I_e=0$。

证明。 这由命题 3.11得到： $M\square\mathbb{Z}/I_e \cong M/M\{\mathcal{F}_e\} = M/M = 0$。 □

命题 4.5. 设 $a|n$。 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}/I_a$ 具有以下性质：
(1) $[\mathbb{Z}/I_a](\Theta_d) \cong \mathbb{Z}/\frac{a}{(d,a)}$ 对每个 $d|n$ 都成立（特别地，当 $a|d$ 时，群为零）。
(2) 所有限制映射都是满射，所有转移映射都是单射。*(3)* 对每个 $d|n$， Θ_d 与 $\Theta_{(d,a)}$ 处的值之间的限制映射和转移映射都是同构。

证明。 对于 (1)，由命题 3.2 可知 $[\mathbb{Z}/I_a](\Theta_d)$ 是循环群，其阶等于最大公约数 $\{[C_{n/d} : H] \mid H \in \mathcal{F}_a,\ H \le C_{n/d}\}$。注意，任何这样的 H 都是一个阶为 n/b 的循环群，其中 b 是 n的因子。我们有 $H \in \mathcal{F}_a$，且 $H \le C_{n/d}$当且仅当 $\frac{n}{b} \mid \frac{n}{a}$ 且 $\frac{n}{b} \mid \frac{n}{d}$；也就是说，当且仅当因子 b 是 a和 d的公倍数。因此我们有

$$\gcd\left\{[C_{n/d} : H] \middle| H \in \mathcal{F}_a, H \le C_{n/d}\right\} = \gcd\left\{\tfrac{b}{d} \,\middle|\, [a,d] \text{ divides } b\right\} = \frac{[a,d]}{d} = \frac{a}{(a,d)}.$$

对于 (2)，注意 $\mathbb{Z}$ 中的限制映射都是满射，而且这一性质对任意商也成立。转移映射 $(p_d^e)_* : \mathbb{Z}/\frac{a}{(a,\ e)} \to \mathbb{Z}/\frac{a}{(a,\ d)}$ 将是乘以 $\frac{e}{d}$的映射。$\frac{e}{d}$在 $\mathbb{Z}/\frac{a}{(a,\ d)}$ 中的阶，可通过将 $\frac{a}{(a,\ d)}$ 除以 $\frac{e}{d}$ 与 $\frac{a}{(a,\ d)}$的最大公约数来计算。注意

$$\left(\frac{a}{(a,d)}, \frac{e}{d}\right) = \left(\frac{a}{(a,d)}, \frac{e}{(a,d)}\right) = \frac{(a,e)}{(a,d)} \tag{4.5.1}$$

（见注记1.4）。因此，元素 $\frac{e}{d}$ 的阶为

$$\frac{a}{(a,d)} \cdot \frac{(a,d)}{(a,e)} = \frac{a}{(a,e)}.$$

由于 $\mathbb{Z}/\frac{a}{(a,\ e)}$ 的生成元被映到一个阶为 $a/(a,\ e)$ 的元素，我们由此得出转移映射必为单射。

最后，(3)由(2)得出，因为 $[\mathbb{Z}/I_a](\Theta_d) \cong \mathbb{Z}/\frac{a}{(a,\ d)} \cong [\mathbb{Z}/I_a](\Theta_{(a,d)})$。 □

推论 4.6。 如果映射 $\mathbb{Z}/I_a \to M$ 在 Θ_1 处是单射，那么它在每一处都是单射。

证明。 假设 $[\mathbb{Z}/I_a](\Theta_d) \to M(\Theta_d)$ 的核中含有一个非零元素。对 Θ_1 应用转移映射，得到的元素于是属于 $[\mathbb{Z}/I_a](\Theta_1) \to M(\Theta_1)$ 的核。但根据假设，该核为零。由于 $\mathbb{Z}/I_a$ 中的转移映射是单射，这就产生了矛盾。□

如果 I 与 J 是 $\mathbb{Z}$ 中的理想，则定义 $I \cdot J$ 为 $I\square J \to \mathbb{Z}\square\mathbb{Z} \xrightarrow{\mu} \mathbb{Z}$ 的像。有 $I \cdot J \subseteq I \cdot \mathbb{Z} = I$，同样有 $I \cdot J \subseteq J$，因此 $I \cdot J \subseteq I \cap J$。

推论 4.7。 设 $a|n$ 且 $b|n$。则 $I_a \cap I_b = I_a \cdot I_b = I_{[a,b]}$。此外，自然映射 $I_b/I_{[a,b]} \to I_{(a,b)}/I_a$ 是同构。

证明。 由于 $1_{[a,b]} \in I_a(\Theta_{[a,b]})$ 且 $1_{[a,b]} \in I_b(\Theta_{[a,b]})$，乘积 $1_{[a,b]} \cdot 1_{[a,b]} \in (I_a \cdot I_b)(\Theta_{[a,b]})$。由此可得 $I_{[a,b]} \subseteq I_a \cdot I_b$。

由于 $I_{[a,b]} \subseteq I_a \cdot I_b \subseteq I_a \cap I_b$，只需证明 $I_{[a,b]} = I_a \cap I_b$。设 $d|n$。由命题 4.5(1) 可知， $I_a(\Theta_d) \subseteq \mathbb{Z}$ 是由 $\frac{a}{(a,d)}$ 生成的理想，并且

$I_b(\Theta_d) \subseteq \mathbb{Z}$ 是由 $b_{(b,d)}$生成的理想。因此 $(I_a \cap I_b)(\Theta_d)$ 是由它们的最小公倍数生成的理想。但可以验证，

$$\left[\tfrac{a}{(a,d)}, \tfrac{b}{(b,d)}\right] = \tfrac{[a,b]}{([a,b],d)},$$

以及命题 4.5 说明，右侧的表达式是$I_{[a,b]}(\Theta_d)$的生成元。

同构 $I_b/I_{[a,b]} \to I_{(a,b)}/I_a$ 可由 $I_a + I_b = I_{(a,b)}$ 和$I_a \cap I_b = I_{[a,b]}$ 直接推出（有些教科书称之为“第二同构定理”）。□

命题 4.5 还引出了对命题 3.3的以下改进，为这些模提供了一个实用的“识别定理”

$\mathbb{Z}/I_a$:

命题 4.8。 设 $a|n$。设 M 是一个具有以下性质的 $\mathbb{Z}$-模：

(i) $M(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/a$;

(ii) $M(\Theta_a) = 0$; 以及

(iii) M 中的所有限制映射都是满射。

那么 $M \cong \mathbb{Z}/I_a$。此外，如果 u 是阿贝尔群 $M(\Theta_1)$ 的任意生成元，那么存在唯一的同构 $\mathbb{Z}/I_a \to M$，它将 1_{Θ_1} 映射到 u。

证明。 设 u 是阿贝尔群 $M(\Theta_1)$ 的一个生成元。存在一个诱导映射$\mathbb{Z} \to M$，将 1_{Θ_1} 映射到 u。由于 $M(\Theta_a) = 0$，该映射必将 1_a 映射为 0，因此诱导出一个映射 $\mathbb{Z}/I_a \to M$。按照构造，在 Θ_1 这一位置该映射是满射$\mathbb{Z}/a \to M(\Theta_1)$。由于 $M(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/a$，该映射实际上是一个同构。于是根据推论 4.6，映射 $\mathbb{Z}/I_a \to M$ 是一个单射。

由于 M 中的所有限制映射都是满射，因此映射 $\mathbb{Z}/I_a \to M$ 在每个位置上都是满射。于是，它是一个同构。□

注 4.9。 上述结果在很大程度上依赖于 $\mathbb{Z}/I_{\mathcal{F}}$中的转移映射是单射。这在非循环群上并不总是成立。例如，取 $G = C_2 \times C_2$，并令 $\mathcal{F}$为族 $\{e \times e, e \times C_2\}$。那么，若 $J = C_2 \times e$，转移映射 $\mathbb{Z}/\mathcal{F}(G/J) \to \mathbb{Z}/\mathcal{F}(pt)$ 是零映射 $\mathbb{Z}/2 \to \mathbb{Z}/2$。

我们将经常用到命题 4.8 。下面是第一个应用：

命题 4.10。 设 a 和 b 是 n的因子。那么存在一个同构

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b) \cong \mathbb{Z}/I_{(a,b)}.$$

证明。 命题 3.12(d) 将 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b)$ 与 $\mathrm{Ann}_{\mathcal{F}_a}(\mathbb{Z}/I_b)$ 等同。为简便起见，将这个湮灭子记为 A。由于 $A \subseteq \mathbb{Z}/I_b$ 我们知道 $A(\Theta_1)$ 是循环的。

固定 n 的一个因子 c，并考虑一个映射 $\Theta_e \to \Theta_c$（因此 $c|e$），其中 e 是 a 的倍数。那么我们知道 $\mathbb{Z}/I_b(\Theta_c) = \mathbb{Z}/\,{}^{b}_{(b,c)}$，$\mathbb{Z}/I_b(\Theta_e) = \mathbb{Z}/\,{}^{b}_{(b,e)}$，而限制映射 $\mathbb{Z}/I_b(\Theta_c) \to \mathbb{Z}/I_b(\Theta_e)$ 是自然满射。因此，核由$_b$ $_{(b,e)}$ 生成。综合所有可能的 e，我们发现 $A(\Theta_c)$ 由 $_b$ $_{(b,[a,c])} \in \mathbb{Z}/\,{}^{b}_{(b,c)}$生成。特别地，我们有 $A(\Theta_{(a,b)}) = 0$，且 $A(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/(a,b)$。

当 $c|d$ 时，我们将证明限制映射 $A(\Theta_c) \to A(\Theta_d)$ 是满射。将目标视为包含在 $\mathbb{Z}/\,{}^{b}_{(b,\,d)}$ 中，它由 $^{b}_{(b,\,[a,d])}$生成，而像由 $^{b}_{(b,\,[a,c])}$生成。但它们生成的是同一个子群；这等价于数值恒等式

$$\left(\tfrac{b}{(b,[a,c])}, \tfrac{b}{(b,d)}\right) = \tfrac{b}{(b,[a,c,d])} = \tfrac{b}{(b,[a,d])} = \left(\tfrac{b}{(b,[a,d])}, \tfrac{b}{(b,d)}\right) \tag{4.10.1}$$

(见备注1.4，其中说明了如何证明此类恒等式）。

我们现在已经证明 A 满足命题 4.8的所有条件，因此 $A \cong \mathbb{Z}/I_{(a,b)}$。 □

现在假设 $a|n$ 与 $b|n$。在群 $(\mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b)(\Theta_1)$ 中，考虑元素 $v = [\ {}^{a}_{(a,b)}1_{\Theta_1}, -\ {}^{b}_{(a,b)}1_{\Theta_1}]$。$v$的加法阶恰好是 (a,b) 的最大公约数。令 $M = \langle v\rangle \subseteq \mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b$ 为由 v 生成的子模。那么，每个$M(\Theta_d)$ 都是循环的，所有限制映射都是满射，并且 $M(\Theta_1)$ $\cong \mathbb{Z}/(a,b)$。由于 $[\mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b](\Theta_{(a,b)}) \cong \mathbb{Z}/(\ {}^{a}_{(a,b)}) \oplus \mathbb{Z}/(\ {}^{b}_{(a,b)})$，我们得出 v在此处的像为零，因此 $M(\Theta_{(a,b)}) = 0$。所以根据命题 4.8，我们得出 $M \cong \mathbb{Z}/I_{(a,b)}$，且将 1_{Θ_1} 映到 v 的唯一映射 $\mathbb{Z}/I_{(a,b)} \to M$ 是一个同构。

设 $Q = (\mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b)/M$。所有 $\mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b$ 中的限制映射都是满射，因此 Q也具有同样的性质。注意，$Q(\Theta_1)$ 与 $\mathbb{Z}/[a,b]$同构，这是由构造可知的。最后，$\mathbb{Z}/I_a$ 和 $\mathbb{Z}/I_b$ 在 $\Theta_{[a,b]}$ 处都为零，因此 Q也为零。因此，命题 4.8 表明 $Q \cong \mathbb{Z}/I_{[a,b]}$。我们记录这一分析的结果，以备后用：

命题 4.11。存在一个短正合列

$$0 \to \mathbb{Z}/I_{(a,b)} \to \mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b \to \mathbb{Z}/I_{[a,b]} \to 0$$

在 Θ_1 处取值时，该短正合列就是阿贝尔群的标准短正合列 $0 \to \mathbb{Z}/(a,b)$ $\to \mathbb{Z}/a \oplus \mathbb{Z}/b \to \mathbb{Z}/[a,b] \to 0$。

注4.12。如果 $(a,b) = 1$，那么上述结果给出 $\mathbb{Z}/I_{ab} \cong \mathbb{Z}/I_a \oplus \mathbb{Z}/I_b$。因此，每个 $\mathbb{Z}/I_d$ 都可分解为项 $\mathbb{Z}/I_{\ell_i^{e_i}}$的直和，其中 $d = \prod_i \ell_i^{e_i}$是素因数分解。关于这一分解的另一种方法，见下文命题 4.15(c)。

注释 4.13. 虽然我们已经确立了对象 $\mathbb{Z}/I_a$ 与阿贝尔群 $\mathbb{Z}/a$之间若干形式上的相似性，但应当指出，不应把这一点推得太远。例如，映射 $\mathbb{Z}/I_a \to \mathbb{Z}/I_b$ 的核或余核未必也是一个 $\mathbb{Z}/I_d$ （对某个 d而言）。取 $n = \ell^2$，投影 $\mathbb{Z}/I_{\ell^2} \to \mathbb{Z}/I_\ell$ 与映射 $\mathbb{Z}/I_\ell \to \mathbb{Z}/I_{\ell^2}$（它把 $1_{\Theta_1} \mapsto \ell \cdot 1_{\Theta_1}$映出）给出了简单的反例。参见第5 节，以了解关于这些核与余核的更多内容。

4.14. 单生成模与局部化。模 $\mathbb{Z}/I_a$这一集合，连同 $\mathbb{Z}$ 本身，具有若干共同特征，并经常出现在计算中。为这一类取一个名称是有用的——我们将它们称为**一元生成**模。注意，一元生成 $\mathbb{Z}$-模的盒积仍然是一元生成的。

注意，一元生成并不等同于在 Θ_1 位置由单点集生成。例如，$\mathbb{Z}/2$ 具有后一种性质，但并非一元生成。

下面的结果汇集了若干关于一元生成模的有用结果。首先引入一些记号。若 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且$a \in \mathbb{Z}$，则定义 $\mathrm{Ann}_a(M) \subseteq M$ 为由所有被 a消去的元素组成的子 Mackey 函子。对于正整数 a 和素数 ℓ，记 $a(\ell)$ 为整除 a的 ℓ 的最高次幂。因此，$a = \prod_\ell a(\ell)$，其中乘积遍历所有素数。最后，若一个 $\mathbb{Z}$-模的 ℓ-局部化与某个一元生成 $\mathbb{Z}$-模的ℓ-局部化同构，则称该模“经过 ℓ-局部化后是一元生成的”。

命题 4.15. 设 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模。
(a) 假设 $(a,b)=1$ 与 ab 零化 M。则 $M=Ann_a(M)\oplus Ann_b(M)$。*(b)* 假设 $a|n$、$b|n$ 与 $(a,b)=1$。则 $Ann_a(\mathbb{Z}/I_{ab})\cong\mathbb{Z}/I_a$。*(c)* 若 $a|n$ 与 $b\nmid n$ 与 $(a,b)=1$ 则 $\mathbb{Z}/I_a\oplus\mathbb{Z}/I_b\cong\mathbb{Z}/I_{ab}$。*(d)* 若 ℓ 是一个素数与 $a|n$ 则 $(\mathbb{Z}/I_a)_{(\ell)}\cong\mathbb{Z}/I_{a(\ell)}$。*(e)* 若 M 与 N 是彼此同构的一元生成 $\mathbb{Z}$-模，则任意满射 $M\to N$ 都是同构。*(f)* 假设 M 是有限生成的。若 M 在 ℓ-局部化之后是一元生成的，对每个素数 ℓ，则 M 是一元生成的。若子集 $S\subseteq M$*(pt)*生成 $M_{(\ell)}$，对每个素数 ℓ，则 S 生成 M。

证明。这些大多是初等的。(a) 由如下事实得出：1 是 a 与 b 的线性组合。对于 (b)，我们使用命题 4.8 的识别条件。为方便起见，设 $W=\mathbb{Z}/I_{ab}$。每个阿贝尔群 $W(\Theta_r)$ 都是循环的，因而其 a-湮灭子也是循环的。我们有 $W(\Theta_r)\cong\mathbb{Z}/(\ ^{ab}(r,ab)\ )$，从而 $W(\Theta_1)\cong\mathbb{Z}/(ab)$ 且 $W(\Theta_a)\cong\mathbb{Z}/b$。因此 $(\mathrm{Ann}_a W)(\Theta_1)\cong\mathbb{Z}/a$ 且 $(\mathrm{Ann}_a W)(\Theta_a)=0$。最后，若 $X\to Y$ 是被 ab 湮灭的阿贝尔群之间的满射，则容易验证 $\mathrm{Ann}_a(X)\to\mathrm{Ann}_a(Y)$ 仍为满射（使用如 (a) 中的分解）。因此 $\mathrm{Ann}_a(W)$ 中的所有限制映射都是满射。现在应用命题 4.8。

(c) 部分直接由 (a) 和 (b) 得出。

对于 (d)，注意到 (c) 蕴含 $\mathbb{Z}/I_a\cong\bigoplus_q\mathbb{Z}/I_{a(q)}$，其中 q 遍历所有素数（并注意这是一个有限直和）。由于 $\mathbb{Z}/I_{a(q)}$ 被 q 的某个幂湮灭，因此当 $q\neq\ell$ 时，其 ℓ 局部化为零；当 $q=\ell$ 时则等于其自身。

对于 (e)，只需观察每个 C_n-轨道 Θ 的映射 $M(\Theta)\to N(\Theta)$，并使用循环阿贝尔群的相关性质。

对于（f），首先注意，若一个有限生成阿贝尔群在对所有素数 ℓ 进行 ℓ 局部化后都是循环的，那么它必定是循环的。同样，若一个阿贝尔群映射在对每个素数局部化后都是满射，那么它必定是满射。因此，每个 $M(\Theta_d)$ 都是循环的，并且 M 中的每个限制映射都是满射。

假设 $M(\Theta_1)\cong\mathbb{Z}$，并取一个生成元 g。由此可知，对于每个由 $p^*(g)$ 生成的 $d|n$，$M(\Theta_d)$ 也必定同构于 $\mathbb{Z}$。因此，映射 $\mathbb{Z}\to M$（将 1 映到 g）是满射，故为同构。

若 $M(\Theta_1)\ncong\mathbb{Z}$，则 $M(\Theta_1)$ 是挠的；由限制映射的满射性可知，每个 $M(\Theta_d)$ 也都是挠的。取一个整数 s，使其消去 M，并写作 $s=\ell_1^{e_1}\cdots\ell_k^{e_k}$，其中 ℓ_i 是互不相同的素数。于是由 (a) 可得 $M=\oplus_i\mathrm{Ann}^{\ell_i^{e_i}}(M)$，因此 $M_{(\ell_i)}=\mathrm{Ann}^{\ell_i^{e_i}}(M)$。根据假设，这是一个一元生成的群，故同构于某个 $\mathbb{Z}/I_{\ell_i^{f_i}}$，其中 $f_i\circ$。现在利用 (c) 得出 M 是一元生成的。

最后的结论只是标准的交换代数结果。令 $N\subseteq M$ 为由 S 生成的子Mackey函子。那么对每个 $a|n$，我们都有 $N(\Theta_a)\subseteq M(\Theta_a)$，而这个子集在每个素数处局部化后都相等——因此它们相等。由于这对所有 a 都成立，$N=M$。也就是说，S 生成 M。□

4.16. 的分解。考虑映射序列

$$F_{pt}\xrightarrow{Ip}F_{\Theta_a}\xrightarrow{id-Rt}F_{\Theta_a}\xrightarrow{Rp}F_{pt}. \tag{4.16.1}$$

可以像例2.28中那样验证，这确实是一个链复形。用生成元表示，映射 Rp 将 g_{Θ_a} 映射为 $p^*(g_{pt}) = 1_a \in \mathbb{Z}(\Theta_a)$。因此， Rp 的像恰好是 I_a，而余核是 $\mathbb{Z}/I_a$。

注 4.17. （4.16.1）中复形的写法显然缺乏对称性，但应注意以下复形同构

$$\begin{array}{ccccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_{pt} & \xrightarrow{Ip} & F_{\Theta_a} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{\Theta_a} & \xrightarrow{Rp} & F_{pt} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle id} & & \downarrow{\scriptstyle -Rt^{-1}} & & \downarrow{\scriptstyle -id} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{pt} & \xrightarrow{Ip} & F_{\Theta_a} & \xrightarrow{id-It} & F_{\Theta_a} & \xrightarrow{Rp} & F_{pt} & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

它利用了 $It = Rt^{-1}$ （命题 2.1）以及 $p \circ t^{-1} = p$。此类复形同构——在一个 Rt 与一个 It之间进行转换——在下文中会频繁出现，而且通常会隐含地使用。

当 n 为素数幂时，以下结果的不同形式可见于 [Z，第 3 节。3] 以及 [HHR，命题 3。3]。

命题 4.18. 固定 $n \geq 1$。对于任意 $a|n$，序列

$$0 \longrightarrow F_{pt} \xrightarrow{Ip} F_{\Theta_a} \xrightarrow{id-Rt} F_{\Theta_a} \xrightarrow{Rp} F_{pt} \longrightarrow \mathbb{Z}/I_a \longrightarrow 0$$

是正合的。因此，这是 $\mathbb{Z}/I_a$ 的一个自由分解。从现在起，我们将称其为 $\mathbb{Z}/I_a$ 的标准自由分解 。

证明。 对于任意 $c|n$ ，我们需要在 Θ_c 处计算上述复形，并验证所得阿贝尔群序列在第 1、2、3 度正合（照例，将最右边的 F_{pt} 置于第 0 度）。如备注2.30 所述，此复形同构于

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}(pt \times \Theta_c) \xrightarrow{(\pi\times id)^*} \underline{\mathbb{Z}}(\Theta_a \times \Theta_c) \xrightarrow{id-(t\times id)_*} \underline{\mathbb{Z}}(\Theta_a \times \Theta_c) \xrightarrow{(\pi\times id)_*} \underline{\mathbb{Z}}(pt \times \Theta_c)$$

并且我们需要验证左侧三个位置的正合性。为了理解这个序列，我们将利用一个同构

$$\Theta_a \times \Theta_c \cong \coprod_{i=0}^{(a,c)-1} \Theta_{[a,c]}.$$

为描述这个同构，我们引入占位符 σ^i ，表示余积中 $\Theta_{[a,c]}$ 的第 i个副本。我们有典范投影 $\Theta_{[a,c]} \to \Theta_a$ 和$\Theta_{[a,c]} \to \Theta_c$，并且对于 x ，无论它是定义域中的元素还是它在陪域中的像，我们都用同一个记号表示。根据这些约定，定义

$$F\colon \coprod_{i=0}^{(a,c)-1} \sigma^i\Theta_{[a,c]} \longrightarrow \Theta_a \times \Theta_c$$

由 $\sigma^i x \mapsto (x,\ t^i x)$给出。这诱导出一个 C_n-集的同构，进而得到一个同构

$$\mathbb{Z}^{(a,c)} = \bigoplus_i \underline{\mathbb{Z}}(\Theta_{[a,c]}) \xrightarrow{F_*} \underline{\mathbb{Z}}(\Theta_a \times \Theta_c)$$

其中在第一部分我们用到了 $\underline{\mathbb{Z}}(\Theta_{[a,c]})$ 具有典范生成元 1。由于 F 是一个同构，注意 $F_* = (F^*)^{-1}$ (命题 2.1)。

注意到交换图的存在

$$\begin{array}{ccc} \coprod_i \sigma^i\Theta_{[a,c]} & \xrightarrow{F} & \Theta_a\times\Theta_c \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha} & & \downarrow{\scriptstyle t\times id} \\ \coprod_i \sigma^i\Theta_{[a,c]} & \xrightarrow{F} & \Theta_a\times\Theta_c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \coprod_i \sigma^i\Theta_{[a,c]} & \xrightarrow{F} & \Theta_a\times\Theta_c \\ & {\scriptstyle\beta}\searrow & \downarrow{\scriptstyle \pi_2=\pi\times id} \\ & & \Theta_c \end{array}$$

其中 $\beta(\sigma^i x)=p(t^i x)$ 且

$$\alpha(\sigma^i x)=\begin{cases}\sigma^{i-1}(tx) & \text{when } i>0,\\ \sigma^{(a,c)-1}(t^\epsilon x) & \text{when } i=0\end{cases}$$

并且这里 ϵ 是模 $[a,c]$ 的唯一整数，满足 $\epsilon\equiv 1$ (模a) 且 $\epsilon\equiv 1-(a,\ c)$（模 c）。注意，我们使用拉回图

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/[a,c] & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/c \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/a & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/(a,c) \end{array}$$

来定义 ϵ。

映射 F、α 和 β 给出如下链复形的一个同构：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}(pt\times\Theta_c) & \xrightarrow{(\pi\times id)^*} & \underline{\mathbb{Z}}(\Theta_a\times\Theta_c) & \xrightarrow{id-(t\times id)_*} & \underline{\mathbb{Z}}(\Theta_a\times\Theta_c) & \xrightarrow{(\pi\times id)_*} & \underline{\mathbb{Z}}(pt\times\Theta_c) \\ & & \uparrow{\scriptstyle\cong} & & \uparrow{\scriptstyle (F^*)^{-1}=F_*}\cong & & \uparrow{\scriptstyle F_*}\cong & & \uparrow{\scriptstyle\cong} \\ 0 & \longrightarrow & \mathbb{Z} & \xrightarrow{C} & \bigoplus_i \sigma^i\mathbb{Z} & \xrightarrow{B} & \bigoplus_i \sigma^i\mathbb{Z} & \xrightarrow{A} & \mathbb{Z} \end{array}$$

其中 $A(x)=\overline{\sum_{c}^{[a,c]} x_i}$，$B(x)=(x_0-x_1,\ x_1-x_2,\ \ldots\ldots,\ x_{(a,c)-1}-x_0)$，且 $C(1)=(1,-1,\ \ldots\ldots,\ 1)$。注意到 $A=\beta_*$、$B=id-\alpha_*$ 与 $C=\beta^*$。下方的序列很容易验证是正合的。□

下面的结果几乎是直接的：

命题 4.19。固定 $n\geq 1$ 并令 $a|n$。设 M 是 C_n上的一个 $\mathbb{Z}$-模。那么对于任意 $c|n$，值 $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_a, M)(\Theta_c)$ 同构于该复形的第 i 次上同调

$$0\longleftarrow M(\Theta_c)\xleftarrow{p^*} M(\Theta_{[a,c]})\xleftarrow{id-(t^*)^{\epsilon+(a,c)-1}} M(\Theta_{[a,c]})\xleftarrow{p_*} M(\Theta_c)\longleftarrow 0$$

其中最右侧的 $M(\Theta_c)$ 处于上同调次数 0，并且 ϵ 是模 $[a,c]$ 意义下满足 $\epsilon\equiv 1$ (模 a) 且 $\epsilon\equiv 1-(a,c)$ (模 c) 的唯一整数。

证明。将 $\mathrm{Hom}(-,M)$ 应用于命题 4.18 中的分解，并在 Θ_c处求值。根据备注 2.30，得到以下序列

$$0\longleftarrow M(pt\times\Theta_c)\xleftarrow{(\pi\times id)_*} M(\Theta_a\times\Theta_c)\xleftarrow{id-(t\times id)^*} M(\Theta_a\times\Theta_c)\xleftarrow{(\pi\times id)^*} M(pt\times\Theta_c).$$

接下来，完全按照上述证明中的方法使用映射 F、α 和 β，便得到下图中的上方复形：

$$\begin{array}{ccccccccccc} 0 & \leftarrow & M(\Theta_c) & \xleftarrow{S} & \bigoplus_{i=0}^{r} \sigma^i M(\Theta_{[a,c]}) & \xleftarrow{T} & \bigoplus_{i=0}^{r} \sigma^i M(\Theta_{[a,c]}) & \xleftarrow{U} & M(\Theta_c) & \leftarrow & 0. \\ & & & \nwarrow^{p_*} & \uparrow{\scriptstyle Q} & & \uparrow{\scriptstyle R} & \nearrow_{p^*} & & & \\ & & & & M(\Theta_{[a,c]}) & \xleftarrow{id-(t^*)^{\epsilon+(a,c)-1}} & M(\Theta_{[a,c]}) & & & & \end{array}$$

这里，最右侧的 $M(\Theta_c)$ 位于上同调次数 0，$r = (a, c) - 1$，映射定义如下：

$$\begin{aligned} S(y_0, \dots, y_r) &= p_* y_0 + p_* t_* y_1 + p_* (t_*)^2 y_2 + \cdots + p_* (t_*)^r y_r, \\ T(y_0, \dots, y_r) &= (y_0 - (t^*)^\epsilon y_r,\ y_1 - t^* y_0,\ y_2 - t^* y_1,\ \dots,\ y_r - t^* y_{r-1}), \\ U(z) &= (p^* z, p^*(t^* z), p^*((t^*)^2 z), \dots, p^*((t^*)^r z)). \end{aligned}$$

最后，将垂直映射定义为

$$Q(x) = (x, 0, \dots, 0), \quad R(x) = (x, t^* x, (t^*)^2 x, \dots, (t^*)^r x)$$

由此可使图交换，并得到链复形的拟同构，因为容易验证，T 的核与余核和 $id - (t^*)^{\epsilon+(a,c)-1}$的核与余核相同。□

命题 4.20。固定 $n \geq 1$，设 a 和 b是 n的因子。那么$\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/I_{(a,b)} & \text{当 } i = 0\text{时为3，否则为0。} \\ - \quad - \end{cases}$

注 4.21。注意，由 (2.21.1) 可知，在 pt处取值可得

$$\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/(a,b) & \text{if } i = 0, 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

命题 *4.20* 的证明。设 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，其中所有 t^* 映射都是恒等映射。根据命题 4.19，对于任意 $c|n$，群 $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_a, M)(\Theta_c)$ 可由以下复形计算

$$0 \leftarrow M(\Theta_c) \xleftarrow{p_*} M(\Theta_{[a,c]}) \xleftarrow{0} M(\Theta_{[a,c]}) \xleftarrow{p^*} M(\Theta_c) \leftarrow 0.$$

现在取 $M = \mathbb{Z}/I_b$。此时所有限制映射都是满射，所有转移映射都是单射，因此立即得到 $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b) = 0$ 当 $i = 1, 2$。接下来，我们利用命题 4.8 中的识别定理来计算 Ext^3。

对于 $M = \mathbb{Z}/I_b$，上述复形具有如下形式

$$0 \leftarrow \mathbb{Z}/r \xleftarrow{S} \mathbb{Z}/s \xleftarrow{0} \mathbb{Z}/s \xleftarrow{U} \mathbb{Z}/r \leftarrow 0$$

其中 $r = {}^{b}(b,c)$，$s = {}^{b}(b,[a,c])$，而这些映射分别为 $U(x) = \bar{x}$、$S(x) = \frac{r}{s} \cdot x$。这里$x \mapsto \bar{x}$ 是典范投影 $\mathbb{Z}/r \to \mathbb{Z}/s$（注意 $s|r$）。特别地，我们发现 $\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b)(\Theta_{(a,b)}) = 0$，且 $\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b)(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/(a,b)$。最后，注意到命题 4.19 的证明表明，对于任意 M，$\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a, M)$ 是 M 的一个商。由于 $\mathbb{Z}/I_b$ 中的限制映射都是满射，$\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b)$ 也如此。因此，由命题 4.8 可得 $\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b) \cong \mathbb{Z}/I_{(a,b)}$，正如所需。

Ext^0 的计算也可以用这种方式进行，但事实上我们早已从另一个角度在命题 4.10 中完成了这项计算。□

注4.22. 更一般地，由命题4.19 可知，对于任意$\mathbb{Z}$-模 M都有 $\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_a, M) \cong M/M\{\mathcal{F}_a\} = M\square\mathbb{Z}/I_a$，当然 $\mathrm{Ext}^0(\mathbb{Z}/I_a, M) \cong \mathrm{Ann}_{\mathcal{F}_a}(M)$。证明留给读者。不过，对于一般的 ^{1} 和 Ext^2 的计算，我们还不知道有什么简洁的描述 M。

命题4.23. 我们有 $\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/I_a & \text{当 } i = 3 \text{ 时，否则为 } 0 \text{。} \end{cases}$

证明. 这是一个简单的计算，使用与命题4.20的证明中相同的分析即可。或者可以注意到，命题$\mathbb{Z}/I_a$ 中给出的分解4.18是自对偶的，也就是说，应用 $\mathrm{Hom}(-,\mathbb{Z})$ 会得到一个与原分解同构的复形（见注记 4.17）。□

接下来我们讨论类似的 Tor 计算。这些计算可以完全按照我们进行 Ext 计算的方式完成，但实际上，利用标准分解的对偶性，我们可以免费得到它们:

命题 4.24。 存在关于 M 函子性的同构，其形式为

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i(\mathbb{Z}/I_a, M) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^{3-i}(\mathbb{Z}/I_a, M)$$

对所有 i均成立。

证明。 令 $J_\bullet \to \mathbb{Z}/I_a$ 为标准分解。我们有复形同构 $\mathrm{Hom}(J_\bullet, M) \cong \mathrm{Hom}(J_\bullet, \mathbb{Z})\square M$，由推论 2.26可得。利用命题 2.22，可知 $\mathrm{Hom}(J_\bullet, \mathbb{Z})$ 同构于复形

$$0 \longleftarrow F_{pt} \xleftarrow{Rp} F_{\Theta_a} \xleftarrow{id-It} F_{\Theta_a} \xleftarrow{Ip} F_{pt} \longleftarrow 0$$

其中最右边的 F_{pt} 位于次数 0。因此 $\mathrm{Hom}(J_\bullet, \mathbb{Z}) \cong \Sigma^{-3} J_\bullet$，如备注4.17所示。这就得到了所需的同调群同构。□

命题4.25。 设 a 和 b是 n的因子。那么

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i(\mathbb{Z}/I_a, \mathbb{Z}/I_b) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/I_{(a,b)} & \text{if } i = 0, 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

证明。 显然。□

4.26. **再做一些计算。** 有时需要知道 $\mathrm{Tor}_*(I_a, I_b)$、$\mathrm{Tor}_*(I_a, \mathbb{Z}/I_b)$，或者它们的 Ext 类似物。这些可以利用短正合列 $0 \to I_b \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/I_b \to 0$ 以及我们已经完成的计算求出。答案如下:

命题 4.27。

- $\underline{\mathrm{Ext}}^{3-i}(\mathbb{Z}/I_a, I_b) \cong \underline{\mathrm{Tor}}_i(\mathbb{Z}/I_a, I_b) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/I_{(a,b)} & \text{if } i = 2, \\ I_{(a,b)}/I_a & \text{if } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$
- $\underline{\mathrm{Tor}}_i(I_a, I_b) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}/I_{(a,b)} & \text{if } i = 1, \\ I_{[a,b]} & \text{if } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$

特别地，注意这些同构

$$\mathbb{Z}/I_a \square I_b \cong I_{(a,b)}/I_a \qquad and \qquad I_a \square I_b \cong I_{[a,b]}.$$

证明。 Ext 与 Tor 之间的对偶来自命题 4.24。Tor 的计算$_i$ 对于 $i > 0$ 可由长正合 Tor 序列立即得出。剩下的只有进行 Tor$_0$ 计算。

对于任意 $\mathbb{Z}$-模 M，形式上有 $M \square \mathbb{Z}/I_a \cong M/(I_a \cdot M)$，因此 $I_b \square \mathbb{Z}/I_a \cong I_b/(I_a \cdot I_b)$。但推论 4.7给出了 $I_a \cdot I_b$与 $I_{[a,b]}$的对应关系，并且还给出 $I_b/(I_a \cdot I_b) = I_b/I_{[a,b]} \cong I_{(a,b)}/I_a$。

最后，取正合列 $0 \to I_b \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/I_b \to 0$ 并与 I_a作张量积，得到 $0 \to I_a \square I_b \to I_a \to I_a \square \mathbb{Z}/I_b \to 0$。这个序列仍然正合，因为 Tor$_1(I_a, \mathbb{Z}/I_b) = 0$。由此可知，$I_a \square I_b$ 同构于它在 I_a中的像，而这恰好就是 $I_a \cdot I_b = I_{[a,b]}$。 □

4.28.**同调维数**。到目前为止，我们所做的所有同调计算在次数大于三时都消失了，这并非巧合。正如 [Z], 中所解释的，以下结果证明于 [BSW]。由于 [BSW], 中的陈述并非完全明了，我们在此略述证明。

命题 4.29。 当 $G = C_n$ 时，每个有限生成的 $\mathbb{Z}$-模都有一个长度不超过三的投射分解。

证明。论证引自 [BSW，命题 7.1] 的证明。设 M 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-模。那么存在一个满射 $f_0 : F_0 \to M$，其中 F_0 是自由模的有限直和；同样，也存在一个满射 $F_1 \to \ker(f_0)$，其中 F_1 是自由模的有限直和。由命题 2.20，我们可以写成 $F_0 = \mathrm{FP}(W_0)$ 和 $F_1 = \mathrm{FP}(W_1)$，其中 W_0 和 W_1 是有限生成的置换模。复合映射 $F_1 \to \ker(f_0) \hookrightarrow F_0$ 根据 (ev_G, FP)-伴随，与映射 $W_1 = \mathrm{FP}(W_1)(G) \to W_0$ 伴随。这意味着 $F_1 \to F_0$ 等于映射 $\mathrm{FP}(W_1 \to W_0)$。

令 $K = \ker(W_1 \to W_0)$。那么 $0 \to \mathrm{FP}(K) \to \mathrm{FP}(W_1) \to \mathrm{FP}(W_0)$ 显然是正合的。现在我们来到关键之处： [A，推论 4.8]表明，对于任意有限生成的 $\mathbb{Z}[C_n]$-模 K， $\mathbb{Z}$-模 $\mathrm{FP}(K)$ 存在长度至多为一的投射分解。将其拼接到 $F_1 \to F_0 \to M \to 0$ 序列中可知， M 存在长度至多为三的投射分解。 □

5. More $\mathbb{Z}$-modules

到目前为止，我们已经介绍了 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模 I_d 和 $\mathbb{Z}/I_d$，其中 $d|n$。本节将介绍一批“新一轮”的有用对象，其中包括商 I_a/I_b，我们在命题4.27中已经看到它们的出现。与阿贝尔群范畴不同，有限生成不可分解 $\mathbb{Z}$-模（在某种技术意义上）通常没有合理的描述——模理论是“野性”的。因此，我们不应指望这一过程会有终结。计算做得越多，就越可能遇到新的模。

5.1. **挠模**。 取 b和 c，它们都整除 n。映射 $\mathbb{Z}/I_c \to \mathbb{Z}/I_b$由 1_{pt}在 $\mathbb{Z}/I_b(pt) = \mathbb{Z}/b$中的像唯一确定，该像可以是任意被 c湮灭的元素 x。这就是 $b|cx$ 的条件，而映射 $\mathbb{Z}/I_c \to \mathbb{Z}/I_b$ 可以视为乘以-x。此映射的余核和核将 — —

记为如下形式：

$$\underline{\mathbb{Z}}/(I_b, x) = \operatorname{coker}\big(\underline{\mathbb{Z}}/I_c \xrightarrow{x} \underline{\mathbb{Z}}/I_b\big) \qquad \text{and} \qquad \tfrac{I_b\colon x}{I_c} = \ker\big(\underline{\mathbb{Z}}/I_c \xrightarrow{x} \underline{\mathbb{Z}}/I_b\big).$$

为了解释后一个记号，回顾冒号理想 $I_b\colon\ x = \{y \in \mathbb{Z} \mid xy \in I_b\}$（这里我们将 x 视为整数）。可以看出，假设 $b|cx$ 蕴含 $I_c \subseteq I_b\colon\ x$，尽管这并非显然。回顾在位置 Θ_d 有 $I_b(\Theta_d) = (\ ^{b}/_{(b,d)})$ 以及 $I_c(\Theta_d) = (\ ^{c}/_{(c,d)})$，该命题归结为 $b|cx \Rightarrow\ ^{b}/_{(b,d)} \mid\ ^{c}/_{(c,d)}x$。对每个素数 ℓ 考察 ℓ-进赋值，即可验证这一最终陈述。

注意，当 $x = 1$（因此 $b|c$）时，有 $I_b\colon\ x = I_b$ 以及短正合列

$$0 \to I_b/I_c \to \underline{\mathbb{Z}}/I_c \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b \to 0.$$

如果 $b|c$，那么我们还有典范包含 $\mathbb{Z}/I_b \subseteq \mathbb{Z}/I_c$（对应于乘以 $\frac{c}{b}$），从而得到短正合列

$$0 \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b \hookrightarrow \underline{\mathbb{Z}}/I_c \to \underline{\mathbb{Z}}/(I_c, \tfrac{c}{b}) \to 0.$$

命题 5.2. 设 b, c, d 是 n 的因子，并假设 $b|cx$。

(a) $[\underline{\mathbb{Z}}/(I_b, x)](\Theta_d)$ 是一个阶为 $(\ ^{b}/_{(b,d)}\,x)$ 的循环群。

(b) $[\tfrac{I_b\colon x}{I_c}](\Theta_d)$ 是一个阶为 $^{(bc,cxd)}/_{(bc,bd)}$ 的循环群。

特别地，$[\underline{\mathbb{Z}}/(I_b, x)](\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/(b, x)$ 以及 $[\tfrac{I_b\colon x}{I_c}](\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/\,^{(bc,cx)}/_{b}$。此外，若 $b|c$，则 $I_b/I_c(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/(\frac{c}{b})$。

证明。关于 $\mathbb{Z}/(I_b, x)$ 的结论可由命题 4.5 立即得到。对于 (b)，利用对于任意整数 P, Q，$\mathbb{Z}/P \xrightarrow{x} \mathbb{Z}/Q$ 的核是一个阶为 $^{P}/_{(Q,x)}Q$ 的循环群。在本例中，$P = \ ^{c}/_{(c,d)}$ 和 $Q = \ ^{b}/_{(b,d)}$，并注意到

$$\frac{Q}{(Q,x)} = \frac{\frac{b}{(b,d)}}{(\frac{b}{(b,d)}, x)} = \frac{b}{(b, x(b,d))} = \frac{b}{(b, xd)}.$$

最后，

$$P \cdot \frac{(Q,x)}{Q} = \frac{c}{(c,d)} \cdot \frac{(b,xd)}{b} = \frac{(bc, cxd)}{(bc, bd)}.$$

□

要描述 $\mathbb{Z}/(I_b,\ x)$ 和 $^{I_b\colon x}/_{I_c}$ 中的限制映射与转移映射很复杂，我们不会进一步探讨。

我们刚刚引入的 $\mathbb{Z}$-模出现在涉及 I_a/I_b 模的 Ext 和 Tor 计算中：

命题 5.3. 设 b、c、d 是 n 的因子，并假设 $b|c$。

$$(a)\ \underline{\operatorname{Ext}}^{3-i}(\underline{\mathbb{Z}}/I_d, I_b/I_c) \cong \underline{\operatorname{Tor}}_i(I_b/I_c, \underline{\mathbb{Z}}/I_d) \cong \begin{cases} \frac{I_{(b,d)}\colon \frac{c(b,d)}{b(c,d)}}{I_{(c,d)}} & \text{if } i = 3, \\ \underline{\mathbb{Z}}/(I_{(b,d)}, \frac{c(b,d)}{b(c,d)}) & \text{if } i = 2, \\ 0 & \text{if } i = 1,\ i \geq 4, \\ I_{(b,d)}/I_{(c,d)} & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

$$(b)\ \underline{\mathrm{Ext}}^i(I_b/I_c, \underline{\mathbb{Z}}/I_d) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}}/(I_{(c,d)}, \frac{c}{b}) & \text{if } i = 3, \\ \frac{I_{(c,d)} : \frac{c}{b}}{I_{(b,d)}} & \text{if } i = 2, \\ 0 & \text{if } i = 1 \text{ or } i \geq 4, \\ \underline{\mathbb{Z}}/(I_{(c,d)}, \frac{(c,d)}{(b,d)}) & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

证明. 证明只需对由 $0 \to I_b/I_c \to \mathbb{Z}/I_c \to \mathbb{Z}/I_b \to 0$ 诱导的长正合列进行计算。关键步骤是将投影 $\mathbb{Z}/I_c \twoheadrightarrow \mathbb{Z}/I_b$ 提升为分解之间的映射，并注意到这个提升在次数 3 时是乘以 $\frac{c}{b}$。由此可立即得到 (b) 部分。

对于 (a) 的 Tor 部分，需要计算由 $\mathbb{Z}/I_c \to \mathbb{Z}/I_b$ 诱导的 $\underline{\mathrm{Tor}}_3(-, \underline{\mathbb{Z}}/I_d)$ 上的映射。–这归结为分析与 $\mathbb{Z}/I_d$作方框积之后的 pt-位置，从而得到图 –

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/d & \xrightarrow{\cdot \frac{c}{b}} & \mathbb{Z}/d \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}/\frac{d}{(d,\ c)} & \twoheadrightarrow & \mathbb{Z}/\frac{d}{(d,\ b)}. \end{array}$$

竖直映射的核给出 $\mathrm{Tor}_3(\mathbb{Z}/I_c, \mathbb{Z}/I_d)(pt)$ 与 $\underline{\mathrm{Tor}}_3(\underline{\mathbb{Z}}/I_c, \mathbb{Z}/I_d)(pt)$，它们分别由 $^{d}_{(d,c)}$ 与 $^{d}_{(d,b)}$ 生成。核上的诱导映射将 ——

$$\tfrac{d}{(d,c)} \mapsto \tfrac{c}{b} \cdot \tfrac{d}{(d,c)} = \tfrac{c(b,d)}{b(c,d)} \cdot \tfrac{d}{(d,b)},$$

因此在 H_3 中，该生成元被映为目标生成元的 $^{c\ b\ d}_{b\ c\ d}{}_{,(,)}$ 倍。

最后，(a) 中的 Ext-Tor 对偶来自命题 4.24。 □

5.4. **的形式** $\mathbb{Z}$。 沿用 [HHR] 和 [Z] 的做法，将“ $\mathbb{Z}$的形式”定义为：任意一个 $\mathbb{Z}$-模，其在每个轨道上的取值都同构于 $\mathbb{Z}$。作为最初的例子，注意到每个 I_d 都是 $\mathbb{Z}$ 的形式。Bredon 上同调群 $H_{C_n}^{\lambda_b - \lambda_c}(pt)$ 也可证明是 $\mathbb{Z}$ 的形式（见第6节），这正是研究它们的主要原因。

下面两个引理将会派上用场：

引理 5.5. 设 X 是 $\mathbb{Z}$的形式。那么， X 中的每个限制映射和转移映射都是单射，并且每个 t-映射都是恒等映射。若 $e = d \cdot \ell$，其中 ℓ 是素数，且p： $\Theta_e \to \Theta_d$ 是投影，那么作为映射， $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ 中的 p_* 和 p^* 都是乘以集合 $\{\pm 1, \pm \ell\}$ 中某个元素的映射。

证明。 选取一个轨道 Θ_d 并考虑 π： $\Theta_d \to \Theta_1$。那么 $\pi_*\pi^*$ 是乘以d 的映射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，且为单射。因此， π^* 和 π_* 都是$\mathbb{Z}$之间的非零映射，因而都是单射。对于每一对限制与转移，类似的思路都适用。

t^* 映射在 $X(\Theta_d)$上是一个从 $\mathbb{Z}$到自身的自同构，因此它是乘以 1 或 -1的映射。它还必须满足 $t^*\pi^* = \pi^*$。由于 π^* 非零， t^* 必定是乘以 1 的映射。

命题的最后一个陈述成立，因为 p_*p^* 是乘以ℓ 的映射，且 ℓ是素数。□

引理 5.6。 假设 X 是 $\mathbb{Z}$ 的一种形式，且 $0 \to X \to Y \to K \to 0$ 是一个正合列，其中

（*1*） K 的值全都是循环挠群，并且

(2) K 中的转移映射全都是单射。

如果 $Y(pt)$ 是无挠的，那么 Y 也是 $\mathbb{Z}$的一种形式。（K 的例子包括模$\mathbb{Z}/I_d$ 或这类模的任意子模。）

证明。 我们将短正合列作用于轨道 Θ_d 和 Θ_1，得到

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & X(\Theta_d) & \longrightarrow & Y(\Theta_d) & \longrightarrow & K(\Theta_d) & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_*} & & \\ 0 & \longrightarrow & X(\Theta_1) & \longrightarrow & Y(\Theta_1) & \longrightarrow & K(\Theta_1) & \longrightarrow & 0. \end{array}$$

在上面一行中，左项同构于 $\mathbb{Z}$，右项则是某个e的 $\mathbb{Z}/e$。因此，如果我们能证明中间的群是非挠的，它就会同构于$\mathbb{Z}$，这样就完成了。

根据假设，右侧的垂直转移映射是单射，且 $Y(\Theta_1)$ 是非挠的。由此通过简单的图表追踪可知， $Y(\Theta_d)$ 不可能含有挠元，因此必有 $Y(\Theta_d) \cong \mathbb{Z}$。□

我们把满足 $\begin{smallmatrix} d \\ c \end{smallmatrix}$ 为素数的投影 $\Theta_d \to \Theta_c$ 称为**初等投影**，并把与这些投影对应的前推和拉回称为 C_n-Mackey函子中的**初等映射**。所有标准投影都是初等投影的复合，因此标准投影的所有前推和拉回都由这些初等投影所决定。

对于一般的 n，设 $e|n$ 与 $d|e$。记$e = \prod_i \ell_i^{e_i}$与$d = \prod_i \ell_i^{d_i}$，其中 ℓ_i 是 n的互异素因子。定义一个 $\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}(e;d)$，它在每个轨道上等于 $\mathbb{Z}$，并且其初等映射定义如下。在满足$k = \prod_i \ell_i^{k_i}$的轨道 Θ_k 处，我们有从 Θ_k沿每个 ℓ_i-方向发出的初等限制映射和转移映射：

- 若 $k_i \geq e_i$ 或 $k_i < d_i$，则限制映射为恒等映射。若 $k_i \in [d_i, e_i)$，则限制映射为乘以 ℓ_i。
- 若 $k_i \geq e_i + 1$ 或 $k_i \leq d_i$，则转移映射是乘以 ℓ_i。若$k_i \in (d_i,\ e_i]$，则转移映射是恒等映射。

这定义了一个 $\mathbb{Z}$-模，我们将其记作 $\mathbb{Z}(e;\ d)$。图5.4给出了一个有帮助的示意图：将 C_n-Mackey函子表示为通常的矩形网格，我们在 Θ_e 和 Θ_d 位置标上点，然后在不同区域中画出限制映射（图中恰好有两个素数，因此$n = \ell_1^{\alpha_1}\ell_2^{\alpha_2}$）。注意，转移映射由相应的限制映射唯一确定，因为这对总是为（1，ℓ_i）或（ℓ_i，1）。

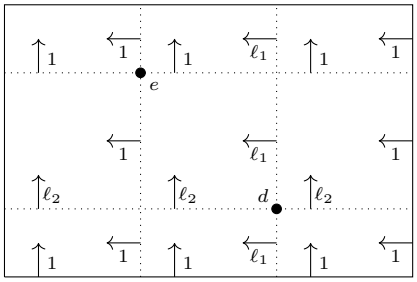


FIGURE 2. $\mathbb{Z}$-模_$\mathbb{Z}(e;d)$ 及其限制映射。

点 Θ_d 上方和左侧的图示部分恰好对应于 $\mathbb{Z}$-模 I_e。稍加思考可知，我们有一个短正合列

$$0 \to I_e \to \underline{\mathbb{Z}}(e;d) \to \underline{\mathbb{Z}}/I_d \to 0.$$

另请注意，$\underline{\mathbb{Z}}(e;1) \cong I_e$。由定义可轻易得到以下结果：

命题 5.7。设 b 和 c 是 n 的因子。那么存在一个同构 $\underline{\mathbb{Z}}([b,c];b) \cong \underline{\mathbb{Z}}(c;(b,c))$。

证明。设 $b = \prod_i \ell_i^{b_i}$ 和 $c = \prod_i \ell_i^{c_i}$，使得 $[b,c] = \prod_i \ell_i^{\max(b_i,c_i)}$ 且 $(b,c) = \prod_i \ell_i^{\min(b_i,c_i)}$。在定义 $\underline{\mathbb{Z}}([b,c];b)$ 的限制映射时，相关区间为 $[b_i, \max(b_i,c_i))$；而对于 $\underline{\mathbb{Z}}(c;(b,c))$，相关区间为 $[\min(b_i,c_i)\ c_i)$。若 $c_i \geq b_i$，则这两个区间相同；而若 $c_i < b_i$，则两个区间都为空，因此也相同。因此，$\underline{\mathbb{Z}}([b,c];\ b)$ 和 $\underline{\mathbb{Z}}(c;(b,c))$ 具有相同的限制映射，因而也具有相同的转移映射。□

注 5.8。下面给出 $\underline{\mathbb{Z}}(e;d)$ 的另一种有用描述。回忆一下，对于每个轨道 Θ_k，我们记作 $k = \prod_i \ell_i^{k_i}$。对于每个 i，定义函数

$$\gamma_{[d_i,e_i)}(f) = \begin{cases} 0 & \text{if } f < d_i, \\ f - d_i & \text{if } d_i \leq f \leq e_i, \\ e_i - d_i & \text{if } f > e_i. \end{cases}$$

那么，$\underline{\mathbb{Z}}(e;d)$ 是 $\mathbb{Q}$ 的子 Mackey 函子，其在 Θ_k 处的取值是由 $\prod_i \ell_i^{-\gamma_i(k_i)}$ 生成的 $\mathbb{Z}$-子模。

命题 5.9。对于所有 d 和 e，其中 $d|e$、$\underline{\mathbb{Z}}(e;\ d) \otimes \mathbb{Q} \cong \underline{\mathbb{Q}}$。

证明。这几乎可以从注 5.8 中的描述直接看出。但它也可以直接由正合列 $0 \to I_e \to \underline{\mathbb{Z}}(e;\ d) \to \underline{\mathbb{Z}}/I_d \to 0$ 和 $0 \to I_e \to \underline{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}/I_e \to 0$ 得出。□

最后，我们再给出一种 $\underline{\mathbb{Z}}(e;\ d)$ 的另一种构造。这在某些方面是最简洁的方法。考虑映射 $r\colon\ \underline{\mathbb{Z}} \oplus \underline{\mathbb{Z}}/I_d \to \underline{\mathbb{Z}}/I_e$，它在第一个因子上是典范投影，而在第二个因子上将 $1_{pt} \mapsto \frac{e}{d} \cdot 1_{pt}$ 映射为。这个第二个映射是单射（利用命题 4.5）以及一些简单的数值计算），因此核 $\ker\ r$ 是 $\mathbb{Z}$ 的一种形式。包含映射 $I_e \hookrightarrow \underline{\mathbb{Z}}$ 经过 $\ker r$，并且利用该图进行图表追踪（或者，如果你愿意，也可使用之字形引理）

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I_e & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}/I_e & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow = & & \\ 0 & \longrightarrow & \text{核}\, r & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}} \oplus \underline{\mathbb{Z}}/I_d & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}/I_e & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

表明 $I_e \hookrightarrow$ 核 r 的余核是 $\mathbb{Z}/I_d$。稍加思考便可直接证明核 $r \cong \underline{\mathbb{Z}}(e;\ d)$，或可使用下文命题 5.10。

接下来我们注意到，$\underline{\mathbb{Z}}(e;d)$ 是某一扩张问题的唯一解。

命题5.10. 假设 $0 \to I_e \to X \to \underline{\mathbb{Z}}/I_d \to 0$ 是一个短正合列，其中 $X(pt)$ 无挠。那么 $d|e$ 与 $X \cong \underline{\mathbb{Z}}(e;d)$。此外，$\mathrm{Ext}^1(\underline{\mathbb{Z}}/I_d, X) = 0$。

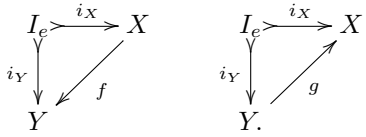
证明. 称满足命题条件的 X 为**型** $(e; d)$。将 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/I_d, -)$ 作用于该短正合列，得到

$$0 \to \mathbb{Z}/d \to \mathbb{Z}/(d,e) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_d, X) \to 0$$

这里我们用到了 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/I_d, X) = 0$ （因为 $X(pt)$ 是无挠的），$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_d, I_e) \cong \mathbb{Z}/(d, e)$，以及 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_d, \mathbb{Z}/I_d) = 0$。要使正合列中的左映射成为单射，必须有 $(d, e) = d$，或者 $d|e$。但这样左映射就是单射 $\mathbb{Z}/d \to \mathbb{Z}/d$，因而是同构。因此 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_d, X) = 0$。

现在令 Y 是另一个类型为 $(e; d)$ 的模。将 $\mathrm{Hom}(-, Y)$ 作用于序列 $0 \to I_e \to X \to \mathbb{Z}/I_d \to 0$，并利用 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_d, Y) = 0$，可知 $\mathrm{Hom}(X, Y) \to \mathrm{Hom}(I_e, Y)$ 是一个同构。类似地，$\mathrm{Hom}(X, X) \to \mathrm{Hom}(I_e, X)$ 是一个同构。

根据上述同构结论（以及将 X 和 Y 互换后得到的类似结论），我们得到映射 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon Y \to X$，使下列三角图交换：



于是 $gfi_X = i_X$，由我们的同构 $\mathrm{Hom}(X, X) \to \mathrm{Hom}(I_e, X)$ 可知 $gf = id_X$。类似的论证表明 $fg = id_Y$，因此 $X \cong Y$。

我们现在已经证明，任意两个类型为 $(e; d)$ 的模都同构。由于 $\mathbb{Z}(e; d)$ 和 X 都是这样的模，故 $X \cong \mathbb{Z}(e; d)$。□

下面的推广眼下并非特别重要，但留作日后备用很有好处。

推论 5.11. 设 $\mathbb{Z}$-模 X 有一个滤过 $X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_s = X$，满足性质 $X_0 \cong I_e$ 和 $X_i/X_{i-1} \cong \mathbb{Z}/I_{d_i}$ 对所有 $i \geq 1$ 都成立。另设 $X(pt)$ 是无挠的。那么，对所有 i，$d_i|e$；当 $i \neq j$ 时，$(d_i, d_j) = 1$；并且 $X \cong \mathbb{Z}(e; \prod_i d_i)$（注意，$\prod_i d_i$ 整除 e）。

证明。首先注意到 X/X_0 有一个滤过 $\{X_i/X_0\}_i$，其商为 $\mathbb{Z}/I_{d_i}$。由于对任意 b 和 c，$\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_b, \mathbb{Z}/I_c) = 0$，因此可得 $X/X_0 \cong \bigoplus_i \mathbb{Z}/I_{d_i}$。我们可以对这个模进行滤过，使其商以任意顺序为 $\mathbb{Z}/I_{d_i}$，所以 X 也同样成立。换言之，我们可以改变原来的滤过，从而重新排列 d_i。

模 X_1 属于命题5.10 中所讨论的类型，因此我们得出 $d_1|e$ 且 $\mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_{d_1}, X_1) = 0$。

将 $\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/I_{d_1}, -)$ 应用于 $0 \to X_1 \to X_2 \to \mathbb{Z}/I_{d_2} \to 0$，得到正合序列

$$0 = \mathrm{Hom}(\mathbb{Z}/I_{d_1}, X_2) \to \mathbb{Z}/(d_1, d_2) \to \mathrm{Ext}^1(\mathbb{Z}/I_{d_1}, X_1) = 0.$$

注意，第一个 Hom 为零，因为 $X_2(pt)$ 是无挠的。因此 $\mathbb{Z}/(d_1, d_2) = 0$，于是 $(d_1, d_2) = 1$。

通过置换 d_i，我们现在得出，对于所有 i，$d_i|e$ 均成立；并且对于任意 $i \neq j$，$(d_i, d_j) = 1$。

现在回到第一段，我们在那里证明了存在短正合列

$$0 \to I_e = X_0 \to X \to \bigoplus_i \mathbb{Z}/I_{d_i} \to 0.$$

由于 d_i 两两互素，注记 4.12 推出右侧的模同构于 $\mathbb{Z}/I_D$ 其中 $D = \prod_i d_i$。因此，由命题 5.10 可得 $X \cong \mathbb{Z}(e;\ \prod_i d_i)$。□

备注 5.12. 不要仅仅因为这些 $\mathbb{Z}(e;d)$ 模的取值都等于 $\mathbb{Z}$，就误以为它们是行为良好的对象。例如，当 $n = \ell^2$ 时，可以证明

$$\underline{\mathbb{Z}}(\ell^2;\ell)\square\underline{\mathbb{Z}}(\ell^2;\ell) \cong \underline{\mathbb{Z}}/I_\ell \oplus \underline{\mathbb{Z}}(\ell^2;1).$$

这里出现挠项完全出乎直觉。

6. Applications to equivariant topology

本节将简要介绍一些在布雷顿上同调计算中的应用。更深入的讨论请参阅 [DH2] 。

固定 $G = C_n$。对每个 $d|n$ ，令 S^{λ_d} 为链复形

$$0 \longrightarrow F_d \xrightarrow{id-Rt} F_d \xrightarrow{R\pi} \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0.$$

这作为$2\pi id$单点紧化 $\mathbb{C}$ 上某个显然的胞腔结构的胞腔链复形而出现，其中 C_n 具有 t ，其作用为乘以$e^{\ n}$ ，但这一几何输入在此可视为黑箱。注意S^{λ_d} 是 $\mathbb{Z}/I_d$的标准自由分解的一个截断，因此我们可以读出

$$\underline{H}_*(S^{\lambda_d}) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}} & \text{if } i = 2, \\ 0 & \text{if } i = 1 \text{ or } i \geq 3, \\ \underline{\mathbb{Z}}/I_d & \text{if } i = 0. \end{cases}$$

计算 Bredon 上同调群 $H^\star_G(pt)$ 的正则部分相当于计算

$$\underline{H}_*(S^{\lambda_{d_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{d_k}}) \qquad \text{and} \qquad \underline{H}_*\big(\underline{\mathrm{Hom}}(S^{\lambda_{d_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{d_k}},\underline{\mathbb{Z}})\big)$$

对 n的任意一组因子 d_1，.....， d_k。当然，这完全是一个关于 $\mathbb{Z}$-模的链复形的代数问题，人们可以尝试用同调代数的标准工具来处理它。

K¨unneth 谱序列与万有系数谱序列对 $\mathbb{Z}$-模同样适用，正如它们在任何合理的阿贝尔范畴中一样。若 $C_\bullet$ 是自由 $\mathbb{Z}$-模组成的下有界复形，且 $D_\bullet$ 是 $\mathbb{Z}$-模的任意链复形，则存在一个 K¨unneth 谱序列

$$E^2_{p,q} = \bigoplus_{q_1+q_2=q} \underline{\mathrm{Tor}}_p(\underline{H}_{q_1}(C), \underline{H}_{q_2}(D)) \Rightarrow \underline{H}_{p+q}(C\square D).$$

这里，$E^2_{p,q}$ 绘制在 (p,q) 位置，微分的形式为d_r: $E^r_{p,q} \longrightarrow E^r_{p-r,q+r-1}$。万有系数谱序列（或许称为映射空间的谱序列更恰当）具有

$$E_2^{p,q} = \bigoplus_{q_2-q_1=q} \underline{\mathrm{Ext}}^{-p}(\underline{H}_{q_1}(C), \underline{H}_{q_2}(D)) \Rightarrow \underline{H}_{p+q}(\underline{\mathrm{Hom}}(C,D)).$$

这里， $E^{p}{}_{,2}{}^{q}$ 再次绘制在 (p,q) 位置（因此集中在半平面$p \leq 0$） ， 微分再次具有形式 d_r: $E^{p}{}_{,r}{}^{q} \to E^{p-r}{}_{,r}{}^{q+r-1}$。

另见 [Z，第 4 节。4] 关于这些谱序列。

例6.1。我们尝试计算$H_*(S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c})$，使用 K¨unneth 谱序列。该 E^2项如图 6.1所示。只有一个可能的非零微分，即图中所示的 d^3。结果表明，这个微分确实存在，而且正是我们在命题4.11中遇到过的显然单射。其论证并不直观，读者可参阅 [DH2] 中的方法（这些方法避开了谱序列，但仍能得出这一结论）。由此可得

$$\underline{H}_i(S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c}) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}} & \text{if } i=4, \\ \underline{\mathbb{Z}}/I_{[a,b]} & \text{if } i=2, \\ \underline{\mathbb{Z}}/I_{(a,b)} & \text{if } i=0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

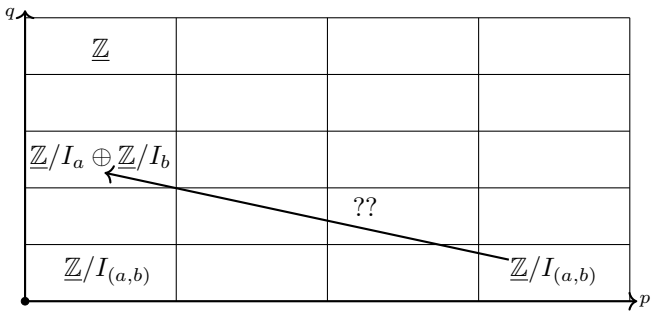


FIGURE 3. K¨unneth 谱序列，用于$H_*(S^{\lambda_a}\underline{\square} S^{\lambda_b})$

例6.2。接下来，我们来尝试计算 Hom$(S^{\lambda_a}, S^{\lambda_b})$ 的同调模。我们可以直接利用万有系数谱序列进行计算，也可以利用同构

$$\underline{\mathrm{Hom}}(S^{\lambda_a}, S^{\lambda_b}) \cong \underline{\mathrm{Hom}}(S^{\lambda_a}, \underline{\mathbb{Z}})\square S^{\lambda_b}$$

（由推论 2.26 得出），然后利用 K¨unneth 谱序列。我们将尝试这两种方法。

万有系数谱序列的 E_2项见图6.2。这次有两个 d_3需要分析，而且两者都不容易计算。

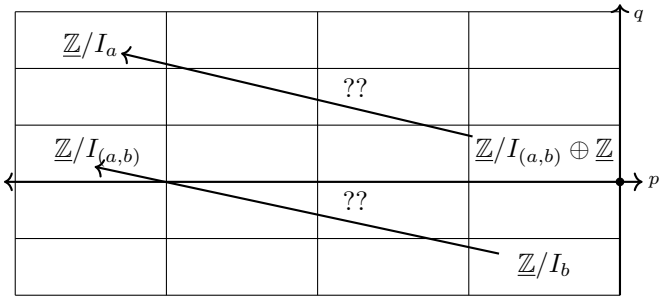


FIGURE 4. 万有系数谱序列，用于 $H_*(\mathrm{Hom}(S^{\lambda_a}, S^{\lambda_b}))$

我们不妨改为考察 $\mathrm{Hom}(S^{\lambda_a},\mathbb{Z})\square S^{\lambda_b}$ 的 K¨unneth 谱序列。显然，$\mathrm{Hom}(S^{\lambda_a},\mathbb{Z})$ 是我们针对 $\mathbb{Z}/I_a$ 的标准分解的一个截断，因此其同调模很容易计算：在 -2 次只有 I_a，其他次数均为零。于是很容易计算出 E^2 项，见图5。这次没有微分发生的余地，因此谱序列退化。不过，H_0 仍存在一个扩张问题。结果表明，H_0 无挠，因此根据命题5.10，所讨论的模为 $\mathbb{Z}(a;(a,b))$。关于这里省略的一些细节，我们再次请读者参阅 [DH2]。（注意，通过比较这两个谱序列，我们现在可以看出，万有系数谱序列中的两个 d_3 都必定是满射。）

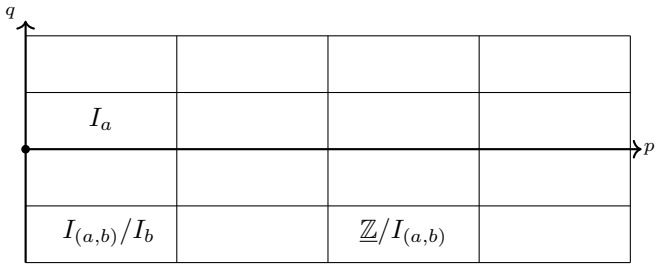


FIGURE 5. K¨ünneth 谱序列，用于计算 $H_*\big(\mathrm{Hom}(S^{\lambda_a},\mathbb{Z})\square S^{\lambda_b}\big)$

如果现在尝试计算 $\big(\mathrm{Hom}(S^{\lambda_a},\mathbb{Z})\square S^{\lambda_b}\big)\square S^{\lambda_c}$ 的同调，我们就需要用到命题5.3中的一些 Tor 模 $I_{(a,b)}/I_b$，因为前面的计算中出现了这些项。但显然，到了这一步，事情就变得有些棘手了。

同样，本节的内容主要是展示论文前文的工作在哪些情境下会非常有用。关于这方面的更多内容，请参见 [DH2]。

7. CHANGE OF GROUPS

假设我们想要理解 $\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}C_n}(\mathbb{Z}/I_a,\mathbb{Z}/I_b)$。正如我们从注4.12中所知，存在如下分解 $\mathbb{Z}/I_a\cong\bigoplus_\ell \mathbb{Z}/I_{a(\ell)}$ 其中求和遍历所有素数 ℓ，而 $a(\ell)$ 是 ℓ 的 -进部分 a。对 $\mathbb{Z}/I_b$ 作类似的分解后，便可立即将问题归约到 $\mathrm{Tor}_*^{\mathbb{Z}C_n}(\mathbb{Z}/I_{\ell^e},\mathbb{Z}/I_{\ell^f})$ 的情形。本节的目标是说明如何进一步归约，即将 C_n 变为 $C_{n(\ell)}$。为此，我们需要回顾改变基群的一般工具。

7.1. 限制与诱导。 我们首先回顾一些一般的范畴论。若 I 与 J 是 $\mathcal{A}b$-范畴（在阿贝尔群上充实的范畴），则称函子 $\alpha\colon I\to J$ 是加性的，如果态射集上的映射是加性的。用 $\mathcal{A}b^I$ 表示加性函子范畴，并用 $\mathrm{Pr}(\alpha)\colon \mathcal{A}b^J\to\mathcal{A}b^I$ 表示与 α 的前合成。函子 $\mathrm{Pr}(\alpha)$ 具有左伴随与右伴随，称为加性Kan扩张，并记为 L_α 与 R_α。对于加性函子 $M\colon I\to\mathcal{A}b$，它们由下列公式给出

$$(L_\alpha M)(j)=\mathrm{coeq}\left[\bigoplus_{i\to i'}J(\alpha i',j)\otimes Mi\rightrightarrows\bigoplus_i J(\alpha i,j)\otimes Mi\right]$$

（这两个映射是显然的）与

$$(R_\alpha M)(j) = \mathrm{eq}\left[\prod_i (Mi)^{J(j,\alpha i)} \rightrightarrows \prod_{i\to i'} (Mi')^{J(j,\alpha i)}\right].$$

在后一个公式中，对于阿贝尔群 A与 B，我们使用记号 $A^B = \mathrm{Hom}(B, A)$。

设给定一个加性函子 $\beta\colon J \to I$。一个简单的练习表明，伴随对 (α, β) 的结构（其中 α 为左伴随）确定了一个自然同构 $L_\alpha M \to M\beta$，而伴随对 (γ, α) 的结构确定了一个自然同构 $M\gamma \to R_\alpha M$。（实质上，可以利用伴随的单位和余单位，为等化子/余等化子写出增广映射以及一个收缩同伦。）这两者都可以改述为：当 (α, β) 是一个伴随对时，$(\mathrm{Pr}(\beta), \mathrm{Pr}(\alpha))$ 也是一个伴随对。

现在设 $f\colon G_1 \to G_2$ 是有限群之间的一个同态。我们有通常的伴随对

$$\mathbb{Z}[G_1]-\mathrm{Mod} \underset{\mathrm{coInd}_f}{\overset{\mathrm{Ind}_f}{\underset{\mathrm{Res}_f}{\leftarrows}}} \mathbb{Z}[G_2]-\mathrm{Mod}$$

其中诱导函子和余诱导函子分别为 $\mathrm{Ind}_f(M) = \mathbb{Z}[G_2] \otimes_{\mathbb{Z}[G_1]} M$ 以及 $\mathrm{coInd}_f(M) = \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[G_1]}(\mathbb{Z}[G_2], M)$。回想一下，当 f是包含映射时，通过标准论证，这两个函子自然同构。

将限制函子和诱导函子作用于置换模，会规范地得到另一个置换模，因此这些函子给出相应的伴随对

$$B\mathbb{Z}_{G_1} \underset{\mathrm{Res}_f}{\overset{\mathrm{Ind}_f}{\leftrightarrows}} B\mathbb{Z}_{G_2}. \tag{7.1.1}$$

当 f 是包含映射时，coInd_f也具有这一性质，因为它与 Ind_f同构。但对于投影 $G \to G/N$ 和一个 G-集 S，$\mathbb{Z}\langle S\rangle^N$ 与 $\mathbb{Z}\langle S/N\rangle$ 之间不存在关于 S 规范的同构，因此余诱导不会给出伯恩赛德范畴之间的函子。

取对偶范畴后，（7.1.1）中的伴随对给出一个类似的伴随关系，但此时 Res_f 是左伴随。随后转到图表范畴，我们有

$$\underline{\mathbb{Z}}_{G_1}-\mathrm{Mod} \underset{R_{\mathrm{Res}_f}}{\overset{\mathrm{Pr}(\mathrm{Ind}_f)}{\underset{\mathrm{Pr}(\mathrm{Res}_f)}{\rightleftarrows}}} \underline{\mathbb{Z}}_{G_2}-\mathrm{Mod}. \tag{7.1.2}$$

当 f 是一个包含映射 $R_{\mathrm{Res}_f} = \mathrm{Pr}(\mathrm{Ind}_f)$。

通常通过以下方式定义 Mackey函子的诱导和限制：

$$\underline{\mathrm{Ind}}_f = \mathrm{Pr}(\mathrm{Res}_f) \quad \text{and} \quad \underline{\mathrm{Res}}_f = \mathrm{Pr}(\mathrm{Ind}_f)$$

（例如参见 [W，第 3]节）。当需要回到 Kan扩张的视角时，这可能会有些令人困惑；例如，沿限制函子 Res$_f$ 的左 Kan 延拓仍然是“限制”，但此处采用的是 Res 的形式。遗憾的是，这是一个术语选择无论如何都不完全令人满意的情形。

注意，限制 Res 始终是诱导 Ind 的左伴随（同样，这一表述略显尴尬）；而当 f 是一个包含映射时，它同时也是诱导的右伴随。当 f是一个包含映射时，通常记作 Ind$_f(M) = M{\uparrow}_{G_1}^{G_2}$和 Res$_f(M) = M{\downarrow}_{G_1}^{G_2}$。我们记下这些公式

$$(\underline{\mathrm{Res}}_f M)({}_{G_1}S) = M(G_2 \times_{G_1} S), \qquad (\underline{\mathrm{Ind}}_f N)({}_{G_2}T) = N({}_{G_1}T).$$

注意，这些公式立即表明，Res$_f$ 和Ind$_f$ 都是正合函子，因为对于 Mackey函子的链复形，正合性是逐对象确定的。

注 7.2. 了解这些函子如何作用，并将其与轨道范畴的图示联系起来，会很有帮助。当 f 是一个包含映射时，Res$_f(M)$ 取 M 在轨道图“大”部分上的值，从 ~~G_2~~ 到 G_2/G_1，并重新标记各项，使其与 G_1 的轨道范畴相匹配。若要用简单的图示来说明诱导函子的作用，则要复杂一些。

当 f 是一个投影 $G \to G/N$ （ G 的正规子群 N ），且 M 是一个 $\mathbb{Z}_G$-模时，Ind$_f$ (M) 只取 M 在轨道图“小”部分上的值，从 G/N 向下到 G/G。若 X 是一个 $\mathbb{Z}_{G/N}$-模，则 Res$_f X$ 在这些“小”轨道上恰好就是 X ，但随后会将其自由延拓到其余部分。

以下结果可由伴随和定义直接推出：

命题 7.3. 设 $f\colon G_1 \to G_2$ 是一个同态。
(a) 若 T是 G_2-集，则限制$_f(F_T) \cong F_{({}_{G_1}T)}$ 关于 T自然。***(b)*** 若 f 是包含映射，且 S 是 G_1-集，则诱导$_f(F_S) \cong F_{(G_2 \times_{G_1} S)}$ 关于S自然。***(c)*** 对于投影 $f\colon G \to G/N$，其中 N 是正规子群，则有诱导$_f$ ∘限制$_f \cong id$。

证明。 留给读者。 □

注记7.4。 特别地，注意命题7.3(a)给出限制$_f\mathbb{Z}_{G_2}$ =限制$_f F_{pt} = F_{({}_{G_1}pt)} = \mathbb{Z}_{G_1}$。此外，当 f是满射且 $H \supseteq$ 核 f时，它给出限制$_f F_{G_1/H} = F_{G_1/H}$，其中这两个自由模略有不同：前者是自由 $\mathbb{Z}_{G_2}$-模，后者是自由 $\mathbb{Z}_{G_1}$-模。

回到 f 的一般情形： $G_1 \to G_2$，这个交换图

$$\begin{array}{ccc} B\mathbb{Z}_{G_2}^{op} \times B\mathbb{Z}_{G_2}^{op} & \xrightarrow{\times} & B\mathbb{Z}_{G_2}^{op} \\ \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_f \times \mathrm{Res}_f} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Res}_f} \\ B\mathbb{Z}_{G_1}^{op} \times B\mathbb{Z}_{G_1}^{op} & \xrightarrow{\times} & B\mathbb{Z}_{G_1}^{op} \end{array}$$

给出了对应于沿图中两条路径进行的连续左 Kan 延拓之间的自然同构。由此立即得到以下结论：

命题 7.5。在上述情形下，存在一个自然同构

$$\underline{\mathrm{Res}}_f(M\square_{G_2}N)\cong(\underline{\mathrm{Res}}_f M)\square_{G_1}(\underline{\mathrm{Res}}_f N).$$

现在我们可以为一个在第 2 节提到的结果给出一个非常简短的证明。

命题 *2.15* 的证明。设 f 是包含映射 $\{e\}\hookrightarrow G$。若 M 是一个 $\mathbb{Z}_G$-模，则 $\mathrm{Res}f(M)=M(G)$。因此，命题 7.5 给出一个自然同构 $(M\square N)(G)\cong M(G)\otimes N(G)$。稍作推导可知，这与第 2 节引入的映射相同。□

我们还有以下关于 Tor 的群变换定理：

命题 7.6. 设 $f\colon G_1\to G_2$ 是一个同态，且 M 和 N 是$\mathbb{Z}_{G_2}$-模。那么

$$\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{G_1}}(\underline{\mathrm{Res}}_f M,\underline{\mathrm{Res}}_f N)\cong\underline{\mathrm{Res}}_f\left[\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{G_2}}(M,N)\right].$$

证明. 设 $J_\bullet\to M\to 0$ 是一个关于 $\mathbb{Z}_{G_2}$的自由分解。那么 $\mathrm{Res}_f J_\bullet\to\mathrm{Res}_f M\to 0$是一个关于 $\mathbb{Z}_{G_1}$的自由分解，这是根据命题7.3(a) 以及 Res$f$ 是正合的这一事实得出的。但

$$(\underline{\mathrm{Res}}_f J_\bullet)\square(\underline{\mathrm{Res}}_f N)\cong\underline{\mathrm{Res}}_f(J_\bullet\square N)$$

根据命题 7.5，并且由于 Res$f$ 是正合的，它与取同调运算可交换。□

注 7.7. 虽然我们不会用到它，但这里提及 Ext 的以下群变换结果。设 $f\colon G_1\to G_2$，设 M 是一个 $\mathbb{Z}_{G_2}$-模，且 N 是一个 $\mathbb{Z}_{G_1}$-模。那么

$$\underline{\mathrm{Ind}}_f\left[\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathbb{Z}_{G_1}}(\underline{\mathrm{Res}}_f M,N)\right]\cong\underline{\mathrm{Ext}}^i_{\mathbb{Z}_{G_2}}(M,\underline{\mathrm{Ind}}_f N).$$

Hom 的结果可直接根据定义验证，而利用与命题7.6相同的思路，将其推广到 Ext 几乎是显而易见的。

7.8. 群的变更与族。设 $f\colon G_1\to G_2$ 是一个同态，并设 $\mathcal{F}$是 G_2的一个子群族。定义 $f^*\mathcal{F}=\{K\le G_1\mid f(K)\in\mathcal{F}\}$，并注意到这是 G_1的一个子群族。注意，$f^*\mathcal{F}$ 包含$\{f^{-1}(H)\mid H\in\mathcal{F}\}$，事实上，它是通过将其所有元素的子群加入这个集合而得到的。

满射 $\mathbb{Z}_{G_2}\to\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F}$ 给出一个典范映射

$$\mathbb{Z}_{G_1}=\underline{\mathrm{Res}}_f\mathbb{Z}_{G_2}\twoheadrightarrow\underline{\mathrm{Res}}_f(\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F}).$$

对于 $K\in f^*\mathcal{F}$，我们有 $[\mathrm{Res}f(\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F})](G_1/K)=[\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F}](G_2/f(K))=0$，该项为零是因为 $f(K)\in\mathcal{F}$。因此，我们的典范映射可以下降为

$$\mathbb{Z}_{G_1}/f^*\mathcal{F}\twoheadrightarrow\underline{\mathrm{Res}}_f(\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F}).$$

命题 7.9. 当 $f\colon G_1\to G_2$ 是满射时，上述映射 $\mathbb{Z}_{G_1}/f^*\mathcal{F}\to\mathrm{Res}f(\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F})$ 是同构。

证明. 我们有一个 $\mathbb{Z}_{G_2}$-模的正合列。应用 Res$_f$ 可得到一个类似的 $\mathbb{Z}_{G_1}$-模正合列，其形式为

$$\bigoplus_{H\in\mathcal{F}} F_{G_1/f^{-1}(H)} \to \underline{\mathbb{Z}}_{G_1} \to \underline{\mathrm{Res}}_f(\underline{\mathbb{Z}}_{G_2}/\mathcal{F}) \to 0$$

（注意，我们在此处使用了注记 7.4，且 f 的满射性意味着 G_2/H 是一个由 $G_1/f^{-1}(H)$给出的传递 G_1-集）。这将 Res$_f(\mathbb{Z}_{G_2}/\mathcal{F})$ 识别为 $\mathbb{Z}_{G_1}/J$，其中 $J\subseteq\mathbb{Z}_{G_1}$ 是由元素 $1_{G_1/f^{-1}(H)}$（$H\in\mathcal{F}$）生成的理想。

相比之下，$I_{f^*\mathcal{F}}$ 是由元素 $1_{G_1/K}$（$f(K)\in\mathcal{F}$）生成的理想。显然 $J\subseteq I_{f^*\mathcal{F}}$，但事实上二者相等：这是因为 $K\subseteq f^{-1}(f(K))$ 和 $1_{G_1/K}=p^*(1_{G_1/f^{-1}(f(K))})$。□

推论 7.10。设 $f\colon G_1\to G_2$ 是一个满射，且 $\mathcal{F}_a$ 和 $\mathcal{F}_b$ 是 G_2的子群族。那么

$$\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{G_1}}\left(\underline{\mathbb{Z}}_{G_1}/f^*\mathcal{F}_a,\ \underline{\mathbb{Z}}_{G_1}/f^*\mathcal{F}_b\right)\cong \underline{\mathrm{Res}}_f\left[\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{G_2}}(\underline{\mathbb{Z}}_{G_2}/\mathcal{F}_a,\ \underline{\mathbb{Z}}_{G_2}/\mathcal{F}_b)\right].$$

证明。由命题 7.9与7.6直接得出。□

7.11. 应用。固定一个素数 ℓ。回忆 $n(\ell)$是 n的 ℓ-准素部分，与 $n(\ell)=n\ell()$。我们有群扩张

$$0\to C_{n(\hat{\ell})}\hookrightarrow C_n\xrightarrow{f} C_{n(\ell)}\to 0.$$

由命题 7.3(a)，我们有 Res$_f(F_{\Theta_{\ell^e}})=F_{\Theta_{\ell^e}}$。注意这两个自由函子虽然写法相同，但略有不同：前者是$\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$-模，后者是 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模。

设 $d=\ell^e$。回忆 $C_{n(\ell)}$-族 $\mathcal{F}_d^{C_{n(\ell)}}$ 由 $C_{n(\ell)}$的所有其阶整除 $n(\ell)d$的子群组成。由于 $|f(K)|=|K|(\ell)$，我们有 $f^*(\mathcal{F}_d^{C_{n(\ell)}})$由所有使得 $|K|(\ell)$整除 $n(\ell)d$ 的子群 $K\le C_n$ 组成。但注意这等价于 $|K|$ 整除 nd 这一条件，由此可知

$$f^*(\mathcal{F}_d^{C_{n(\ell)}})=\mathcal{F}_d^{C_n}.$$

因此命题 7.9 得出 Res$_f(\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}/I_d)=\underline{\mathbb{Z}}_{C_n}/\underline{I_d}$。最后，推论 7.10 现在给出

$$\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{C_n}}(\underline{\mathbb{Z}}_{C_n}/I_{\ell^e},\ \underline{\mathbb{Z}}_{C_n}/I_{\ell^f})\cong \underline{\mathrm{Res}}_f\left[\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}}(\underline{\mathbb{Z}}_{C_{n(\ell)}}/I_{\ell^e},\ \underline{\mathbb{Z}}_{C_{n(\ell)}}/I_{\ell^f})\right].$$

这就是使我们能够把 C_n 与 $C_{n(\ell)}$ 上的 Tor模联系起来的手法。

我们再给出一个应用，它表明本文的结果如何可以推广到循环群这一设定之外。对于对称群恰好存在两个非平凡族 Σ_3，即 $\mathcal{F}_{[3]}=\{e,C_3\}$ 与 $\mathcal{F}_{[2]}=\{e,\langle(12)\rangle,\ \langle(13)\rangle,\ \langle(23)\rangle\}$。若 $f\colon\Sigma_3\to C_2$ 是（唯一的）商映射，则$\mathcal{F}_{[3]}=f^*\mathcal{F}_2$。因此推论 7.10 给出

$$\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{\Sigma_3}}(\underline{\mathbb{Z}}/\mathcal{F}_{[3]},\underline{\mathbb{Z}}/\mathcal{F}_{[3]})\cong \underline{\mathrm{Res}}_f\left[\underline{\mathrm{Tor}}_*^{\mathbb{Z}_{C_2}}(\underline{\mathbb{Z}}/I_2,\underline{\mathbb{Z}}/I_2)\right].$$

当然，根据前几节的工作，我们知道右端的结果。

Appendix 附录 A. A leftover proof

本节将证明命题2.22，该命题在正文中略过了证明。为方便起见，我们在此重述该命题：

命题 2.22. 存在一个自然同构 $F_A\square M \cong M^{DA}$，并且还存在一个自然同构 $\mathrm{Hom}(F_A, M) \cong M^A$。因此，注意这个自然同构

$$\underline{\mathrm{Hom}}(F_A, \underline{\mathbb{Z}}) \cong \underline{\mathbb{Z}}^A \cong F_{DA}.$$

我们先构造自然映射 $F_A\square M \to M^{DA}$。回顾一下，对于任意有限的 G-集 X，$(F_A\square M)(X)$ 是图的余等化子

$$\coprod_{C_1,C_2,D_1,D_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,D_1)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_2,D_2)\otimes F_A(D_1)\otimes M(D_2)$$
$$\Downarrow\Downarrow$$
$$\coprod_{C_1,C_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes F_A(C_1)\otimes M(C_2)$$

我们将其改写为

$$\coprod_{D_1,D_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,D_1)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_2,D_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(D_1,A)\otimes M(D_2)_{C_1,C_2}$$
$$\Downarrow\Downarrow$$
$$\coprod_{C_1,C_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,A)\otimes M(C_2).$$

给定 $T\in\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)$ 和 $S\in\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1, A)$，我们可以构造 $(S\times id_A)\circ T\in\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, A\times C_2)$，然后利用伴随性得到$\mathcal{B}\mathbb{Z}(DA\times X, C_2)$ 中的相应元素。沿着这个映射作拉回，我们便可从 $M(C_2)$ 转到 $M(DA\times X) = M^{DA}(X)$。换言之，我们取复合

$$\begin{array}{c}
\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1, A)\otimes M(C_2)\\
\downarrow\\
\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}_Z(C_1\times C_2, A\times C_2)\otimes M(C_2)\\
\downarrow\\
\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, A\times C_2)\otimes M(C_2)\\
\downarrow\\
\mathcal{B}\mathbb{Z}(DA\times X, C_2)\otimes M(C_2)\\
\downarrow\\
M(DA\times X) = M^{DA}(X).
\end{array}$$

容易验证，这个复合保持余等化子，因此诱导出 $(F_A\square M)(X)\to M^{DA}(X)$，它对 X 和 A 都是自然的。因此我们有一个$\mathbb{Z}$-模映射 $\sigma\colon F_A\square M\to M^{DA}$，它对 A 是自然的。

—

命题 A.1。

(a) 当 M 是自由模 F_B 时，映射 σ 是同构。*(b)* 对每个 $\mathbb{Z}$-模 M，映射 σ 都是同构。

—

证明。 (b) 由 (a) 立即得出，因为每个 $\mathbb{Z}$-模都是自由模的余极限，而 both $F_A\square(-)$ 和 $(-)^{DA}$ 都保持余极限。因此我们只需证明 (a)。

再次回顾，$(F_A\square F_B)(X)$ 是如下对象的余等化子

$$\coprod_{C_1,C_2,D_1,D_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,D_1)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_2,D_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(D_1,A)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(D_2,B)$$

$$\Downarrow$$

$$\coprod_{C_1,C_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,A)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_2,B).$$

笛卡尔积与复合产生一个显然的映射 β 到 $\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, A\times B)$，它与余等化子映射相容。这与映射 σ 并不相同，但容易看出它们由下面的图相关联：

$$\begin{array}{ccccc}
(F_A\square F_B)(X) & & \xrightarrow{\qquad\beta\qquad} & & \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, A\times B) \\
\downarrow{\scriptstyle\sigma} & & & & \uparrow{\scriptstyle\cong} \\
(F_B)^{DA}(X) & = & F_B(DA\times X) & = & \mathcal{B}\mathbb{Z}(DA\times X, B)
\end{array}$$

（右边的竖直映射是我们所熟悉的伴随同构）。因此，我们可以通过转而证明 β 是同构来证明 σ 是同构。然而，这几乎是平凡的：下面的余等化子图有一对显然的收缩同伦

$$\coprod_{C_1,C_2,D_1,D_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,D_1)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_2,D_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(D_1,A)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(D_2,B)$$

$$\Downarrow \nearrow S'$$

$$\coprod_{C_1,C_2} \mathcal{B}\mathbb{Z}(X, C_1\times C_2)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_1,A)\otimes\mathcal{B}\mathbb{Z}(C_2,B)$$

$$\downarrow \nearrow S$$

$$\mathcal{B}\mathbb{Z}(X, A\times B)$$

其中 S 以显然的方式映射到 $C_1 = A, C_2 = B$ 直和项，而 S' 类似地映射到 $D_1 = A$, $D_2 = B$ 直和项。□

在上述证明的过程中已经确立存在一个自然同构$F_A\square F_B \cong F_{A\times B}$。我们将利用它来完成我们的目标：

命题的证明 2.22。 同构 $F_A\square M \cong M^{DA}$ 已在命题 A.1. 中建立。接下来只需证明 $\mathrm{Hom}(F_A, M)\cong M^A$。为此，我们考察如下自然同构序列

$$\begin{aligned}
\underline{\mathrm{Hom}}(F_A, M)(X) = \mathrm{Hom}(F_X\square F_A, M) = \mathrm{Hom}(F_{X\times A}, M) &= M(X\times A) \\
&= M(A\times X) \\
&= M^A(X).
\end{aligned}$$

□

References

[A] J. E. Arnold, Jr., *Homological algebra based on permutation modules*, J. Algebra 70 (1981), 250–260. [BD] S. Basu 和 P. Dey, *Equivariant cohomology for cyclic groups*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2025, Paper No. rnaf150, 41pp.[B1] S. Bouc, *Green functors and G-sets*, Lecture Notes i n Math. 1671, Springer-Verlag, Berlin, 1997.[B2] S. Bouc,

Complexity and cohomology of cohomological Mackey functors, Adv. Math. 221 (2009), no. 3, 983–1045. [BSW] S. Bouc, R. Stancu 和 P. Webb, *On the projective dimension of Mackey functors*, Algebr. Represent. Theory 20 (2017), no. 6, 1467–1481. [DH1] D. Dugger 和 C. Hazel, *RO*(*G*) *-graded cohomology of equivariant configuration spaces*, Algebr. Geom. Topol. 26 (2026), no. 2, 437–484. [DH2] D. Dugger 和 C. Hazel,

The Bredon equivariant cohomology of a point for cyclic groups, preprint, 2026. [HHR] M. A. Hill, M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel, *The slice spectral sequence for certain* 3 **23** 2017 317 (C_{p^n}) *RO -graded suspensions of H*$\mathbb{Z}$, Bol. Soc. Mat. Mex. ( ) ( ), no. 1, 289– . [L1] L. G. Lewis,

The theory of Green functors, unpublished preprint, 1981. [L2] L. G. Lewis, *The RO*(*G*) *-graded equivariant ordinary cohomology of complex projective spaces with linear* $\mathbb{Z}/p$*-actions*, Algebraic topology and transformation groups (G¨ ottingen, 1987), 53-122. Lecture Notes in Math. 1361, Springer-Verlag Berlin, 1988. [MQS] D. Mehrle, J. D. Quigley, M. Stahlhauer, *Pathological computations of Mackey functor-valued Tor over cyclic groups* **57** 2025 10, 3024 3036 , Bull.

Lond. Math. Soc. ( ), no. – . [TW] J. Th´evenaz 和 P. J. Webb, *The structure of Mackey functors*, Trans. Amer. Math. Soc. 347 (1995), 1865–1961. [W] P. J. Webb, *A guide to Mackey functors*, in Handbook of Algebra Vol. 2, Elsevier/North-Holland, Amsterdam, 2000, pp. 805–836.[Y] T. Yoshida, *On G-functors (II): Hecke operators and G-functors*, J. Math. Soc. Japan 35 (1983), 179–190. [Z] M. Zeng, *Equivariant Eilenberg-MacLane spectra in cyclic p-groups*, preprint, 2017. arXiv:1710.01769. (请注意，此前版本曾使用不同标题：*RO*(*G*) *-graded homology Mackey functor of HZ for* C_{p^2} *and homological algebra over* $\mathbb{Z}$*-modules*)。

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403
Department of Mathematics, Grinnell College, Grinnell, IA 50112