arXiv:2602.18680v1 [math.AT] 21 Feb 2026

循环群的一点的 BREDON 等变上同调

Daniel Dugger 和 Christy Hazel

Abstract. 我们研究 $RO(G)$-分次的一点 Bredon 上同调，其中 G 是奇数阶循环群，并在 [Z] 和 [BD]等先前研究所提供的信息基础上进一步拓展。我们的方法聚焦于这一问题纯粹的代数层面，将其解释为常系数 Mackey 环上模的导出范畴中的“球面的稳定同伦群”问题。

Contents

1. 引言1 2. $\mathbb{Z}$-模及其导出范畴12 3. 初步计算18 4. 一点的上同调25 5. 球面的较小模型31 6. 处理负锥33 7. 线性球复形之间的映射43 8. 不规则区域55 9. 群的变换60 参考文献63

1. Introduction

设 G 为一个有限群，并令 $\mathbb{Z}_G$ （或简写为 $\mathbb{Z}$）表示取值为 $\mathbb{Z}$的常系数Mackey函子。近年来， $RO(G)$ 分次的 Bredon 上同调理论 $H^\star(-;\ \mathbb{Z})$ 受到广泛研究；在 Kervaire不变量为一问题 [HHR1]的解决过程中，该理论所发挥的作用（对 $G = C_8$ 而言）更是大大推动了相关研究。尽管人们对这一理论兴趣浓厚，但即便是其基环 $H^\star(pt;\ \mathbb{Z})$，仍有许多未解之谜。近年来，专注于计算各种群 G的这一基环的论文包括 [AMR], [BD], [BG1], [BG2],[DV], [G1], [HK], [KL], [Li], [Lu], [Ya1], [Ya2], [Z], ，此外无疑还有许多其他论文。然而，尽管关于这一问题的论文众多，它们有时只提供了部分信息，有时提供的信息则过于复杂，以至于难以弄清该如何利用。

我们开展本项工作的动机，是想从一个非常具体的角度重新审视这个问题。$H^\star(pt;\mathbb{Z})$ 的计算可以被视为一个纯粹的代数问题：在 $\mathbb{Z}_G$-模的导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_G)$ 中，我们希望列出所有可逆对象，并计算它们之间的所有映射。我们想弄清楚其中哪些部分容易、哪些部分困难，以及

为什么困难的部分会如此困难。作为起点，我们满足于专注于 G 为循环群的情形。

先说结论，我们这项研究最终得到的结果喜忧参半。除非循环群 G 非常小（这里“小”是指其阶最多有三个因子，因此要么是素数,–要么是素数的平方），否则我们仍无法完整描述环 $H^\star(pt;\mathbb{Z})$。尽管如此，我们还是能提供有关这些环的大量信息。我们认为，还可以为这些环提供一份总体指南，或许比以往的版本更方便读者使用。

先更详细地陈述结果。设 $G = C_n$ 是阶为 n 的循环群，且固定一个生成元 t。设 $\lambda(d)$ 是带有 C_n 作用的 $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$，其中$t$ 的作用为乘以 $e^{2\pi i\cdot d/n}$。当 n 为奇数时，对于 $1 \le d \le \frac{n-1}{2}$，表示 $\mathbf{1}$ 和 $\lambda(d)$ 构成 C_n 的一组完备不可约表示。当 n 为偶数时，还必须在列表中加入 $\mathbb{R}$ 上的符号表示。本文余下部分均假设 n 为奇数；所有方法和结果都可以调整以适用于偶数的 n，但若要同时处理这两种情况，问题会变得足够复杂。

因此，当 n 为奇数时，我们有 $RO(C_n) = \mathbb{Z}^{\frac{n+1}{2}}$，这就是为我们的上同调理论提供分次的群。事实上，已知在这种情形下存在若干“额外周期性”，而且只需将范围限制在由 $\lambda(d)$ 生成的子群，其中 $d|n$。此处我们暂不对此作详细说明（相关讨论见注 2.3），但从我们下面采用的代数视角来看，这并无影响，因为 $\lambda(d)$，其中 $d \nmid n$，根本不会出现。

当 $d|n$ 时，我们令 $\lambda_d = \lambda(\frac{n}{d})$。这种重新编号一开始有些令人烦恼，但很快就会变得非常方便。注意，λ_1 是秩为 2 的平凡表示。

令 Div_n 表示 n 的正因子集合。在自由阿贝尔群$\mathbb{Z}\langle \mathrm{Div}_n\rangle$ 中，除了上述含义外，符号 λ_b还将表示 Div_n 中与 $b \in \mathrm{Div}_n$对应的生成元。令 $\mathbb{D}_n = (\mathbb{Z}\langle 1\rangle \oplus \mathbb{Z}\langle \mathrm{Div}_n\rangle)/(1+1 = \lambda_1)$，并注意到我们可以将 $\mathbb{D}_n$ 视为$RO(C_n)$的子群。有时采用记号 $\lambda_0 = 1 \in \mathbb{D}_n$会有所帮助，这仅仅是为了方便。群 $\mathbb{D}_n$ 将取代 $RO(C_n)$，成为我们上同调理论首选的分次。当我们写作 $H^\star(-;\mathbb{Z})$ 时，意指 $\star \in \mathbb{D}_n$，而星号 $*$ 则专用于整数分次。

为了讨论导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$，我们首先需要了解一些关于 $\mathbb{Z}$-模范畴的术语和工具。这些内容已在 [DH], 中进行了详尽阐述，这里我们只作非常简要的概述（更多细节见下文第2.1节）。记Θ_d 为轨道 $C_n/(t^d)$。$\mathbb{Z}$-模范畴中的一些基本对象包括：

$F_d = F_{\Theta_d}$ 以位于位置 Θ_d 的生成元为基的自由 $\mathbb{Z}$-模（注意 $F_1 = \mathbb{Z}$）。	
$I_d \subseteq \mathbb{Z}$ 由 $1_d \in \mathbb{Z}$ 生成的理想（Θ_d）。$\mathbb{Z}/I_d$ 商模。I_d/I_e 商空间，定义于 $d \mid e$ 时。	

$\mathbb{Z}$-模范畴常被视为阿贝尔群范畴的等变类比，但与后者不同的是，这里没有一份简单的有限生成不可分解对象清单。上述基本对象的列表远非全面，只是恰好构成了一个便于入门的类。

$\mathbb{Z}$-模范畴具有闭对称幺半群结构，张量积为盒积 $\square$，余张量记作 $\mathrm{Hom}(-,\ -)$。

对于每个 $d|n$，我们定义 S^{λ_d} 为长度为二的链复形

$$0 \longrightarrow F_d \xrightarrow{id-Rt} F_d \xrightarrow{Rp} F_1 \longrightarrow 0.$$

（见第2.1 节关于映射的约定）。这实际上是表示 λ_d的一点紧化上一个明显胞腔结构的约化胞腔链复形，但我们目前可以忽略其几何来源，仅将其视为一个代数对象。几何的解释见注记2.3 。对于序列 $b = (b_1, \ldots\ldots, b_s)$，其中每个 $b_i|n$，定义

$$S^{\lambda_{\underline{b}}} = S^{\lambda_{b_1}} \square \cdots \square S^{\lambda_{b_s}}.$$

在方便时，我们将把符号$\lambda_{\underline{b}}$ 与相应的表示 $\bigoplus_i \lambda_{b_i}$ 等同起来。

只需稍费工夫，便可从代数上证明 S^{λ_d} 是 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$中的可逆对象，且其逆为 $\mathrm{Hom}(S^{\lambda_d}, \mathbb{Z})$（见命题2.4）。定义$S^{-\lambda_d}$ 为此复形，并对如上的序列b 定义

$$S^{-\lambda_{\underline{b}}} = S^{-\lambda_{b_1}} \square \cdots \square S^{-\lambda_{b_s}}.$$

要扩展为 $\mathbb{D}_n$-分次，先固定 n 的因子顺序 $\leq$，并对 $v = \sum_{d\neq 1} v_d \lambda_d \in \mathbb{D}_n$ 定义

$$S^v = S^{v_0} \square \Big(\square_{v_d>0} (S^{\lambda_d})^{\square(v_d)} \Big) \square \Big(\square_{v_d<0} (S^{-\lambda_d})^{\square(-v_d)} \Big)$$

其中，括号内盒积的各因子按以下顺序排列 $\leq$。对于v，$w \in \mathbb{D}_n$，S^{v+w} 与 $S^v \square S^w$并不相等，但可以在导出范畴中指定它们之间的一个典范同构（详情见第2.7 节）。

给定一个写作 $\beta = m_0\lambda_0 + \sum_i m_i \lambda_{b_i}$ 的 $\beta \in \mathrm{Div}_n$，其中所有 $b_i > 1$ 和 $m_i \in \mathbb{Z}$，定义 $\dim\ \beta = m_0 + 2\sum_i m_i$。称其为 β 的**几何维数**。这就是相应表示的实维数。我们还定义**固定维数**为 $\beta\ \ m_0$。

对于 $v \in \mathbb{D}_n$，Bredon 上同调与范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$之间存在以下基本联系：

$$H^v(pt; \underline{\mathbb{Z}}) = \mathcal{D}(\mathbb{Z})(\mathbb{Z}, S^v).$$

注意，$\mathcal{D}(\mathbb{Z})(_, _)$ 表示 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 中的映射。更概括地说，一点的 Bredon 上同调环为

$$H^\star(pt; \underline{\mathbb{Z}}) = H^\star(pt) = H^\star = \bigoplus_{v\in\mathbb{D}_n} \mathcal{D}(\mathbb{Z})(\mathbb{Z}, S^v).$$

前三个表达式可以互换使用。环结构来自映射的盒积。这里需要注意，$\mathbb{D}_n$ 是自由的；否则结合律可能会出现问题（完整讨论见 [D] ）。作为 [D的一个应用，命题 1.2(3)] 可得 $H^\star(pt$满足斜交换律

$$x \cdot y = (-1)^{(\text{fixed-dim. of } |x|)\cdot(\text{fixed-dim. of } |y|)} y \cdot x. \tag{1.0.1}$$

详情请见第2.7 节；此外，下面的推论1.10 还给出了一种进一步但并不显然的简化。

所以现在我们终于看清了眼前这个纯粹的代数问题：理解$H^\star(pt; \mathbb{Z})$归结为计算 $\mathbb{Z} \to S^v$ 的映射同伦类（其中 $v \in \mathbb{D}_n$），并理解它们如何相乘。这就是“球面的稳定同伦群”问题，不过是在 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$的框架中。

$\mathbb{Z}$-模的范畴自身带有富集结构，而这一结构也传递到导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$上。对于链复形 X 和 Y，我们将 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})(X,Y)$记作 $\mathbb{Z}$-模函数对象，并记作

$$\underline{H}^v(X) = \underline{\mathcal{D}}(X, S^v), \qquad \underline{H}^v = \underline{H}^v(pt) = \underline{H}^v(\mathbb{Z}) = \underline{\mathcal{D}}(\mathbb{Z}, S^v).$$

通常，人们将其称为“Mackey函子值上同调”。

由 $H^{\lambda_b+k}(pt)$ 中满足以下条件的各群构成的集合： b 是任意因子序列，且 $k \in \mathbb{Z}$，称为**正锥**，它位于 $H^\star(pt)$ 内部。容易看出，当 $k < -\dim \lambda_b$ 和 $k > 0$ 时，这些群均为零，因此非零群落在一个楔形区域（或锥）中。正锥是 $H^\star(pt)$ 的一个子环。由 $H^{k-\lambda_b}(pt)$ 中某些 $b_i > 1$ 构成的集合称为**负锥**。在此处，当 $k > \dim \lambda_b$ 或 $k \leq 0$ 时，这些群均为零。它也是 $H^\star(pt)$ 的一个子环。正锥和负锥合称为 $H^\star(pt)$ 的**正则区域**。不过请注意，正则区域并非子环。

$H^\star(pt)$中位于正则区域之外的齐次部分称为**不规则**。需要牢记的一般情况是：正锥是一个诺特环，实际中或许比较容易处理；负锥是一个非诺特环，可能难以描述，但在某些方面并不比正锥复杂多少；而不规则区域则是一片幽冥之地，似乎在很大程度上无法通过尝试得到完整描述。声称计算了 $H^\star_G$ 的论文往往完全不涉及不规则区域。请注意，当 $G = C_\ell$， ℓ是一个素数时，在 $\mathbb{D}_\ell$分次中不存在不规则区域，因此这种情况尤其简单。

现在我们已经做好铺垫，可以讨论结果了。复形 S^{λ_d} 配备了典范映射

$$\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{a_d} S^{\lambda_d}, \qquad \Sigma^2\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{u_d} S^{\lambda_d}.$$

作为上同调环中的元素，它们分别是 $a_d \in H^{\lambda_d}(pt)$和 $u_d \in H^{\lambda_d-2}(pt)$；我们也将用 $|a_d| = \lambda_d$和 $|u_d| = \lambda_d - 2$ 表示它们的次数。手动计算复形 S^{λ_d} 的同调很容易，由此可见

$$\underline{H}^{\lambda_d - i}(pt) = \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}}, S^{\lambda_d - i}) = \mathcal{D}(\Sigma^i\underline{\mathbb{Z}}, S^{\lambda_d}) = \underline{H}_i(S^{\lambda_d}) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}} & i = 2, \\ 0 & i = 1 \text{ or } i \geq 3, \\ \underline{\mathbb{Z}}/I_d & i = 0. \end{cases}$$

其中， u_d 和 a_d 是各自次数上的生成元。 [警告：拓扑学家可能会期待在上述公式中看到球面的约化同调，但我们提醒读者，我们的 S^{λ_d} 并非几何球面，而是它的约化细胞链复形。]

正则区域中 $H^\star(pt)$ 的 Mackey 函子同样为

$$\underline{H}^{\lambda_{d_1}+\cdots+\lambda_{d_s}-i}(pt) = \underline{H}_i(S^{\lambda_{d_1}} \square \cdots \square S^{\lambda_{d_s}})$$

and

$$\underline{H}^{i-\lambda_{d_1}-\cdots-\lambda_{d_s}}(pt) = \underline{H}_{(-i)}(S^{-\lambda_{d_1}-\cdots-\lambda_{d_s}}) \cong \underline{H}^i(S^{\lambda_{d_1}} \square \cdots \square S^{\lambda_{d_s}}).$$

对于不规则区域中的一般次数，我们需要计算

$$\underline{H}^{i+\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}}}(pt) = \underline{\mathcal{D}}(S^{\lambda_{\underline{c}}}, \Sigma^i S^{\lambda_{\underline{d}}}).$$

从这些描述中可以清楚地看出，所有 $\mathbb{Z}$-模 $H^\star(pt)$都是有限生成的。此外，在所有这些情形中，都有 K¨unneth 或普适系数谱序列可供使用（参见 [整数环] 或 [DH，第 6]节），但这些谱序列往往包含许多非平凡微分，需要加以识别。有理化后，这些问题便不复存在，我们很容易得到以下结果（参见命题2.11）：

命题1.1。环 $H^\star(pt)\otimes\mathbb{Q}$ 是 $\mathbb{Q}[u_d,u_d^{-1}:\quad d|n,\quad d\neq 1]$。

由于 $|u_d|=\lambda_d-2$ 因此 $\dim|u_d|=0$ 对所有 d成立，以下结论可由命题 1.1直接得出：

推论1.2。 $H^\beta(pt)$ 在$\dim\beta\neq 0$时是挠元。

在有理化映射 $H^\star(pt)\to H^\star(pt)\otimes\mathbb{Q}$ 为单射的次数上，我们可以选择用元素在该映射下的像来命名这些元素。这一点会在多个场合派上用场。稍后我们将完整描述该映射的像，不过首先讨论其他问题会更有帮助。我们还要指出，命题1.1和推论 1.2都是众所周知的结果，但它们是我们叙述的有益起点。

事实证明， $H^\star(pt)$中存在一些并非立即显而易见的额外周期性：对于 n 的任意因子 c 与 d，都有

$$S^{\lambda_c}\square S^{\lambda_d}\simeq S^{\lambda_{(c,d)}}\square S^{\lambda_{[c,d]}}$$

其中 $(c,\ d)$ 是最大公约数，且 $[c,d]$ 是最小公倍数。（这在形而上学意义上可与阿贝尔群的非典范同构 $\mathbb{Z}/c\oplus\mathbb{Z}/d\cong\mathbb{Z}/(c,\ d)\oplus\mathbb{Z}/[c,d]$ 相比较。）见推论 3.13。换一种稍有不同的说法，环 $H^\star(pt)$ 具有一个单位系

$$\chi_{c,d}\in H^{\lambda_{(c,d)}+\lambda_{[c,d]}-\lambda_c-\lambda_d}$$

对于每一对因子 c 与 d。 $\mathbb{Z}$-模 $H^{\lambda_{(c,d)}+\lambda_{[c,d]}-\lambda_c-\lambda_d}$同构于 $\mathbb{Z}$，因此这是有理化映射为单射的一个次数，我们可以采用记号

$$\chi_{c,d}=\frac{u_{(c,d)}u_{[c,d]}}{u_cu_d}.$$

$\chi_{c,\ d}$ 及其逆元，连同 ±1，结果是 $H^\star(pt)$ 中仅有的齐次单位。见命题7.24。

注1.3。 这些额外周期性使我们能够将分次群从$\mathbb{D}_n$ 缩减到小得多的群。例如，若 ℓ_1 和 ℓ_2 是素数，则次数中出现的任何$\lambda_{\ell_1^{e_1}\ell_2^{e_2}}$都可以替换为$\lambda_{\ell_1^{e_1}}+\lambda_{\ell_2^{e_2}}-\lambda_1$ ，从而得到一个同构群。因此，在同构意义下，所有计算都可缩减为由 λ_d 构成的形式和，其中 d 是素数幂。对于$n=\prod\ell_i^{e_i}$，这会将通常的 $\mathbb{Z}^{\varphi(n)}$分次（其中 $\varphi(n)$为欧拉函数）缩减为 $\mathbb{Z}^{(1+\sum e_i)}$分次，其规模通常小得多。（稍后我们会讨论如何通过$\ell$局部化实现类似效果。）

注意，“移动” $x,y\mapsto(x,y)\ [x,y]$ 将任意一对整数替换为一对其中第一个整除第二个的整数。如果 $x|y$ 在原来的一对中，该移动不会改变任何内容。定义**因子串** 为一列正整数，其中每一项都整除下一项。从任意正整数序列 $c=(c_1,\dots,c_s)$出发，反复应用上述移动（顺序无关紧要），最终会稳定于一个新序列$(c;\ 1),(c;\ 2)\dots,$ $(c;\ s)$，它是一个因子串。我们称之为**与之相关联的因子串** c。可以证明

即$(c;r)$是原序列中元素每次取 r个所得最小公倍数的最大公约数。因此在两端，我们有$(c;1) = (c_1,\dots,c_s)$以及$(c;\ s) = [c_1,\dots,c_s]$。或者，$(c;r)$是对所有素数 ℓ 而言，ℓ^t 在 $c_1,\dots,c_s$的素因数分解中出现的第 r小幂的乘积。

通过用 χ-单位反复做乘法，我们可以把任意群$H^{\lambda_c-\lambda_d+k}$ 变换为同构群 $H^{\lambda_{c'}-\lambda_{d'}+k}$，其中 c' 与 d' 分别是对应于 c 和 d的因子串。因此，理解群 $H^\star(pt)$ 的问题归结为如下情形：$\star$的正分量与负分量各自都是一条因子串。

复形 S^{λ_d} 集中在次数 0 至 2，其中出现三个自由模。盒积 $S^{\lambda_{d_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{d_s}}$集中在次数 0 至 $2s$，并涉及自由模的 3^s 个盒积。结果表明——这一点绝非显然——存在一个小得多的模型：$S^{\lambda_{d_1}+\cdots+\lambda_{d_s}}$ 拟同构于复形

(1.3.1)
$$0\to F_{D_s}\xrightarrow{id-Rt}F_{D_s}\xrightarrow{I\pi R\pi}F_{D_{s-2}}\xrightarrow{id-Rt}F_{D_{s-2}}\xrightarrow{I\pi R\pi}\cdots\longrightarrow F_{D_1}\xrightarrow{id-Rt}F_{D_1}\xrightarrow{R\pi}\underline{\mathbb{Z}}\to 0$$
其各项位于同调次数 0 至 $2s$（微分在第5节中描述）。此处 $D_i = (d;i)$ 来自原序列所关联的因子串。见命题5.1 以了解这一拟同构。这些球面的“线性”模型比大型盒积复形容易处理得多。

容易计算上述线性复形的同调群，得到如下结果：

命题 1.4. 正锥中的同调模如下：

$$\underline{H}^{\lambda_{d_1}+\cdots+\lambda_{d_s}-k} = \underline{H}_k(S^{\lambda_{d_1}+\cdots+\lambda_{d_s}}) \cong \begin{cases}\underline{\mathbb{Z}} & k=2s,\\ 0 & k\ \ odd\ or\ k\geq 2s+1,\\ \underline{\mathbb{Z}}/I_{D_{1+\frac{k}{2}}} & k\ \ even\ and\ 0\leq k\leq 2s-2.\end{cases}$$

D的指标编排有些不太理想，但关键在于，从 0 到 $2s-2$ 的偶数次中，恰好依次得到 D 序列。

还可以将正锥完整地描述为一个环：

命题 1.5. 正锥是分次麦基环$\mathbb{Z}[a_d,u_d:\ \ d|n,1<d]$ 关于以下关系取商所得的商环

- $(p_{\Theta_d\to\Theta_1})^*(a_d) = 0$ （欧拉类关系），
- $\sum_{e\ |\ (d,e)} a_d u_e = \sum_{e\ |\ (d,e)} a_e u_d$对所有 d、e（黄金关系）均成立。

A similar description of the 正 itive 锥 是 first obtained by Basu-Dey [BD]。请注意，上述两个命题中的信息是互补的。仅根据命题1.5 所给的信息，并不能立即看出$\mathbb{Z}$-模在每个次数中实际上是什么，但命题1.4 则明确了这一点。

正锥的每个齐次分量都由 a-类与 u-类的乘积生成（以下简称“au-类”）。尽管这些群是循环群，但通常无法找到单个可作为生成元的 au-类。当 n 是素数幂时，总能做到这一点，但一般情况下则不然。

注 1.6. 上述叙述顺序有助于阐明计算背后的思路与结果，但在论文正文中，有时通过另一种路径来证明会更容易。例如，在论文中，我们先证明命题1.5，然后再据此推导出球面的线性模型；这与我们在此讲述的顺序正好相反。

要转到负锥，需要使用函子 Hom(−, ℤ)。将其应用于球面 S^{λ_d} 的线性模型 $S^{-\lambda_d}$，即可得到 $S^{-\lambda_d}$的线性模型。可以手动计算同调，但也可以直接由万有系数谱序列得出（该谱序列在此处退化）：

命题 1.7。 负锥中的同调模如下

$$\underline{H}^{k-\sum_i \lambda_{d_i}} = \underline{H}_{-k}(S^{-\lambda_{d_1}-\cdots-\lambda_{d_s}}) \cong \begin{cases} I_{D_s} & k = 2s, \\ 0 & k \neq 2s \text{ even, or } k > 2s, \text{ or } k < 0 \\ \mathbb{Z}/I_{D_{\frac{k-1}{2}}} & 3 \leq k \leq 2s-1. \end{cases}$$

同样要注意，关键在于得到相应的因子串D_*；这次它出现在从 3 到 $2s-1$ 的奇数次中，而最后一项 D_s则以略有不同的形式出现在次数 $2s$ 中。

正如正锥的每个齐次分量都是由 au-类生成的，负锥的齐次元素也可以用类似（但更复杂）的方式描述。问题在于，这次需要对au-类进行除法 ，而不是乘法。

首先，对于每个因子序列 $d_1, \ldots, d_s$，我们都有生成元

$$\frac{[d_1, \ldots, d_s]}{u_{d_1} \cdots u_{d_s}} \in H^{2s-\lambda_{d_1}-\cdots-\lambda_{d_s}}(pt)$$

（回忆一下， $[d_1, \ldots, d_s]$ 表示最小公倍数）。它生成 Mackey 函子的 Θ_1-分量中的 $\mathbb{Z}$，根据命题 1.7 ，该分量同构于 $I_{[d_1,\ldots,d_s]}$。同样，这是一个有理化映射为单射的次数，因此我们可以用类的像来命名这些类。注意， u_i 并不可逆，但这种记号表示，在这个次数中存在唯一一个类，乘以$u_{d_1} \cdots u_{d_s}$后会得到 $[d_1, \ldots, d_s]$。我们将这些称为“$?_u$-类”。它们完整描述了负锥的非挠部分。

接下来，对于每个 $b|n$ ，都有一个特殊类 $\gamma_b \in H^{3-2\lambda_b}(pt) \cong \mathbb{Z}/b$ 生成这个群。这是以一种类似“等变 Bockstein”的方式得到的，具体如下。正如 [DH], $\mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_b, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}/b$ 中所解释的，我们可以利用 $\mathbb{Z}/I_b$的标准分解写出一个典范生成元 B_b 。在我们的导出范畴中，这是一个映射 B_b: $\mathbb{Z}/I_b \to \Sigma^3\mathbb{Z}$。我们还有一个典范映射 $\mathbf{1}_b$: $S^{\lambda_b} \to \mathbb{Z}/I_b$，由此得到 $S^{\lambda_b+\lambda_b} \to \mathbb{Z}/I_b \square \mathbb{Z}/I_b = \mathbb{Z}/I_b$；这是一个元素 $\mathbf{1}_b \square \mathbf{1}_b \in [S^{2b}, \mathbb{Z}/I_b]$。元素 γ_b 是复合 $B_b \circ (\mathbf{1}_b \square \mathbf{1}_b)$。这种通过 Bockstein 给出的描述有助于揭示这些类的一些性质；参见命题 6.5 和 6.7。

最后，对于每个因子串 $b_1, \ldots\ldots, b_s$，我们都有元素

$$\frac{a_{b_j}\gamma_{b_j}}{u_{b_1}^{i_1} \cdots u_{b_{j-1}}^{i_{j-1}} a_{b_j}^{i_j} \cdots a_{b_s}^{i_s}} \in H^{(3+2(i_1+\cdots+i_{j-1})-\lambda_{b_j}-\sum_k i_k\lambda_{b_k})} \cong \mathbb{Z}/b_j \tag{1.7.1}$$

其中分母中的指数均为非负数，并且 a-类中至少有一个指数非零。请注意，这里的记号非常不严谨——这些是挠元，因此在有理化中映射为零，而乘积$a_b\gamma_b$ 本身实际上也是零。因此，这个分式只能作为一种记号来理解，而不是真正的分式。只要谨慎处理允许使用的运算规则，涉及这些类的乘积在记号意义下确实是一致的。我们将在命题 6.17 中证明这一点。

我们将把形如（1.7.1）的任意表达式称为“负 γ-类”。注意，$\gamma_b = {}^{a_b\gamma_b}_{a_b}$因此 γ_b 本身按照此定义也是一个“负 γ-类”。

虽然（1.7.1）看起来令人望而生畏，但归根结底，它所表达的是：我们可以取一个表达式 $a_b\gamma_b$ ，并将其除以任意多个 u-类，其中索引构成一个以 b结尾的因子串；也可以除以任意多个 a-类，其中索引构成一个以 b开头的因子串，只要除数中至少包含一个 a-类。

命题 1.8。 负锥由负 γ-类以及 $?_u$-类在涉及因子串的次数中的加法生成；在其他次数中，则由这些类与 χ-类的乘积加法生成。

两个 γ-类相乘很容易：两个此类的乘积总是落在挠群为零的次数中，因此该乘积必为零。对于将 γ-类与某些 au-类以及$?_u$-类相乘，也有一些部分规则。这些规则过于冗长，无法在引言中一一复述，但请参见命题 6.3 和6.17。

我们提醒有兴趣的读者，本书还有第6.20节，题为“负锥的黑魔法”，其中介绍了一些技巧，帮助记忆如何在这个区域中将元素相乘。不过，既然导论应当保持严谨得体，我们在此就不再赘述。

接下来，我们讨论不规则区域中的群。这些群具有如下形式：$H^{\lambda_d-\lambda_c+k}(pt)$，其中 d和 c都不全由 1 组成。这个群同构于链同伦类的集合 $[S^{\lambda_c}, \Sigma^k S^{\lambda_d}]$。鉴于（1.3.1）中对球面的简单描述，人们或许会认为这些群可以轻松直接地计算出来。从某种意义上说，确实如此——对于c和d的任意特定取值，都可以通过算法计算出该群。遗憾的是，当序列长度至少为三时，即便在素数处进行局部计算，所得结果似乎也无法用简单的公式表示。我们将在第8节探讨这些问题，并给出一些部分结果，但目前我们对这些问题的认识仍不尽如人意。

下面的命题为将某些次数化简为更简单的次数提供了一个起点：

命题 1.9。 设 $c = (c_1, \ldots, c_q)$ 和 $d = (d_1, \ldots, d_s)$ 为因子串（可以为空）。

(a) 假设至少有一个 c_i ，且 $k \geq 4$。那么

$$H^{\lambda_d-\lambda_c+k} \xrightarrow{u_{c_1}} H^{\lambda_d-\lambda_{c'}+(k-2)}$$

这是一个同构，其中 c' 表示从序列 c 中移除 c_1 后得到的序列。

(b) 假设至少有一个 d_i ，且 $k < 0$。那么

$$H^{\lambda_{d'}-\lambda_c+k+2} \xrightarrow{u_{d_1}} H^{\lambda_d-\lambda_c+k}$$

是一个同构，其中 d' 表示去掉 d_1 后的序列 d。 _

(c) 若 k 为奇数，则 $H^{\lambda_d-\lambda_c+k}$ 由$(au)_d$-类与负γ_c-类的乘积生成。*(d)* 假设 $q>s$（因此 c的个数多于 d的个数）。则存在一个同构

$$H^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}}} \xrightarrow{\cdot a_{c_{s+1}}\cdots a_{c_q}} \operatorname{tors} H^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}'}}$$

其中 $\underline{c}'=(c_1,\ldots,c_s)$，tors 表示挠子群。

(e) 假设 $q<s$ （因此 d 的数量多于 c 的数量）。于是存在一个正合列

$$0 \longrightarrow \mathbb{Z} \longrightarrow H^{\lambda_{\underline{d}'}-\lambda_{\underline{c}}} \xrightarrow{\cdot a_{d_{q+1}}\cdots a_{d_s}} H^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}}} \longrightarrow 0$$

where $\underline{d}'=(d_1,\ldots,d_q)$.

上述结果的 (c) 部分实际上导出了以下结论（证明见推论 8.1）：

推论 1.10. 环 $H^\star(pt)$ 是交换的（不只是分次交换）：也就是说，$xy=yx$ 对所有 x 和 y都成立。

注 1.11. 从命题 1.9 的 (c)–(e) 部分开始，$\mathbb{Z}$读者会注意到一个转变：我们不再讨论 $H^\star$ -模，而主要转而讨论群 $H^\star$。这是有原因的：与正锥和负锥不同，不规则区域中的 Mackey 函子可能相当复杂，而且目前还没有已知的简单方法能用基本构件来描述它们。这个问题可能最早是在 [BG3]中被注意到的。

命题 1.9 的 (a) 和 (b) 部分使我们能够将实际计算化简为 $H^{\lambda_d-\lambda_c+k}$ 其中 $0\le k\le 3$。凡是 k-值不在此范围内的次数，都可以化简为此范围内的次数。(c)、(d) 和 (e) 部分说明，在元素命名方面，我们还可以进一步将问题化简为群 $H^{\lambda_d-\lambda_c}$，其中 c 和 d 长度相同。

为了展示其中的一些内容，我们来考察下面这个扩展例子。设 (c_1,c_2) 和 (d_1,d_2) 是因子串。图 1 列出了 $H^\star(pt)$ 中所有非正规群的生成元，其中次数在正部和负部各自至多涉及两个 λ-类。

阅读此表时，首先回想 S^{λ_c} 由一个集中在第 0 到 $2\cdot\operatorname{length}(c)$ 次数的复形来建模（S^{λ_d}也同样如此）。由此可知$H^{\lambda_d-\lambda_c+k}=[S^{\lambda_c},\Sigma^k S^{\lambda_d}]$ 在 $k<-2\operatorname{length}(d)$ 或 $k>2\operatorname{length}(c)$ 时自动为零。事实上，利用命题 1.9(b) 以及关于 length(d) 的归纳法，可将第一个不等式加强为 $k<2-2\operatorname{length}(d)$。表中的空白区域就是这些范围（表格范围以外的区域也因同样的原因留空）。

在 k 为奇数的情形下，我们只需列出所有可能的 au_d-类与负 γ_c-类的乘积，同时牢记我们对正锥和负锥的了解。除了最后一列中的 $k=1$ 之外，每种情形至多只有一个生成元；对于后者，我们利用黄金关系得知其中一个类是另一个类的倍数。

对于 $k=4$，第一行使用命题1.9（a），通过乘以u_{c_1}将其化为第 $k=2$行中一般类型的群。这几乎就是表格中向上两步、向左一步、呈“马步”位置的那个群，但其中用 c_2 替代了 c_1。

对于 $k=-2$，可利用命题 1.9(b) 进行类似的约化，其中涉及除以 u_{d_1}。

k	$H^{\lambda_{d_1}-\lambda_{c_1}+k}$	$H^{\lambda_{d_1}-\lambda_{c_1}-\lambda_{c_2}+k}$	$H^{\lambda_{d_1}+\lambda_{d_2}-\lambda_{c_1}+k}$	$H^{\lambda_{d_1}+\lambda_{d_2}-\lambda_{c_1}-\lambda_{c_2}+k}$
-2			$u_{d_1}\frac{c_1}{(c_1,d_2)}\frac{u_{d_2}}{u_{c_1}}$	0
-1			0	$u_{d_1}u_{d_2}\frac{a_{c_1}\gamma_{c_1}}{a_{c_2}}$
0	$\boxed{\frac{c_1}{(c_1,d_1)}\frac{u_{d_1}}{u_{c_1}}}$	0	$\frac{c_1}{(c_1,d_1)}\frac{u_{d_1}}{u_{c_1}}\cdot a_{d_2}$	$\boxed{[\mathrm{H}]}$
1	0	$u_{d_1}\frac{a_{c_1}\gamma_{c_1}}{a_{c_2}}$	0	$u_{d_1}a_{d_2}\frac{a_{c_1}\gamma_{c_1}}{a_{c_2}}$
2	$a_{d_1}\frac{c_1}{u_{c_1}}$	$\boxed{\frac{c_1c_2}{(c_1c_2,\ d_1)}\cdot\frac{u_{d_1}}{u_{c_1}u_{c_2}}}$	$a_{d_1}a_{d_2}\frac{c_1}{u_{c_1}}$	$a_{d_2}\frac{c_1c_2}{(c_1c_2,d_1)}\frac{u_{d_1}}{u_{c_1}u_{c_2}}$
3		$a_{d_1}\frac{a_{c_1}\gamma_{c_1}}{a_{c_2}}$		$a_{d_1}a_{d_2}\frac{a_{c_1}\gamma_{c_1}}{a_{c_2}}$
4		$a_{d_1}\frac{c_2}{u_{c_1}u_{c_2}}$		$a_{d_1}a_{d_2}\frac{c_2}{u_{c_1}u_{c_2}}$

FIGURE 1. 不规则区域中低次上同调群的生成元

对于 $k=2$，我们可以将 $+2$ 解释为一个 λ_1，本质上是在 d字符串开头添加一个 1。随后命题1.9（e）处理第一、第三和第四列。（注意，这里是从第 x 列约化到第 $x-2$列，例如通过除以 a_{d_2}，我们从第 4 列移到第 2 列。还要注意，$H^{2-\lambda_{c_1}}$ 位于正则区域中——事实上位于负锥中——并且由 c_1/u_{c_1}生成；不过，这一点也可以从第一列的 $d_1=1$，$k=0$ 项中看出。）

方框标出的项是其中 c 的数量等于 d 的数量的项（请记住，$\lambda_1=2$，因此在方便时，我们可以将一个 $+2$ 视为一个 d-项），并且其中的群无法通过命题 1.9中的技术约化为另一个群。这些群必须直接计算，正如第 7.4节所做的那样。前两列中的两个方框结果是 $\mathbb{Z}$ 的副本，而最后一列中的方框——其中仅填有表示“Hard”的 H——是 $\mathbb{Z}$ 与一个循环挠项的直和。参见例 7.11 和 7.12，以及命题 3.5。

请注意，表中所有带有已确定项的方框实际上都是循环群。不过，这多少有些偶然。随着 c 和 d 序列的长度增加，直和项的数量往往也会增加。事实上，如上所述，标记为 [H] 的方框中的群并不总是循环的，这取决于 c 和d的值。一旦出现一个非循环群，它就会通过命题 1.9中概述的约化，传播到更复杂的次数中。

还要注意，我们没有在表中列出循环群的阶。它们可以计算出来，但公式会变得越来越复杂。具体内容请参见示例7.11 和7.12 。

最后，我们再补充一点关于有理化映射的信息

$$H^\star(pt)\to H^\star(pt)\otimes\mathbb{Q}=\mathbb{Q}[u_d,u_d^{-1}\ :\ d|n,d\neq 1].$$

像是什么？我们可以对其进行完整计算，但答案不易表述。首先注意，像中的任意齐次元素都是某个类 $\frac{u_{d_1}\cdots u_{d_s}}{u_{c_1}\cdots u_{c_k}}$ 的倍数。鉴于 $u_1 = 1$，我们可以根据需要在 c 或 d 序列中添加 1，使它们长度相同。此外，所讨论的倍数不会因乘以 χ-单位而改变，因此不妨假设 c 和 d 是因子串。

给定长度相同的因子串 c 和 d，构造数组

$$\begin{array}{ccccc} & d_1 & d_2 & \cdots & d_s \\ 1 & c_1 & c_2 & \cdots & c_s. \end{array}$$

将**允许路径** 定义为沿着上述数组的各项移动、从 1 开始，并且每一步只能向右一格（R）、向右上方（UR）或向下（D）的路径。对于每条允许路径，定义其对应的整数为沿路径遇到的所有项的乘积。

命题 1.12。设 c 和 d 为长度相同的因子串 s。那么，$H^{\lambda_d-\lambda_c}(pt)$ 在 $H^\star(pt)\otimes\mathbb{Q}$ 中的像由 $M\cdot\frac{u_d}{u_c}$ 的所有整倍数组成，其中 M 由下式给出

$$M = (\text{所有以 } c_s) \ (\text{结尾的允许路径所对应整数的最大公约数；所有以 } c_s \text{ 或 } d_s) \text{ 结尾的允许路径所对应整数的最大公约数}$$

当 c 和 d 不是因子串时，答案与分别用它们对应的因子串替换后得到的答案相同。

参见命题 7.20。我们再次提醒，知道某个倍数 $M\frac{u_d}{u_c}$ 属于有理化映射的像，并不一定能在 $H^\star(pt)$ 中得到一个称得上是这个分数的典范元素。如果 $H^\star(pt)$ 在这个次数上有挠元，那么多个元素可能映射到同一个分数。

我们以简要介绍 ℓ-进局部化来结束这篇导论性概述，其中 ℓ 是素数。在可能的范围内，我们在本文导言中尽量不逐个素数地讨论 $H^\star_{C_n}$，这是一个合理的初步目标；作为相关现象，经典群上同调 $H^*(C_n)$ 作为整体对象，比通过拼接各个 ℓ-局部部分更容易描述。但归根结底，ℓ-局部化确实有助于简化问题，尽管可能并非大幅简化。

首先遇到的一个重要现象是，对于每个 d，都存在一个类 $\frac{u_d}{u_{d(\ell)}} \in H^{\lambda_d-\lambda_{d(\ell)}}$，它在与 $\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 作张量积后会变成单位，其中 $d(\ell)$ 是整除 d 的 ℓ 的最大幂。因此，经过 ℓ-局部化后，$H^\star$ 中会出现额外周期性，从而可以将分次限制在 $\mathbb{D}_{d(\ell)} \subseteq \mathbb{D}_n$。不过要注意，底层对象仍然是 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模的链复形。

第二步约化涉及从 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模到 $\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$-模的转换。最方便的做法是通过换群函子 Res$f$，其中 $f\colon C_n \to C_{n(\ell)}$ 是商映射。该函子将定义在 $\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$ 上的复形 $S^{\lambda_{d(\ell)}}$ 映射为同名但不同的复形 $S^{\lambda_{d(\ell)}}$（由 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模构成），并且还保持盒积。利用 Res$f$ 及其右伴随 Ind$f$ 的标准性质，可以得到典范同构

$$H^{\lambda_d-\lambda_c+k}_{C(n(\ell))} \cong H^{\lambda_d-\lambda_c+k}_{C_n}$$

当所有 c_i 和 d_i 都是 ℓ 的幂时。综合以上各点可知，环 $H^\star_{C_n} \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)}$ 本质上就是 $H^\star_{C_{n(\ell)}} \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)}$；之所以说“本质上”，是因为前者按 $\mathbb{D}_n$ 分次，而后者按 $\mathbb{D}_{n(\ell)}$ 分次。这种约化在很大程度上并未解决根本问题；在不规则区域中，对 $C_{n(\ell)}$ 的计算仍然很困难。但这种约化确实 将问题化归到一个一切都是因子串的情形，因此 χ-类不再需要考虑。

关于这些问题及相关事项的讨论，请参见第9节。

作为本引言的结束，我们只想说 $H^\star_{C_n}$ 是一个复杂的结构，似乎至今仍未揭开所有秘密。例如，人们可能会想知道，是否存在类似命题1.12中的组合方法，能够给出 $H^{\lambda_d - \lambda_e}$的同构类型。这里还有许多问题有待探究。

1.13. **记号与术语**。 我们的结果需要对 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模的范畴进行一些细致的研究，而遗憾的是，在描述这一领域中的对象和映射时，并没有一套通用的约定。前传论文 [DH]试图谨慎地建立我们所需的术语体系和基础性结果，读者可参阅该文了解这些基础内容。不过，我们会在下文第2.1 节中作简要概述。

我们固定一个奇正整数 n，并令 C_n 为阶数为 n 且指定了生成元 t的循环群。符号 ℓ 始终表示一个素数，而$n(\ell)$表示整除 n的 ℓ 的最大幂。此外， $n(\ell) = n^{\ell()}$。给定两个整数a 和 b，最大公约数和最小公倍数分别记作 (a, b) 和 $[a, b]$。

1.14. 致谢。 本文的部分工作是在第一作者作为访问学者访问数学计算与实验研究所期间完成的。该研究所由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1929284。第一作者感谢 ICERM 和布朗大学提供了优良的工作环境。

2. $\mathbb{Z}$-MODULES AND THEIR DERIVED CATEGORY

本节简要回顾 $\mathbb{Z}$-模的基础知识，随后讨论相关导出范畴中的一些基本构造，为本文余下部分的研究对象作好铺垫。

2.1. **回顾 $\mathbb{Z}$-模**。 我们偏好的、用于研究$\mathbb{Z}$-模的语言和工具，已在 [DH]中作了详细介绍。此处我们将作一个极简回顾。

C_n 的轨道范畴的对象为 $\Theta_d = C_n/C_{(n/d)}$。其映射由投影映射 $p = p_{\Theta_d \to \Theta_e}$（当 $e|d$ 时）以及作用映射 $t = t_d$: $\Theta_d \to \Theta_d$生成。注意，我们通常会省略下标，并将任意投影记为 p，将任意作用映射记为 t。总有 $tp = pt$。映射 $\Theta_d \to \Theta_e$ 仅在 $e|d$ 时存在，此时这些映射恰为 $t^i p$，其中 $i = 0, 1, \ldots\ldots, e-1$。特殊投影映射 $\Theta_d \to \Theta_1$ 通常记作 π。

回顾一下 $\mathbb{Z}$-模是定义在由跨度构成的范畴 $\mathcal{B}\mathbb{Z}$ 上的逆变加性函子。参见 [DH，第 2 节，8] 其中构造了 $\mathcal{B}\mathbb{Z}$，并讨论了如何将其视为通常的跨度 Burnside 范畴的商空间。轨道范畴中的每个映射 f都会给出映射 Rf和 If，定义在 $\mathcal{B}\mathbb{Z}$中，从而诱导映射 $(Rf)^* = f^*$ 以及

$(If)^* = f_*$ 在一个 $\underline{\mathbb{Z}}$-模上。用这种语言来说，一个跨度 $[S \xleftarrow{f} X \xrightarrow{g} T]$ 对应于 $Rf \circ Ig$。

对于每个轨道 Θ_d，都有一个对应的自由 $\mathbb{Z}$-模 F_{Θ_d}，我们将其简记为 F_d。通常假设这个自由模带有选定的基，即指定的生成元 $g_d \in F_d(\Theta_d)$。注意 $F_{\Theta_1} = F_1 = \mathbb{Z}$，我们通常将其记作后者。映射 $F_d \to F_e$ 与 $\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_d, \Theta_e)$ 一一对应。特别地，映射 $f\colon \Theta_d \to \Theta_e$ 给出映射 $Rf\colon F_d \to F_e$，以及映射 $If\colon F_e \to F_d$。在基元素上，这些映射分别将 $g_d \mapsto f^*(g_e)$ 和 $g_e \mapsto f_*(g_d)$ 映为。

对于每个因子 d，理想 $I_d \subseteq \mathbb{Z}$ 由元素 $1_d \in \mathbb{Z}(\Theta_d)$ 生成。模 $\mathbb{Z}/I_d$ 有如下形式的标准自由分解

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{I\pi} F_d \xrightarrow{id - Rt} F_d \xrightarrow{R\pi} \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}}/I_d \longrightarrow 0. \tag{2.1.1}$$

相关内容见 [DH，命题 4。18]。

一个会反复用到的重要性质是：如果 $e|n$ 且 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且由位置 Θ_d 处的元素生成，其中 $e|d$，那么 $M \square \mathbb{Z}/I_e = 0$。见 [DH，命题 4。4]特别地：

$$\text{If } e|d \text{ then } F_d \square \underline{\mathbb{Z}}/I_e = 0 \text{ and } I_d \square \underline{\mathbb{Z}}/I_e = 0. \tag{2.1.2}$$

$\mathbb{Z}$-模范畴有一个内部 Hom 对象 $\mathbf{Hom}(-, -)$，它是余积的右伴随。函子 $\mathbf{Hom}(-, \mathbb{Z})$ 将 F_d 映到 F_d，但将映射 Rf 映到 If，反之亦然。

有时我们会用到 Tor 和 Ext 的计算，例如

$$\underline{\mathrm{Tor}}_i(\underline{\mathbb{Z}}/I_d, \underline{\mathbb{Z}}/I_e) \cong \underline{\mathrm{Ext}}^i(\underline{\mathbb{Z}}/I_d, \underline{\mathbb{Z}}/I_e) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}}/I_{(d,e)} & \text{if } i = 0 \text{ or } i = 3, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

关于这些内容以及其他内容，见 [DH，第 4]节。另请注意，存在典范分解 $\mathbb{Z}/I_d = \bigoplus_{\ell|d} \mathrm{tors}_\ell(\mathbb{Z}/I_d)$ 为 ℓ-次幂挠子模（其中 ℓ 始终表示素数），以及非典范同构 $\mathrm{tors}_\ell(\mathbb{Z}/I_d) \cong \mathbb{Z}/I_{d(\ell)}$。

以下结论见 [DH，命题 4.15(f)]：

(2.1.3)

> 设 M 是一个有限生成的 $\mathbb{Z}$-模，且 $S \subseteq M(\Theta_1)$。固定 $d \geq 1$。假设对每个素数 ℓ，都有 $M \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)} \cong \mathbb{Z}/I_{d(\ell)}$，并且 $M \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)}$ 由 S 生成。那么 $M \cong \mathbb{Z}/I_d$，且 M 由 S 生成。

最后再介绍一个零散的事实：

(2.1.4) 至多存在一个（在同构意义下）$\mathbb{Z}$-模 M，使其属于短正合列 $0 \to I_e \to M \to \mathbb{Z}/I_d \to 0$，且 $M(\Theta_1)$ 非挠。该模存在当且仅当 $d|e$，记作 $\mathbb{Z}(e; d)$。

关于该事实的证明以及该模的更详细描述，见 [DH，第 5 节。4]。

2.2. 导出范畴。 令 $\mathcal{D} = \mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 表示 $\mathbb{Z}$-模的导出范畴，即将所有拟同构都取为可逆态射后得到的链复形范畴的局部化。令 $\mathcal{D}_{cpt}$ 为由有界、逐级自由的复形（紧对象）构成的满子范畴。注意，这些导出

范畴自然地富含 $\mathbb{Z}$-模：对于对象 X 和 Y，我们将$\mathcal{D}(X,\ Y)$ 记作 $\mathbb{Z}$-模

$$\Theta \mapsto \mathcal{D}(F_\Theta \square X, Y).$$

如果 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且 X 属于 $\mathcal{D}$，我们（照例）记作

$$\underline{H}_i(X;M) = \underline{\mathcal{D}}(\Sigma^i\mathbb{Z}, X\square M), \qquad \underline{H}^i(X;M) = \underline{\mathcal{D}}(X, \Sigma^i M)$$

其中 $\square$ 是导出盒积。当 $M = \mathbb{Z}$ 时，我们通常会在系数中省略它。

如果 X 是一个有界的逐次自由链复形，令 $X^* = \mathrm{Hom}(X,\mathbb{Z})$。函子 $X \mapsto X^*$ 保持有界逐次自由链复形之间的拟同构，因此可以视为作用于 $\mathcal{D}_{cpt}$ 上的函子。注意，我们有典范同构 $X \to (X^*)^*$，因此也得到相应的对偶同构

$$\mathcal{D}(X,Y) \cong \mathcal{D}(Y^*, X^*).$$

常规的伴随论证表明，这是一个 Θ_1 分量，属于 $\mathbb{Z}$-模之间的典范同构

$$\underline{\mathcal{D}}(X,Y) \cong \underline{\mathcal{D}}(Y^*, X^*). \tag{2.2.1}$$

在 $\mathcal{D}_{cpt}(\mathbb{Z})$ 中，有一些来自拓扑学的特殊对象。对于正整数 $b|n$，令 S^{λ_b} 表示复形

$$0 \longrightarrow F_b \xrightarrow{id-Rt} F_b \xrightarrow{R\pi} \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0$$

其中 $\mathbb{Z}$ 位于零次。这是表示 λ_b 的一点紧化的约化胞腔链复形（参见第1节）。这个几何球面通常也记作 S^{λ_b}，但对这两个对象使用相同的符号通常不会引起混淆。

注 2.3。我们不会用到以下内容，但在此简要说明其背后的几何图像。在表示 λ_b 中画出射线 $r = \overrightarrow{01}$ 及其共轭 $t^i r$，其中 $0 \le i < b$。几何 S^{λ_b} 具有如下胞腔结构：0-胞腔为0和 ∞（二者均为固定点，因此轨道型为 Θ_1），上述射线构成轨道型为 Θ_b的等变1-胞腔，而射线之间的扇区构成类型为 Θ_b的等变2-胞腔。这个2-胞腔的边界是 $r - tr$，它就是上述复形中的$id - Rt$。这个复形在零次只有一个 $\mathbb{Z}$ 而非两个，因为它是约化胞腔复形（0-胞腔 ∞ 被商为零）。

对于 $1 \le k < n$，也可以类似地写出 $S^{\lambda(k)}$ 的约化胞腔链复形。射线 $t^i r$ 对应于由 k 生成的 $\mathbb{Z}/n$ 子群，即 (k,n)。作为一个 C_n-集，它是 $\Theta_{n\,(k,n)}$。在这些射线之间交错排列的 2-胞腔所组成的集合也是 $\Theta_{n\,(k,n)}$。若记 $(k,n) = Ak + Bn$ 且 $A \ge 0$，则“第一个”2-胞腔的边界为 $r - t^A r$，由此得到的相应约化链复形就是下图顶行所示的复形：

$$\begin{array}{ccccccccc}
0 & \longrightarrow & F_{\frac{n}{(k,n)}} & \xrightarrow{id-Rt^A} & F_{\frac{n}{(k,n)}} & \xrightarrow{R\pi} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \\
 & & \uparrow{\scriptstyle id} & & \uparrow{\scriptstyle id+Rt+\cdots+Rt^{A-1}} & & \uparrow{\scriptstyle \cdot A} & & \\
0 & \longrightarrow & F_{\frac{n}{(k,n)}} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{\frac{n}{(k,n)}} & \xrightarrow{R\pi} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0.
\end{array}$$

我们断言，所示的链复形映射是一个拟同构，这解释了为什么对于 $k \nmid n$， $RO(C_n)$-分次中的 $\lambda(k)$ 部分是多余的。为此，注意到在 $F_{n(k,n)}$ Mackey 函子中，每个元素都被 $t_{k^{n}n(,)}$ 固定。由于 $1 = A\cdot {}_{k(k,n)} + B\cdot {}_{n(k,n)}$, 因此 和 $(,)$ 在该 Mackey 函子上的作用相同。由此形式上可知，映射 $id - Rt$ 和 $id - Rt^A$ 具有相同的核和像——对于后者，利用

$$id - Rt = id - (Rt^A)^{\frac{k}{(k,n)}} = (id - Rt^A)\cdot(id + Rt^A + \cdots Rt^{A\cdot(\frac{k}{(k,n)}-1)}).$$

因此，上述两个复形的同调模在所有次数上都相同；并且由于 $H_1 = 0$，诱导映射在次数 1 和 2 上显然是同构。在次数 0 上，它是 A 乘以 $\mathbb{Z}/I_{n(k,\ n)}$的映射；但由于 A 是模$n_{(k,\ n)}$ 的单位，因此这也是一个同构。

回到关于 $\mathbb{Z}$ 的导出范畴的讨论，注意到 $S^{\lambda_1} \simeq \Sigma^2\mathbb{Z}$, 因为包含二次部分给出了一个映射 $\Sigma^2\mathbb{Z} \to S^{\lambda_1}$，它是一个拟同构。虽然 S^{λ_1} 作为复形并不严格等于 $\Sigma^2\mathbb{Z}$，但在导出范畴中工作时，我们可以通过这个明确的拟同构将它们视为相同。此外，令 S^{λ_0} 表示 $\mathbb{Z}$ （集中在零次）。

给定整除 n 的正整数 $b_1, \dots, b_s$，我们记

$$S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_s}} = S^{\lambda_{b_1}} \square \cdots \square S^{\lambda_{b_s}}.$$

请注意，改变 b 的顺序会得到不同的对象，不过它们在同构意义下相同。

我们还定义 $S^{-\lambda_b} = (S^{\lambda_b})^*$ 以及

$$S^{-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_s}} = S^{-\lambda_{b_1}} \square \cdots \square S^{-\lambda_{b_s}}.$$

注意， $S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_s}}$ 集中在次数 0 到 $2s$，而 $S^{-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_s}}$ 集中在次数 $-2s$ 到 0。

复形 $S^{-\lambda_b}$ 定义如下：

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{I\pi} F_b \xrightarrow{id-Rt} F_b \longrightarrow 0.$$

这两个复形 S^{λ_b} 和 $S^{-\lambda_b}$ 都可以在我们的标准自由分解（2.1.1） $\mathbb{Z}/I_b$中找到；这一事实可概括为在 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$中存在以下余纤维序列：

$$S^{\lambda_b} \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b \to \Sigma^3\underline{\mathbb{Z}}, \qquad \underline{\mathbb{Z}} \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b \to \Sigma^3 S^{-\lambda_b}.$$

这些对我们非常有用。与此相关，请注意以下简单的计算：

$$\underline{H}_i(S^{\lambda_b}) \cong \begin{cases} \underline{\mathbb{Z}} & \text{if } i = 2, \\ \underline{\mathbb{Z}}/I_b & \text{if } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad \underline{H}_i(S^{-\lambda_b}) \cong \begin{cases} I_b & \text{if } i = -2, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这些结论可直接由上述余纤维序列推出。特别要注意， $S^{-\lambda_b} \simeq \Sigma^{-2} I_b$。

另请注意，如果 $a|b$ 那么（2.1.2）表明 $F_b \square \mathbb{Z}/I_a \cong 0$，因此

$$S^{\lambda_b} \square \underline{\mathbb{Z}}/I_a \simeq \underline{\mathbb{Z}}/I_a \quad \text{and} \quad S^{-\lambda_b} \square \underline{\mathbb{Z}}/I_a \simeq \underline{\mathbb{Z}}/I_a. \tag{2.3.1}$$

即使没有任何来自拓扑学的动机，人们最终也会发现复形 S^{λ_b}，因为它们是 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 中的可逆对象。特别地，我们有：

命题 2.4。 $S^{\lambda_b}\square S^{-\lambda_b} \simeq \mathbb{Z}$。

证明。从余纤维序列 $\Sigma^{-3}\mathbb{Z} \to \Sigma^{-3}\mathbb{Z}/I_b \to S^{-\lambda_b}$ 开始，并与 S^{λ_b} 作方框图，得到

$$\Sigma^{-3}S^{\lambda_b} \to \Sigma^{-3}\mathbb{Z}/I_b \to S^{\lambda_b}\square S^{-\lambda_b}$$

（我们使用了（2.3.1）来简化中间项）。映射 $S^{\lambda_b} \to S^{\lambda_b}\square\mathbb{Z}/I_b = \mathbb{Z}/I_b$ 显然在 H_0 上是同构，随后由上述余纤维序列可立即推出 $H_i(S^{\lambda_b}\square S^{-\lambda_b}) = 0$ 对 $i \neq 0$ 成立，且 $H_0(S^{\lambda_b}\square S^{-\lambda_b}) \cong H_{-1}(\Sigma^{-3}S^{\lambda_b}) \cong H_2(S^{\lambda_b}) \cong \mathbb{Z}$。这就证明了 $S^{\lambda_b}\square S^{-\lambda_b} \simeq \mathbb{Z}$，证毕。□

下述结果常常很有用。它表明，从与一个“足够大”的自由模进行装箱的视角来看，每个球面都像是 $\mathbb{Z}$ 的普通悬挂。

命题 2.5. 设 $b_1, \ldots, b_s$ 为 n 的因子，令 $b_0 = 0$，并设 $m_0, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}$。设 $\beta = \sum_{i=0}^{s} m_i\lambda_{b_i}$。若对所有 i 有 $c|n$ 且 $b_i|c$，则 $S^{\beta}\square F_c \simeq \Sigma^{\dim\beta}\mathbb{Z}\square F_c = \Sigma^{\dim\beta}F_c$。

证明。只需在 $\beta = \pm\lambda_d$ 且 $d|c$ 时证明这一点，然后再使用显然的归纳法。但 F_c 是平坦的（见 [DH，推论 2.25]），因此

$$\underline{H}_i(S^{\lambda_d}\square F_c) \cong \underline{H}_i(S^{\lambda_d})\square F_c \cong \begin{cases} \mathbb{Z}\square F_c & \text{if } i = 2, \\ \mathbb{Z}/I_d\square F_c & \text{if } i = 0, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由（2.1.2），假设 $d|c$ 蕴含 $\mathbb{Z}/I_d\square F_c = 0$，从而 $S^{\lambda_d}\square F_c \simeq \Sigma^2 F_c$。

等价 $S^{\lambda_d}\square F_c \simeq \Sigma^2 F_c$ 立即推出 $\Sigma^{-2}F_c \simeq S^{-\lambda_d}\square F_c$，只需与两个球面的逆元取框积即可。□

以下结果与前一个结果相似，但背景略有不同。采用命题2.5中的记号，若 ℓ 是素数，则定义

$$\dim_\ell \beta = \sum_{\ell|b_i} m_i \dim \lambda_{b_i}, \qquad \dim_{\hat{\ell}} \beta = \sum_{(\ell,b_i)=1} m_i \dim \lambda_{b_i}. \tag{2.5.1}$$

注意，$\dim\beta = \dim_\ell\beta + \dim_{\hat{\ell}}\beta$。

命题 2.6。 设 $b_1, \ldots, b_s$ 是 n 的因子，令 $b_0 = 0$，并设 $m_0, \ldots, m_s \in \mathbb{Z}$。令 $\beta = \sum_{i=0}^{s} m_i\lambda_{b_i}$。对于任意素数 ℓ，有 $S^{\beta}\square\mathbb{Z}/I_\ell \simeq \Sigma^{\dim_\ell\beta}\mathbb{Z}/I_\ell$。

证明。与命题 2.5中一样，只需证明 $S^{\lambda_d}\square\mathbb{Z}/I_\ell \simeq \Sigma^{\dim_{\hat{\ell}}\lambda_d}\mathbb{Z}/I_\ell$ 对任意 $d|n$ 成立。若 $\ell|d$，则 $F_d\square\mathbb{Z}/I_\ell = 0$ 且 $\underline{\dim}_{\hat{\ell}}\lambda_d = 0$，因此 $S^{\lambda_d}\square\mathbb{Z}/I_\ell \cong \mathbb{Z}/I_\ell \cong \Sigma^{\dim_{\hat{\ell}}\lambda_d}\mathbb{Z}/I_\ell$。对于情形 $(\ell, d) = 1$，从余纤维序列开始

$$\Sigma^2\mathbb{Z} \to S^{\lambda_d} \to \mathbb{Z}/I_d.$$

与 $\mathbb{Z}/I_\ell$ 进行配对，并利用 $\mathbb{Z}/I_d\square\mathbb{Z}/I_\ell = \mathbb{Z}/I_{(d,\ell)} = 0$ 可得一个准同构 $\Sigma^2\mathbb{Z}/I_\ell \xrightarrow{\simeq} S^{\lambda_d}\square\mathbb{Z}/I_\ell$。由于 $\underline{\dim}_{\hat{\ell}}\lambda_d = 2$，这正是我们想要的。□

2.7. 关于 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$ 的稳定同伦环。 回顾引言中的分次群 $\mathbb{D}_n$ 、 $v \in \mathbb{D}^n$对应的球面 S^v ，以及研究的基本对象

$$H^\star = H^\star(\underline{\mathbb{Z}}) = \bigoplus_{v \in \mathbb{D}_n} \mathcal{D}(\underline{\mathbb{Z}}, S^v).$$

让我们简要回顾这如何成为一个环。任何自由 $\mathbb{Z}$-模的有界复形 A都具有典范的单位映射和余单位映射

$$\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\eta} \underline{\mathrm{Hom}}(A, \underline{\mathbb{Z}}) \square A \quad \text{and} \quad A \square \underline{\mathrm{Hom}}(A, Z) \xrightarrow{\hat{\eta}} \underline{\mathbb{Z}}$$

这表明 A 在 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$中是可对偶化的（这些是阿贝尔闭张量范畴中可对偶化对象的链复形所具有的标准映射）。特别地，对于 $A = S^{\lambda_d}$我们有这些映射。如 [D], 中所说明的，给定 v、 $w \in \mathbb{D}_n$ ，通过自由交换因子，即可在 $\mathcal{D}(\mathbb{Z})$中得到典范同构 $S^v \square S^w \cong S^{v+w}$ ，除非这些因子具有 X 与 X^*的形式，此时我们使用单位或余单位将它们消去（取决于次序）。利用这些同构，映射 $\mathbb{Z} \to S^v$ 与 $\mathbb{Z} \to S^w$ 的盒积成为一个映射$\mathbb{Z} \to S^{v+w}$，并且在 [D]中证明了这使得 $H^\star$ 成为一个 $\mathbb{D}_n$-分次环。此外，根据 [D，命题 1.2(3)] ，存在一条涉及元素 $\tau_d = \mathrm{tr}(id_{S^{\lambda_d}})$与 $\tau_0 = \mathrm{tr}(id_{S^1})$的斜交换律，其中tr是分次迹，取值于$\mathrm{Hom}(\mathbb{Z}, \mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$。但请注意，对每个 $d|n$ ，我们对 S^{λ_d} 的链复形模型表明

$$\tau_d = \mathrm{tr}(id_{\underline{\mathbb{Z}}}) - \mathrm{tr}(id_{F_d}) + \mathrm{tr}(id_{F_d}) = \mathrm{tr}(id_{\underline{\mathbb{Z}}}) = 1$$

（甚至不必知道 $\mathrm{tr}(id_{F_d})$）。因此，斜交换律只涉及 τ_0 ，所以化简为引言中给出的 (1.0.1)。

注 2.8。 给定 v， $w \in \mathbb{D}_n$ 以及一个映射 $f\colon S^v \to S^w$，有两种方法可以得到 H^{w-v}的一个关联元素：可以应用 $S^{-v}\square(-)$，也可以应用 $(-)\square S^{-v}$。一般来说，必须谨慎处理这一点；关于这些问题的详细讨论，请参见 [D，第 6 节。2] 不过，由所有 τ_d 都等于 1 这一事实，根据 [D，命题 6.11(a)] 可知，只要 v 和 w 的固定维数具有相同的奇偶性，两种方法就会得到 $H^\star$的同一个元素。这一事实结合 (1.0.1)，使我们今后可以对大多数与符号有关的问题不再过于拘泥。

注 2.9（与拓扑学的联系）。令 $H\mathbb{Z}$ 表示等变 Eilenberg–MacLane 谱。根据 Schwede 和 Shipley[SS] 发展出的理论，$\mathrm{Ch}(\mathbb{Z})$ 与 $H\mathbb{Z}-\mathrm{Mod}$ 之间存在一条之字形的 Quillen 等价链，详见 [Z，推论 5.2]。利用这一等价，我们的 $H^\star(\mathbb{Z})$ 是$RO(C_n)$-分次 Bredon 上同调 $H^\star_{C_n}(pt; \mathbb{Z})$ 的一部分，其中我们将 $\overline{\mathbb{D}_n} \subseteq RO(C_n)$ 视为……。根据注 2.3 中的观察，当 n 为奇数时，这两种分次所包含的信息实质上相同。因此，我们常将 $H^\star(\mathbb{Z})$ 称为“一点的上同调”，有时也将其写作 $H^\star(pt)$ 或 $H^\star(pt; \mathbb{Z})$。注意，当 n 为偶数时， $RO(C_n)$ 中还存在符号表示，而我们在当前的讨论中并未将其纳入。

我们希望计算 $\mathbb{D}_n$ 分次麦基环 $H^\star(\mathbb{Z})$，但这是一项非常复杂的工作。目前还没有关于完整答案的简单描述。因此，我们将重点放在**正则区域**，其定义为指标 $m_0(1) + \sum_{b>1} m_b\lambda_b$ 中所有 m_b 均为非负数的区域——称为**正区域**

锥——以及指标 $m_0(1) - \sum_{b>1} m_b\lambda_b$ 中所有 m_b 均为非负数且至少有一个非零的区域——称为**负锥**。“锥”这个词很恰当，因为存在以下消失区域：当所有 $m_b \geq 0$ 时，我们有

$$\underline{H}^{m_0+\sum_{b>1} m_b\lambda_b} = 0 \quad \text{if } m_0 > 0 \text{ or } m_0 < -2\sum_{b>1} m_b,$$

$$\underline{H}^{m_0-\sum_{b>1} m_b\lambda_b} = 0 \quad \text{if } m_0 > 2\sum_{b>1} m_b \text{ or if } m_0 < 0.$$

这些立即由如下事实得出：$S^{\sum_{b>1} m_b\lambda_b}$ 由一个集中在次数 0 至 $2\sum_{b>1} m_b$ 的复形所建模。

令 a_{λ_b}（常简记为 a_b）表示零次分量的包含映射 $\mathbb{Z} \hookrightarrow S^{\lambda_b}$。作为 H^{λ_b} 中的元素，它称为 λ_b 的**欧拉类**。由于$H^{\lambda_b} = H_0(S^{\lambda_b})$，且类 a_b 是一个生成元，我们有

$$(p_{\Theta_b\to\Theta_1})^*(a_b) = 0 \qquad \text{and} \qquad b \cdot a_b = 0. \tag{2.9.1}$$

这些被称为**欧拉类关系**。注意，第二个关系实际上可由第一个关系通过应用 $(p_{\Theta_b\to\Theta_1})_*$ 得出。

令 u_{λ_b}（或简记为 u_b）表示映射 $\Sigma^2\mathbb{Z} \to S^{\lambda_b}$，即 $I\pi$（次数 2，其余处为零）。作为 H^{λ_b-2} 的元素，它常被称为一个**定向类**，如 [HHR2]。注意余纤维序列

$$\Sigma^2\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{u_b} S^{\lambda_b} \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b.$$

2.10. 有理化。 在详细探讨整系数情形之前，我们先对有理情形作一些简单的观察。与 $\mathbb{Q}$作张量积会消去模 $\mathbb{Z}/I_b$，因此映射 u_b：$\Sigma^2\mathbb{Z} \to S^{\lambda_b}$ 是有理等价。于是，我们得到如下结果：

命题2.11。 $H^\star(pt;\underline{\mathbb{Q}}) = \mathbb{Q}[\underline{u}_d, \underline{u}_d^{-1} : d|n, d \neq 1]$. 因此，只要 维数 $\beta \neq 0$, $H^\beta(pt;\underline{\mathbb{Z}})$就是挠的。

证明。 只有第二个陈述需要说明。关键在于，u_d 位于次数为 $\lambda_d - 2$ 的部分，而其维数为零。因此，u_d 和u_d^{-1} 中的所有单项式也都位于维数为零的部分。群 $H^\beta(pt;\mathbb{Q})$ 在其他所有次数上都为零。□

注意，根据 [DH，推论 2.33]，我们有 $\mathbb{Q}_{C_n}$–模 $\simeq \mathbb{Q}[C_n]$–模。回忆一下，$\mathbb{Q}[C_n] \cong \mathbb{Q}[t]/(t^n-1) \cong \prod_{e|n,e<n} \mathbb{Q}[t]/(\Phi_e(t))$，其中 Φ_e 是第 e 个分圆多项式，且每个 $\mathbb{Q}[t]/(\Phi_e(t))$ 都是一个域。因此，导出范畴 $\mathcal{D}(\mathbb{Q}_{C_n})$ 分解为不同域上的分次向量空间范畴的乘积；每个非极大因子 n 对应一个因子。对象 $S^{\lambda_d}_{\mathbb{Q}} \simeq \Sigma^2\mathbb{Q}$ 都属于该分解的 $e = 1$ 部分。

3. Initial computations

我们将在第4 节的大部分篇幅中计算 $H^\star(\mathbb{Z})$ 的正则部分。不过，首先要进行的一项 $[S^{\lambda_b}, S^{\lambda_c}]$基本计算$\Theta_1$，是 $H^{\lambda_c-\lambda_b}$的 - 分量。尽管这不在正则区域内，但理解这里的一些关键元素将是我们方法的重要组成部分。

这些复形规模足够小，因此可以手工构造映射和链同伦。映射 $S^{\lambda_b} \to S^{\lambda_c}$ 均具有以下形式

(3.0.1)
$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & F_b & \xrightarrow{id-Rt} & F_b & \xrightarrow{R\pi} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ 0 & \longrightarrow & F_c & \xrightarrow{id-Rt} & F_c & \xrightarrow{R\pi} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

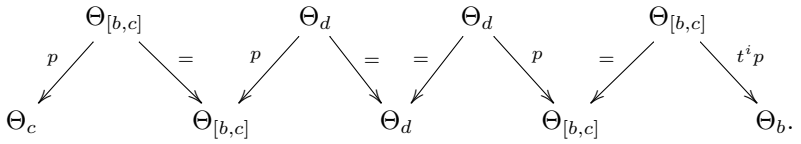
并且，作为构造它们的先导，我们需要理解所有映射 $F_b \to F_c$。

3.1. **构造链映射与同伦**。回顾第2.1 节可知，映射 $F_b \to F_c$ 与 $\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_b, \Theta_c)$ 一一对应。范畴$\mathcal{B}\mathbb{Z}$ 在 [DH], 中有详细描述，此类映射用跨度$[\Theta_c \xleftarrow{f} S \xrightarrow{h} \Theta_b]$ 在 C_n 的轨道范畴中加以描述（并特别注意从右到左的约定）。该跨度诱导映射 $F_b \to F_c$，其将 $g_b \mapsto h_*(f^* g_c)$ 映出。下面的引理确定了这组映射：

引理 3.2。
(1) 若 S 是大小为 d 的传递 C_n-集，则任一跨度 $[\Theta_c \longleftarrow S \longrightarrow \Theta_b]$ 对于某个 i 同构于 $[\Theta_c \xleftarrow{p} \Theta_d \xrightarrow{t^i \circ p} \Theta_b]$。*(2)* 跨度 $[\Theta_c \xleftarrow{p} \Theta_d \xrightarrow{t^i \circ p} \Theta_b]$ 在$\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_b, \Theta_c)$中等于 $\overset{d}{}_{[b,c]}[\Theta_c \xleftarrow{p} \Theta_{[b,c]} \xrightarrow{t^i \circ p} \Theta_b]$。*(3)* 集合 $\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_b, \Theta_c)$ 是以跨度 $[\Theta_c \xleftarrow{p} \Theta_{[b,c]} \xrightarrow{t^i \circ p} \Theta_b]$为基的自由阿贝尔群，其中 $i = 0, 1, \ldots\ldots, (b, c) - 1$。

证明。在 (1) 中，我们可以假设 $S = \Theta_d$。映射 $\Theta_d \to \Theta_b$ 和 $\Theta_d \to \Theta_c$ 都可以分别写成 $t^v p$和 $t^w p$，其中 v 和 w。同构t^{-w}: $\Theta_d \to \Theta_d$ 于是允许我们将跨度改写成所需形式，其中$i = v - w$。

对于 (2)，首先注意到，这样的跨度只有在 $b|d$ 和 $c|d$，或者等价地$[b, c]|d$时才存在。因此，从 Θ_d 到 Θ_b（分别到 Θ_c）的投影映射可经由$\Theta_{[b,c]}$分解。将该跨度改写为以下映射的复合映射（从右至左）：



然后利用中间两个跨度的复合映射为 $\overset{d}{}_{[b,c]} \cdot id$，这是范畴 $\mathcal{B}\mathbb{Z}$的二条定义关系。

接着讨论 (3)，我们可以使用这些同构

$$\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_b, \Theta_c) \xrightarrow{\cong} \mathrm{Hom}_{\mathbb{Z}[C_n]}(\mathbb{Z}\langle\Theta_b\rangle, \mathbb{Z}\langle\Theta_c\rangle) \xrightarrow{\cong} \{x \in \mathbb{Z}\langle\Theta_c\rangle \mid t^b x = x\}$$

其中，第二个映射将一个态射映到它在 Θ_b 的基点处的取值。右侧的群是自由的（因为它是 $\mathbb{Z}\langle\Theta_c\rangle$ 的子群）。记 Θ_c 的基点为 g，并注意，若令 A 为最小的和 $g + t^b g + t^{2b} g + \cdots$（在各项绕回之前停止），则很容易得到一组基： A， tA， $t^2 A$， ……，同样在各项重复之前停止。我们只需确定停止的位置。子群 $\langle b\rangle \subseteq \mathbb{Z}/c$ 等于 $\langle(b, c)\rangle$，因此 $A = \sum^{b} {}_{(} \overset{c}{}_{i=0}{}^{-1} t^{(b,c)i} g{}_{)}$，而

生成元为 A，tA，……，$t^{(b,c)-1}A$。因此 $\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_b, \Theta_c) \cong \mathbb{Z}^{(b,c)}$。(3) 中给出的跨度很容易验证会映到这些基元素：具体而言，$[\Theta_c \xleftarrow{p} \Theta_{[b,c]} \xrightarrow{t^i p} \Theta_b]$ 映到 $t^{-i}A = t^{(b,c)-i}A$。□

注释 3.3。在上述结果中，因子 t的放置位置具有一定的灵活性。注意到 $t^i \circ p = p \circ t^i$，并且可以将 t 因子（经过适当调整）从跨度中的左映射移到右映射。但大多数时候，我们会像上述引理中那样，将它们放在右映射上。

引理 3.2 告诉我们，任意映射 $F_b \to F_c$ 都具有如下形式

$$g_b \mapsto \sum_{i=0}^{(b,c)-1} m_i (t_*)^i p_* p^*(g_c) \tag{3.3.1}$$

对于唯一的 $m_i \in \mathbb{Z}$，其中第一个 p 是 $p_{(\Theta_{[b,c]} \to \Theta_b)}$，第二个是 $p_{(\Theta_{[b,c]} \to \Theta_c)}$。将此映射记为 $\langle m \rangle$，其中 m 是整数元组 $\underline{m}_i$。

映射 $\pi\colon\ \Theta_b \to \Theta_1$ 给出 $R\pi\colon\ F_b \to \mathbb{Z}$，而映射 $\pi\colon\ \Theta_c \to \Theta_1$ 给出 $I\pi\colon\ \mathbb{Z} \to F_c$。复合映射 $I\pi R\pi\colon\ F_b \to F_c$ 将在我们的工作中经常出现。在上述记号下，它等于映射 $\langle 1, 1, \ldots, 1 \rangle$。这由拉回图推出

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{i=0}^{(b,c)-1} \Theta_{[b,c]} & \xrightarrow{\coprod_i t^i p} & \Theta_b \\ {\scriptstyle \coprod_i p}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \pi} \\ \Theta_c & \xrightarrow[\pi]{} & \Theta_1. \end{array}$$

命题 3.4。

(a) 图表

$$\begin{array}{ccc} & & F_d \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle id - Rt} \\ F_c & \xrightarrow[\langle \underline{m} \rangle]{} & F_d \end{array}$$

存在如图所示的提升，当且仅当 $\sum_i m_i = 0$。

(b) 交换方形

$$\begin{array}{ccc} F_c & \xrightarrow{f} & F_d \\ {\scriptstyle id - Rt}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle id - Rt} \\ F_c & \xrightarrow[\langle \underline{m} \rangle]{} & F_d \end{array}$$

可交换，当且仅当对于某个 $\underline{w} \in \mathbb{Z}$，$f = \langle m \rangle + w \cdot I\pi R\pi$。

证明。两部分均由正合列得出

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{I\pi} F_d \xrightarrow{id - Rt} F_d \xrightarrow{R\pi} \underline{\mathbb{Z}}$$

由（2.1.1）。对于 (a)，一个从 $\langle m \rangle$到 $\underline{F_c}$ 该复形的次数 1 部分的映射能够沿 $id - Rt$ 提升，当且仅当 $Rp \circ \langle m \rangle$ 为零。但这个复合映射将 $g_c \mapsto (\sum_i m_i) \cdot 1_c$。

对于 (b)，交换性等价于以下条件：

$$(id - Rt)(f - \langle \underline{m} \rangle) = 0$$

（这里用到了 Rt 与所有元素都交换。）将 $f-\langle m\rangle$ 视为映射到上述复形的二次项中的映射，上述条件意味着它可以通过 $I\pi$ 提升。该提升 $F_c\to\mathbb{Z}$ 将是 $R\pi$ 的倍数，因此 $f-\langle m\rangle$ 是 $I\pi R\pi$ 的倍数。□

现在让我们重新考虑（ $S^{\lambda_b}\to S^{\lambda_c}$ 3.0.1）中的链映射构造。次数为一时，该映射将是某个 $\langle m\rangle$，而次数为二时，根据命题 3.4(b)，它必须是某个 $\langle m\rangle+wI\pi R\pi$ 。复合映射 $R\pi\circ\langle m\rangle$ 将映射

$$g_b\mapsto\sum_i m_i(t_*)^i p_*p^*g_c\mapsto\sum_i m_i(t_*)^i p_*p^*1_c=\sum_i m_i\cdot\tfrac{[b,c]}{b}=\tfrac{[b,c]}{b}\cdot\sum_i m_i,$$

其中，在第一个等式中，我们用到了关于 $\mathbb{Z}$ 中前推、拉回和作用映射的知识。因此，为了使图表在次数 0 和 1 时交换，链映射的次数 0 部分必须是乘以 $\frac{[b,c]}{b}\sum_i m_i=_c(b,c)\sum_i m_i$。将这个复形映射记作 $[m,w]$。

命题 3.5。映射 $[m,w]$ 与零映射链同伦，当且仅当 $\sum_i m_i+(b,c)w=0$。由此，我们得到一个同构 $[S^{\lambda_b},S^{\lambda_c}]\to\mathbb{Z}$，它将$[m,w]$ 映射到 $\sum_i m_i+(b,c)w$。

证明。一个零同伦由映射 $s_0\colon\mathbb{Z}\to F_c$和 $\langle s_1\rangle\colon F_b\to F_c$组成。映射 s_0将是某个 $v\in\mathbb{Z}$的 $vI\pi$ 。于是，成为零同伦的条件为

$$\tfrac{c}{(b,c)}\sum_i m_i=cv,\ \langle m\rangle=vI\pi R\pi+(id-Rt)\langle s_1\rangle,\ \text{and}\ \langle m\rangle+wI\pi R\pi=\langle s_1\rangle(id-Rt).$$

利用 $\langle s_1\rangle(id-Rt)=(id-Rt)\langle s_1\rangle$，可从最后两个方程中消去这些项，得到 $v=-w$。第一个方程也可化简为$\sum_i m_i=v(b,\ c)$。这便得到了一个方向的蕴含。反过来，若$\sum_i m_i+(b,\ c)w=0$，则令 $v=-w$，得到 s_0。映射 $\langle m\rangle-vI\pi R\pi$ 随后通过 $id-Rt$，由命题 3.4(a) 提升，得到 s_1。□

请注意，我们将在第7.4节中对此类问题进行更为复杂的分析。

3.6. **更多 u-类**。设$u_{[c:b]}$ 表示任意映射 $S^{\lambda_b}\to S^{\lambda_c}$ ，该映射在命题3.5的同构下被映为1。一个方便的选择通常是映射$[(1,0,0,\dots,0),0]$。如下所示。

$$\begin{array}{ccccccccc}
S^{\lambda_b}: & 0 & \longrightarrow & F_b & \xrightarrow{id-Rt} & F_b & \xrightarrow{R\pi} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0\\
\downarrow{\scriptstyle u_{[c:b]}} & & & \downarrow{\scriptstyle g_b\mapsto p_*p^*g_c} & & \downarrow{\scriptstyle g_b\mapsto p_*p^*g_c} & & \downarrow{\scriptstyle\cdot\frac{[b,c]}{b}} & \\
S^{\lambda_c}: & 0 & \longrightarrow & F_c & \xrightarrow{id-Rt} & F_c & \xrightarrow{R\pi} & \mathbb{Z} & \longrightarrow 0.
\end{array}$$

注意，$u_{[c:c]}$ 是恒等映射。当 $b=1$ 时，一个更方便的选择是 $[(0,\dots,0),1]$，因此容易看出$u_{[c:1]}$ 就是先前定义的映射 u_c 。

我们将自由地把$u_{[c:b]}$ 既视为 $\mathcal{D}(S^{\lambda_b},S^{\lambda_c})$中的映射，也视为$H^{\lambda_c-\lambda_b}$的元素。见注记2.8 ，以了解为何这是无歧义的。

以下是这些 u-类的一些有用性质：

命题 3.7. 设 b、c、d 是 n 的因子。则

(1) $u_{[c:b]}\cdot a_b=\frac{c}{(b,c)}a_c$,

(2) $u_{[d:c]} \cdot u_{[c:b]} = \frac{[b,c,d]}{[b,d]} \cdot \frac{(b,d)}{(b,c,d)} \cdot u_{[d:b]}$,
(3) $u_{[d:c]} \cdot u_c = \frac{c}{(c,d)} \cdot u_d$,
(4) $u_{[d:c]} u_{[c:d]} = \frac{[c,d]}{(c,d)}$.

证明。 对于 **(1)**，回想一下，a_b 只是复形 S^{λ_b} 的零次部分的包含映射。映射 $u_{[c:b]}$ 是在零次部分上乘以 $^{c}{}_{(b,\ c)}$，因此这就完成了这一部分。

接下来注意到，**(3)** 和 **(4)** 分别只是 $b = 1$ and$b = d$ 时 **(2)** 的特例。因此，剩下的工作就是证明 **(2)**。

我们考虑复合映射 $u_{[d:c]} \circ u_{[c:b]}$，其中我们为这两个映射分别选取形如 $[(1,\ 0,\ \ldots\ldots,\ 0), 0]$ 的代表元。于是，该复合映射将具有如下形式：$[m, 0]$ 其中某个 m 是我们必须计算的量。根据命题 3.5，映射 $[m, 0]$ 与 $(\sum_i m_i)$ 链同伦 $u_{[d:b]}$。因此，问题归结为计算这些m_i 整数之和。这需要我们仔细分析轨道范畴中的某些拉回。

映射 $u_{[c:b]}$ 的次数 **1** 部分将 g_{Θ_b} 发送到 $p_*p^*(g_{\Theta_c})$，其中我们沿着这些映射进行拉回和推前

$$\Theta_b \xleftarrow{p} \Theta_{[b,c]} \xrightarrow{p} \Theta_c$$

（注意，这两个 p 映射略有不同）。同样，在次数 **1** 时，映射$u_{[d:c]}$ 将 g_{Θ_c} 映射到 p_*p^*（g_{Θ_d}），其中 p 映射彼此不同，也与前面的映射不同。因此，复合映射 $u_{[d:c]} \circ u_{[c:b]}$将

$$g_{\Theta_b} \mapsto p_*p^*p_*p^*(g_{\Theta_d})$$

其中推前和拉回都是沿着图表中从底部到右侧的边进行的（因此不会用到左上角）

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod_i \sigma^i \Theta_{[b,c,d]} & \xrightarrow{\coprod_i t^i p} & \Theta_{[b,c]} & \xrightarrow{p} & \Theta_b \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\
\Theta_{[c,d]} & \xrightarrow{p} & \Theta_c & & \\
\downarrow{\scriptstyle p} & & & & \\
\Theta_d. & & & &
\end{array}$$

在左上角，我们补上了交换方形的拉回，其中 σ^i 只是不同直和项的占位符。为了理解这个拉回，注意到乘积 $\Theta_{[c,d]} \times \Theta_{[b,c]}$ 分解为 $\Theta_{[b,c,d]}$-轨道。这类轨道共有（$[b, c],\ [c, d]$）$/c$个，对应于由 $x \mapsto (px,\ t^i px)$ 给出的嵌入 $\Theta_{[b,c,d]} \hookrightarrow \Theta_{[c,d]} \times \Theta_{[b,c]}$，其中 i 遍历商群 $c\mathbb{Z}/$（$[b, c],\ [c, d]$）$\mathbb{Z}$的各个元素（ i的确切取值对我们下面所需的内容并不重要）。

根据引理 3.2，作为 $\mathcal{B}\mathbb{Z}(\Theta_b, \Theta_d)$ 的一个元素，这个复合映射等于

$$\sum_i \tfrac{[b,c,d]}{[b,d]} [\Theta_d \xleftarrow{p} \Theta_{[b,d]} \xrightarrow{t^i p} \Theta_b],$$

取上述的 i 值。求和中的项数为 $([b, c], [c, d])/c$，这也等于 $(b, d)/(b, c, d)$。由此我们可以直接得出所需的 m_i，并且

我们发现

$$\sum_i m_i = \tfrac{[b,c,d]}{[b,d]} \cdot \tfrac{(b,d)}{(b,c,d)}.$$

□

注 3.8。 命题 3.7(3) 表明，在有理化映射$H^\star(pt;\mathbb{Z}) \to H^\star(pt;\mathbb{Q})$ 下，元素 $u_{[b:c]}$ 映射为 $\frac{c}{(b,c)}\frac{u_b}{u_c}$。由于命题 3.5表明 $H^{\lambda_b-\lambda_c}(pt;\mathbb{Z})$ 无挠，因此在这个次数上，有理化是单射，我们可以写作 $u_{[b:c]} = \frac{c}{b}\frac{u_b}{(,c)u_c}$。不过，这种记法可能会造成混淆：当开始将元素相乘时，乘积可能会落入有理化不再是单射的次数。因此，我们通常还是采用 $u_{[b:c]}$记法。

下述结果中的所谓“黄金关系”最初由 Hill、Hopkins 和 Ravenel 在 n （素数幂）的情形下于论文中指出；例如参见 [HHR2，第4节。2]以及 [HHR3]。对于一般的 n，它见于 [BD]。

推论 3.9 (黄金关系)。 设 b 和 c 是 n的因子。那么

$$\tfrac{b}{(b,c)}a_b u_c = \tfrac{c}{(b,c)}a_c u_b.$$

证明。 将命题 3.7 中的等式 (1) 乘以 u_b，得到 $\frac{c}{(b,c)}a_c u_b = u_{[c:b]}a_b u_b$。然后注意到

$$u_{[c:b]}a_b u_b = u_{[c:b]}u_b a_b = \tfrac{b}{(b,c)}u_c a_b = \tfrac{b}{(b,c)}a_b u_c.$$

第三个等号用到了命题3.7(3)。 □

命题3.5 计算了 Θ_1 处 $H^{\lambda_c-\lambda_b}$的值，但实际上我们可以确定整个 Mackey 函子。回忆一下 ($\mathbb{Z}$-模 $\mathbb{Z}(e;d)$（见 2.1.4）。

命题 3.10。 $\mathbb{Z}$-模 $H^{\lambda_c-\lambda_b}$ 属于一个短正合列

$$0 \longrightarrow I_b \longrightarrow H^{\lambda_c-\lambda_b} \longrightarrow \mathbb{Z}/I_{(b,c)} \longrightarrow 0$$

因此同构于 $\mathbb{Z}(b;(b,c))$。

证明。 取余纤维序列 $S^{\lambda_c} \to \mathbb{Z}/I_c \to \Sigma^3\mathbb{Z}$ 并与 $S^{-\lambda_b}$ 作盒积，得到

$$S^{\lambda_c-\lambda_b} \to \mathbb{Z}/I_c \square S^{-\lambda_b} \to \Sigma^3 S^{-\lambda_b}.$$

回想一下， $S^{-\lambda_b} \simeq \Sigma^{-2}I_b$，因此 H_i 中间项的 Tor 为$_{i+2}(\mathbb{Z}/I_c,\ I_b)$。根据[DH，命题4。27] 除 $i=-2$ 和 0 之外，此 Tor 模均为零；当 $i=0$ 时，它同构于 $\mathbb{Z}/I_{(b,c)}$。因此，长正合同调序列给出

$$0 \to I_b \to H_0(S^{\lambda_c-\lambda_b}) \to \mathbb{Z}/I_{(b,c)} \to 0.$$

现在使用$H^{\lambda_c-\lambda_b} \cong H_0(S^{\lambda_c-\lambda_b})$。

命题 3.5表明 $H^{\lambda_c-\lambda_b}(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}$。因此，(2.1.4) 得出 $H^{\lambda_c-\lambda_b} \cong \mathbb{Z}(b;\ (b,\ c))$。□

注记3.11。 结果将会表明， $H^{\lambda_{c_1}+\cdots+\lambda_{c_s}-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_s}}$ 总是包含$I_{[b_1,\ldots,b_s]}$ 作为一个子对象。有人可能会猜想，这个 $\mathbb{Z}$-模总是某种形式的 $\mathbb{Z}$，但事实并非如此。尤其是， $H^{\lambda_{c_1}+\lambda_{c_2}-\lambda_{b_1}-\lambda_{b_2}}$ 可能含有挠元。参见例7.12。

推论 3.12. 设 b 和 c 是 n 和 $c|b$的因子。那么 $S^{\lambda_c-\lambda_b} \simeq \mathbb{Z}(b;\ c)$。

证明。从余纤维序列 $S^{\lambda_c} \to \mathbb{Z}/I_c \to \Sigma^3\mathbb{Z}$ 开始，并用 $S^{-\lambda_b}$作框。由于 $F_b\square\mathbb{Z}/I_c \equiv 0$根据（2.1.2），我们有 $\mathbb{Z}/I_c\square S^{-\lambda_b} \simeq \mathbb{Z}/I_c$。因此我们得到余纤维序列

$$S^{\lambda_c-\lambda_b} \to \mathbb{Z}/I_c \to \Sigma^3 S^{-\lambda_b}.$$

由于 $S^{-\lambda_b} \simeq \Sigma^{-2}I_b$，右项只有次数 1 的同调。中间项只有零次同调，因此 $S^{\lambda_c-\lambda_b}$ 只有零次同调。该同调为 $\mathbb{Z}(b;\ c)$，根据命题 3.10。□

推论 3.13。设 b 和 c 是 n的因子。那么

$$S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c} \simeq S^{\lambda_{(b,c)}}\square S^{\lambda_{[b,c]}}.$$

证明。我们有 $S^{\lambda_b-\lambda_{[b,c]}} \simeq \mathbb{Z}([b,c];\ b) \cong \mathbb{Z}(c;\ (b,\ c)) \simeq S^{\lambda_{(b,c)}-\lambda_c}$ 利用推论 3.12（两次）以及 [DH，命题 5。7]，得到中间同构。□

3.14。**这些 χ-类**。设 b 和 c 是 n的因子。推论 3.13 表明

$$\mathcal{D}(S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c}, S^{\lambda_{(b,c)}}\square S^{\lambda_{[b,c]}}) \cong \mathbb{Z},$$

并且，固定一个特定的生成元将会很有用。定义域和陪域的群H_4(–)(Θ_1)同构于 $\mathbb{Z}$，其生成元分别为 u_bu_c 和 $u_{(b,c)}u_{[b,c]}$，因此给定的等价会将前者映到后者的正或负。我们固定$\chi_{b,\ c}$ 为满足下式的映射

$$\chi_{b,c}u_bu_c = u_{(b,c)}u_{[b,c]}. \tag{3.14.1}$$

注意，$\chi_{b,\ c} \in H^{\lambda_{(b,c)}+\lambda_{[b,c]}-\lambda_b-\lambda_c}$ 是一个单位（因为相应的映射是拟同构）。此外，$\chi_{b,\ c} = \chi_{c,\ b}$ 作为 $H^\star$中的元素彼此可交换——一种证明方法是利用有理化映射在此次数上是单射，并且所有 u-类都彼此可交换这一事实。

元素 $u_{[[b,c]:b]}u_{[(b,c):c]}$ 属于 $H^{\lambda_{(b,c)}+\lambda_{[b,c]}-\lambda_b-\lambda_c}$，因此是 $\chi_{b,\ c}$的一个整倍数。下一条结果将给出这个倍数的确切值以及类似的公式。

命题 3.15。设 $b|n$ 和 $c|n$。则
(1) $u_{[[b,c]:b]}u_{[(b,c):c]} = {}^{c}_{b\,c(,)} \cdot \chi_{b,c}$，以及 *(2)* $u_{[b:[b,c]]}u_{[c:(b,c)]} = {}^{c}_{b\ (,c)} \cdot \chi_{b\,c}^{-1}$。

证明。对于 (1)，只需利用命题 3.7(3)，计算出 $u_{[[b,c]:b]}u_{[(b,c):c]} \cdot u_bu_c = {}^{c}_{b\,c(,)}\, u_{[b,c]}u_{(b,c)}$。(2) 的证明类似。□

了解 $\chi_{b,c}$ 与其他 au-类之间的相互作用也会有所帮助。

命题 3.16。设 $b|n$和 $c|n$。则
(1) $\chi_{b,c}a_bu_c = \frac{c}{(b,c)}a_{[b,c]}u_{(b,c)}$，
(2) $\chi_{b,c}a_ba_c = a_{[b,c]}a_{(b,c)}$.

证明。下面给出 (1) 的论证，(2) 的论证采用相同的方法。我们从

$$\tfrac{c}{(b,c)}\chi_{b,c}a_bu_c = u_{[[b,c]:b]}u_{[(b,c):c]}a_bu_c = \tfrac{[b,c]}{b}a_{[b,c]} \cdot \tfrac{c}{(b,c)}u_{(b,c)} = \tfrac{c^2}{(b,c)^2}a_{[b,c]}u_{(b,c)}$$

其中在第二个等式中，我们使用了命题3.7 。同理

$$\tfrac{b}{(b,c)}\chi_{b,c}a_bu_c = u_{[[b,c]:c]}u_{[(b,c):b]}a_bu_c = a_{(b,c)} \cdot u_{[b,c]} = \tfrac{[b,c]}{(b,c)}a_{[b,c]}u_{(b,c)} = \tfrac{bc}{(b,c)^2}a_{[b,c]}u_{(b,c)}$$

这里我们使用了命题3.7 和黄金关系。因此，这两个方程表明该表达式

$$\chi_{b,c}a_b u_c - \tfrac{c}{(b,c)}a_{[b,c]}u_{(b,c)}$$

被 $^{c}{}_{(b,\ c)}$ 和 $^{b}{}_{(b,\ c)}$同时湮灭。由于这两个整数互素，因此该表达式必为零。□

4. The cohomology of a point

本节的目标是说明，如何利用此前建立的同调基础，非常简单地推导出正则区域中 $H^\star(pt)$ 的计算结果。这里有两个不同的问题：计算底层的 $\mathbb{Z}$-模，以及计算环结构。前者非常容易，而对于正锥而言，后者也相当简单。至于负锥区域内的环结构计算，则要棘手得多，正如我们将看到的。

4.1. 序言：最小公倍数—最大公约数序列。我们的计算结果将涉及一组稍显奇特的数，现在我们来介绍它们：

定义 4.2。 设 b_1、.....、b_s 是 n 的一列因子。将 b 写作元组$(b_1$、.....、$b_s)$。对于 $1 \le j \le s$，定义 $(b;\ j)$ 为所有可能的 j 重最小公倍数 b_1、.....、b_s 的最大公因数。也就是说，

$$(b; j) = \gcd\big\{\operatorname{lcm}(b_{i_1}, \dots, b_{i_j}) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_j \le s\big\}.$$

注意，$(b;\ 1) = (b_1$、.....、$b_s)$，且 $(b;\ s) = [b_1, \dots, b_s]$。此外，对于所有 j，都有 $(b;\ j) \mid (b;\ j{+}1)$。因此，对于因子元组 $b = (b_1$、.....、$b_s)$，数值 $(b;\ j)$ 给出 s 个 n 的因子序列，该序列以最大公约数开头，以最小公倍数结尾，并满足 $(b;\ j) \mid (b;\ j+1)$。

对于因数元组 b 和 b'，如果 b 中出现的每个数也都在 b' 的某处出现，则记作 $b \subseteq b'$。我们有：如果 $b \subseteq b'$，那么 $(b';\ j) \mid (b;\ j)$。

例 4.3。 作为一个具体例子，取 $n = 180$ 以及 $b_1 = 15$、$b_2 = 9$、$b_3 = 18$。于是

$$(b;1) = (15, 9, 18) = 3, \quad (b;2) = ([15, 9], [15, 18], [9, 18]) = (45, 90, 18) = 9, \text{ and}$$
$$(b;3) = [15, 9, 18] = 90.$$

将 n 的一个**因子串** 定义为正整数序列 b_1、.....、b_s，满足对于 $1 \le i \le s-1$ 有 $b_i | b_{i+1}$，且 $b_s | n$。注意，对于因子串，对所有 j都有 $(b; j) = b_j$。这个简单情形将在我们的计算中频繁出现。

回顾一下，当 ℓ 为素数时，$b(\ell)$表示正整数 b的 ℓ-进部分。对于一个元组 b，类似地，我们将 $b(\ell)$记作这样一个元组：将每个元素替换为其 ℓ-进部分。取 ℓ-进部分与最大公约数和最小公倍数可交换，因此有

$$(b; j)(\ell) = (b(\ell); j) \tag{4.3.1}$$

对于任意集合 b。请注意，$b(\ell)$ 经过适当的重新排序后总会成为因子串。

注 4.4. 从素因数分解的角度来看，最大公约数是对每个素数取其出现的最小指数，而最小公倍数则是对每个素数取其出现的最大指数。由（4.3.1）可直接得出，$(b;\ j)$ 是通过对每个素数取第 j 小的指数得到的。这引出了如下解释：

命题 4.5. 考虑将两个整数替换为其最大公约数与最小公倍数的运算：$x, y \mapsto (x, y)$ $[x, y]$。注意，该运算将原来的一对替换为一个因子串。将此运算反复（成对地）应用于一列正整数 $b_1, \dots, b_s$，最终总是可以得到一个因子串；并且所得到的因子串始终相同，即 $(b;1),(b;2)\dots,(b;\ s)$。

证明。 留给读者。 □

有时了解如下的另一种刻画会比较方便：

命题 4.6. 设 $b_1, \dots, b_s$ 是 n 的因子。则 $(b;\ j)$ 是该序列元素的所有可能的 $(s+1-j)$ 重最大公因数的最小公倍数；也就是说，

$$(b;j) = \operatorname{lcm}\{\gcd(b_{i_1}, \dots, b_{i_{s+1-j}}) \mid 1 \le i_1 < \cdots < i_{s+1-j} \le s\}$$

证明。 留给读者。 □

这些最小公倍数—最大公约数序列之所以出现在我们的工作中，源于以下基本结果：

命题 4.7。 设 $b_1, \dots, b_s$ 是 n 的因子。那么存在一个拟同构

$$S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_s}} \simeq S^{\lambda_{(b;1)}+\cdots+\lambda_{(b;s)}}.$$

证明。 由命题 4.5 和推论 3.13立即得到。 □

注 4.8。 关于数值 $(b;j)$ 为何会出现在我们的计算中，另一种（在某些方面更直接的）解释见下文命题 4.19 的证明。这些整数是由金关系与欧拉类挠关系共同导出的纯代数结果。

4.9.正锥。 计算 $H^\star(pt)$ 的正锥，相当于计算任意选取 n 的因子 $b_1, \dots, b_k$ 时的同调模 $H_*(S^{\lambda_{b_1}} \square \cdots \square S^{\lambda_{b_k}})$。可以通过 K¨unneth 谱序列进行归纳处理，但其中有许多需要识别的非平凡微分。我们将改用一种截然不同的方法，利用精心选取的余纤维序列；不过，这只适用于 b_i' 构成因子串的情况。最后再通过 ℓ-局部化将问题化归到这种情形。

首先，假设 b 和 ℓ 是 n的因子，其中 ℓ 是素数。回顾第2节中构造的元素 $u_{[b:b(\ell)]} \in H^{\lambda_b - \lambda_{b(\ell)}}$ 和 $u_{[b(\ell):b]} \in H^{\lambda_{b(\ell)} - \lambda_b}$。命题3.7(4)表明，它们的乘积为 $b\ell()$，在 ℓ-局部化后是一个单位。由此立即得到以下结果：

命题 4.10。 设 $b_1, \dots, b_k$ 是 n 的因子。那么映射 $\square_i u_{[b_i:b_i(\ell)]}$ 给出一个 ℓ-局部拟同构 $S^{\lambda_{b_1(\ell)}+\cdots+\lambda_{b_k(\ell)}} \to S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_k}}$。因此，乘以 $\prod_i u_{[b_i:b_i(\ell)]}$ 给出一个 ℓ-同构

$$\underline{H}^{\lambda_{b_1(\ell)}+\cdots+\lambda_{b_k(\ell)}} \to \underline{H}^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_k}}.$$

这样，我们可以将许多计算归结为以下情形： n 的所选因子都是某个固定素数 ℓ 的幂。

如果一个复形的**同调**集中在偶数次，则称其为偶复形。作为对上述方法的演示，我们现在证明以下命题：

命题 4.11. 对于 n 的任意因子 b_1、……、b_k，复形 $S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}}$ 是偶复形。

证明。 固定一对因子 b, c。回顾余纤维序列 $\Sigma^2\mathbb{Z}\to S^{\lambda_c}\to\mathbb{Z}/I_c$。与 S^{λ_b} 作框积得到一个余纤维序列

$$\Sigma^2 S^{\lambda_b}\to S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c}\to S^{\lambda_b}\square\mathbb{Z}/I_c.$$

如果 $c\mid b$ 那么 $F_b\square\mathbb{Z}/I_c=0$ 由（2.1.2）可知，因此 $S^{\lambda_b}\square\mathbb{Z}/I_c\simeq\mathbb{Z}/I_c$。由于 S^{λ_b}是偶复形，因此 $S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c}$ 在 $c\mid b$的情形下也是偶复形。同样的论证通过归纳法表明，若 b是一个因子串，则 $S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}}$ 是偶复形。

特别地，若 ℓ 是素数，且我们固定指数 $1\le e_1\le\cdots\le e_k$，那么前一段表明 $S^{\lambda_{\ell^{e_1}}}\square\cdots\square S^{\lambda_{\ell^{e_k}}}$ 是偶数。

对于任意的 b_1、……、b_k，只需证明对每个素数 $S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}}$ 在经过ℓ-局部化后是偶数。但经过 ℓ-局部化后，我们可以将每个 ℓ替换为 $b_i\,b_i(\ell)$（命题 4.10），而这时我们已经知道结论成立。 □

回顾类 $a_{b_i}\in H_0(S^{\lambda_{b_i}})$ 和 $u_{b_i}\in H_2(S^{\lambda_{b_i}})$，其中每个 i 都对应一个这样的类。取这些类的乘积，可得到 $H_*(S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}})$ 中的元素。任何这样的乘积都称为一个 ***au*-类**。注意，不同的 au-类可以具有相同的次数，例如 $a_{b_1}u_{b_2}$ 和 $u_{b_1}a_{b_2}$。上述证明的第一段给出的结论远不止于此。它立即推出以下结果：

命题 4.12. 设 $b_1,\dots,b_k$ 是一个因子串。则对 $0\le i\le k$有

$$\underline{H}_{2i}(S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_k}})\cong\begin{cases}\underline{\mathbb{Z}}/I_{b_{i+1}} & \text{if } i\le k-1,\\ \underline{\mathbb{Z}} & \text{if } i=k\end{cases}$$

并且同调在所有其他次数上为零。此外，在每个次数上，所给的 *Mackey* 函子由 au-类的集合生成（位于 Θ_1 位置）。

证明. 留给读者。 □

推论 4.13. 设 $b_1,\dots,b_k$ 为 n的因子。则

$$\underline{H}_{2i}(S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}})\cong\begin{cases}\underline{\mathbb{Z}}/I_{(\underline{b};i+1)} & \text{if } i<k,\\ \underline{\mathbb{Z}} & \text{if } i=k,\end{cases}$$

并且所有其他同调 *Mackey* 函子均为零。此外，在每个次数上，该 *Mackey* 函子由 au-类生成（位于 Θ_1-位置）。

证明. [DH，命题 4.15] 表明，为了证明一个 $\mathbb{Z}$-模 M 同构于 $\mathbb{Z}/I_{\underline{d}}$，且生成元集合为 $S\subseteq M\ (\Theta_1)$，只需在 ℓ-局部化之后对每个素数证明这一点 ℓ（其中 d 替换为 $d(\ell)$）。我们将采用这一方法，考虑所有 au-类在给定次数中的集合，并利用（4.3.1）。

写出 $c_i=b_i(\ell)$。乘以 $\prod_i u_{[b_i:\,c_i]}$ 是一个 ℓ-同构，因此只需了解 $S^{\lambda_{c_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{c_k}}$的同调。但在这里，$c_i$都是$\ell$的幂，因此可以按一种顺序排列，使每个数都整除下一个数。这种情形的结论由命题 4.12给出。

有一点需要注意：乘以$u_{[b_i:\ c_i]}$会将 u_{c_i} 映到 u_{b_i}，但会将 a_{c_i} 映到 a_{b_i} 的一个整数倍（见命题 3.7）。不过，这个整数因子与 ℓ互素。因此， $S^{\lambda_{c_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{c_k}}$ 的同调由 au-类生成这一事实，立即推出 $S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}}$ 在经过 ℓ-局部化后也有同样的结论。□

注 4.14。 注意，上述结果证明了 $H_{2i}(S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_s}})$ 是一个循环群，但并未指出具体的生成元。 a 和 u 中的单项式所构成的子集共同生成该群，但要找出具体的生成元可能有些棘手。尤其是，这可能需要 au-单项式的线性组合。

4.15. 负锥的计算。 负锥对应于 $\mathbb{Z}$-模

$$\underline{H}_*(S^{-\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{-\lambda_{b_k}})\cong\underline{H}_*(\underline{\mathrm{Hom}}(S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_k}},\underline{\mathbb{Z}})).$$

事实证明，通过万有系数谱序列可以轻松完成这项计算。

命题 4.16。

$$\underline{H}^{i-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_k}}\cong\underline{H}_{-i}(S^{-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_k}})\cong\begin{cases}\underline{\mathbb{Z}}/I_{(\underline{b};j)} & \text{if } i=2j+1,\ 1\le j\le k-1,\\ I_{[\underline{b}]} & \text{if } i=2k,\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

证明。 首先注意，我们的标准 $S^{-\lambda_{b_i}}$ 模集中在从 -2 到 0 的次数上，因此 $S^{-\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{-\lambda_{b_k}}$ 将集中在从 $-2k$ 到 0 的次数上。特别地，此范围之外的同调必定为零。

如果 A_* 是一个 $\mathbb{Z}$-模的链复形，那么对于 $H_*(\mathrm{Hom}(A,\mathbb{Z}))$ 的万有系数谱序列，其 E_2 项在 (p,q) 位置等于 $\mathrm{Ext}^{-p}(H_{-q}(A)\ \mathbb{Z})$，其微分 d_r 将 (p,q) 映射到 $(p-r,q+r-1)$（采用这一指标记法，我们得到一个左半平面谱序列）。参见 [6] $A=\mathrm{DH}$，第 4.13 节。将此应用于 $S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_k}}$，并使用推论 。 中的同调计算。相关的 Ext 计算见 [DH，命题 4.23]：当 $i=3$ 时，$\mathrm{Ext}^i(\mathbb{Z}/I_d,\mathbb{Z})$ 同构于 $\mathbb{Z}/I_d$ ，否则为零。因此， E_2 项如图 2 所示。

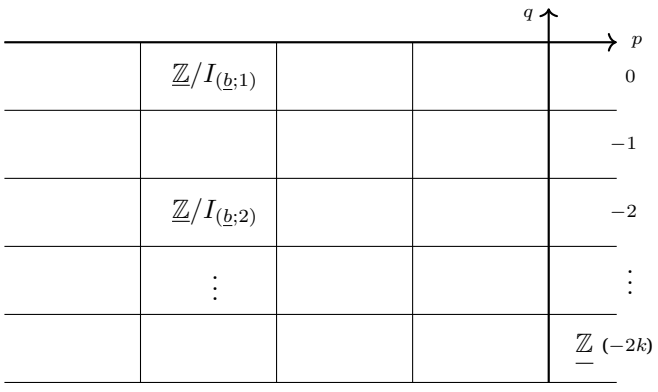


FIGURE 2. E_2项 $\mathrm{Ext}^{-p}(H_{-q}(S^{\lambda_b})\ \mathbb{Z})$ - _

只有一个可能的微分，即从 $\mathbb{Z}$ 项到 $\mathbb{Z}/I_{(b;k)}$ 项的 d_3。注意，对于 $*=3+(2k-2)=2k+1$，$\mathbb{Z}/I_{(b;k)}$ 项会对 H_* 作出贡献，而根据第一段，我们知道该项为零。使这一贡献消失的唯一方式是微分 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}/I_{(b;k)}$ 为满射，此时其核恰好是 $I_{(b;k)}$。最后注意到 $(b;k)$ 就是 $\lceil b\rceil$，由此完成计算。□

4.17. 正锥上的环结构。到目前为止，我们知道构成正锥的 $\mathbb{Z}$-模，也知道明确的生成元——即 au-类。我们还知道 au-类之间的一些基本关系，也就是黄金关系，以及 a' 所满足的挠关系。从代数角度基本上可以推出，这些必定是仅有的关系——如果还有其他关系，我们得到的 $\mathbb{Z}$-模就会比实际拥有的更小。本节将详细梳理这一论证。

定义 4.18。令 $b_1,\dots,b_t$ 为 n 的固定且互不相同的因子，并且对所有 i 都有 $b_i>1$。令 N 为以有序集 $\{1,\lambda_{b_1},\dots,\lambda_{b_t}\}$ 为基的自由阿贝尔群，使得 N 的元素可与整数的 $(t+1)$-元组相对应。令 $Q_n(b)$ 为如下所述的 N-分次 $\mathbb{Z}$-代数：它是多项式环$\mathbb{Z}[a_1,\dots,a_t,u_1,\dots,u_t]$的商空间，其中 a 和 u 是位于 Θ_1 位置的生成元，满足$|a_j|=\lambda_{b_j}$ 和 $|u_j|=\lambda_{b_j}-2$，并受以下关系约束

$$\left(p_{\Theta_{b_j}\to\Theta_1}\right)^*(a_j)=0 \qquad (Euler\ class\ relation),$$

$$\tfrac{b_i}{(b_i,b_j)}a_iu_j=\tfrac{b_j}{(b_i,b_j)}a_ju_i \qquad (gold\ relation)$$

对所有 i,j。

注意，将转移映射 $(p_{\Theta_{b_j}\to\Theta_1})_*$ 应用于第一个关系，得到 $b_ja_j=0$。事实上，注意欧拉类关系是唯一影响次数λ_{b_j}的关系。因此，$Q_n(b)$在次数 λ_{b_j} 上的分量，是由生成元a_j生成的 $\mathbb{Z}$ 除以关系 $(p_{\Theta_j\to\Theta_1})^*(a_j)=0$所得的商空间，这恰好是 $\mathbb{Z}/I_{b_j}$。

命题 4.19。固定上述的 n 和 b，并记 $Q=Q_n(b)$。那么对于 $d\in N$，$\mathbb{Z}$-模 Q^d 由次数为 d的 a's 和 u's 的乘积生成。此外，除非 $d=-2r(1)+\sum_{i>0}e_i\lambda_{b_i}$（其中对所有 i都有 $e_i\geq 0$，且$0\leq r\leq\sum_i e_i$），否则 Q^d 非零。在这种情况下，若令 B 表示由重复e_1 次的 b_1、接着重复 e_2 次的 b_2，依此类推所组成的序列，则有

$$Q^d\cong\begin{cases}\mathbb{Z} & if\ r=\sum_{i>0}e_i,\\ \mathbb{Z}/I_{(B;r+1)} & otherwise.\end{cases}$$

注记 4.20。**</style'>上述结果较难理解，但我们可以将其改述如下。分量 仅在包含单项式的次数中非零（其中各指标不必互不相同）。在此次数下的 -模同构于，若 成立；否则同构于，其中 (，b_{i_2}，.....，$b_{i_{s+r}}$)**。

证明需要用到下面这个简单引理：

引理 4.21. 设 M 是一个 $\mathbb{Z}$-模，且 $e_1,\dots,e_s$ 是 n 的因子。假设$x\in M(\Theta_1)$具有如下性质：x 在每个 $M(\Theta_{e_i})$上的限制都等于零。那么，x 在 $M(\Theta_{(e_1,\dots,e_s)})$ 上的限制也等于零。

证明. 令 $y = (p_{\Theta_{(e_1,\dots,e_s)}\to\Theta_1})^*(x)$，并设 $z_i = (p_{\Theta_{e_i}\to\Theta_{(e_1,\dots,e_s)}})^*(y)$。我们的假设是 $z_i = 0$，因此

$$0 = (p_{\Theta_{e_i}\to\Theta_{(e_1,\dots,e_s)}})_*(z_i) = \tfrac{e_i}{(e_1,\dots,e_s)}\cdot y.$$

但是，整数 $\frac{e_i}{(e_1,\dots,e_s)}$ 互素，因此它们存在一个线性组合，其值为 1。于是 $y = 0$。
□

命题 *4.19* 的证明。所谓"au-单项式"，就是指由 a 和 u 构成的单项式。显然，Q 除了在包含 au-单项式的次数上非零外，其他次数上均为零。显然，包含一个 u- 单项式的次数 $u_{i_1}\cdots u_{i_t}$ 不包含其他 au- 单项式，因此该次数上的分量等于 $\mathbb{Z}$。

令 d 为包含单项式 $m = a_{i_1}\cdots a_{i_s}u_{i_{s+1}}\cdots u_{i_{s+r}}$ 的次数。显然，Q^d 作为一个 $\mathbb{Z}$-模，由所有属于该次数的 au-单项式生成——这些单项式恰好是将指标重新排列后由 m 得到的。因此，Q^d 中的限制映射都是满射。

令 $e = (B; r+1)$。我们的目标是证明 $Q^d \cong \mathbb{Z}/I_e$。注意，单项式 m 在各个位置 $\Theta_{b_{i_1}}$、……、$\Theta_{b_{i_s}}$ 的限制均为零，因为相应的 a- 类为零。整数 b_{i_1}、……、$b_{i_{s+r}}$ 的任意 $(r+1)$ 重最小公倍数 Λ 都是 b_{i_1}、……、b_{i_s} 中至少一个的倍数，因此 m 在位置 Θ_Λ 的限制为零。令 Λ 遍历所有 $(r+1)$ 重最小公倍数，由引理 4.21 可知，m 在位置 Θ_e 的限制为零。对通过置换指标由 m 得到的任意单项式，同样的分析也成立，因此所有这些 au-单项式在 Θ_e 处的限制都为零。这就证明了 $Q^d(\Theta_e) = 0$。

我们将利用（Q^d, −证明其具有所需形式，这将（2.1.3）所述问题归结为 ℓ-局部情形。因此固定一个素数 ℓ。我们使用 [DH，命题 4.8] 中的识别准则：这表明 $\mathbb{Z}/I_{e(\ell)}$（在同构意义下）是唯一满足以下性质的 $\mathbb{Z}$-模：M 满足 $M(\Theta_1) \cong \mathbb{Z}/e(\ell)$，$M(\Theta_{e(\ell)}) = 0$，且 M 中所有限制映射都是满射。最后一项已在上文验证。对于第二项，注意到 p_*p^*: $Q^d(\Theta_{e(\ell)}) \to Q^d(\Theta_e) \to Q^d(\Theta_{e(\ell)})$ 是乘以 $e/e(\ell)$ 的映射，因此是一个 ℓ-同构，而中间的群已证明为零。因此 $Q^d{}_{(\ell)}(\Theta_{e(\ell)}) = 0$。

尚需证明关于 $Q^d{}_{(\ell)}(\Theta_1)$ 的断言，我们知道它由 au-单项式生成。在 ℓ-局部化之后，黄金关系变为

$$\tfrac{b_i(\ell)}{\min\{b_i(\ell),b_j(\ell)\}}\cdot(\text{a unit in }\mathbb{Z}_{(\ell)})\cdot a_iu_j = \tfrac{b_j(\ell)}{\min\{b_i(\ell),b_j(\ell)\}}\cdot(\text{a unit in }\mathbb{Z}_{(\ell)})\cdot a_ju_i.$$

无论左边还是右边，第一项都等于一，因此该关系表明，在 ℓ-局部化之后，a_iu_j 与 a_ju_i 中的一个是另一个的倍数：确切地说，若 $b_i(\ell) \le b_j(\ell)$，则 a_iu_j 是 a_ju_i 的倍数（另一方向亦然）。因此，更本原的 $a_?\cdot u_?$ 积是这样一个积：其 u 上的指标对应于具有较小 ℓ-进值的 b。由此立即可知，次数为 d 的所有 au-单项式都是某一个单项式的倍数，即任意一个单项式，其中 u上的指标对应于具有最小ℓ-进值的那些 b。于是该类的加法阶等于 $b_i(\ell)$的第$(r+1)$小的值，而这恰好是 $e(\ell)$。因此 $Q^d(\Theta_1)$ 是此阶循环的（请注意，以上均是在 ℓ-局部化之后）。

[DH，命题 4。8] 现在表明 $Q^d{}_{(\ell)} \cong \mathbb{Z}/I_{e(\ell)}$，所需结论随即由 (2.1.3) 得出。
□

推论 *4.22*。设 $b_1,\dots,b_t$ 为 n 的所有大于 *1* 的因子。设 N 和 $Q_n(b)$ 如定义 *4.18* 所述。存在唯一的 N-分次 $\mathbb{Z}$-代数映射 $Q_n(b) \to H^\star(pt)$，它将形式上的 a 类和 u 类映至 $H^\star$ 中对应的类；对于 N 中使每个 λ_b 的重数对于 $b>0$ 均为非负的所有次数，该映射都是同构。

证明。该映射的存在性和唯一性源于以下事实：a- 类和 u- 类在 $H^\star$ 中满足 $Q_n(b)$ 的定义关系：见 (2.9.1) 和推论 3.9。由于我们已在推论 4.13 中证明，在这些次数中，正锥由 au-单项式生成，因此该映射在所有逐项非负次数上都是满射。

根据命题4.19 和推论 4.13，在我们所考虑的每个次数上，映射的定义域和陪域都属于集合 $\{\mathbb{Z},\mathbb{Z}/I_d\}_{d|n}$，且彼此同构。对于这样的模，同一同构类中对象之间的任何满射都必定是同构（这是因为循环阿贝尔群也具有类似性质）。□

5. Small models for spheres

固定 $b_1,\dots,b_s$，它们是 n 的因子。球面 $S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_k}}$ 由盒积 $S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_s}}$ 建模，它是一个链复形，其各项由 3^s 个自由 $\mathbb{Z}$- 模的和构成，同调次数从 0 到 $2s$。本节构造一个小得多的模型，它仅由 $2s+1$ 个自由直和项组成，每个上述次数各有一个。

设 $b_1,\dots,b_s$ 是一个因子串。定义 $L(b)$ 为如下链复形：

$$0 \longrightarrow F_{b_s} \xrightarrow{id-Rt} F_{b_s} \xrightarrow{\Delta_s} F_{b_{s-1}} \xrightarrow{id-Rt} F_{b_{s-1}} \xrightarrow{\Delta_{s-1}} \cdots \xrightarrow{id-Rt} F_{b_1} \xrightarrow{R\pi} \underline{\mathbb{Z}} \longrightarrow 0.$$

这里，非零项（从左向右读）集中在从 $2s$ 到 0 的次数上，并且

$$\Delta_k = I\pi_{b_{k-1}} \circ R\pi_{b_k}$$

其中 $\pi_{b_k}: \Theta_{b_k} \to pt$ 是通常的投影。容易验证 $L(b)$ 确实是一个链复形：利用 $R\pi(id-Rt) = R\pi - R(\pi t) = R\pi - R\pi = 0$，以及

$$(id-Rt)I\pi_{b_k} = (id-It^{-1})I\pi_{b_k} = I\pi_{b_k} - I(t^{-1}\pi_{b_k}) = I\pi_{b_k} - I\pi_{b_k} = 0.$$

当 $b_1,\dots,b_s$ 不是因子串时，我们将 $L(b)$ 定义为对应于因子串 $(b;1),(b;2)\dots,(b;s)$ 的 L- 复形。

命题 5.1. 对于 n 的任意因子 $b_1,\dots,b_s$，存在一个拟同构 $S^{\lambda_{b_1}}\square\cdots\square S^{\lambda_{b_s}} \simeq L(b)$。

证明。根据命题 4.7，我们立即将问题归结为 b 是因子串的情形。现在对 s 使用归纳法进行证明，其中 $s=1$ 的情形显然成立。

令 $B = L(b_2,\dots,b_s)$，并定义复形 由余纤维序列定义 B

$$\underline{\mathbb{Z}} \hookrightarrow B \to \tilde{B}.$$

因此，B 的项为 F_{b_i} 对于 $i\geq 1$，由此我们根据（2.1.2）（注意，这里用到了每个 b_i 都是 b_1的倍数）得到 $B\square\mathbb{Z}/I_{b_1} = 0$

取余纤维序列 $\Sigma^2\mathbb{Z} \to S^{\lambda_{b_1}} \to \mathbb{Z}/I_{b_1}$，并与 $\tilde{B}$ 作盒积。由于第三项是可缩的，映射

$$\Sigma^2\tilde{B} \to S^{\lambda_{b_1}} \square \tilde{B} \tag{*}$$

是一个拟同构。

现在取余纤维序列 $\mathbb{Z} \hookrightarrow B \to \tilde{B}$，并与 $S^{\lambda_{b_1}}$ 作盒积，得到

$$S^{\lambda_{b_1}} \to S^{\lambda_{b_1}} \square B \to S^{\lambda_{b_1}} \square \tilde{B}.$$

回溯该余纤维序列并利用(*)，再结合归纳假设 $B \simeq S^{\lambda_{b_2}+\cdots+\lambda_{b_s}}$，便得到一个余纤维序列

$$\Sigma\tilde{B} \xrightarrow{f} S^{\lambda_{b_1}} \to S^{\lambda_1+\cdots+\lambda_{b_s}}.$$

映射 f 具有如下形式

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots & \longrightarrow & F_{b_2} & \longrightarrow & F_{b_2} & \longrightarrow & 0 \\ & & & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \\ \cdots & \longrightarrow & 0 & \longrightarrow & F_{b_1} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{b_1} \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \end{array}$$

因此它具有唯一的非零分量。图表的交换性与命题 3.4(b)蕴含$f = w \cdot I\pi_{b_1} R\pi_{b_2}$对某个 $w \in \mathbb{Z}$成立。若我们证明 $w = \pm 1$，则 f的映射锥显然同构于 $L(b_1, \ldots, b_s)$，从而即告完成。

令 Cf 为 f 的映射锥，并计算 $H_2(Cf)(\Theta_1)$。显然，它是由类 $p_*(g_{\Theta_{b_1}})$ 生成的 $\mathbb{Z}/(wb_2)$。但我们已经知道 $Cf \simeq S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_s}}$，并且此前已计算出这个球面的 H_2 为 $\mathbb{Z}/I_{b_2}$。这个 $\mathbb{Z}$-模在 Θ_1 处的值是 $\mathbb{Z}/b_2$，因此必有 $w = \pm 1$。□

注 5.2。当 b 是一个因子串时，复形 $L(b)$ 可直接识别为某个同伦余极限。例如，命题5.1 表明$S^{\lambda_{b_1}+\lambda_{b_2}+\lambda_{b_3}}$ 是如下图表的同伦余极限

$$\Sigma^4 S^{\lambda_{b_3}} \xleftarrow{\Sigma^4 a_{b_3}} \Sigma^4\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{\Sigma^2 u_{b_2}} \Sigma^2 S^{\lambda_{b_2}} \xleftarrow{\Sigma^2 a_{b_2}} \Sigma^2\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{u_{b_1}} S^{\lambda_{b_1}}.$$

或者，也可以通过归纳将 $S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_k}}$ 描述为如下同伦推出

$$\Sigma^{2k-2} S^{\lambda_{b_k}} \xleftarrow{\Sigma^{2k-2} a_{b_k}} \Sigma^{2k-2}\underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{u_{b_1}\cdots u_{b_{k-1}}} S^{\lambda_{b_1}+\cdots+\lambda_{b_{k-1}}}.$$

这些模型有时很有用。

$L(b)^*$ 的对偶为

$$0 \longrightarrow \underline{\mathbb{Z}} \xrightarrow{I\pi} F_{b_1} \xrightarrow{id-It} F_{b_1} \xrightarrow{I\pi R\pi} F_{b_2} \xrightarrow{id-It} \cdots \xrightarrow{I\pi R\pi} F_{b_s} \xrightarrow{id-It} F_{b_s} \longrightarrow 0.$$

（这里我们省略了 π-映射的下标，但可以根据（余）定义域推断出来。）现在，各项（从左到右）集中在次数 0 至 $-2s$ 上。

推论 5.3。给定 n 的因子列表 b_1、……、b_s，存在一个拟同构$S^{-\lambda_{b_1}} \square \cdots \square S^{-\lambda_{b_s}} \simeq L(b)^*$。

证明。由命题5.1即可得出。□

6. Working with the negative cone

负锥比正锥更难处理，因为它本质上是非诺特的：其中的元素通常可被 a-类和 u-类的某些子集无限次整除。本节将建立一种方法，用于写出由除数串索引的负锥齐次部分的显式生成元，并确定正则区域内的大多数乘积。

负锥自然地分为两个区域：“整数边”，其齐次部分为 $H^{2k-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_k}} \cong I_{[b]}$（这里的所有部分都是非挠的），以及“挠锥”，其齐次部分为 $H^{(2j+1)-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_k}} \cong \mathbb{Z}/I_{(b;j)}$。请记住图 6 中的示意图，它展示了一个小切片。请注意，类 $\frac{b}{u_b^i a_b^j}$ 和 $\frac{\gamma_b}{u_b^i a_b^j}$ 将在下文第 6.1 节和6.4节中分别解释。

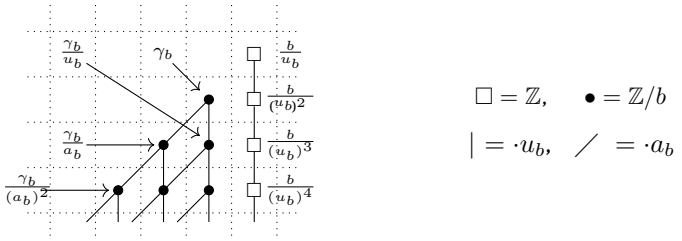


Figure 3. 负锥的切片 $H^{k-m\lambda_b}$

这个小切片的图示在一个值得一提的方面具有误导性：一般来说，负锥和挠锥都不会只有一个“锥点”。负锥的顶缘由对所有 $b|n$ 都成立的类 $\frac{b}{u_b}$ 组成，而挠锥的顶缘则由在 $b|c|n$ 条件下的类 γ_b 和 $\frac{a_b\gamma_b}{a_c}$ 组成。在这两种情况下，我们都应当把它想象成一个从类 $1 \in H^0$ 向下延伸的锥形区域，只是顶端的一小部分被削去了。

6.1. 整边。 我们首先证明，乘以 u-类会给出到 H^0 的一个单射，并确定这个像。

引理 6.2。 设 $b = (b_1, \ldots, b_k)$ 是 n 的因子序列。记作 $\lambda_b = \lambda_{b_1} + \cdots + \lambda_{b_k}$ 和 $u_b = u_{b_1} \cdots u_{b_k}$。那么乘以 u_b 给出一个单射

$$\begin{array}{ccc} \underline{H}^{2k-\lambda_{\underline{b}}} & \xrightarrow{u_{\underline{b}}} & \underline{H}^0 \\ I_{[\underline{b}]} & & \underline{\mathbb{Z}} \end{array}$$

并且像是 $I_{[b]}$。特别地，在 Θ_1 位置上，像由最小公倍数 $[b]$ 生成。

证明。 考虑映射 $\Sigma^{2k}\mathbb{Z} \xrightarrow{u_b} S^{\lambda_b}$，并令 Q 为映射锥。我们得到一个长正合列

$$0 = \underline{H}^{2k+1}(S^{\lambda_{\underline{b}}}) \leftarrow \underline{H}^{2k+1}(Q) \leftarrow \underline{\mathbb{Z}} \xleftarrow{\cdot u_{\underline{b}}} \underline{H}^{2k}(S^{\lambda_{\underline{b}}}) \leftarrow \underline{H}^{2k}(Q).$$

我们可以用第 S^{λ_b} 节中的复形 $L(B)$5来刻画，其中 B 是与 b相关联的因子串。在这个模型中，映射 u_b (它是 $H_{2k}(-)$的生成元)

是映射 $\Sigma^{2k}\mathbb{Z} \to L(B)$，它在次数 $2k$ 上等于 $I\pi$。余纤维 Q 中的前三项显然与 $\mathbb{Z}/I_{[b]}$ 的标准分解的顶部重合。利用该分解是自对偶的这一点，立即可得 $H^{2k+1}(Q) \cong \mathbb{Z}/I_{[b]}$ 以及 $H^{2k}(Q) = 0$。证明由如下事实完成：任意 $\mathbb{Z}$-模的满射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/I_j$ 的核都恰好等于 I_j。□

设 $g \in H^{2k-\lambda_b}(\Theta_1)$ 是上面证明中映射到 $[b]$ 的生成元。由此可知，这是有理化映射 $H^\star(pt) \to H^\star(pt) \otimes \mathbb{Q}$ 为单射的一个次数，而生成元 g 映射到 $\frac{[b]}{u_b}$。因此，我们用它的像来命名这个元素，记作

$$g = \frac{[b]}{u_b} \in H^{2k-\lambda_b}(\Theta_1).$$

这是 $H^\star$ 中唯一满足以下性质的元素：将它乘以 u_b 后得到 $[b]$。下一个结果可立即得出：

命题 6.3。设 $b = (b_1, \ldots, b_k)$ 是 n 的一个因子序列。对于任意 $1 \le i \le k$，记 $b \setminus b_i$ 为移除 b_i 后的元组。以下结果描述了如何将正则部分中的任意类与整数边中的一个类相乘，前提是乘积仍落在正则部分中：

(1) 对任意 $1 \le i \le k$，有

$$u_{b_i} \cdot \frac{[b]}{u_b} = \frac{[b]}{[b \setminus b_i]} \frac{[b \setminus b_i]}{u_{b \setminus b_i}}.$$

因此，在 $H^{2k-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_k}}$ 上乘以 u_{b_i} 的映射 $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$，就是乘以 $\frac{[b]}{[b \setminus b_i]}$ 的映射。

(2) $a_{b_i} \cdot \frac{[b]}{u_b} = 0$ 对于 $1 \le i \le k$。*(3)* 若 $c = (c_1, \ldots, c_j)$ 是 n 的另一组因子序列，那么

$$\frac{[b]}{u_b} \cdot \frac{[c]}{u_c} = \frac{[b][c]}{[b,c]} \cdot \frac{[b,c]}{u_b u_c}.$$

(4) 若 α 是来自某个次数的挠锥中的齐次元素，且该次数下的 $\mathbb{Z}$-模是某个 $c|[b]$ 的 $\mathbb{Z}/I_c$，那么 $\alpha \cdot \frac{[b]}{u_b} = 0$。

证明。(1) 和 (3) 两部分直接由 $\frac{[b]}{u_b}$ 类的定义性质得出。(2) 由次数原因可知，因为群 $H^{2k-\lambda_{b \setminus b_i}}$ 根据命题 4.16 等于零。对于 (4)，令 $\alpha \in H^\beta(pt)$。那么 $\alpha \cdot \frac{[b]}{u_b}$ 属于乘法映射的像

$$H^\beta \square H^{2k-\lambda_b} \xrightarrow{\mu} H^{2k+\beta-\lambda_b}.$$

但定义域是 $\mathbb{Z}/I_c \square I_{[b]}$，当 c 整除 $[b]$ 时为零，依据（2.1.2）。□

6.4. **伽马类**。我们的下一个目标是尽可能多地理解挠锥。回顾命题 4.16 可知，对每个因子 b 我们有 $H^{3-2\lambda_b} \cong \mathbb{Z}/b$。我们首先引入位于负锥这些不同“子尖端”中的特殊生成元，然后证明这些生成元可被某些 a-类与 u-类无限整除。这将使我们能够方便地描述许多乘积。

设 $Y_b \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b$ 为我们来自 (2.1.1) 的标准自由分解。定义 Γ_b 为 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}/I_b, \Sigma^3\mathbb{Z}) = \mathrm{Ext}^3(\mathbb{Z}/I_b, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}$ 中由之字形链表示的映射

$$\underline{\mathbb{Z}}/I_b \xleftarrow{\simeq} Y_b \longrightarrow \Sigma^3\underline{\mathbb{Z}}$$

其中，右侧箭头是投影到次数 3 的分量上（引言中将此映射称为 B_b ）。与 Γ_b 复合后，得到一个自然运算

$$\underline{H}^i(X;\underline{\mathbb{Z}}/I_b) \to \underline{H}^{i+3}(X;\underline{\mathbb{Z}}),$$

为方便起见，我们也将其称为 Γ_b 。这可以看作一个广义Bockstein算子。注意，在阿贝尔群范畴 $\mathcal{A}b$中，按照这一过程并选取 $\mathrm{Ext}^1_{\mathcal{A}b}(\mathbb{Z}/b,\ \mathbb{Z})$ 的一个生成元，会得到通常的整系数Bockstein算子 $H^i(X;\ \mathbb{Z}/b) \to H^{i+1}(X;\ \mathbb{Z})$。

每个映射 $\underline{\mathbb{Z}}/I_c \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b$ 都是乘以 ${}^{b}{}_{(b,\ c)} \cdot e$ ，其中 e 为某个元素。下面的命题解释了这些映射与 Γ-运算的关系：

命题 6.5。 设 $E\colon \mathbb{Z}/I_c \to \underline{\mathbb{Z}}/I_b$ 是乘以 ${}^{b}{}_{(b,\ c)}e$的映射。那么对任意$x \in H^i(X;\ \mathbb{Z}/I_c)$ ，有

$$\Gamma_b(Ex) = \tfrac{c}{(b,c)}e \cdot \Gamma_c(x)$$

作为 $H^{3+i}(X;\mathbb{Z})$ 中的元素。

证明。 我们需要证明，复合映射 $\Gamma_b \circ E$ 等于给定的 Γ_c 的倍数。通过将 E 提升为我们标准分解之间的映射即可验证：

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
0 & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{I\pi} & F_c & \xrightarrow{id-Rt} & F_c & \xrightarrow{R\pi} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}/I_c & \longrightarrow & 0 \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \cdot\frac{c}{(b,c)}e} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle \cdot\frac{b}{(b,c)}e} & & \downarrow{\scriptstyle E} & & \\
0 & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}} & \xrightarrow{I\pi} & F_b & \xrightarrow{id-Rt} & F_b & \xrightarrow{R\pi} & \underline{\mathbb{Z}} & \longrightarrow & \underline{\mathbb{Z}}/I_b & \longrightarrow & 0
\end{array}$$

其中 $f(g_c) = e \cdot (p_{\Theta_{[b,c]} \to \Theta_c})_*(p_{\Theta_{[b,c]} \to \Theta_b})^*(g_b)$。由此可立即得到结论。□

注6.6。 记住命题 6.5 中的恒等映射是很方便的：

$$\Gamma_b(kx) = \tfrac{c}{b}k \cdot \Gamma_c(x).$$

只要记住，当 k 是 ${}^{b}{}_{(b,c)}$ 的倍数时， kx 才能作为从 $H^i(X;\ \mathbb{Z}/I_c)$ 到 $H^i(X;\ \mathbb{Z}/I_b)$ 的一般映射；因此，表达式 $\frac{ck}{b}$ 实际上是一个整数。

我们有一个典范映射 $S^{\lambda_b} \to \mathbb{Z}/\underline{I_b}$ ，它将正次数项商掉，并且在零次时是典范投影。这是 $H^0(S^{\lambda_b};\mathbb{Z}/I_b) \cong \mathbb{Z}/b$ 的一个元素，并且生成这个群。自然地将其记为 $\mathbf{1}_b$。取盒积可得 $\mathbf{1}_b\square\mathbf{1}_b \in H^0(S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_b};\mathbb{Z}/I_b)$，接着我们定义

$$\gamma_b = \Gamma_b(\mathbf{1}_b\square\mathbf{1}_b) \in H^3(S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_b}) = H^{3-2\lambda_b}.$$

回想一下，我们有生成元 $u_{[b:c]} \in [S^{\lambda_c}, S^{\lambda_b}] = H^{\lambda_b-\lambda_c}$ ，它们是在第3.6节中定义的。下面的结果给出了它们的乘积与γ-类之间的一些关系：

命题 6.7。 设 b 和 c 是 n 的因子。那么
(a) $u_{[b:c]}\gamma_b = u_{[c:b]}\gamma_c$，以及 *(b)* $u^2_{[b:c]}\gamma_b = {}^{[b,c]}{}_{b\ c\ (,)} \cdot \gamma_c$。特别地，若 $b|c$ 则 $u^2_{[b:c]}\gamma_b = \frac{c}{b} \cdot \gamma_c$。

证明。 第 (b) 部分由 (a) 以及如下事实得出： $u_{[b:c]}u_{[c:b]} = {}^{[b,c]}_{b\ c}(,)$ 由命题 3.7。对于 (a)，我们考察如下图表：

$$\begin{array}{ccccccc}
S^{\lambda_c}\square S^{\lambda_c} & \xrightarrow{\mathbf{1}_c\square\mathbf{1}_c} & \underline{\mathbb{Z}}/I_c\square\underline{\mathbb{Z}}/I_c & = & \underline{\mathbb{Z}}/I_c & \xrightarrow{\Gamma_c} & \Sigma^3\underline{\mathbb{Z}} \\
\uparrow{\scriptstyle u_{[c:b]}\square id} & & \uparrow{\scriptstyle \frac{c}{(b,c)}\square id} & & \uparrow{\scriptstyle \frac{c}{(b,c)}} & & \| \\
S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c} & \xrightarrow{\mathbf{1}_b\square\mathbf{1}_c} & \underline{\mathbb{Z}}/I_b\square\underline{\mathbb{Z}}/I_c & = & \underline{\mathbb{Z}}/I_{(b,c)} & \xrightarrow{\Gamma_{(b,c)}} & \Sigma^3\underline{\mathbb{Z}} \\
\downarrow{\scriptstyle id\square u_{[b:c]}} & & \downarrow{\scriptstyle \frac{b}{(b,c)}\square id} & & \downarrow{\scriptstyle \frac{b}{(b,c)}} & & \| \\
S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_b} & \xrightarrow[\mathbf{1}_b\square\mathbf{1}_b]{} & \underline{\mathbb{Z}}/I_b\square\underline{\mathbb{Z}}/I_b & = & \underline{\mathbb{Z}}/I_b & \xrightarrow{\Gamma_b} & \Sigma^3\underline{\mathbb{Z}}.
\end{array}$$

从 $S^{\lambda_b}\square S^{\lambda_c}$ 向上再向右的复合映射等于 $u_{[c:b]}\gamma_c$，向下再向右的复合映射等于 $u_{[b:c]}\gamma_b$。因此，只需证明该图表可交换。

左列中的交换方形可交换，因为我们的$u_{[x:y]}$链模型是乘以$x^{(x,\ y)}$，且次数为零（定义见第3.6节）。中间列中交换方形的可交换性显而易见。最后，右列中的两个交换方形根据命题6.5可交换。 □

注 6.8。 写作 $b = \ell_1^{e_1}\cdots\ell_s^{e_s}$，其中 ℓ_i 是互异素数。数 $\hat{}\,\hat{}b(\ell_i)$ 互素，因此我们可以将 $1 = \sum_i A_i b(\ell_i)$ 写成某个 $A_i \in \mathbb{Z}$。那么

$$\gamma_b = \sum_i A_i b(\hat{\ell}_i)\gamma_b = \sum_i A_i u^2_{[b(\ell_i):b]}\gamma_{b(\ell_i)}.$$

因此，每个 γ_b 类都可以用素数幂对应的 γ-类表示。

6.9. **负扭结锥中类的命名**。 现在，我们对每个因子串都有优选生成元 $\gamma_b \in H^{3-2\lambda_b}$ b。接下来，我们利用这些类，为挠锥的其余部分选取优选生成元。为此，我们将证明，总能使用某些 a类和 u类，通过同构映射，从负锥中的任意位置到达一个 γ类。

设 $b = (b_1, \ldots\ldots, b_k)$是一个因子串，且 $1 \le s \le k-1$。请注意， b_i 不必彼此不同，而且通常并不相同。固定另一个因子 $c|n$，并考虑以下两个映射

$$\underline{H}^{?} \xrightarrow{\cdot a_c} \underline{H}^{2s+1-\lambda_{\underline{b}}} \xleftarrow{\cdot u_c} \underline{H}^{??} \tag{6.9.1}$$

（为使表达更易读，我们省略了定义域的次数，因为这些次数很容易推算）。以下结果给出了这些映射成为同构的一个实用范围：

命题 6.10。 设 b和 c 如上所述。
(a) 假设 c 可以插入 b 之后 b_s，从而构成一个新的因子串。那么 $\cdot a_c$ 中的映射（*6.9.1*）是一个同构。***(b)*** 假设 c 可以插入 b 之前 b_s，从而构成一个新的因子串。那么 $\cdot u_c$ 中的映射（*6.9.1*）是一个同构。

我们暂且搁置证明，但请注意，这为我们提供了一种工具，可以通过上述同构，在负锥中向下传播 $H^{2s+1-\lambda_b}$ 中的生成元和关系。

反复使用命题 6.10 可得下图。注意，根据命题4.16 ，所有群都同构于 $\mathbb{Z}/b_s$。

(6.10.1)

$$\begin{array}{ccccc} H^{2s+1-\lambda_{\underline{b}}} & \xrightarrow[\cong]{u_{b_1}\cdots u_{b_{s-1}}} & H^{3-\lambda_{b_s}-\cdots-\lambda_{b_k}} & \xrightarrow[\cong]{a_{b_{s+2}}\cdots a_{b_k}} & H^{3-\lambda_{b_s}-\lambda_{b_{s+1}}} \\ & & & & \cong\uparrow a_{b_s} \\ & & & & H^{3-2\lambda_{b_s}-\lambda_{b_{s+1}}} \xrightarrow[\cong]{a_{b_{s+1}}} H^{3-2\lambda_{b_s}}. \end{array}$$

沿着这些同构取生成元 $\gamma_{b_s}\in H^{3-2\lambda_{b_s}}$ 的原像，可得 $H^{2s+1-\lambda_b}$ 的一个生成元，我们将其记作

$$\frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{b_1}\cdots u_{b_{s-1}}a_{b_{s+1}}\cdots a_{b_k}}\in H^{2s+1-\lambda_{\underline{b}}}. \tag{6.10.2}$$

为便于后续排版，有时我们会用 $u_{\langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle}$ 作为乘积 $u_{b_1}\cdots u_{b_{s-1}}$的缩写。（这看起来似乎并不算什么缩写，但在解析复杂公式时确实很有帮助。）

关于（6.10.2）中的元素，有三件有用的事情需要记住：

- 加法阶恰好是 b_s，即分子中的$\gamma_?$ 指标。
- 整体次数的“固定维数”等于
$$2\cdot(\text{分母中 } u\text{-类的个数})+3.$$
- 分母中必须至少出现一个 a-类。因此，像 $\frac{a_{b_2}\gamma_{b_2}}{u_{b_1}}$这样的表达式没有意义。不过，$\frac{\gamma_b}{u_b}$是可以的，因为它等于 $\frac{a_b\gamma_b}{u_b a_b}$。

例6.11. 假设我们有三个因子 b， c， d，且 $b\mid c\mid d$，我们希望理解所有的群 $H^{*-\lambda_b-\lambda_c-\lambda_d}$。于是我们有如下挠生成元

$$\frac{a_b\gamma_b}{a_c a_d}\in H^{3-\lambda_b-\lambda_c-\lambda_d}\cong\mathbb{Z}/b \quad\text{and}\quad \frac{a_c\gamma_c}{u_b a_d}\in H^{5-\lambda_b-\lambda_c-\lambda_d}\cong\mathbb{Z}/c.$$

类 $\frac{d}{u_b u_c u_d}$ 生成 $H^{6-\lambda_b-\lambda_c-\lambda_d}\cong\mathbb{Z}$，并且 $H^{*-\lambda_b-\lambda_c-\lambda_d}=0$对于 $*\notin\{3,5,6\}$。

当我们只有两个因子 $b\mid c$时，我们就有唯一的挠生成元

$$\frac{a_b\gamma_b}{a_c}\in H^{3-\lambda_b-\lambda_c}\cong\mathbb{Z}/b$$

以及非挠元 $\frac{c}{u_b u_c}\in H^{4-\lambda_b-\lambda_c}\cong\mathbb{Z}$。所有其他群 $H^{*-\lambda_b-\lambda_c}$均为零。

总之，给定因子串 $b=(b_1,\dots,b_k)$，通过用 γ-、 a- 和 u-类构造“有效分式”，我们便能在负锥中得到挠生成元。对于每个 $1\le s<k$，都有唯一的有效分式：分子为 $a_{b_s}\gamma_{b_s}$ ，分母为乘积 $u_{b_1}\cdots u_{b_{s-1}}\cdot a_{b_{s+1}}\cdots a_{b_k}$（因此，对于 b_s 的因子，我们有 u-类；对于能被 b_s整除的数，我们有 a-类）。注意， $s<k$，所以每个有效分式的分母中都必须有一个 a-类。除非我们

有 $b_s = b_{s+1}$，这时允许“约分”。也就是说，我们可以约去分子和分母中的 $a_{b_s} = a_{b_{s+1}}$，例如，对于 $b \mid c$，我们写作

$$\frac{a_c \gamma_c}{u_b a_c} = \frac{\gamma_c}{u_b}.$$

注 6.12。就除法而言，这意味着我们可以用带有 $b \mid c$ 的 u_b-类和带有 $c \mid d$ 的 a_d-类，将 γ_c 无限次地除下去。此外，对于每一对因子 $c_1 \mid c_2$，我们都有类 $\frac{a_{c_1}\gamma_{c_1}}{a_{c_2}}$，它们同样可以被带有 $b \mid c_1$ 的 u_b-类以及带有 $c_2 \mid d$ 的 a_d-类无限次地除下去。在这两种情况下，由此得到的分数都会生成该次数上的 Mackey 函子。此外，所有负扭结锥非零的次数都可以用这种方式生成。

现在我们证明命题 6.10 中的各种同构。这些同构将是下文命题 6.13 和命题 6.15 中结果的具体实例。

命题 6.13。设 $b = (b_1, \ldots, b_k)$ 是 n 和 $1 \leq s \leq k-1$ 的因子串。那么，映射 $H^{2s+1-\lambda_b} \to H^{2s-1-\lambda_b+\lambda_{b_i}}$ 若由乘以 u_{b_i} 给出，-则当 $i < s$ 时为同构，当 $i = s$ 时为满射。

证明。考虑通常的余纤维序列 $\Sigma^2\mathbb{Z} \xrightarrow{u_{b_i}} S^{\lambda_{b_i}} \longrightarrow \mathbb{Z}/I_{b_i}$。应用 $H^{2s+1-\lambda_b+\lambda_{b_i}}$ 可得正合列

$$H^{2s+1-\lambda_b} \xrightarrow{u_{b_i}} H^{2s-1-\lambda_b+\lambda_{b_i}} \longrightarrow H^{2s+2-\lambda_b+\lambda_{b_i}}(\mathbb{Z}/I_{b_i}).$$

记作 $j = 2s+1$。根据命题 4.16，我们知道 $H^{j-2-\lambda_b+\lambda_{b_i}} \cong \mathbb{Z}/I_r$ 对于适当的 r成立，因此 $\mathbb{Z}$-模由 Θ_1-位置上的元素生成。因此，要证明映射 u_{b_i} 是满射，只需证明它在 Θ_1-位置上是满射。为此，我们证明最右侧的 $\mathbb{Z}$-模在 Θ_1-位置上为零。首先注意到

$$\begin{aligned} H^{j+1-\lambda_b+\lambda_{b_i}}(\mathbb{Z}/I_{b_i}) &= \mathcal{D}(\Sigma^{-j-1}\mathbb{Z}/I_{b_i}, S^{-\lambda_{b\setminus b_i}}) \\ &\cong \mathcal{D}((S^{-\lambda_{b\setminus b_i}})^*, (\Sigma^{-j-1}\mathbb{Z}/I_{b_i})^*) \\ &\cong \mathcal{D}(S^{\lambda_{b\setminus b_i}}, \Sigma^{j-2}\mathbb{Z}/I_{b_i}), \end{aligned}$$

其中，最后一个同构用到了 $(\mathbb{Z}/I_{b_i})^* \simeq \Sigma^{-3}\mathbb{Z}/I_{b_i}$。现在可以通过考虑映射 $S^{\lambda_{b\setminus b_i}} \to \Sigma^{j-2}\mathbb{Z}/I_{b_i}$的链同伦类来计算这个群。利用第 5 节中的球面的线性模型，这些映射具有如下形式（注意 $j-2 = 2s-1$）

$$F_{b_k} \longrightarrow F_{b_k} \longrightarrow F_{b_{k-1}} \longrightarrow \cdots \longrightarrow F_{b_{s+1}} \longrightarrow F_{b_{s+1}} \longrightarrow \cdots$$
$$\downarrow$$
$$\mathbb{Z}/I_{b_i}$$

如果 $i \leq s$，那么 $b_i \mid b_{s+1}$，因此 $\mathbb{Z}/I_{b_i}(\Theta_{b_{s+1}}) = 0$。由此可知，所有此类链映射均为零；因此，只要 $b_i | b_s$，乘以 u_{b_i} 的映射就是满射。

最后注意，若 $i < s$，则 $(b; s) = b_s = (b \setminus b_i; s-1)$（因为 b_s现在是字符串 $b \setminus b_i$ 中第 $s-1$ 小的数）。因此 $H^{j-\lambda_b} \cong H^{j-2-(\lambda_b-\lambda_{b_i})}$，所以我们的 $\cdot u_{b_i}$ 映射的定义域与陪域同构。由于这两个 Mackey 函子在每个位置上都是循环的，满射性蕴含单射性。□

现在我们考虑乘以 a_{b}。定义 X_b 为复形 $F_b \xrightarrow{id-Rt} F_b$。注意， ΣX_b 恰好是 a_b 的余纤维： $\mathbb{Z} \to S^{\lambda_b}$。为了证明乘以 a_b 在某些范围内是单射 / 满射，我们证明 X_b 的上同调消失。下面的引理将有助于此：

引理 6.14. 对于因子 $c \mid b \mid n$ ，有 $S^{\lambda_c} \square X_b \simeq \Sigma^2 X_b$。

证明。取余纤维序列 $\Sigma^2\mathbb{Z} \xrightarrow{u_b} S^{\lambda_c} \longrightarrow \mathbb{Z}/I_c$ ，并与 X_b 作盒积。这给出序列

$$\Sigma^2 X_b \to S^{\lambda_c}\square X_b \to \mathbb{Z}/I_c\square X_b.$$

但是 $c \mid b$ 由此可得 $\mathbb{Z}/I_c\square X_b = 0$ 根据（2.1.2），因此等价关系得证。 □

命题 6.15. 设 $b = (b_1, \ldots\ldots, b_k)$ 是 n 的因子串，且 $1 \le s \le k-1$。那么，由 a_{b_i} 乘法给出的映射 $H^{2s+1-\lambda_b} \to H^{2s+1-\lambda_b+\lambda_{b_i}}$ 是同构，当且仅当 $i \ge s+1$ 且 $s+1 \ne k$。

注意，由次数原因，当 $s = k-1$ 乘以 a_{b_i} 时，结果为零。

命题的证明 *6.15.* 考虑余纤维序列 $\mathbb{Z} \xrightarrow{a_{b_i}} S^{\lambda_{b_i}} \longrightarrow \Sigma X_{b_i}$。记 $j = 2s+1$。要证明乘以 a_{b_i} 是单射，只需证明 $H^{j-\lambda_b+\lambda_{b_i}}(\Sigma X_{b_i}) = 0$。令 $b' = (b_1, \ldots, b_s)$ 和 $b'' = (b_{s+1}, \ldots, b_k) \setminus b_i$。我们有

$$H^{j-\lambda_b+\lambda_{b_i}}(\Sigma X_{b_i}) = [\Sigma^{1-j}X_{b_i}, S^{-\lambda_b+\lambda_{b_i}}] = [\Sigma^{1-j+\lambda_{b'}}X_{b_i}, S^{-\lambda_{b''}}].$$

中的每个因子都 b' 整除 b_i ，因此由引理 6.14 可知 $\Sigma^{1-j+\lambda_{b'}}X_{b_i} \simeq \Sigma^{1-j+2s}X_{b_i} = X_{b_i}$。因此，我们需要考虑映射 $X_{b_i} \to S^{-\lambda_{b''}}$，其形式如下

$$\begin{array}{ccc} X_{b_i}: & & F_{b_i} \xrightarrow{id-Rt} F_{b_i} \\ \downarrow & & \downarrow \\ S^{-\lambda_{b''}}: & & \mathbb{Z} \xrightarrow{I\pi} F_? \longrightarrow \ldots \end{array}$$

注意，底部的复形不只是 $\mathbb{Z}$，因为要么 $i \ge s+1$，因此 $? = s+1$；要么 $i = s+1$，这意味着 $? = s+2$（回想一下，按假设 $s+1 < k$）。映射 $I\pi$ 是单射，因此不存在非零链映射。由此可得 $[\Sigma^{1-j+\lambda_{b'}}X_{b_i}, S^{-\lambda_{b''}}] = 0$。因此，乘以 a_{b_i} 是单射。最后注意 $H^{2s+1-\lambda_b} \cong H^{2s+1-\lambda_b+\lambda_{b_i}} \cong \mathbb{Z}/I_{b_s}$ ，所以单射性意味着满射性。□

6.16. **负锥中的乘积**。到目前为止，我们在 $H^\star$ 中构造了三类类：

- 正锥中的 a- 类和 u- 类；
- 负锥整数边上的类 $\overset{[b]}{u_b}$ ；
- 负锥扭结部分中的 γ-类。

我们已在命题 6.3 中讨论了前两类的乘积。以下结果列出了一些涉及第三类的乘积规则。带问号的情形表示我们尚不清楚是否存在一般规则。

命题 6.17。设 $(b_1, \ldots, b_k)$ 为一个因子串，且 $1 \le s < k$。

(1) 两个 γ 类的乘积总是零。

(2) $\frac{[\underline{d}]}{u_{\underline{d}}} \cdot \frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle \dots, b_{s-1}\rangle} a_{\langle b_{s+1}, \dots\rangle}} = \begin{cases} [\underline{d}] \cdot \frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\underline{d}} u_{\langle \dots, b_{s-1}\rangle} a_{\langle b_{s+1}, \dots\rangle}} & \text{if (**)}, \\ 0 & \text{if } b_s \text{ divides } [\underline{d}], \\ ?? & \text{other cases.} \end{cases}$

其中 (**) 表示“$\underline{d}$ 与 b_1 交错排列，……，b_{s-1}、b_s 组成一个以 b_s 结尾的因子串”。

(3) $u_c \cdot \frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle \dots, b_{s-1}\rangle} a_{\langle b_{s+1}, \dots\rangle}} = \begin{cases} \frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle \dots, \widehat{b_{\dot{\imath}}} \dots b_{s-1}\rangle} a_{\langle b_{s+1}, \dots\rangle}} & \text{如果 } c = b_i\text{，则为 } i \le s-1 \\ \frac{b_i}{b_s} \cdot \frac{a_{b_{s-1}}\gamma_{b_{s-1}}}{u_{\langle \dots, b_{s-2}\rangle} a_{\langle b_s, \dots, \widehat{b_{\dot{\imath}}}, \dots\rangle}} & \text{如果 } c = b_i \text{ 对于 } i \ge s+1, \\ ?? & \text{其他情形。} \end{cases}$

(4) $a_c \cdot \frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle \dots b_{s-1}\rangle} a_{\langle b_{s+1}, \dots\rangle}} = \begin{cases} \frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle \dots b_{s-1}\rangle} a_{\langle b_{s+1}, \dots, \widehat{b_i}, \dots\rangle}} & \text{if } c = b_i \text{ for } i \ge s+1, \\ \frac{b_{s+1}}{b_i} \cdot \frac{a_{b_{s+1}}\gamma_{b_{s+1}}}{u_{\langle \dots, \widehat{b_i}, \dots, b_s\rangle} a_{\langle b_{s+2}, \dots\rangle}} & \text{if } c = b_i \text{ for } i \le s-1, \\ ?? & \text{other cases.} \end{cases}$

命题的证明6.17分为两部分。涉及形如 $\binom{b_i}{b_j}$ 的标量因子的两个恒等式比其他恒等式更难，需要用到我们目前尚未掌握的更多工具。不过，我们还是先来处理简单的部分：

命题 *6.17*的证明，第一部分。 对于 (1)，注意到 γ-类的次数中，固定维数均为奇数。因此，两个这样的类的乘积所在次数的固定维数为偶数。根据命题4.16 ，这些次数上的负锥群要么为零，要么无挠，因此该乘积必为零。

对于 (2)，在第一种情形中，该类由它与$u_d u_{\langle b_1, \dots, b_{s-1}\rangle}$相乘后的结果唯一确定，并且很容易验证，经过这样的乘法后，等式两边给出的结果相同。在第二种情形中，结论由命题 6.3(4) 得出。

(3) 和 (4) 中的第一种情形可通过与上一段类似的推理得到，只需直接引用所涉及类的定义性质即可。

□

下面还需证明命题6.17的“困难”情形 (3) 和 (4)。我们先暂停一下，建立一些预备结果。

回顾一下，我们有类 $\gamma_b \in H^{3-2\lambda_b}$，并且当 $b|c$ 时有 $\binom{a_b\gamma_b}{a_c} \in H^{3-\lambda_b-\lambda_c}$。将所有这些类称为**负锥的子尖点**。接下来我们的任务是确定如何使用 u-类在这些子尖点之间移动。

命题 6.18。假设 $b|c$。则

(a) $u_{[b:c]}\gamma_b = \frac{a_b\gamma_b}{a_c}$,

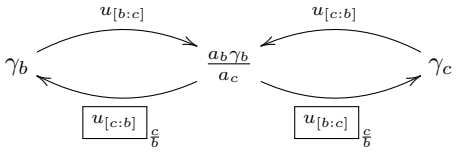
(b) $u_{[c:b]}\frac{a_b\gamma_b}{a_c} = \frac{c}{b}\gamma_b$,

(c) $u_{[c:b]}\gamma_c = \frac{a_b\gamma_b}{a_c}$,

(d) $u_{[b:c]}\frac{a_b\gamma_b}{a_c} = \frac{c}{b}\gamma_c$,

(e) $a_b^2 \cdot \frac{\gamma_b}{a_c^2} = \frac{c}{b}\gamma_c$。

下图总结了上述关系。



方框表示涉及一个额外的系数，该系数标注在方框外。

命题的证明 *6.18*。 首先注意到，(a) 蕴含 (b)，且 (c) 蕴含 (d)，这两点都利用了 $u_{[b:c]}u_{[c:b]} = \frac{c}{b}$。因此我们只需证明 (a) 和 (c)。

对于 (a)，我们只需计算可得

$$u_{[b:c]} \cdot \tfrac{\gamma_b}{a_b} \cdot a_c = u_{[b:c]}a_c \cdot \tfrac{\gamma_b}{a_b} = a_b \cdot \tfrac{\gamma_b}{a_b} = \gamma_b.$$

因此 $u_{[b:c]}\frac{\gamma_b}{a_b} = \frac{\gamma_b}{a_c}$，两边乘以 a_b 即可得到所需关系。

(c) 部分由 (a) 和命题 6.7(a) 立即得出。

最后，对于 (e)，我们只需计算：

$$a_b^2 \cdot \tfrac{\gamma_b}{a_c^2} = a_b \cdot \tfrac{a_b\gamma_c}{a_c^2} = a_b \cdot \frac{\left(\frac{a_b\gamma_c}{a_c}\right)}{a_c} = a_b \cdot \tfrac{u_{[c:b]}\gamma_c}{a_c} = a_b u_{[c:b]} \cdot \tfrac{\gamma_c}{a_c} = \tfrac{c}{b}a_c \cdot \tfrac{\gamma_c}{a_c} = \tfrac{c}{b}\gamma_c.$$

□

这里还有两个有用的事实：

命题 6.19. 假设 $b|c$ *and* $c|d$. 那么

(a) $u_{[b:c]} \cdot \frac{\gamma_d}{u_b} = \frac{c}{b} \cdot \frac{\gamma_d}{u_c}$,

(b) $u_{[d:b]} \cdot \frac{a_c\gamma_c}{a_d} = \frac{d}{c} \cdot \frac{a_b\gamma_b}{a_c}$.

证明. 对于 (a)，从 $u_c \cdot u_{[b:c]}\frac{\gamma_d}{u_b} = \frac{c}{b}u_b \cdot \frac{\gamma_d}{u_b} = \frac{c}{b}\gamma_d = u_c \cdot \frac{c}{b}\frac{\gamma_d}{u_c}$ 开始，其中第一个等号由命题 3.7 得出。所需的恒等映射由以下事实推出：我们处于乘以 u_c 是同构的范围内。

对于 (b)，我们写作

$$u_{[d:b]}\tfrac{a_c\gamma_c}{a_d} = u_{[d:c]}u_{[c:b]} \cdot \tfrac{a_c\gamma_c}{a_d} = u_{[c:b]} \cdot \tfrac{d}{c}\gamma_c = \tfrac{d}{c} \cdot \tfrac{a_b\gamma_b}{a_c}.$$

第一个等号由命题3.7(2) 得出，第二个由命题6.7(b) 得出，第三个由命题 6.7(c) 得出。

□

现在我们来完成尚未完成的证明：

命题的证明 *6.17*，第二部分。 首先考虑 (3) 中剩下的情形，并固定$s \le i \le k$。令 $b' = (b_1, \dots, b_{s-1})$ 和 $b'' = (b_{s+1}, \dots, b_k)$。我们有如下图表

$$\begin{array}{ccc} H^{3-\lambda_{b_s}-\lambda_{b_i}} & \xrightarrow{u_{[b_i:b_{s-1}]}} & H^{3-\lambda_{b_{s-1}}-\lambda_{b_s}} \\ {\scriptstyle u_{\underline{b'}}a_{\underline{b''}\setminus b_i}}\uparrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\uparrow{\scriptstyle u_{\underline{b'}\setminus b_{s-1}}a_{\underline{b''}\setminus b_i}} \\ H^{2s+1-\lambda_{\underline{b}}} & \xrightarrow{u_{b_i}} & H^{2s-1-\lambda_{\underline{b}}+\lambda_{b_i}}. \end{array}$$

这个图表是交换的，因为 $u_{[b_i:\,b_{s-1}]}u_{b_{s-1}} = \frac{b_{s-1}}{b_{s-1}\,b_i}(\cdot)u_{b_i} = u_{b_i}$ 根据命题3.7。根据命题 6.19(b)，我们有

$$u_{[b_i:b_{s-1}]} \cdot \tfrac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{a_{b_i}} = \tfrac{b_i}{b_s}\tfrac{a_{b_{s-1}}\gamma_{b_{s-1}}}{a_{b_s}}. \tag{6.19.1}$$

因此，交换方形给出

$$u_{b_i}\cdot\frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle}\cdot a_{\langle b_{s+1},\dots,b_i,\dots b_k\rangle}}=\frac{b_i}{b_s}\cdot\frac{a_{b_{s-1}}\gamma_{b_{s-1}}}{u_{\langle b_1,\dots,b_{s-2}\rangle}\cdot a_{\langle b_s,\dots,\widehat{b_i},\dots,b_k\rangle}}.$$

因为垂直映射将两侧的分数映射为式（6.19.1）中出现的对应分数。

对于情形 (4) 的剩余部分，先假设 $2\le s<k-1$ 并固定 $1\le i<s$。注意 $a_{b_i}=u_{[b_i:\ b_s]}u_{[b_s:\ b_{s+1}]}a_{b_{s+1}}$ 由命题 3.7。计算如下：

$$\begin{aligned}u_{[b_i:b_s]}u_{[b_s:b_{s+1}]}\frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle}a_{\langle b_{s+1},\dots,b_k\rangle}}&=u_{[b_i:b_s]}\cdot\frac{b_{s+1}}{b_s}\cdot\frac{\gamma_{b_{s+1}}}{u_{\langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle}a_{\langle b_{s+2},\dots,b_k\rangle}}\\&=\frac{b_{s+1}b_s}{b_sb_i}\cdot\frac{\gamma_{b_{s+1}}}{u_{\langle b_1,\dots,\widehat{b_i},\dots,b_s\rangle}a_{\langle b_{s+2},\dots,b_k\rangle}}.\end{aligned}$$

这两个等式分别由命题 6.18(d) 和6.19(a) 得出。现在将两边乘以$a_{b_{s+1}}$，得到

$$a_{b_i}\cdot\frac{a_{b_s}\gamma_{b_s}}{u_{\langle b_1,\dots,b_{s-1}\rangle}a_{\langle b_{s+1},\dots,b_k\rangle}}=\frac{b_{s+1}}{b_i}\cdot\frac{a_{b_{s+1}}\gamma_{b_{s+1}}}{u_{\langle b_1,\dots,\widehat{b_i},\dots,b_s\rangle}a_{\langle b_{s+2},\dots,b_k\rangle}}$$

注意，如果 $s=k-1$，那么对于任意 $1\le i\le k$，乘以 a_{b_i} 都会因次数原因而为零。因此，最后需要考虑的情形是 $1\le i=s\le k-1$ 和 $k\ge 3$（如果 $k=2$，则乘积也会因次数原因而为零）。接着，只需像上文第二步那样使用$a_{b_s}=a_{b_{s+1}}u_{[b_s:\ b_{s+1}]}$，即可得到所需的恒等式。□

6.20. 负锥的黑魔法。 这里给出一种启发式方法，用于处理负锥扭结部分中的元素。虽然可以将其转化为前几节中更严谨的处理方式来验证这一方法确实可行，但我们强调，我们不知道它为何可行的解释。

引入一个上同调次数为一的形式符号 Ω。也就是说，尽管群 $H^1(pt)$ 实际上为零，我们仍将 Ω 形式上视为属于该群。对于每个 $k\ge 2$、每个因子串 $b_1,\dots,b_k$，以及每个 $1\le s<k$，都有一个元素

$$\frac{\Omega}{u_{b_1}\cdots u_{b_s}a_{b_{s+1}}\cdots a_{b_k}}\in H^{2s+1-\lambda_{b_1}-\cdots-\lambda_{b_k}}\tag{6.20.1}$$

（注意，分母必须至少包含一个 u-类和一个 a-类），并且这些元素满足以下关系：

（1）上述元素的加法阶恰为 b_s，并且它生成$\mathbb{Z}$-模 $H^{2s+1-\lambda_b}\cong\mathbb{Z}/I_{b_s}$。（2）[逆黄金关系#1] 对于 $c|d$，有

$$u_d\cdot\frac{\Omega}{(u-\text{classes})u_ca_d(a-\text{classes})}=\frac{d}{c}\cdot\frac{\Omega}{(u-\text{classes})a_c(a-\text{classes})}.$$

(3) [逆黄金关系 #2] 对于 $c|d$，有

$$a_c\cdot\frac{\Omega}{(u-\text{classes})u_ca_d(a-\text{classes})}=\frac{d}{c}\cdot\frac{\Omega}{(u-\text{classes})u_d(a-\text{classes})}.$$

为了理解逆黄金关系，公式中标记为“u-类”的部分是若干个 u_i 的乘积，“a-类”也同样如此，唯一的条件是，分母中的项可以整理成（6.20.1）的形式。在每个等式中，括号内的项在等式两边相同，唯一的变化是未加括号的部分。要理解为什么称其为逆黄金关系，可以设想将左边的第一个因子移入右边的分母，然后利用

黄金关系来比较两个分母。这样做并不允许，因为右边就不再是（6.20.1）的形式；不过，按照上文给出的方式重写等式，就可以解决这个问题。

将其转化为我们严谨的论述，

$$\gamma_b = \frac{\Omega}{u_b a_b}.$$

因此，例如，先前称为 $\frac{a_c\gamma_c}{u_b a_d}$ 的 $b|c|d$ 类，在新记号中将写作 $\Omega\, u_b u_c a_{d_0}$。练习将命题 6.17中推导出的关系改写为新记号，并验证它们都可以由上面的 (1)–(3) 推导出来，这很有启发性。

注 6.21。人们很容易想到引入类似 (6.20.1) 的表达式，但不要求 b 是因子串，然后利用分母中的黄金关系，并酌情将整的因子移入分子，从而构造出单个“逆黄金关系”。然而遗憾的是，我们尚未找到一种这样做而不产生矛盾的方法。

7. Maps between linear sphere complexes

现在我们开始研究 $H^\star(pt)$ 的不规则区域。由于 $H^{\lambda_d-\lambda_c+r} = [S^{\lambda_c}, S^{r+\lambda_d}]$，这等价于研究球面之间映射的同伦类，其中 λ_c 和 λ_d 都不只是一个整数。因为我们允许 1 出现在 c 和 d中，所以这里可以归结为 $r \in \{0,1\}$。

回顾第 5 节，复形 $L(c)$ 是 S^{λ_c}的一个小而方便的模型。因此，我们需要研究 $[L(c)\,\Sigma^r L(d)]$。本节将介绍处理这一问题的工具，并将大部分工作集中在 $r=0$、c 和 d 长度相同的情形。从这个特殊情形中，我们已经可以看到其中的复杂性以及一些有趣的推论。

在深入探讨同调代数之前，我们需要先介绍一种对整数进行的运算，它将证明很有用。

7.1. 整数的冒号运算。回顾一下，若 I 和 J 是交换环 R中的理想，则 $I\colon J = \{r \in R \,|\, rJ \subseteq I\}$。当 $R=\mathbb{Z}$和 $x,\ y \in \mathbb{Z}_{>0}$时，简便起见，我们将 $x\colon y$ 记作 $(x)\colon(y)$ 的正生成元。注意，这类似于用 (x,y)（最大公约数）表示理想 (x,y) 的正生成元。以下事实很容易验证：

命题 7.2. 设 $x,\ y,\ z \in \mathbb{Z}_{>0}$。
(a) $x\colon y = \frac{x}{(x,y)}$. *(b)* $x\colon y = x\colon(x, y)$. *(c)* $x\colon 1 = x$, *and* $1\colon x = 1$. *(d)* $x\colon y = xz\colon yz$. *(e)* $(x\colon y)\colon z = x\colon(yz)$. *(f) If* $(y, z) = 1$ 那么 $(x\colon y)z = xz\colon y$. *(g)* $x\colon(y\colon z) = {}^{xz}\!:_{z}\,{}^{y}\!:_{y} = (xy,xz)$ (y,xz). *(h)* $\frac{x}{x}\,{}^{x}\,{}^{y}\!:\!:(y\colon z) = (y,xz)\ (x,y)$ (y,z). *(i)* $\frac{x}{x}\,{}^{x}\,{}^{y}\!:\!:(yz) = (x,yz)\ (x,y) =$ $(x\colon y, z)$. *(j)* 如果 $z|y$ 那么 $[x\colon \frac{y}{z}, z] = z(x\colon y)$.

证明。这些内容我们大多留给读者，但为了说明一般思路，我们将证明 (g)。为此，只需写出

$$x:(y:z) = \tfrac{x}{(x,\frac{y}{(y,z)})} = \tfrac{x(y,z)}{(x(y,z),y)} = \tfrac{(xy,xz)}{(xy,xz,y)} = \tfrac{(xy,xz)}{(y,xz)}$$

（其中，在第二个等式中，我们将分子和分母乘以 (y,z)），同样地

$$\tfrac{xz:y}{z:y} = \tfrac{\frac{xz}{(xz,y)}}{\frac{z}{(z,y)}} = \tfrac{x(z,y)}{(xz,y)} = \tfrac{(xz,xy)}{(xz,y)}.$$

□

以下结果将特别有用：

推论 7.3. 若 $d_1|d_2$ 则 $d_1:c$ 整除 $d_2:c$ 且 $(\frac{d_2:d_1}{c:}) \cdot d_1 = \frac{d_2}{(c,d_1)(c,d_2)}$。

证明。记 $d_2 = d_1u$。则由命题 7.2(g)，我们有

$$(d_1:c)\cdot(u:(c:d_1)) = (ud_1):c = d_2:c.$$

由于 $u:(c:d_1)$ 是整数，$d_1:c$ 整除 $d_2:c$。命题 7.2(g) 还告诉我们

$$\left(\tfrac{d_2:c}{d_1:c}\right)d_1 = \left(\tfrac{(ud_1):c}{d_1:c}\right)d_1 = \tfrac{(uc,ud_1)}{(c,ud_1)}\cdot d_1 = \tfrac{(uc,d_2)}{(c,d_2)}\cdot d_1 = \tfrac{(d_1uc,d_1d_2)}{(c,d_2)} = \tfrac{(d_2c,d_1d_2)}{(c,d_2)}.$$

□

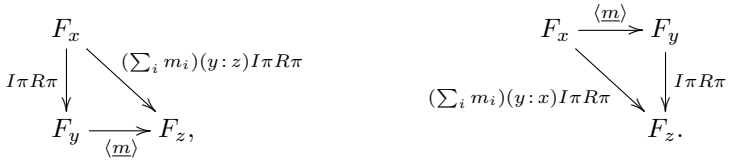
7.4. L复形之间的映射。回顾 (3.3.1)，每个映射 $f\colon F_d \to F_e$ 都可以唯一地写成 $g_d \mapsto \sum_{i=0}^{(d,e)-1} m_i(t_*)^i p_* p^* g_e$ 的形式，其中 $m_i \in \mathbb{Z}$ 唯一；我们将此映射记作 $\langle m\rangle$。和 $\sum_i m_i$ 在论证中频繁出现——命题 3.4 中我们已经见过这一点——因此，为这个不变量取一个名称会很有用：我们称它为映射 $\langle m\rangle$的范数性。这个不变量取决于自由生成元的选择；例如，改变 g_d 的符号会改变范数性的符号。但范数性的绝对值与选择无关。为此，注意到 $F_d(pt) \to F_e(pt)$ 是一个映射 $\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$（在选定生成元后）；因此，1 的像的绝对值与任何选择都无关。使用生成元 $(\pi_d)_*g_d$ 和 $(\pi_e)_*g_e$，可以算出前者被映为 d 的乘积：e、范数性以及后者（例如，可使用下面命题 7.5(a) 左侧图表中的 $x=1$）。

我们将经常用到，$I\pi R\pi$的范数性：$F_d \to F_e$ 等于 $(d,\ e)$。这是因为 $(\pi_d)_*g_d$ 经由 $I\pi R\pi$ 映射到 $(\pi_d)_*(\pi_d)^*(\pi_e)_*g_e = d\cdot(\pi_e)^*g_e$，因此范数性等于 $\frac{d}{d:e} = (d,\ e)$。

复形映射 $L(c) \to L(d)$ 由一组以规定方式相互配合的 $\langle m\rangle$ 映射构成。在详细探讨这一点之前，我们先记录一些有用的基本事实。

命题 7.5。

(a) 以下两个图表交换：



（一个有用的助记符是：这些公式中的冒号始终表示“中间指标：与 $I\pi R\pi$ 相对的指标”。）

(*b*) 交换方形

$$\begin{array}{ccc} F_{c_2} & \xrightarrow{\langle m\rangle} & F_{d_2} \\ {\scriptstyle I\pi R\pi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle I\pi R\pi} \\ F_{c_1} & \xrightarrow[\langle Q\rangle]{} & F_{d_1} \end{array}$$

当且仅当$(\sum_i Q_i)\cdot(c_1\colon\ d_1) = (\sum_i m_i)\cdot(d_2\colon\ c_2)$时交换。

(c) 图表

$$\begin{array}{ccc} & & F_{d_2} \\ & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle I\pi R\pi} \\ F_{c_1} & \xrightarrow[Q\cdot I\pi R\pi]{} & F_{d_1} \end{array}$$

存在提升当且仅当 $d_2\colon\ c_1$ 整除 Q。

证明。 (b) 和 (c) 部分可直接由 (a) 得出。(a) 部分只需计算。例如，在左侧图表中，复合映射由下式给出：

$$g_x \mapsto (\pi_x)^*(\pi_y)_* g_y \mapsto (\pi_x)^*(\pi_y)_* \sum_i m_i (t_*)^i p_* p^* g_z = \sum_i m_i (\pi_x)^*(\pi_y)_*(t_*)^i p_* p^* g_z.$$

关系 $\pi_y \circ t = \pi_y$ 意味着，可以将公式中的 t_* 因子完全省略。这就得到了答案的 $(\sum_i m_i)$ 部分。接下来利用 $\pi_y \circ p_{([y,z]\to y)} = \pi_z \circ p_{([y,z]\to z)}$，于是

$$\begin{aligned} (\pi_x)^*(\pi_y)_*(p_{([y,z]\to y)})_*(p_{([y,z]\to z)})^* &= (\pi_x)^*(\pi_z)_*(p_{([y,z]\to z)})_*(p_{([y,z]\to z)})^* \\ &= \tfrac{[y,z]}{z}\cdot(\pi_x)^*(\pi_z)_* \\ &= \tfrac{y}{(y,z)}\cdot(\pi_x)^*(\pi_z)_*. \end{aligned}$$

因此，我们已经证明了 $\langle m\rangle \circ I\pi R\pi = (\sum_i m_i)\cdot(y\colon\ z) I\pi R\pi$。

这段分析写出来比思考起来更困难：只要盯着图表

$$\begin{array}{ccccc} & & \Theta_{[y,z]} & \xrightarrow{p} & \Theta_z \\ & & \downarrow{\scriptstyle p} & & \\ & & \Theta_y & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle \pi} & & \\ \Theta_x & \xrightarrow{\pi} & \Theta_1 & & \end{array}$$

通常就足以回想起论证过程。

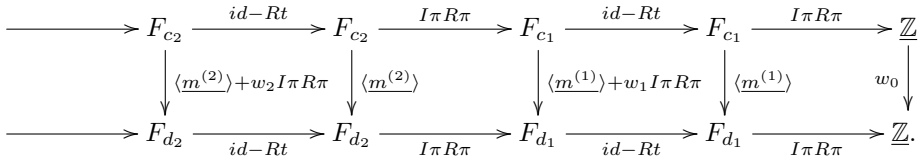
(a) 中第二个三角形的分析完全类似。 □

注 7.6。 注意，映射 $\mathbb{Z} \xrightarrow{I\pi_d} F_d$ 可以解释为 $I\pi_d R\pi_1\colon\ F_1 \to F_d$(因为 $\pi_1 = id$)，因此是一个“$I\pi R\pi$”映射。类似地， $R\pi_d$ 也是这种映射的一个例子。我们对命题 7.5 的一些应用将涉及这些情形，即 $F_?$ 模的某个指标等于 1。

现在我们可以着手构造复形映射 $L(c) \to L(d)$，其中 c 和 d 是长度相同的因子串。要从零次开始向上构造这样的映射

，我们必须为这些映射指定整数 w_0，w_1，w_2，... 以及元组 $m^{(1)}$，$m^{(2)}$，...，如下所示：

(7.6.1)



命题3.4(b) 表明，含有 $id-Rt$ 的交换方形必定具有上述形式，并且根据构造它们是可交换的。令 M_i 为 $\langle m^{(i)}\rangle$ 的范数性。于是根据命题7.5(b)，其余交换方形可交换当且仅当

$$M_i \cdot (d_i : c_i) = \Big(M_{i-1} + w_{i-1}(c_{i-1}, d_{i-1})\Big) \cdot (c_{i-1} : d_{i-1}) \tag{7.6.2}$$

对所有 $i \geq 1$ 均成立，其中 M_0 解释为 0，而 c_0 和 d_0 解释为 1。注意，$i = 1$ 条件就是 $M_1 \cdot {}^{d_1}\!/_{(c_1,\ d_1)} = w_0$。

所有这些 w_i 和 $m^{(i)}$ 放在一起似乎信息量大得令人望而生畏，但我们可以迅速大幅简化。命题7.5和3.4 的各个部分只涉及 m-序列的范数性，从不涉及除此之外的任何信息。由此得到：

命题7.7。设有两个复形映射 $L(c) \to L(d)$，一个由数据 $(m^{(i)}, w_i)$ 指定，另一个由 $(m'^{(i)}, w'_i)$ 指定。若对所有 i，$w_i = w'_i$ 且 $\sum m^{(i)} = \sum (m')^{(i)}$，则这两个映射链同伦。

证明。通过取两个映射之差，可将问题归结为由数据（$m^{(i)}$，w_i）所指定的映射的情形，其中所有 $w_i = 0$ 以及所有 $\sum m^{(i)} = 0$。通过归纳构造一个链同伦，可以发现其余每个映射均可取为零，而剩下的那些则由命题 3.4(a) 自动保证。□

由命题 7.7 可知，我们可以把与数据（$m^{(i)}$，w_i）相关联的链映射替换为具有数据（$M_i p_* p^*$，w_i）的映射，其中 $M_i = \sum m^{(i)}$。因此，要指定一个链同伦类，只需指定整数 w_i 和 M_i（对所有 $i \geq 0$），并满足（7.6.2）中的条件。

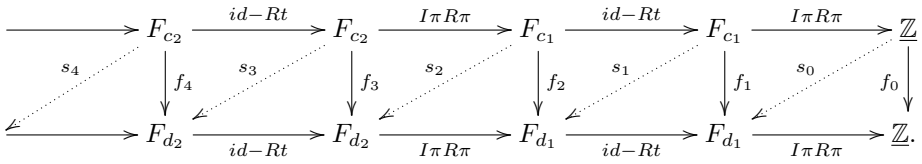
命题 7.8. 设 c 与 d 是长度同为 k 的因子串。由数据 $(M_i,\ w_i)$ 所指定的链映射为零伦，当且仅当

- $(c_1, d_1) | M_1$，
- $(d_{i+1} : c_i)(d_i, c_i) = \left(\frac{d_{i+1} : c_i}{d_i : c_i}\right) d_i$ *divides* $M_i + (c_i, d_i) w_i$ *for* $1 \leq i \leq k-1$, *and*
- $M_k + (c_k, d_k) w_k = 0$.

（注意，第二个条件意味着对于 $1 \leq i \leq k-1$，有 $(c_i, d_i) | M_i$。特别地，当 $k \geq 2$ 时，第一个条件是多余的。）

证明。设 $K = L(c)$ 与 $L = L(d)$，并令 $f\colon K \to L$ 为我们的映射。我们试图从 $i = 0$ 开始，归纳地构造链同伦 $s_i\colon K_i \to L_{i+1}$。这些

映射如下方图表所示：



每个 f_i 映射的形式见（7.6.1）。

映射 s_0 是跨越 $I\pi R\pi$ 的 f_0的一个提升。根据命题7.5(c)（取 $\mathbb{Z}=F_1$和 $f_0=w_0I\pi_1R\pi_1$），映射 s_0 存在当且仅当 $d_1|w_0$。由于 $w_0=M_1{}_{d_1(c_1,\ d_1)}$由（7.6.2）可知，这等价于（$c_1$，$d_1$）$|M_1$。

假设上述条件成立，接下来考虑 s_1。这需要是跨越 $id-Rt$ 的映射 $f_1-s_0I\pi R\pi$的一个提升。与命题3.4(a)的证明一样，这样的提升存在当且仅当 $0=R\pi\circ(f_1-s_0I\pi R\pi)$。但右边我们有

$$R\pi f_1-R\pi s_0I\pi R\pi=f_0I\pi R\pi-f_0I\pi R\pi=0$$

因此，该条件自动满足。

继续以这种方式进行，s_2 需要是以下元素在 $I\pi_{d_1}R\pi_{d_2}$ 上的一个提升：

$$f_2-s_1(id-Rt)=f_2-(id-Rt)s_1=f_2-(f_1-s_0I\pi_1R\pi_{c_1}).$$

注意，$f_2-f_1=w_1I\pi_{d_1}R\pi_{c_1}$ 要使用（7.6.1）中 f_i 映射的公式。根据命题 7.5(a)，$s_0I\pi_1R\pi_{c_1}$ 是 $I\pi_{d_1}R\pi_{c_1}$的倍数，且该倍数是 s_0的范数性乘以 1：$d_1=1$。最后注意，$I\pi_1R\pi_{d_1}s_0=w_0$意味着 s_0 的范数性等于 $\frac{w_0}{d_1}=\frac{M_1}{c_1}{}_{(,\ d_1)}$。综合以上各点可知，我们需要一个以下元素的提升：

$$f_2-s_1(id-Rt)=(w_1+\tfrac{M_1}{(c_1,d_1)})I\pi R\pi.$$

命题 7.5(c)指出，存在该提升当且仅当 d_2：c_1 整除 $w_1+{}^{M_1}{}_{(c_1,d_1)}$，此时根据命题 7.5(a)，$s_2$的范数性将等于商空间 ${}^{1}{}_{d_2}$：$c_1(w_1+{}^{M_1}{}_{(c_1,d_1)})$ =1 $(d_2:c_1)(c_1,d_1)(M_1+w_1(c_1,d_1))$。

其余论证完全相同，重复这两个基本步骤即可。当 s_i 在 i 为奇数时存在的条件总是自动满足；但当 i 为偶数时，则会导出一个整除性陈述：s_{2i} 的范数性需要等于$1_{(d_{i+1}:c_i)(c_i,d_i)}\cdot(M_i+(c_i,d_i)w_i)$，而整除性陈述要求该值为整数。论证与 s_2的情形完全一样，并使用7.6.2 中的公式，将 $M_{i-1}+w_{i-1}(c_{i-1},d_{i-1})$表示为 M_i的形式。

在复形顶端，s 项用尽时，还需要满足一个额外条件才能使三角形交换：需要有 $f_{2k}=s_{2k-1}(id-Rt)$。这里的分析与一般的“偶数”情形完全相同，但此处不是要求某个整数能被整除（以得到一个提升），而是要求它实际上等于零。这就是 $M_k+(c_k,\ d_k)w_k=0$ 条件。□

注 7.9. 上面的命题中出现的表达式 $M_i+(c_i,d_i)w_i$ 有一个简单的解释：它恰好是次数 $2i$ 上复形映射的范数性。还有另一种解释：

命题 7.10。 设 $L(c)\to L(d)$ 是由数据(M,w)给出的复形映射。那么映射 $H_{2i}L(c)\to H_{2i}L(d)$ 等于（相差一个符号）乘以 $(c_i:d_i)\cdot(M_i+w_i(c_i,d_i))$。

证明。 根据推论 4.13 和命题 5.1 我们已经计算出 $H_{2i}L(c) \cong \mathbb{Z}/I_{c_{i+1}}$对于 $i \leq k$, 以及 $H_{2i}L(c) \cong \mathbb{Z}$ 对于 $i = k$ (以及同样对于 $L(d)$)。在这两种情况下，元素 $\pi_*(g_{c_i})$ 都是同调 $\mathbb{Z}$-模的生成元。因此我们需要计算复合映射

$$\underline{\mathbb{Z}} = F_1 \xrightarrow{I\pi} F_{c_i} \xrightarrow{f_{2i}} F_{d_i}$$

其中 f是我们的复形映射。由命题 7.5(a)，这等于 $(c_i\colon d_i)N \cdot I\pi$，其中 N是 f_{2i}的范数性。但 $N = M_i + w_i(c_i,\ d_i)$，于是结论成立。 □

此时，我们可以描述一种计算群 $[S^{\lambda_c}, S^{\lambda_d}]$ 的方法，其中c 和 d 具有相同的长度 k。令 Z 为满足条件的元组集合

$$(M_1, M_2, \ldots, M_k, w_0, w_1, \ldots, w_k) \in \mathbb{Z}^{2k+1}$$

7.6.2）的条件。由于其中一个关系是 $w_0 = M_1 \ {}^{d_1}\!(c_1,\ d_1)$ 我们从现在起直接舍去 w_0。那么 Z 将是秩为 $k+1$的自由阿贝尔群。由于命题 7.8 中的关系具有特殊形式，改用坐标会更方便，令 $M_i' = M_i + w_i(c_i,\ d_i)$。因此，我们考察的是满足以下关系的元组 $(M_i',\ w_i)^{1\leq i\leq k}$

$$\Big(M_i' - w_i(c_i, d_i)\Big)(d_i : c_i) = M_{i-1}' \cdot (c_{i-1} : d_{i-1})$$

对于 $i \geq 2$。

命题7.8给出 k 挠条件和一个整条件。将这些条件编码到映射

$$\Phi\colon Z \to \mathbb{Z}/(c_1, d_1) \oplus \left[\bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Z}/(\tfrac{d_{i+1} : c_i}{d_i : c_i} \cdot d_i)\right] \oplus \mathbb{Z}$$

将 (M', w) 映射到 $(M'_1, \overline{M'}_1, \overline{\ldots}, M'_{k-1}, \overline{M'_k})$。（注意，前两个坐标并不相同，因为模约化发生在不同的群中。当 $k \geq 2$ 时，我们可以舍弃 $\mathbb{Z}/(c_1, d_1)$ 这一项，正如前面所述。）该映射的像为 $[S^{\lambda_c}, S^{\lambda_d}]$。在任何具体情况下，都可以通过算法计算这个像（将适当的矩阵化为 Smith 标准形），但要以某种一般性的方式做到这一点似乎很棘手。

例 7.11。 我们来看 $k = 1$ 情形。此时 Z 是由对 (M_1', w_1) 构成的集合，没有任何关系。我们的映射 Φ 是

$$Z \to \mathbb{Z}/(c_1, d_1) \oplus \mathbb{Z}, \quad (M_1', w_1) \mapsto (\overline{M'}_1, M_1').$$

像中的元素要成为挠元，必须满足 $\overline{M_1'} = M_1 + (c_1,\ d_1)w_1 = 0$，这意味着 $(c_1,\ d_1)|M_1$，因此$M'_1 = 0$。所以像中不含非零挠元，因而同构于 $\mathbb{Z}$。这得到了命题 3.5中的计算结果。

例7.12。 接下来我们考察 $k = 2$，因此 Z 由满足线性条件的 4 元组 $(M_1',\ M_2',\ w_1,\ w_2)$ 组成

$$(M_2' - w_2(c_2, d_2)) \cdot (d_2 : c_2) = M_1' \cdot (c_1 : d_1).$$

我们的映射为

$$\Phi\colon Z \to \mathbb{Z}/(\tfrac{d_2 : c_1}{d_1 : c_1} \cdot d_1) \oplus \mathbb{Z}, \qquad (\underline{M'}, \underline{w}) \mapsto (\overline{M'}_1, M_2').$$

我们必须有 M_1'为（d_2：c_2）：（c_1：d_1）的倍数，但随后 w_2可以取任意整数，而 M_2'也就随之确定。特别地， Z包含满足 M_2'的元组

非零。因此， Φ 的像是 $\mathbb{Z}$ 与像中的所有挠元所构成部分的直和。若要对后者有所贡献，我们必须有 $M_2' = 0$ ，这意味着$-w_2 d_2 = M_1'(c_1 : d_1)$ 。因此， M_1'是 $d_2 : (c_1 : d_1)$ 的倍数。于是， $\operatorname{Im}\Phi$中的挠元是一个循环群，其阶为

$$\frac{\left(\frac{d_2 : c_1}{d_1 : c_1}\right) d_1}{d_2 : (c_1 : d_1)} = \frac{(d_2 : c_1)(c_1, d_1)}{d_2 : (c_1 : d_1)} = \frac{(c_1, d_1 d_2)}{(c_1, d_2)}.$$

其中我们应用命题7.2(h) 化简第二个等式中的冒号表达式。因此 $H^{\lambda_{d_1}+\lambda_{d_2}-\lambda_{c_1}-\lambda_{c_2}}(pt) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/\left(\frac{(c_1, d_1 d_2)}{(c_1,\ d_2)}\right)$。

例 7.13。 对于 $k = 3$群 Z由满足以下两个条件的元组 $(M_1',\ M_2',\ M_3',\ w_1,\ w_2,\ w_3)$ 构成

$$(M_2' - w_2(c_2, d_2)) \cdot (d_2 : c_2) = M_1' \cdot (c_1 : d_1)$$
$$(M_3' - w_3(c_3, d_3)) \cdot (d_3 : c_3) = M_2' \cdot (c_2 : d_2).$$

映射 $\Phi : Z \to \mathbb{Z}/\left(\frac{d_2 : d_1}{c_1 : c_1} \cdot d_1\right) \oplus \mathbb{Z}/\left(\frac{d_3 : d_2}{c_2 : c_2} \cdot d_2\right) \oplus \mathbb{Z}$由 $(M',\ w) \mapsto (\overline{M'}_1,\ \overline{M'}_2,\ M_3')$ 给出。像的扭结部分由元素 $(M'_1,\ M_2')$ 组成，其中 M_2'是 $\overline{d_3}$ 的倍数：$(c_2 : d_2)$，且 d_2整除 $M_1'(c_1 : d_1) - M_2'(d_2 : c_2)$。即使在 ℓ-局部情形下，试图给出这个群同构类型的闭式表达似乎也很复杂。

上述方法确实能在以下特殊情形下给出完整的计算：

命题 7.14。 设 c 和 d 是长度相同的因子串k，并且对于 $2 \le i \le k$，有 $(d_i d_{i-1}, c_{i-1}) = (d_i, c_{i-1})$。那么 $H^{\lambda_d - \lambda_c} \cong \mathbb{Z}$。 *[特别要注意，若对于 $2 \le i \le k$，有 $c_{i-1} | d_i$，则这些条件成立。]*

证明。 首先注意到，我们的假设意味着

$$d_i : (c_{i-1} : d_{i-1}) = \frac{(d_i c_{i-1}, d_i d_{i-1})}{(c_{i-1}, d_i d_{i-1})} = \frac{(d_i c_{i-1}, d_i d_{i-1})}{(c_{i-1}, d_i)} = \left(\frac{d_i : c_{i-1}}{d_{i-1} : c_{i-1}}\right) \cdot d_{i-1}.$$

这里，第一个等式用到了命题 7.2 (g)，第二个等式用到了我们的假设，第三个等式用到了推论 7.3 。这个恒等式将在我们的论证中发挥重要作用。为方便起见，令 N_{i-1} 表示这个公数。由于

$$N_{i-1} = \frac{d_i (c_{i-1}, d_{i-1})}{(c_{i-1}, d_i)} = (d_i : c_{i-1}) \cdot (c_{i-1}, d_{i-1})$$

注意到 $(c_{i-1}, d_{i-1}) | N_{i-1}$。方便起见，令 $N_k = (c_k, d_k)$。

使用与上文相同的记号，我们有一个自由阿贝尔群 Z 和一个映射Φ： $Z \to \mathbb{Z}/(c_1, d_1) \oplus [\bigoplus_{i=1}^{k-1} \mathbb{Z}/N_i] \oplus \mathbb{Z}$，其像为 $H^{\lambda_d - \lambda_c} = [S^{\lambda_c}, S^{\lambda_d}]$。像的扭结部分由形如 $(M'_1, M'_1, \ldots, M'_{k-1}, M'_k)$ 的元组组成，其中$M'_k = 0$，且 M'_i个整数满足以下关系

$$(*) \qquad (M_i' - w_i(c_i, d_i)) \cdot (d_i : c_i) = M_{i-1}' \cdot (c_{i-1} : d_{i-1}).$$

我们将通过递减归纳证明， $M'_k = 0$蕴含 M'_i是 N_i 的倍数，对所有 i成立。对于 $i = k$ ，这是平凡的，因此假设 M'_i 是 N_i 的倍数，其中$i \ge 2$。于是我们知道 M'_i也是(c_i, d_i)的倍数。利用(*)，这蕴含$M'_{i-1} \cdot (c_{i-1} : d_{i-1})$是$(c_i, d_i) \cdot (d_i : c_i) = d_i$的倍数。因此

$$M'_{i-1} \in (d_i : (c_{i-1} : d_{i-1})) = (N_{i-1}),$$

后一等式来自第一段。这正是我们所要的。

由此 $M'_k = 0$ 可知， Φ 的其他坐标全为零，这意味着 Φ的像中没有挠元。□

注 7.15 （ E 算子）。 我们将以下内容留作读者的一道拓展练习。与上文一样，固定长度相同的因子串 c 和 d，其长度为 k。上述分析表明，由（M, w）表示的链映射 $f\colon L(c) \to L(d)$在 $H^{\lambda_d - \lambda_c}$ 中是挠元，当且仅当 $M_k + w_k(c_k, d_k) = 0$。这一条件等价于存在某个 $A\colon F_{c_k} \to F_{d_k}$使得 $f_{2k} = A(id - Rt)$；这又等价于说， f 与一个在次数 $2k$ 处为零的映射链同伦（使用在最高次数处为 A 、其余处均为零的链同伦）。因此， $H^{\lambda_d - \lambda_c}$ 的挠子群同构于由链同伦类组成的集合，其中的映射$L(c) \to L(d)$在最高次数处为零。

现在假设 c 和 d 分别是长度为 $k+1$的因子串 c' 和 d' 的初始段。映射 $f\colon L(c) \to L(d)$ 在次数 $2k$ 上为零，因此只需将 Ef在次数 $2k+1$和 $2k+2$上定义为零，就可直接将其扩展为映射 $Ef\colon L(c') \to L(d')$。这一扩展保持链同伦不变，因此得到一个映射

$$E\colon \operatorname{tors} H^{\lambda_d - \lambda_c} \to \operatorname{tors} H^{\lambda_{d'} - \lambda_{c'}}.$$

运用我们已发展的技巧，可以通过一个简单的论证证明这实际上是单射。虽然这里不再进一步探讨这个算子，但它会在第 8.6 节中简要出现。

7.16. 计算整数像。作为本节前面工作的一个应用，我们可以完整计算 $H^\star(pt; \mathbb{Z}) \to H^\star(pt; \mathbb{Q})$ 的像。回忆一下，陪域是 $\mathbb{Q}[u_d^{\pm 1}\colon d|n, d < n]$。由于多重分次，该像由类 $\frac{u_{d_1}\cdots u_{d_s}}{u_{c_1}\cdots u_{c_k}}$ 的某些整数倍生成，其中因子 d 和 c可任意选取。我们的任务是精确确定这些整数因子。注意，由于 $u_1 = 1$ ，我们可以在 c 或 d 后面补上 1，而不改变问题，因此总可以假设 c 和 d 长度相同。

设 $c = (c_1, \dots, c_k)$ 和 $d = (d_1, \dots, d_k)$ 是两个正整数列表。将它们并排排列起来会很有帮助。按照惯例，令$c_0 = d_0 = 1$。递归地定义以下整数：

$$Y_0 = c_0, \quad Y_j = \Big((c_j Y_{j-1} : d_j), c_j \Big).$$

此过程在 Y_k 处终止，并令 $Y_{c,d} = Y_k$。

这有点难以理解，我们来看几个具体例子：

$$k = 1\colon \quad Y_{c,d} = (c_1 c_0 : d_1, c_1) = (c_1 : d_1, c_1) = (c_1 : d_1)$$

$$k = 2\colon \quad Y_{c,d} = \Big(\big(c_2 (c_1 : d_1, c_1) \big) : d_2, c_2 \Big).$$

即使 c_i 和 d_i 都是固定素数 ℓ 的幂，我们也不知道整数 $Y_{c,d}$ 的简单描述。不过，我们确实有一种非递归描述。在下列数组中，考虑从 1 出发的路径，且每一步只能是向右移动（R）、向右上移动（UR）或向下移动（D）：

$$\begin{array}{ccccccc} & d_1 & & d_2 & \cdots & d_k \\ 1 & & c_1 & & c_2 & \cdots & c_k \end{array}$$

称一条路径为**允许路径**，如果它从 1 开始，并且使用上述类型的步骤。对每条允许路径，关联一个整数，该整数由沿路径遇到的所有元素相乘得到。例如，$c_1 c_2 \cdots c_k$和 $d_1 d_2 c_2 c_3 d_4 d_5 \cdots d_k$是两个这样的整数。我们有以下公式：

命题 7.17。$Y_{c,\ d} = (E)\ (E,\ F)$ 其中，E 是所有对应于终点为 c_k 的允许路径的整数所构成的集合，F 是所有对应于终点为 d_k 的允许路径的整数所构成的集合，所有括号均表示最大公因数。

例如，当 $k = 2$ 时，我们有 $E = (c_1c_2,\ d_1c_1c_2,\ d_1d_2c_2,\ c_1d_2c_2) = (c_1c_2,\ d_1d_2c_2)$，并且 $F = (c_1d_2,\ d_1c_1d_2,\ d_1d_2) = (c_1d_2,\ d_1d_2)$，等等

$$Y_{(c_1,c_2),(d_1,d_2)} = \frac{(c_1c_2,\ c_2d_1d_2)}{(c_1c_2,\ c_1d_2,\ d_1d_2)}.$$

命题 7.17 的证明。回忆一下，对所有 $j \geq 1$，都有 $Y_0 = (1)$ 和 $Y_j = ((c_jY_{j-1} \colon d_j)\ c_j)$。令 E_j 和 F_j 如命题陈述所述，但针对截断序列 $(c_1,\ \ldots,\ c_j)$ 和 $(d_1,\ \ldots,\ d_j)$。我们将通过归纳法证明 $Y_j = (E_j)\ (E_j,\ F_j)$。基例 $j = 0$ 显然成立。假设结论对 Y_{j-1} 成立，则有

$$c_jY_{j-1} \colon d_j = \frac{\frac{c_j(E_{j-1})}{(E_{j-1},F_{j-1})}}{\left(\frac{c_j(E_{j-1})}{(E_{j-1},F_{j-1})},d_j\right)} = \frac{(c_jE_{j-1})}{(c_jE_{j-1}, d_jE_{j-1}, d_jF_{j-1})}$$

因此

$$\begin{aligned} Y_j = (c_jY_{j-1} \colon d_j, c_j) &= \left(\frac{(c_jE_{j-1})}{(c_jE_{j-1}, d_jE_{j-1}, d_jF_{j-1})},\ c_j\right) \\ &= \frac{(c_jE_{j-1}, c_j^2E_{j-1}, c_jd_jE_{j-1}, c_jd_jF_{j-1})}{(c_jE_{j-1}, d_jE_{j-1}, d_jF_{j-1})} \\ &= \frac{(c_jE_{j-1}, c_jd_jF_{j-1})}{(c_jE_{j-1}, d_jE_{j-1}, d_jF_{j-1})}. \end{aligned}$$

在最后一个表达式中，简单检查可知，分子中的元素与集合 E_j 具有相同的最大公约数，而分母中的元素与 $E_j \cup F_j$ 具有相同的最大公约数。□

推论 7.18. 假设 c 和 d 的长度相同，均为 k。那么 $Y_{c,\ d} = 1$ 若以下两个条件之一成立：
(1) 对每个 $1 \leq j \leq k$，都有 $c_jc_{j+1}\cdots c_k | d_jd_{j+1}\cdots d_k$；*(2)* $c_{k-1}c_k | d_k$。

证明。考虑一条以 d_k 结尾的允许路径 P。这条路径的尾部由若干个 c_i（可能是 $c_0 = 1$）后接 $d_{i+1}d_{i+2}\cdots d_k$ 构成。令 P' 为由 P 得到的路径，即将其尾部替换为 $c_ic_{i+1}\cdots c_k$。若假设 (1) 成立，则 P' 对应的整数整除 P 对应的整数。因此（采用命题 7.17 中的记号），F 中的每个元素都是 E 中某个元素的倍数，因此 $(E,\ F) = (E)$ 且 $Y_{c,\ d} = 1$。

当假设 (2) 成立时，我们采用类似的论证。任意路径 P 都会以 $c_{k-1}d_k$ 或 $d_{k-1}d_k$ 结束。若我们在第一种情况下用 $c_{k-1}c_k$ 替换结尾、在第二种情况下用 $d_{k-1}c_{k-1}c_k$ 替换结尾来构造 P'，那么假设 (2) 意味着 P' 对应的整数整除 P 对应的整数（注意，该假设意味着 $c_k | d_k$）。□

注 7.19。若 ℓ 是素数，则 $c = (\ell^3,\ \ell^3,\ \ell^4)$ 和 $d = (\ell,\ \ell,\ \ell^7)$ 是一个满足假设 (2) 但不满足 (1) 的例子。

称 $H^\star(pt;\mathbb{Q})$ 中的一个元素为**整的**，如果它位于 $H^\star(pt;\mathbb{Z})$ 的像中。我们有以下关于整元素的结果：

命题 7.20. 设 $c=(c_1,\dots,c_k)$ 与 $d=(d_1,\dots,d_k)$ 为 n 的两个因子列表。记 $u_c=\prod_i u_{c_i}$，并对 u_d 同样处理。*(a)* 若 c 和 d 是因子串，则倍数 $r\cdot\frac{u_d}{u_c}$ 是整的，当且仅当 r 是 $Y_{c,d}$的倍数。*(b)* 对任意的 c,d，倍数 $r\cdot\frac{u_d}{u_c}$ 是整的，当且仅当 r 是$Y_{c',d'}$的倍数，其中 c' 和 d' 是与 c 和 d相关联的因子串。

在给出上述结果的证明之前，我们先讨论几个例子。请记住，我们会隐式地添加 u_1 项，使 c的数量与 d的数量相同。利用命题 7.17 可得，对于因子串 c和 d:

- $r\cdot\frac{u_d}{u_c}$是整的，当且仅当 r是 $c_{(c,d)}=c$的倍数：d。
- $r\cdot\frac{u_d}{u_{c_1}u_{c_2}u_{c_3}}$ 是整的，当且仅当 r 是(c_2c_3,dc_3) (c_2c_3,d) 的倍数。
- $r\cdot\frac{u_{d_1}u_{d_2}}{u_{c_1}u_{c_2}}$是整的，当且仅当 r 是$(c_1c_2,d_1d_2c_2)$ (c_1c_2,c_1d_2,d_1d_2) 的倍数。

最后，举一个更具体的例子：$r\cdot\frac{u_2u_6}{u_4}=r\cdot\frac{u_2u_6}{u_1u_4}$是整的，当且仅当 r 是 $4_{(4,6)}=2$ 的倍数。

人们可能会想尝试准确刻画哪些元素 $\frac{u_d}{u_c}$ 是整的，但这似乎没有简单的答案。以下结果大致展示了其中的情形：

命题 7.21。*(a)* $\frac{u_d}{u_c}$ 是整的，当且仅当 $c|d$。*(b)* 元素 $\frac{u_{d_1}u_{d_2}}{u_{c_1}u_{c_2}}$ 是整的，当且仅当 $[c_1,c_2]\Big|[d_1,d_2]$ 且 $c_1c_2|d_1d_2$。*(c)* 设 c 和 d 是长度为 *3* 的因子串。那么 $\frac{u_{d_1}u_{d_2}u_{d_3}}{u_{c_1}u_{c_2}u_{c_3}}$ 是整的，当且仅当对于所有素数 $\ell|c_3$，要么$c_1(\ell)\le(d_1d_2)(\ell)$，且 $c_3(\ell)\le d_3(\ell)$，且 $(c_2c_3)(\ell)\le(d_2d_3)(\ell)$ 且 $(c_1c_2c_3)(\ell)\le(d_1d_2d_3)(\ell)$；要么 $(d_1d_2)(\ell)<c_1(\ell)$，且 $(d_1d_2c_3)(\ell)\le(c_1d_3)(\ell)$，且 $(d_1c_2c_3)(\ell)\le(c_1d_3)(\ell)$ 且 $(c_2c_3)(\ell)\le d_3(\ell)$。（注意，注 *7.19* 给出了一个例子，表明 *(a)* 和 *(b)* 的明显推广在此处并不成立。）

证明。第 (a) 部分显然成立，因为 $Y_{c,\,d}=c_{(c,\,d)}$ 且这恰好在 $c|d$ 时等于 1。

对于 (b)，将 c 和 d 替换为其导出因数字符串既不影响整性，也不影响最小公倍数或乘积，因此我们这样做。命题 7.17 加上一点算术表明 $Y_{c,\,d}=(c_1c_2{}_{(c_1c_2,\,c_1d_2,\,d_1d_2)}\,c_2)$。这等于 1 当且仅当对每个素数 $\ell|c_2$，有 $\nu_\ell(c_1c_2)\le\nu_\ell(c_1d_2)$ 以及 $\nu_\ell(c_1c_2)\le\nu_\ell(d_1d_2)$。第一个等价于 $\nu_\ell(c_2)\le\nu_\ell(d_2)$，且这对所有素数 $\ell|c_2$ 成立恰好就是条件 $c_2|d_2$。由于 $c_1|c_2$，整除 c_2 的素数恰好是整除 c_1c_2 的素数；因此第二个不等式对所有素数 $\ell|c_2$ 成立等价于 $c_1c_2|d_1d_2$。这些就是所需的条件。

最后，对于 (c) 部分，我们使用命题 7.17 以及一些算术运算（即变换 $(x/y,c)=(x,cy)/y$）来得到

$$Y_{\underline{c},\underline{d}}=\left(\frac{Q}{(Q,c_1c_2d_3,c_1d_2d_3,d_1d_2d_3)},c_3\right)$$

其中 $Q=(c_1c_2c_3, d_1d_2c_2c_3) = c_2c_3(c_1, d_1d_2)$。条件 $Y_{c,d}=1$ 等价于：对于每个素数 $\ell|c_3$，Q $_{(Q,c_1c_2d_3,c_1d_2d_3,d_1d_2d_3)}$ 的 ℓ-进赋值等于零。但是 $\nu_\ell(Q) = \nu_\ell(c_2c_3) + \min\{\nu_\ell(c_1), \nu_\ell(d_1d_2)\}$，而我们要求

$$\nu_\ell(Q) \le \min\{\nu_\ell(c_1c_2d_3), \nu_\ell(c_1d_2d_3), \nu_\ell(d_1d_2d_3)\}. \tag{7.21.1}$$

命题陈述中的条件归结为分析$\{\nu_\ell(c_1)\ \nu_\ell(d_1d_2)\}$ 这一项的两种不同可能性，以及这会如何影响（7.21.1）。□

现在给出主要整性结果的证明：

命题7.20的证明。群 $H_{2k}(S^{\lambda_c})$ 和 $H_{2k}(S^{\lambda_d})$ 分别由 u_c和 u_d生成。考虑映射

$$[S^{\lambda_c}, S^{\lambda_d}] \to \mathrm{Hom}\Big(H_{2k}(S^{\lambda_c}), H_{2k}(S^{\lambda_d})\Big) \cong \mathrm{Hom}(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}.$$

像恰好是由所有满足 $r\cdot \frac{u_d}{u_c}$ 为整数的系数 r 构成的理想。我们计算这个像的方法是构造球面之间所有可能的映射，并计算这些映射在顶维同调群上诱导的映射。

我们可以将 c 和 d 替换为相应的因子串，而不改变球面的同伦类型，因此 (b) 直接由 (a) 得出。从现在起，我们假设 c 和 d 是因子串。

正如我们在第 7.4 节看到的，链映射 $L(c) \to L(d)$ 可以通过指定整数 $M_1,\dots,M_k$ 以及 $w_1,\dots,w_k$ 来定义，并满足以下条件

$$M_j\cdot(d_j:c_j) = M_{j-1}\cdot(c_{j-1}:d_{j-1}) + w_{j-1}c_{j-1} \tag{7.21.2}$$

对于 $2\le j\le k-1$。根据命题 7.10，顶维同调上的诱导映射是乘以 $(c_k:d_k)M_k + c_kw_k$。因此，我们的首要目标是证明它是 $Y_{c,d}=Y_k$ 的倍数。回想一下，整数 Y_j 是递归定义的：

$$Y_0=1,\quad Y_j = ((c_jY_{j-1}:d_j), d_j).$$

特别要注意，Y_1 可化简为 $Y_1=(c_1:d_1)$。

现在我们只需归纳分析条件 (7.21.2)。第一个条件表明，M_2 属于理想

$$((c_1:d_1),c_1):(d_2:c_2) = (c_1:d_1):(d_2:c_2) = Y_1:(d_2:c_2).$$

利用这一事实，接下来的条件便表明 M_3 属于理想

$$\Big((c_2:d_2)((c_1:d_1):(d_2:c_2)), c_2\Big):(d_3:c_3) = \Big(((c_1:d_1)c_2):d_2, c_2\Big):(d_3:c_3)$$
$$= Y_2:(d_3:c_3)$$

其中在第二个等式中，我们用到了命题7.2(g)。继续归纳可得，M_j属于理想 $Y_{j-1}:(d_j:c_j)$，对所有 $j\ge 2$。

最后，在 H_{2k} 上的诱导映射是乘以 $(c_k:d_k)M_k + c_kw_k$，它可以是理想中的任意元素

$$\Big((c_k:d_k)(Y_{k-1}:(d_k:c_k)), c_k\Big) = ((Y_{k-1}c_k):d_k, c_k) = Y_k = Y_{\underline{c},\underline{d}}$$

其中，在第一个等式中，我们再次利用命题 7.2(g) 化简冒号表达式，最后一个等式则来自 Y_j 数的定义。这表明，如果 $r\cdot u_d/u_c$ 是整的，那么 r 就是$Y_{c,d}$的倍数。但事实上，所有

这些步骤都是可逆的。只要选取 M_k 使其属于 Y_{k-1}: $(d_k : c_k)$，就可以递归地选取 M_j 和 w_j （沿着 j递降），从而构造一个复形映射。因此，$Y_{c,d}$ 的任意倍数也都对应一个这样的整类。□

7.22. **单位分类**。 我们以分类$H^\star(pt;\mathbb{Z})$中的单位来结束本节。先给出一个引理：

引理 7.23。 设 $c_1, \dots, c_k$ 和 $d_1, \dots, d_k$ 是因子串。
(a) 若$Y_{c,d} = 1$ ，则 $c_k | d_k$。 *(b)* 若
$Y_{c,d} = 1 = Y_{d,c}$ ，则 $c = d$。

证明。 对于(a)，只需证明对每个素数 ℓ，在 ℓ-局部化后结论成立。因此，我们可以固定 ℓ ，并将每个 c_i 和 d_i 替换为它们的 ℓ-进部分 $c_i(\ell)$和 $d_i(\ell)$。

利用命题 7.17中的设定，若 P 是允许路径，则用 $[P]$ 表示其对应的整数。称路径 P 是路径 Q 的因子，如果 $[P]$ 整除 $[Q]$。由于所有整数都是 ℓ的幂，条件$Y_{c,d} = 1$ 等价于：每条终点为 d_k 的允许路径都是某条终点为 c_k的允许路径的倍数。令 σ 为终点是 c_{k-1}的最短允许路径，并令 σ' 为 σ 与 d_k的连接。于是 σ' 是某条终点为 c_k的允许路径 S的倍数，而这条路径必定以 $c_{k-1}c_k$结尾。因此，根据我们对 σ的选择， S中终点为 c_{k-1} 的部分是 σ的倍数。故 $[S]$ 是$[\sigma]c_k$的倍数。但 $[\sigma'] = [\sigma]d_k$ 是 $[S]$的倍数，所以 $c_k | d_k$。

对于 (b)，证明对 k 使用归纳法。对于 $k = 1$ 的情形，若 $c = Y_{(c,d)} = 1 = \frac{d}{Y(c,d)}$，则 $c|d$ 且 $d|c$，因此 $c = d$。一般情形由 (a)（应用两次）可得 $c_k = d_k$。现在利用：若 $c_k = d_k$ ，则 $Y_{c,d} = Y_{(c_1,\dots,c_{k-1}),(d_1,\dots,d_{k-1})}$。利用命题 7.17 可以直接证明这一点（对于因子串），但它也可由命题 7.20 立即推出。最后，若 c' 和 d' 表示删去最后一个元素后的串，那么现在有 $Y_{c',d'} = 1 = Y_{d',c'}$ ，因此由归纳法可得 $c' = d'$。□

命题 7.24。 $H^\star(pt;\ \mathbb{Z})$ 中的每个齐次单位，除相差一个符号外，都是 $\chi_{a,b}$-类及其逆元的乘积。

证明。 </style>设 $(;)$ 是单位，其中 $, \dots, d_k$ 和 $c_1, \dots, c_s$ 是一些因子列表，且 $m \in \mathbb{Z}$ 是某个元素。首先注意，我们必须有 $m = 2s - 2k$，否则该群将是挠元群，因此不可能包含单位。根据 $m > 0$ 或 $m < 0$ 的情况，分别在 d 序列或 c 序列中添加 1，我们可以假设 $m = 0$。

通过乘以适当的 χ 类，我们可以将 d 和 c 转换为相应的因子串。因此，我们进一步将问题简化为 d 和 c 都是因子串的情形，并将证明 $u = \pm 1$。

应用映射 $H^\star(pt;\mathbb{Z}) \to H^\star(pt;\mathbb{Q})$，命题 7.20 表明， u 将映射到 $PY_{c,d} \cdot \frac{u_d}{u_c}$ 对某个整数 P。同样， u^{-1} 将映射到 $QY_{d,c} \cdot \frac{u_c}{u_d}$ 对某个整数 Q。于是 $1 = PQY_{c,d} \cdot Y_{d,c}$，并且由于这四个因子都是整数，这只有在 P， $Q \in \{1, -1\}$ 以及 $Y_{c,d} = 1 = Y_{d,c}$ 时才可能发生。由引理 7.23，后一条件蕴含 $c = d$。因此 $u \in H^0(pt;\mathbb{Z}) = \mathbb{Z}$，并且由于它是一个单位，我们必须有 $u = \pm 1$。□

8. The irregular region

在本节中，我们探讨 $H^\star(pt)$ 的不规则区域的若干方面。我们证明命题 1.9（出自引言），这主要是将我们已经发展的想法汇集起来。然后我们进一步扩展其中的一些技巧，最后详细考察情形 $n=\ell^2$。

命题 *1.9* 的证明。对于 (a)，考虑余纤维序列 $\Sigma^2 S^{\lambda_{c'}} \xrightarrow{u_{c_1}} S^{\lambda_c} \to \mathbb{Z}/I_{c_1}$ 并应用 $[-,\Sigma^k S^{\lambda_d}]$。得到正合列

$$\underline{\mathcal{D}}(\Sigma^{-1}\underline{\mathbb{Z}}/I_{c_1},\Sigma^k S^{\lambda_{\underline{d}}}) \longleftarrow \underline{H}^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}'}+(k-2)} \xleftarrow{\cdot u_{c_1}} \underline{H}^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}}+k} \longleftarrow \underline{\mathcal{D}}(\underline{\mathbb{Z}}/I_{c_1},\Sigma^k S^{\lambda_{\underline{d}}}).$$

由于 $\underline{\mathbb{Z}}/I_{c_1}$ 有长度为 3 的自由分解，如果 $k\geq 4$，则两端的群为零。

(b) 的证明类似，使用余纤维序列 $\Sigma^2 S^{\lambda_{d'}} \to S^{\lambda_d} \to \mathbb{Z}/I_{d_1}$。由此得到正合列

$$\underline{\mathcal{D}}(S^{\lambda_{\underline{c}}},\Sigma^{k-1}\underline{\mathbb{Z}}/I_{d_1}) \to \underline{H}^{\lambda_{\underline{d}'}-\lambda_{\underline{c}}+(k+2)} \xrightarrow{\cdot u_{d_1}} \underline{H}^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}}+k} \longrightarrow \underline{\mathcal{D}}(S^{\lambda_{\underline{c}}},\Sigma^k\underline{\mathbb{Z}}/I_{d_1}).$$

如果 $k<0$，那么两端的群都为零，因为 S^{λ_c} 集中在非负次数。

对于 (c)，我们使用 Künneth 谱序列（参见 [DH，第 6] 节）。注意 $H^{\lambda_d-\lambda_c+k} = H_{-k}(S^{-\lambda_c}\square S^{\lambda_d})$。回想一下，$S^{-\lambda_c}$ 的同调在次数 $-2q$ 有一个 I_{c_q}，并且在次数 $-2q+2j-1$ 有一个 $\mathbb{Z}/I_{c_{q-j}}$，其中 $1\leq j\leq q-1$。类似地，S^{λ_d} 的同调仅存在于偶数次数，由 $\mathbb{Z}/I_{d_j}$（次数 $2j-2$ $(1\leq j\leq s)$）和 $\mathbb{Z}$（次数 $2s$）给出。在 Künneth 谱序列中，我们有

- 盒积 $I_{c_q}\square\mathbb{Z}/I_{d_j}$ 和 $I_{c_q}\square\mathbb{Z}$，均贡献于偶全次数，
- $\mathrm{Tor}_2(I_{c_q},\mathbb{Z}/I_{d_j})$ 项也贡献于偶全次数（此处所有其他 Tor_i 均为零），

- 盒积 $\mathbb{Z}/I_{c_i}\square\mathbb{Z}/I_{d_j}$ 和 $\mathbb{Z}/I_{c_i}\square\mathbb{Z}$，均处于奇全次数，且
- $\mathrm{Tor}_3(\mathbb{Z}/I_{c_i},\mathbb{Z}/I_{d_j})$ 项贡献于偶全次数。

只有第三类项处于奇全次数，且它们在谱序列中的滤过次数均为零。因此，对于 k 奇数，我们发现 $H^{\lambda_d-\lambda_c+k}$ 是这些项之和的商空间，因而 $H^{\lambda_d-\lambda_c+k}$ 由负的 γ_c-类与 $(au)_d$-类的乘积生成。

对于 (d)，令 $c'=(c_1,\dots,c_s)$。复形的包含映射 $S^{\lambda_{c'}}\hookrightarrow S^{\lambda_c}$ 是同伦类 $A=a_{c_{s+1}}a_{c_{s+2}}\cdots a_q$ 的一个模型。令 Q 表示商复形，它仅在次数 $2s+1$ 到 $2q$ 上非零。应用 $[-,S^{\lambda_d}]$ 得到正合列

$$[\Sigma^{-1}S^{\lambda_{\underline{c}}},S^{\lambda_{\underline{d}}}] \longleftarrow [\Sigma^{-1}Q,S^{\lambda_{\underline{d}}}] \xleftarrow{g} H^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}'}} \xleftarrow{\cdot A} H^{\lambda_{\underline{d}}-\lambda_{\underline{c}}} \longleftarrow [Q,S^{\lambda_{\underline{d}}}]=0.$$

由次数原因，右侧的群为零；根据命题2.11，左侧的群是挠群。我们还已知，群 $H^{\lambda_d-\lambda_{c'}}$ 同构于 $\mathbb{Z}$ 与一个挠群的直和，因为根据命题2.11，其有理化为 $\mathbb{Q}$。我们将证明 $[\Sigma^{-1}Q,S^{\lambda_d}]\cong\mathbb{Z}$。由此，根据正合列可知，标记为 g 的映射非零，且其核恰好是定义域的挠子群，这就证明了 (d)。计算

$[\Sigma^{-1}Q, S^{\lambda_d}]$ 的计算可以轻松地手工完成：链映射的形式如下

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & F_{c_{s+1}} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{c_{s+1}} & & & \\ & & & \downarrow f & & & \\ & & & F_{d_s} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{d_s} \longrightarrow & F_{d_{s-1}} \longrightarrow \cdots \end{array}$$

并且要成为复形映射，必须满足 $(id - Rt)f = 0$，根据命题 3.4(b)，这等价于 $f = uI\pi R\pi$ 对于某个 $u \in \mathbb{Z}$。不存在非平凡的链同伦，因此 $[\Sigma^{-1}Q, S^{\lambda_d}] \cong \mathbb{Z}$。

证明 (e) 的方法与 (d) 类似，但有几处改动。令 $d' = (d_1, \ldots, d_q)$。我们使用球面的线性模型和余纤维序列$S^{\lambda_{d'}} \hookrightarrow S^{\lambda_d} \to Q$，其中 Q 是商空间。注意，Q 仅在从 $2q+1$ 到 $2s$ 的次数上非零。左侧的包含映射表示同伦类$A = a_{d_{q+1}} \cdots a_{d_s}$。将 $[S^{\lambda_c}, -]$ 应用于余纤维序列，得到

$$[S^{\lambda_c}, \Sigma^{-1}S^{\lambda_d}] \longrightarrow [S^{\lambda_c}, \Sigma^{-1}Q] \longrightarrow H^{\lambda_{d'}-\lambda_c} \xrightarrow{\cdot A} H^{\lambda_d-\lambda_c} \longrightarrow [S^{\lambda_c}, Q] = 0.$$

右侧的群因次数原因为零，而根据命题 2.11，左侧的群是挠元。因此，只需证明 $[S^{\lambda_c}, \Sigma^{-1}Q]$ 与 $\mathbb{Z}$同构即可。这可以通过直接计算轻松得出：复形映射的形式如下

$$\begin{array}{ccccccc} \cdots \longrightarrow & F_{d_{q+1}} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{d_{q+1}} & & & \\ & & & \uparrow \langle m \rangle & & & \\ & & & F_{c_q} & \xrightarrow{id-Rt} & F_{c_q} \longrightarrow & \cdots \end{array}$$

当且仅当存在 h_0，h_1: $F_{c_q} \to F_{d_{q+1}}$使得 $\langle m \rangle = (id - Rt)h_1 + h_0(id - Rt)$ 时，这样的映射才是零伦。但这个表达式也等于 $(id - Rt)(h_1 + h_0)$，因此，当且仅当 $\langle m \rangle$ 可提升经过$id - Rt$ 时，该映射才是零伦。根据命题 3.4，当且仅当 $\sum_i m_i = 0$ 时，这个提升存在。这表明 $\langle m \rangle \mapsto \sum_i m_i$ 给出了一个嵌入 $[S^{\lambda_c}, \Sigma^{-1}Q] \to \mathbb{Z}$，且其像为整个 $\mathbb{Z}$，因为 m 可以任意选取。□

推论 8.1. $H^\star(pt)$ 是一个交换环。

证明。设 $x \in H^\star$ 与 $y \in H^\star$ 为齐次元素。若 $|x|$ 或 $|y|$ 的固定维数为偶数，则由 (1.0.1)可知 $xy = yx$。因此假设这两个固定维数均为奇数。由命题 1.9(c)，我们化归到如下情形：x 与 y 各自均为 au-类与负 γ-类的乘积。但 au-类与一切元素交换（因为 $|a|$与 $|u|$ 具有偶数固定维数），并且由命题 6.17，两个负 γ-类的乘积为零。因此在此情形下，xy与 yx 均为零，故 $xy = yx$。□

8.2. **同型区域。** 命题1.9 讨论了将 $H^\star(pt)$的某个特定齐次分量化归为另一个齐次分量的想法，其手段是乘以 u-或a-类。这一想法可在多个方向上进一步加以利用。其中第一个方向表明，乘以最大的 a-类几乎总是一个同构：

命题 8.3. 对于任意多重指标 β，映射 $H^\beta \xrightarrow{\cdot a_n} H^{\beta+\lambda_n}$ 是同构，除非 $|\beta| \in \{-2, -1, 0\}$。当 $|\beta| = -2$ 时，该映射是单射

且其像是陪域的挠子群；当 $|\beta| = -1$ 时，该映射是满射。当 $|\beta| = 0$ 时，该映射是满射，但在挠类上也是单射。

证明。 我们从余纤维序列 $\mathbb{Z} \xrightarrow{a_n} S^{\lambda_n} \to \Sigma \underline{X}_n$开始，再与 S^β 作盒积，得到

$$S^\beta \to S^{\beta+\lambda_n} \to S^{1+\beta} \square X_n.$$

这给出长正合列

$$\cdots \longrightarrow \underline{H}_1(S^{1+\beta} \square X_n) \longrightarrow \underline{H}^\beta \xrightarrow{\cdot a_n} \underline{H}^{\beta+\lambda_n} \longrightarrow \underline{H}_0(S^{1+\beta} \square X_n) \longrightarrow \cdots$$

回忆引理 6.14 指出 $S^{1+\beta} \square X_n \simeq S^{1+\dim \beta} \square X_n$，因此同调等于 I_n 在次数 $1+$维数 β 以及 $\mathbb{Z}$ 在次数 $2+$维数 β。特别地，如果 $\mathbf{0}$，$1 \notin \{1+\text{维数}\,\beta,\ 2+\text{维数}\,\beta\}$，或者等价地，维数 $\beta \notin \{0, -1, -2\}$，则两端的群均为零。

如果维数为 $\beta = -2$，那么我们的正合列变为 $0 \longrightarrow \underline{H}^\beta \xrightarrow{\cdot a_n} \underline{H}^{\beta+\lambda_n} \longrightarrow \mathbb{Z}_\circ$ 但是 $\underline{H}^\beta$ 是挠元，因此它在 $H^{\beta+\lambda_n}$ 中的像必定等于整个挠子群。

如果 $\dim \beta = -1$，那么 $H^{\beta+\lambda_n}$ 是挠元，而 $\underline{H}_0(S^{1+\beta} \square X_n) \cong I_n$。因此，从前者到后者的映射必为零，故乘以 a_n 是满射。

最后，如果 $\dim \beta = 0$，我们的正合列变为

$$\underline{H}^{\beta-1+\lambda_n} \longrightarrow I_n \longrightarrow \underline{H}^\beta \xrightarrow{\cdot a_n} \underline{H}^{\beta+\lambda_n} \longrightarrow 0.$$

Mackey 函子 $\underline{H}^{\beta-1+\lambda_n}$ 是挠的，而 I_n 无挠，因此左侧的映射为零。由此立即可知，乘以 a_n 在挠类上是单射。□

注意，乘以 a_n 会使几何维数增加二，因此将 $H^\star$ 分成奇偶条带。下图清楚地描述了这一情况：

(8.3.1)

$$\cdots \xrightarrow{\cong} (\dim \beta = -3) \xrightarrow{\cong} (\dim \beta = -1) \twoheadrightarrow (\dim \beta = 1) \xrightarrow{\cong} \cdots$$

$$\cdots \xrightarrow{\cong} (\dim \beta = -2) \xrightarrow[tors-iso]{} (\dim \beta = 0) \xrightarrow[tors-inj]{} (\dim \beta = 2) \xrightarrow{\cong} \cdots$$

由于这些同构，一旦知道了 $r \in \{-1, 0, 1, 2\}$ 的切片 $\dim \beta = r$，就能知道 $H^\star(pt)$ 的全部内容。因此，如果 Div_n 是 D 维的，这可以看作化归为一个 $(D-1)$ 维的计算。

推论 8.4. 若维数 β 为奇数，则 H^β 中的任意类都能被 a_n无限次整除。若维数 β 为偶数，则任意非零挠类 $x \in H^\beta$ 都满足：对于所有 $k \geq 1$，$a_n^k x \neq 0$。

证明。 由图表（8.3.1）立即可得。 □

这个思路还可以进一步延伸。乘以一个 u_d类会保持几何维数不变，因此它作用在（8.3.1）中的每个切片上。这些类在很大范围内也是同构，不过确切范围随 d 而变化。下面给出这一方向上的一个结果（维数的定义见（2.5.1））：$_{\hat{\ell}}\beta$

命题 8.5。 设 ℓ 是一个素数， β 是任意多重指标。那么，当 维数$_{\hat{\ell}}\,\beta \notin \{2,3\}$时， $H^\beta \xrightarrow{\cdot u_\ell} H^{\beta+\lambda_\ell-2}$ 是一个同构。此外，当 维数$_{\hat{\ell}}\,\beta = 3$ 时，该映射是满射；当 维数 $_{\hat{\ell}}\,\beta = 2$时，该映射是单射。

证明。 从余纤维序列 $\Sigma^2\mathbb{Z} \xrightarrow{u_\ell} S^{\lambda_\ell} \longrightarrow \mathbb{Z}/I_\ell$ 并与 $S^{\beta-2}$ 作盒积，得到 $S^\beta \xrightarrow{u_\ell} S^{\lambda_\ell+\beta-2} \to S^{\beta-2}\square\mathbb{Z}/I_\ell$。根据命题 2.6 ，我们知道 $S^{\beta-2}\square\mathbb{Z}/I_\ell \simeq \Sigma^{\dim_{\hat{\ell}}\beta-2}\mathbb{Z}/I_\ell$。由于这个复形的同调只集中在维数 $\dim_{\hat{\ell}}\beta - 2$，结论便立即成立。 □

命题8.5实际上让我们可以进一步降低计算 $H^\star(pt)$ 的难度，将维数再减少一维。

8.6. **关于 $G = C_{\ell^2}$ 的例子**。 基本表示为 1， λ_ℓ 和λ_{ℓ^2}，因此我们得到一个三重分次环。上一节所述的约化实质上将问题化为一维计算，使其变得易于处理。我们在下方的图表 4 中展示结果。本节的目标是绘制这幅图表，并说明如何解读它。

我们先列出同型区域：第（1）和第（2）部分只是上一节一般结果的特例。

命题 8.7。 对于定义域为 $H^{r\lambda_\ell+k\lambda_{\ell^2}+m} = H^\beta$ 的映射：

（*1*）乘以 a_{ℓ^2} 是同构，如果 维数 $\beta \notin \{0,-1,-2\}$。如果 维数 $\beta \in \{0,-1\}$，则它是满射；如果 维数 $\beta = -2$，则它是单射，且其像恰为陪域的挠子群。（*2*）乘以 u_ℓ 在 $m \notin \{2,3\}$ 时是同构；在 $m = 2$ 时是单射，在 $m = 3$ 时是满射。（*3*）乘以 u_{ℓ^2} 是同构，如果满足以下任一条件

$$r \geq 0 \text{ and } (\, 4 \leq m \text{ or } m \leq 1 - 2r \,)$$

OR

$$r < 0 \text{ and } (\, m \leq 1 \text{ or } m \geq 4 - 2r \,).$$

证明。 只有第（3）部分是新的，对于这一部分，使用 $\Sigma^2\mathbb{Z} \xrightarrow{u_{\ell^2}} S^{\lambda_{\ell^2}} \to \mathbb{Z}/I_{\ell^2}$ 以及 $S^{\lambda_{\ell^2}}\square\mathbb{Z}/I_{\ell^2} \simeq \mathbb{Z}/I_{\ell^2}$。细节留给读者补充。□

上述结果的第 (1) 部分表明，所有群 H^β 都可以根据四个平面 dim $\beta \in \{-1,0,1,2\}$上的值推导出来。事实上，平面 dim $\beta = 1$最终会发现完全为零，尽管这一点一开始并不明显。在图4 中，我们将绘制一个图表系统——每个 r对应一个图表——每张图表都描绘了与上述平面的四条交线。

如何阅读图表：

(i) $\square = \mathbb{Z}$、 $\bullet = \mathbb{Z}/\ell$和$= \mathbb{Z}/\ell^2$。(ii) 这些图表展示了群 $H^{r\lambda_\ell+k\lambda_{\ell^2}+m} = H^\beta$。 r值区分不同的图表。在每个图表中，带有交换方形的那条线由满足 dim $\beta = 0$ 的群组成，紧挨其下方的线为 dim $\beta = -1$。这两条线两侧的两条线（若存在）分别为 dim $\beta = -2$ 和 dim $\beta = 1$。线 dim $\beta = -2$ 仅出现在页面底部附近的图表中，而线 dim $\beta = 1$ 仅由零群组成。(iii) 注意， m沿垂直线保持不变。(iv) 在图表中移动：

- 在任一图表中，向上移动一个单位（向上两条 β 线）是一次 $+\lambda_{\ell^2}$ 移动。
- 在图表中向右移动两个单位（例如从一个交换方形到下一个）是一次 $-\lambda_{\ell^2}+2$ 移动。
- 从“交换方形”线上的一个位置移动到其下方一行中位于其右侧的位置，是一次 $-\lambda_{\ell^2}+1$ 移动。
- 从图表 r 中的一个位置移动到图表 $r+1$ （下方）中的同一位置，是一次 $+\lambda_\ell-\lambda_{\ell^2}$ 移动。

(v) 要在图表中找到给定的群，例如 $H^{2\lambda_\ell+\lambda_{\ell^2}-4}$： λ_ℓ的系数说明应查看哪张图表（此处为 $r=2$），然后常数系数指出相应的竖直线（此处为 $m=-4$）。几何维数（在本例中为 $4+2-4=2$）说明应查看图表中的哪条水平线（因此我们看到 $H^{2\lambda_\ell+\lambda_{\ell^2}-4}\cong\mathbb{Z}/\ell^2$）。

(vi) 乘以元素 u_ℓ、 u_{ℓ^2}、 a_{ℓ^2} 和 a_ℓ 的结果如下：

- 乘以 u_{ℓ^2} 后仍在给定的图表内，并向左移动两个单位。
- 乘以 u_ℓ 后向下移动一个图表，并向左移动两个单位。
- 乘以 a_{ℓ^2} 后仍在给定的图表内，并向上移动一个单位。
- 乘以 a_ℓ 后向下移动一个图表，再向上移动一个单位。

这些乘法各自的原型以蓝色显示在图表中央，从类 1 发出。

(vii) 垂直线表示乘以 a_{ℓ^2}。箭头表示这种乘法模式会无限重复，可以向上，也可以向下；例如，请注意这些族： $u_\ell(a_{\ell^2})^k$ 和 $u_\ell\gamma_{\ell^2}\,(a_{\ell^2})^k$。

(viii) 水平箭头（从右向左）表示乘以 u_{ℓ^2}。如果箭头带有整数标记 k，这表示尾部乘以 u_{ℓ^2} 后等于陪域中箭头头部的k 倍。例如， $u_{\ell^2}\cdot u_{[\ell:\ell^2]}=\ell\cdot u_\ell$。请注意，当水平箭头可以从其他箭头直接推导出来时，我们就不再画出它们，例如未画出的、从 $u_\ell a_{\ell^2}$ 指向 $u_\ell u_{\ell^2}a_{\ell^2}$的箭头。标记为 X 的三个水平箭头表示，箭头的尾部乘以 u_{ℓ^2} 后，是陪域中两个基元素的非平凡线性组合（下文将详述）。

(ix) 请注意 u_ℓ-周期性： $m=2$ 左侧的图由$m=0$ 线和 $m=1$ 线不断重复构成（向左移动时相应地向下平移），同样， $m=2$右侧的图由 $m=2$ 线和 $m=3$ 线不断重复构成（向右移动时相应地向上平移）。因此，实际需要进行的计算仅限于 $0\le m\le 3$范围内。

(x) 注意这个类 $\alpha\in H^{2\lambda_\ell-2\lambda_{\ell^2}}$。这个群是 $\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}/\ell$ 由例 7.12 和 α是唯一满足以下性质的挠类： $a_{\ell^2}\alpha=a_{\ell^2}(u_{[\ell:\ell^2]})^2$。注意到 α 的出现为如下公式打开了大门

$$u_{\ell^2}\cdot\frac{\ell^2(u_\ell)^3}{(u_{\ell^2})^2}=1\cdot(u_{[\ell:\ell^2]})^2+(??)\alpha.$$

系数 1 由有理化决定。由此可推得 $??=-1$，因为这是使该等式与 $a_{\ell^2}\cdot\frac{\ell^2}{u_\ell)^2}\,(u_{\ell^2})^3}=0$（见图表）相容的唯一方式。这个“隐藏扩张”在 [整数环]中被观察到；它在图表中标记为 X。

(xi) 类 α 通过算子生成一整个元素族 E，该算子见注释7.15。

(xii) 注意以下关系

$$u_{\ell^2}\cdot\tfrac{\gamma_{\ell^2}}{u_\ell}=\tfrac{a_\ell\gamma_\ell}{a_{\ell^2}},\qquad u_{\ell^2}\cdot\tfrac{a_\ell\gamma_\ell}{u_\ell a_{\ell^2}}=0,\qquad \text{and}\qquad u_{\ell^2}\cdot\tfrac{\gamma_\ell}{u_\ell}=0$$

这些可在图表的右上角找到。它们都很容易由第6.20 节中给出的关系推导出来（或由前面各节中的严格版本推导出来），这样做是一项有益的练习。对于第三个，先把左边的分数除以 a_{ℓ^2}，再以该形式证明该关系会有所帮助。

注 8.8. 如前所述，对 $G=C_{\ell^2}$ 而言，只要 $\dim\beta=1$，就有 $H^\beta=0$。这一现象对更大的 G并不成立：例如，对 $G=C_{\ell^4}$有 $H^{\lambda_{\ell^4}+\lambda_\ell-2\lambda_{\ell^2}+1}\neq 0$，其中类 $a_{\ell^4}u_\ell\gamma_{\ell^2}$ 是一个非零元。这个类必须支撑无穷多次 a_{ℓ^4}-乘法。

我们应当说明这张图表是如何计算出来的。首先，借助 u_{ℓ^2}-周期性，我们只需计算直线 $m\in\{0,1,2,3\}$。接下来，找出图中的正锥和负锥：它们是左下角和右上角的楔形扇区，而根据先前建立的一般结果，我们知道这里的群。再利用 u_{ℓ^2}-周期性，我们便知道 $m=0,1$ 直线的上部以及 $m=2,3$ 直线的下部。这已经是整张图的很大一部分。对于其余的群，我们利用了乘以 u_ℓ和 u_{ℓ^2} 的长正合列，以及一些临时的链级分析，以解决部分扩张问题。这些方法并不难，但并不特别有启发性。我们希望未来的某位读者能找到更明晰的方法。

9. Change of groups

在本文中，我们始终直接处理 C_n 和$\mathbb{Z}_{C_n}$，尽管所用方法常涉及在素数 ℓ处局部化。我们可以设想将 C_n 约化为较小的群 $C_{n(\ell)}$。这里我们说明如何使用标准的群变换函子来实现这一点。

固定一个素数 ℓ。回忆一下，$n(\ell)$是 n的 ℓ-主部分，而 $n(\ell)=n^{\ell}()$。我们有群的扩张

$$0\to C_{n(\hat{\ell})}\hookrightarrow C_n\xrightarrow{f}C_{n(\ell)}\to 0.$$

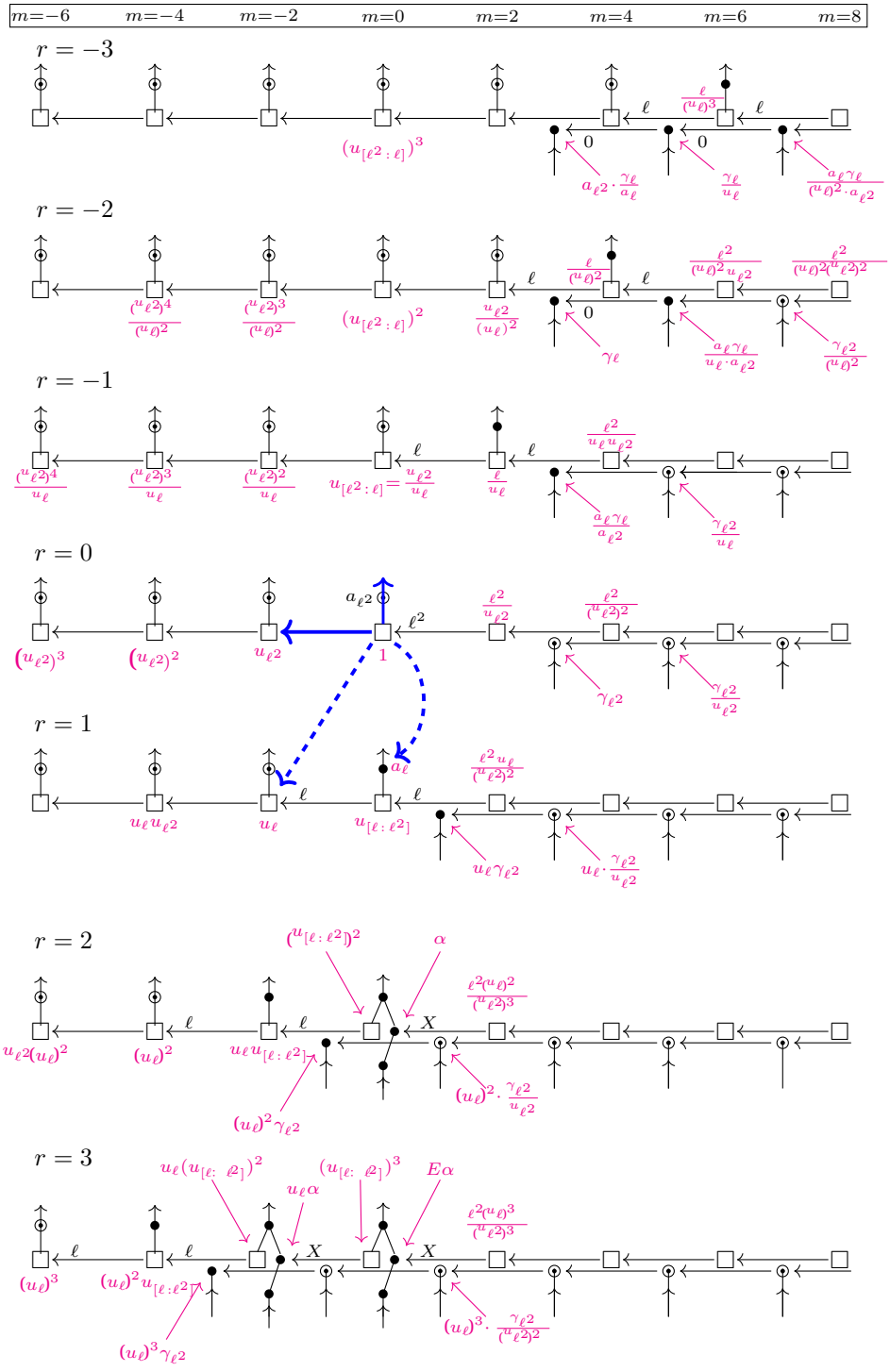
我们将考察限制函子 Res$_f$：$\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$–Mod$\to\mathbb{Z}_{C_n}$–Mod，例如 [DH 第 7]节中所述。根据 [DH 备注 7.4]，我们有 Res$_f(F_{\Theta_{\ell^e}})=F_{\Theta_{\ell^e}}$。注意，两个自由函子虽然写法相同，却略有不同：第一个是 $\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$-模，第二个是$\mathbb{Z}_{C_n}$-模。因此，Res$_f(S^{\lambda_{\ell^e}})=S^{\lambda_{\ell^e}}$；又由于 Res$_f$保持盒积（[DH 命题 7.5]），我们得到

$$\mathrm{Res}_f(S^{\lambda_{\ell^{e_1}}}\square\cdots\square S^{\lambda_{\ell^{e_s}}})\cong S^{\lambda_{\ell^{e_1}}}\square\cdots\square S^{\lambda_{\ell^{e_s}}}.$$

再次注意，左右两边的球面略有不同：左边表示 $\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$-模的复形，右边则表示 $\mathbb{Z}_{C_n}$-模的复形。

为方便起见，记 $\lambda_{\ell^{e_\bullet}}$ 为 $\lambda_{\ell^{e_1}}+\cdots+\lambda_{\ell^{e_s}}$。给定序列 $(e_1,\ldots\ldots,e_s)$ 和 $(k_1,\ldots\ldots,k_t)$，我们现在得到如下同构链：

FIGURE 4. $H^{r\lambda_\ell+k\lambda_{\ell^2}+m}$ 用于 $G=C_{\ell^2}$



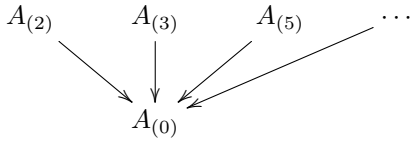
$$\begin{aligned}[S^{\lambda_{\ell^e}\bullet}, \Sigma^m S^{\lambda_{\ell^k}\bullet}]_{C_n} &= [\underline{\mathrm{Res}}_f(S^{\lambda_{\ell^e}\bullet}), \Sigma^m \underline{\mathrm{Res}}_f(S^{\lambda_{\ell^k}\bullet})]_{C_n} \\ &= [S^{\lambda_{\ell^e}\bullet}, \Sigma^m \underline{\mathrm{Ind}}_f \underline{\mathrm{Res}}_f(S^{\lambda_{\ell^k}\bullet})]_{C_{n(\ell)}} \\ &= [S^{\lambda_{\ell^e}\bullet}, \Sigma^m S^{\lambda_{\ell^k}\bullet}]_{C_{n(\ell)}}\end{aligned}$$

其中，第二个等式用到了伴随，第三个等式用到了 [DH命题 7.3(c)]。换言之，在$\mathcal{D}(\mathbb{Z}_{C_n}$中计算 ℓ-进球面之间的同伦类，可归结为在 $\mathcal{D}(\mathbb{Z}_{C_{n(\ell)}}$中进行类似的计算。事实上,−映射 −

$$\underline{\mathrm{Res}}_f\colon [S^{\lambda_{\ell^e}\bullet}, \Sigma^m S^{\lambda_{\ell^k}\bullet}]_{C_{n(\ell)}} \to [S^{\lambda_{\ell^e}\bullet}, \Sigma^m S^{\lambda_{\ell^k}\bullet}]_{C_n}$$

是该同构；由于 Res$f$ 保留盒积，这些映射组合成多重分次环的一个同构。因此，限制到 ℓ-进分次后， $H^\star_{C_n}(pt)$与 $H^\star_{C_{n(\ell)}}(pt)$同构。

接下来，我们来考察离开 ℓ-进分次后会发生什么。对于任意阿贝尔群 A，我们可以关联到如下局部化图表



其中 $A_{(\ell)} = A\otimes\mathbb{Z}_{(\ell)}$ 和 $A_{(0)} = A\otimes\mathbb{Q}$。用 $\lim_\ell A_{(\ell)}$ 表示该图表的极限，并注意典范映射 $A \to \lim_\ell A_{(\ell)}$。容易看出，只要 A 是有限生成的，该映射就是同构（$A = \bigoplus_\ell \mathbb{Z}/\ell\mathbb{Z}$ 是更一般情形下该结论的反例）。例如，当 A 是有限生成的挠群时， $A_{(0)} = 0$，而这个极限就是 A的各个 ℓ-主挠元部分的直和。

若 C 和 D 是由有限生成自由阿贝尔群构成的有界复形，则上述观察表明我们有同构

$$[C, D] \xrightarrow{\cong} \lim_\ell [C, D]_{(\ell)}. \tag{9.0.1}$$

但我们也可以观察到

$$\begin{aligned}[C, D]_{(\ell)} = H_0(\mathrm{Hom}(C, D)) \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)} &= H_0(\mathrm{Hom}(C, D) \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)}) \\ &\cong H_0(\mathrm{Hom}(C \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)}, D \otimes \mathbb{Z}_{(\ell)})) \\ &= [C_{(\ell)}, D_{(\ell)}].\end{aligned}$$

因此，事实上我们可以将（9.0.1）重写为

$$[C, D] \xrightarrow{\cong} \lim_\ell [C_{(\ell)}, D_{(\ell)}]. \tag{9.0.2}$$

若 C 与 D 是有限生成自由 $\mathbb{Z}_G$-模的有界复形，则同一论证仍然成立。因此，若$(b_1, \ldots, b_s)$ 与 $(c_1, \ldots, c_t)$ 是 n 的因子，则我们有同构

$$[S^{\lambda_{\underline{b}}}, \Sigma^m S^{\lambda_{\underline{c}}}]_{C_n} \xrightarrow{\cong} \lim_\ell [S^{\lambda_{\underline{b}}}_{(\ell)}, \Sigma^m S^{\lambda_{\underline{c}}}_{(\ell)}]_{C_n}.$$

我们已在命题4.10 中看到 $S^{\lambda_d(\ell)} \simeq S^{\lambda_{d(\ell)}(\ell)}$，由此可得

$$[S^{\lambda_{\underline{b}}}, \Sigma^m S^{\lambda_{\underline{c}}}]_{C_n} \cong \lim_{\ell} [S^{\lambda_{\underline{b(\ell)}}}_{(\ell)}, \Sigma^m S^{\lambda_{\underline{c(\ell)}}}_{(\ell)}]_{C_n} \cong \lim_{\ell} [S^{\lambda_{\underline{b(\ell)}}}, \Sigma^m S^{\lambda_{\underline{c(\ell)}}}]_{(\ell),C_{n(\ell)}}.$$

这将 $H^\star_{C_n}(pt)$ 群的计算归结为素数幂阶循环群的情形。对于 $m \neq 2(s-t)$，上述同构中的群全都是挠元，而逆极限就是直和。当 $m = 2(s-t)$ 时，存在一个单独的 $\mathbb{Z}$ 直和项，它通过逆极限进行 ℓ-进拼接。

追踪上述同构中的乘法结构有些棘手。需要用到元素 $u_{[d:d(\ell)]}$ 和 $u_{[d(\ell):d]}$；它们在 ℓ-局部化后是单位，但在此之前不是。这里不再进一步探讨。

References

[AMR] D. Ayala、A. Mazel-Gee、N. Rozenblyum, *Derived Mackey functors and C_{p^n}-equivariant cohomology* 2021 2105 02456，预印本，arXiv: . .

[BD] S. Basu 和 P. Dey, *Equivariant cohomology for cyclic groups*, 《国际数学研究通知》 2025 年，论文编号 rnaf150，41页。[BG1] S. Basu 和 S. Ghosh, *Computations in C_{pq}-Bredon cohomology*, 《数学杂志》 293（2019年），第3–4期，1443–1487页。[BG2] S. Basu 和 S. Ghosh, *Equivariant cohomology for cyclic groups of square-free order*, 《数学科学研究》11（2024年），第2期，论文编号29，33页。[BG3] S. Basu 和 S. Ghosh, *Non-trivial extensions in equivariant cohomology with constant coefficients* 2021 2108 12763，预印本，arXiv: . .

[DV] B. Deng 和 M. Voineagu, *RO $C_2 \times C_2$ -graded cohomology ring of a point and applications* 2025 2502 00956 ( )，预印本，arXiv: : 。

[D] D. Dugger, *Coherence for invertible objects and multi-graded homotopy rings*, 《代数与几何拓扑》14（2014年），1055–1106页。[DH] D. Dugger 和 C. Hazel, *Mackey homological algebra over cyclic groups*, 预印本，2026年。[G1] N. Georgakopoulos, *The $RO(C_4)$ integral homology of a point*, 2019年预印本，arXiv: 1912:06758。[HHR1] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel, *On the nonexistence of elements of Kervaire invariant one* 2 **184** 2016 262 ，《数学年刊》 ()（），第1期，1–页。[HHR2] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel, *The slice spectral sequence for certain RO* 3 **23** 2017 317 (C_{p^n})*-graded suspensions of $H\mathbb{Z}$*，《墨西哥数学会通报》 ()（），第1期，289–页。[HHR3] M. A. Hill、M. J. Hopkins 和 D. C. Ravenel, *Equivariant stable homotopy theory and the Kervaire invariant one problem* **40**, ，《新数学专著》，剑桥大学出版社，剑桥，2021年。[HK] J. Holler 和 I. Kriz, *On RO G -graded "ordinary" cohomology where G is a power of* ( )，《代数与几何拓扑》 ()，–页。[KL] I. Kriz 和 Y. Lu, *On the $RO(G)$-graded coefficients of dihedral equivariant cohomology*, 《数学研究快报》27（2020年），第4期，1109–1128页。[Li] Y. Liu, *Computing equivariant homology with a splitting method*, 《拓扑学及其应用》334（2023年），论文编号108554，57页。[Lu] Y. Lu, *On the $RO(G)$-graded coefficients of Q_8-equivariant cohomology*, 《拓扑学及其应用》307（2022年），论文编号107921，15页。[SS] S. Schwede 和 B. Shipley, *Equivalences of monoidal model categories*, 《代数与几何拓扑》3（2003年），第1期，287–334页。[Ya1] G. Yan, *The $RO(C_{2^n})$-graded homotopy of $H\mathbb{Z}$ through generalized Tate squares*, 《Matematica》4（2025年），第2期，364–418页。[Ya2] G. Yan, *The Green functor structure of $RO(D_{2p})$-graded cohomology of a point*, 2023年预印本，arXiv: 2310.16118。[Z] M. Zeng, *Equivariant Eilenberg-MacLane spectra in cyclic p-groups*, 预印本，2017年，arXiv: 1710.01769。

Department of Mathematics, University of Oregon, Eugene, OR 97403
Department of Mathematics, Grinnell College, Grinnell, IA 50112