arXiv:2602.18804v1 [math.AC] 21 Feb 2026

局部素模

Sholastica Luambano[1] 和 David Ssevviiri[2,3]电子邮箱:
scholastica.luambano@udom.ac.tz 和 david.ssevviiri@mak.ac.ug

摘要

对于一个交换含幺环 R 及其固定理想 I 和 J，我们引入并研究 I-素 R-模和 (I, J)-素 R-模，以及它们各自的对偶 —— I-余素 R-模和 (I, J)-余素 R-模。我们运用范畴论方法揭示它们的结构性质。主要结果是将 Greenlees-May 对偶和 Matlis-Greenlees-May 等价推广到这类素模和余素模。此项工作推广了关于 I-约化模和 I-余约化模的研究。我们表明，这些“局部素”模可用于研究经典的“全局素”模，从而在局部素性与全局素性之间架起桥梁。

关键词：素模、挠与完备化、Greenlees-May 对偶和 Matlis-Greenlees-May 等价

MSC 2020年 数学主题分类：13C13, 18A40, 16N60, 13J

10

1 引言

环的素理想在交换代数、代数数论和代数几何中都十分重要。环的 Krull 维数是该环的素理想链长度的上确界，构成一个重要的不变量。坐标环的 Krull 维数与相应代数簇的维数一致。环 R 的所有素理想组成的集合称为谱 R，记作 Spec(R)，它是一个几何概形，与交换含幺环 R一一对应。Matlis 定理指出，若 R 是交换诺特环，则 R 的素理想 $\mathcal{P}$ 与形如 $E(R/\mathcal{P})$的不可分解单射 R-模之间存在双射，其中 $E(R/\mathcal{P})$表示 R-模 $R/\mathcal{P}$的单射包。在数论中，素理想很有用，因为它们推广了素数；在 Dedekind 整环中，尽管元素的唯一分解不成立，却能借助素理想实现理想的唯一分解。这为分析和解决问题提供了框架，例如理解数域的结构以及素数在扩张中的行为。素理想的用途

[1]多多马大学数学系，邮政信箱 259，多多马，坦桑尼亚[2]马凯雷雷大学数学系，邮政信箱 7062，坎帕拉，乌干达[3]通讯作者

促使人们将其推广到环 [9, 11] 上定义的模，以及近环 [13] 等其他代数结构，近年来还推广到了斜括号[14]。本文中， R 表示一个交换含幺环，而模 M则是定义在 R上的左含幺模。我们用 R-Mod 表示 R-模范畴。

1.1 全局素模

环 R 上的模 M 称为素 模，若对于 R 的任意理想 I 和 M的任意子模 N，$IN = 0$ 蕴含 $N = 0$ 或 $IM = 0$。 R-模 M 的子模 P 称为素子模，若 M/P 是素 R-模。素模的研究由 Dauns [11]于1978年开创，在过去四十年间发展十分活跃，参见例如 [3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 28, 29]及其中的参考文献。素模有一种称为经典素模 [7] 的推广，在文献中也称为弱素模，参见 [4, 5, 9]。若对于 R的任意理想 I和 J以及元素 $m \in M$， $IJm = 0$蕴含 $Im = 0$ 或 $Jm = 0$，则称 R-模 M 为弱素 模。 R-模 M 的子模 P 称为弱素子模，若 M/P 是弱素 R-模。

我们将前面提到的两种素模定义称为素模的全局概念。这里“全局”一词意在说明，这些定义使用任意理想，而不是像后文定义其“局部”对应概念时那样，固定一个理想或一对给定的理想。若对任意理想 $I \in R$ 及元素 $m \in M$，$I^2m = 0$ 都蕴含 $Im = 0$，则 R-模 M 是 约化 [17]的（在 [26] 中也称为半素）。R 是素环（即整环），当且仅当 ${}_RR$ 是素模，当且仅当 ${}_RR$ 是弱素模。 R 是约化环，当且仅当 ${}_RR$ 是约化模。

1.2 局部素模

现在我们来定义以下概念的局部版本：1）约化模，2）弱素模，以及 3）素模。这种命名部分受到局部上同调模定义方式的启发，也就是说，局部上同调模总是相对于给定理想来定义的。这些局部概念使我们能够研究素模的范畴论性质，因为正如我们将在后文所展示的，每个“新素”都可用函子来刻画。

定义 1.1 设 I 和 J 是环 R 的固定理想。 M 是一个 R-模:

1. I-约化 [24] 当且仅当对所有 $m \in M$, $I^2m = 0$，均有 $Im = 0$；2. I-素 当且仅当对所有 $m \in M$, $Im = 0$，均有 $m = 0$ 或 $IM = 0$；3. (I, J)-素 当且仅当对所有元素 $m \in M$, $IJm = 0$，均有 $Im = 0$或 $Jm = 0$。

定义 1.2 P 是一个 R-模 M 的子模，当且仅当 R-模 M/P是 I-半素 （分别为 I-素和 (I,J)-素），且 R-模 M/P是 I-约化（分别为 I-素和 (I,J)-素）。

相应地，如果一个 R-模对所有 R 的理想 I 和 J 都是 I-素的（分别是 (I,J)-素的和 I-约化的），那么它就是素的（分别是弱素的和约化的）。

1.3 挠与完备化

虽然 I-挠函子 Γ_I 及其形式对偶—— I-进完备化函子 Λ_I ——通常在 R-模范畴中并非伴随函子，但对于任意弱前正则理想 I，它们的导出对应函子 $R\Gamma_I$ 和 $L\Lambda_I$ 在导出范畴中互为伴随。这一结果称为 Greenlees-May（GM）对偶 $[2, 21]$, ，是对 Grothendieck 局部对偶的深刻推广和加强。与其前身不同，GM 对偶适用于诺特环中的任意理想，并提供了一个更具概念性的框架；全面论述见 $[12]$。若一个 R-模 M 满足 $\Gamma_I(M) = M$（分别满足 $\Lambda_I(M) \cong M$），则称其为 I-挠的（分别称为 I-进完备的）。众所周知，若 R 既是诺特环又是 I-进完备环，则每个 R-模都是 I-进完备的。若一个 R-模 M 满足 $IM = 0$ 既是 I- 挠的又是 I- 完备的，则称其为 .....。 I- 挠 R- 模构成一个阿贝尔范畴，但 I-进完备的 R-模通常不构成阿贝尔范畴。Matlis-Greenlees-May（MGM）等价探讨的是何时这两个 R-模子范畴或其相应的导出类比之间存在等价。与 GM 对偶类似，当理想 I 弱前正则时，MGM 等价已在导出范畴的语境下于 $[2]$ 和 $[21]$ 中建立。最近，GM 对偶和 MGM 等价都已在 I-约化 R-模与 I-余约化 R-模的语境下于 $[24]$ 中建立，也已在 $[1]$ 中的 I-约化与 I-余约化复形的导出范畴语境下建立。在这两种情形中，理想 I 不必是弱前正则的。

1.4 结果总结

本文证明，GM 对偶与 MGM 等价可限制到 I-素 R-模与 I-互素 R-模的子范畴上，分别见定理 4.1 与定理 4.2。我们进一步建立了这些局部素模的更多性质。I-素 R-模与 (I,J)-素 R-模在取子模下封闭，见命题 2.6；它们的对偶 I-互素 R-模与 (I,J)-互素 R-模在取同态像下封闭，见命题 3.6。所有局部素模及其对偶在局部化下封闭，见命题 5.3。我们给出局部素模及其对偶在取 Hom 函子下得以保持或反转的条件，见命题 5.1 与命题 5.2。在命题 5.4（相应地，命题 5.5）中，我们给出 (I,J)-素 R-模成为 (I,J)-互素（相应地，(I,J)-互素 R-模成为

（I， J）-素 R-模）。

1.5 模语境下广义模对偶的理论依据

我们已经建立了这样的模子范畴：其中 I-进完备化函子Λ_I 是 I-挠函子 Γ_I 的左伴随。对任意为I-互素的 R-模 M，以及任意为 I-素的 R-模 N，该伴随

$$\mathrm{Hom}_R(\Lambda_I(M), N) \cong \mathrm{Hom}_R(M, \Gamma_I(N)) \tag{1}$$

这在局部理想 I 附近的模信息（以 I-挠函子描述）与模在其 I 无穷小邻域中的形式完备化（以 I-进完备化函子描述）之间，建立了形式上的范畴桥梁。此外，在 I的支撑中“局部”定义的 I-素 R-模之间的态射 $M \to \Gamma_I(N)$，与在 I的邻域内“形式地”定义的 I-互素 R-模之间的态射 $\Lambda_I(M) \to N$一一对应。这种对称性尤其值得注意，因为尽管 I-挠函子 Γ_I 总是左正合的， I-进完备化函子 Λ_I 通常既非左正合也非右正合。然而，在伴随成立的指定子范畴上， Λ_I 变为右正合。因此，式（1）中的伴随揭示了这些函子之间精确的对偶关系；这种对称性此前只有在导出范畴中才能看到。

1.6 论文结构

本文共分为五节。第 1 节中，我们引入 I-素模和（I， J）-素模。第 2 节中，我们给出本文后续所需的 I-素模和（I， J）-素模的性质。第 3 节中，我们引入 I-素模和（I， J）-素模的对偶概念，即分别为 I-余素模和（I， J）-余素模，并给出它们的性质。第 4 节中，我们给出本文的主要结果，即定理 4.1 和定理 4.2。第 5 节中，我们给出 I-素模和（I， J）-素模的更多函子性质，以及它们各自对应的对偶概念。同一节中，我们还给出利用局部素模得到的全局素模的性质，见推论 5.1。最后，我们指出本文可以引出的不同研究方向。

2 I-素模 $\&(I,J)$-素模

2.1 I-素 R-模

设 I 是环 R 的一个理想。对于 R-模 M 及其子模 N（其中 N 是 M 的子模），我们用 $(N{:}_M\, I)$ 表示 M 的子模 $\{m \in M \mid Im \subseteq N\}$。

命题 2.1 设 I 是 R 的一个固定理想， M 是一个 R-模。以下命题等价:

1. M 是 I-素; 2. 对于 M的每个子模 N， $IN = 0$ 蕴含 $N = 0$ 或 $IM = 0$; 3. $(0 :_M I) = 0$ 或$(0 :_M I) = M$，即$(0 :_M I)$是 M的平凡子模; 4. $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \cong 0$或$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \cong M$。

证明: (1) $\Rightarrow$ (2): 假设 M 是 I-素，并设 $N \leq M$ 满足 $IN = 0$。若 $N \neq 0$，取 $0 \neq m \in N$。于是 $Im = 0$，且由于 M 是 I-素，我们有$m = 0$ 或$IM = 0$。由 $m \neq 0$ 可知， $IM = 0$。因此 $N = 0$ 或$IM = 0$。(2) $\Rightarrow$ (3): 设 $N = (0 :_M I)$。根据定义， $IN = 0$。由(2)， $N = 0$或 $IM = 0$。若 $IM = 0$，则 M 中的每个元素都被 I湮灭，因此 $N = M$。所以， $(0 :_M I) = 0$ 或$(0 :_M I) = M$。(3) $\Rightarrow$ (1): 假设$(0 :_M I) = 0$或$(0 :_M I) = M$。取满足 $Im = 0$的 $m \in M$。于是 $m \in (0 :_M I)$。若$(0 :_M I) = 0$，则 $m = 0$。若 $(0 :_M I) = M$，则 $IM = 0$。因此 M 是 I-素。(3) $\Leftrightarrow$ (4): 由$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \cong (0 :_M I)$ 这一事实可得。 ∎

推论 2.1 R-模 M 是素 R-模，当且仅当对于 R 的每个理想I， M 的子模 $(0:_M I)$ 都是平凡子模。

I-挠函子 Γ_I 将每个 R-模 M对应到一个子模

$$\Gamma_I(M) := \left\{m \in M \mid I^k m = 0 \text{ for some } k \in \mathbb{Z}^+\right\} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}^+} \left(0 :_M I^k\right). \tag{2}$$

推论 2.2 如果 M 是一个 I-素 R-模，且 $(0 :_M I) \neq 0$，那么 M 是 I-挠的 .

证明: $(0 :_M I) \subseteq \Gamma_I(M) \subseteq M$。如果 M是 I-素的，且 $(0 :_M I) \neq 0$，那么 $(0 :_M I) = M$。因此，$(0 :_M I) = \Gamma_I(M) = M$，且 M是 I-挠的。 ∎

例 2.1 对于任意环 R，每个 R-模都是平凡的 0-素，且显然是R-素，因为对于所有 $m \in M$， $Rm = M$。

对于一个 R-模 M，我们用 $(0 :_R M)$ 表示 R 中由 $\{r \in R \mid rM = 0\}$ 给出的理想。

命题 2.2 任意 R-模 M 都是 $(0 :_R M)$-素的。

证明: 由于 $(0 :_R M)M = 0$， $(0 :_M (0 :_R M)) = M$。于是由命题 2.1， M是 $(0 :_R M)$-素的。 ∎

推论 2.3 对于环 R 的任意理想 I 以及 R-模M的任意子模 P，我们有:

1. R/I 是一个 I-素 R-模；2. M/P 是一个（$P:_R M$）-素 R-模。

例 2.2 每个单模都是素模。因为对于所有理想 $I \subseteq R$，$(0:_M I)$ 是 M 的子模，而 M 是单模，这意味着 $(0:_M I) = 0$ 或 $(0:_M I) = M$。由例 2.1 可知，简单环上的每个模也都是素模。

例 2.3 每个 I-挠自由模 M（即 M 满足 $\Gamma_I(M) = 0$）都是 I-素模。这是因为 $(0:_M I) \subseteq \Gamma_I(M)$。因此，若 $\Gamma_I(M) = 0$，则 $(0:_M I) = 0$。由命题 2.1，M 是 I-素的。

在论文 [15, 16, 24, 25]，中研究 I-约化 R-模时，(2) 中给出的 I-挠函子 Γ_I 非常有用。例如，我们有命题 2.3。

命题 2.3 [24, 命题 2.2]对于任意 R-模 M 以及环 R的理想 I，以下陈述等价:

1. M 是 I-约化的，2. $(0:_M I) = (0:_M I^2)$，3. $\mathrm{Hom}_R(R/I, M) = \mathrm{Hom}_R(R/I^2, M)$，4. $\Gamma_I(M) = \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$，5. $I\Gamma_I(M) = 0$。

本文将用到命题 2.3 中的许多陈述。我们还将在第 4 节证明，函子 Γ_I 刻画了 I-素 R-模。

2.2 (I, J)-素模

命题 2.4 设 (I, J) 是环 R的一对固定理想，且 M是一个R-模。以下陈述等价:

1. M是 (I, J)-素的，即若 $IJm = 0$，则 $Im = 0$或 $Jm = 0$;

2. $(0:_M IJ) = (0:_M I)$ 或 $(0:_M IJ) = (0:_M J)$；3. $\mathrm{Hom}_R(R/IJ, M) = \mathrm{Hom}_R(R/I, M)$ 或 $\mathrm{Hom}_R(R/IJ, M) = \mathrm{Hom}_R(R/J, M)$。

证明: 初等的。 ∎

定义 2.1 环 R 的理想 P 是 I-素（或 (I, J)-素）的，当且仅当 P 是 I-素（或 (I, J)-素）子模，且它是 R-模 R 的子模。

M/P 是 I-约化模 $\Rightarrow$ （P： M） $\lhd R$ 是 I-半素
$\Uparrow$ $\Uparrow M/P$ 是约化模 $\Rightarrow$ （P： M） $\lhd R$ 是半
素 $\Uparrow$ $\Uparrow P$ 是素 $\Rightarrow$ P 是弱素 $\Rightarrow$ （P： M）
$\lhd R$ 是素 $\Downarrow$ $\Downarrow$ $\Downarrow P$
是 I-素 $\Rightarrow$ P 是 (I， J)-素 $\Rightarrow$（P： M） $\lhd R$ 是 (I， J)-素 $\Downarrow$
M/P 是 I-约化

图表 1：不同素模之间蕴含关系图。

定义 2.2 设 I 是环 R的一个固定理想。若对任意 $I^2 \subseteq P$，都有 $I \subseteq P$，则称 P 是 R 的 I-半素 理想。

命题 2.5 对于环 R的任意一对固定理想（I， J），以及 M模的任意子模 P，我们有图表 1 所示的蕴含关系。

证明： 我们只证明以下两点： M的子模 P是 I-素的蕴含 P是（I， J）-素的； I-素的 P 蕴含 R-模 M/P 是 I-约化的。其余蕴含关系要么显然成立，要么已广为人知。设（I， J）是环 R的一对固定理想。设 P是 M和 $IJm \subseteq P$的一个 I-素子模。根据 I-素子模的定义和命题 2.1，有 $Jm \subseteq P$或 $IM \subseteq P$。因此，
$Jm \subseteq P$或 $Im \subseteq IM \subseteq P$。设对某个 $m \in M$，有 $I^2m \subseteq P$，即I（Im）
$\subseteq P$。那么根据命题 2.1，有 $Im \subseteq P$或 $IM \subseteq P$。两种情况下都有$Im \subseteq P$。因此， P 是 M 的一个 I-半素子模，并且 M/P 是一个 I-约化的R-模。 ∎

命题 2.6 </style}-素 -模和 (， J)-素 R-模在取子模时仍然封闭。

证明： 设 N 是 R-模 M 的子模，且 $n \in N$ 满足 $In = 0$。若 M 是 I-素的，则 $n = 0$ 或 $IM = 0$。因此， $n = 0$ 或 $IN = 0$。现在假设 M是一个 (I， J)-素模，且对于 $n \in N$有 $IJn = 0$。与第一种情形类似， $n \in M$。由于 M是 (I， J)-素的，因此 $In = 0$或 $Jn = 0$，这表明 N也是一个 (I， J)-素 R-模。 ∎

例 2.4 和 2.5 表明，图表 1 中的逆向蕴含一般并不成立。

例 2.4 设 k 是一个域。对于环 $R := k[x]$ 的理想 $I := (x^2)$ 和 $J := (x)$，R-模 $M := k[x]/(x^2)$ 既是 I-素的，也是 (I, J)-素的。然而，它既不是素的，也不是 J-素的。因此，I-素 $\not\Rightarrow$ 素，且 (I, J)-素 $\not\Rightarrow$ J-素。此外，由于对所有 $m \in M$，$J^2 m = 0$，但当 $m = 1$ 时 $Jm \neq 0$，所以 (I, J)-素 $\not\Rightarrow$ 弱素。

例 2.5 设 $R := \mathbb{Z}_6$，并考虑 R-模 $M := \mathbb{Z}_6$。对于 R 的理想 $I := 3\mathbb{Z}_6$，$\mathbb{Z}_6$-模是 I-约化的，因为 I 是幂等的。然而，由于 $(0 :_M I) = 2\mathbb{Z}_6$，它既不为零，也不等于 M。根据命题 2.1，M 不是 I-素的。

3 局部素模的对偶概念

3.1 全局互素模

环 R 上的模 M 称为**互素**（也称为第二），如果对于所有 $r \in R$，要么 $rM = 0$，要么 $rM = M$，见 [3, 10, 29]。

命题 3.1 对于任意环 R 和一个 R-模 M，以下陈述等价：

1. 对于所有 $r \in R$，要么 $rM = 0$，要么 $rM = M$；
2. 对于 R 的所有理想 I，要么 $IM = 0$，要么 $IM = M$。

证明： (2) $\Rightarrow$ (1)：1) 是 2) 的特殊情形。对任意 $r \in R$，取 $I = (r)$，因为 $rM = (r)M$。(1) $\Rightarrow$ (2)：假设 1) 成立，且 I 是环 R 的任意理想。若 $I \subseteq (0 :_R M)$，则 $IM = 0$。现在，假设 $I \not\subseteq (0 :_R M)$。存在 $r \in I$ 使得 $rM \neq 0$。由 1)，$rM = M$。然而，$rM \subseteq IM \subseteq M$。因此，$rM = M$ 蕴含 $IM = M$。

■

本文中，我们主要使用命题 3.1 的陈述 2)，它与前面定义的素模构成了良好的形式对偶。作为弱素模和约化模的形式对偶，我们分别定义弱互素模和余约化模。若对于环 R 上的任意一对理想 I和 J，$IJM = IM$或 $IJM = JM$，则环 R 上的 R-模 M 称为**弱互素**。若对于环 R 上的所有理想 I，$IM = I^2M$，见 [24]，则环 R 上的模 M 称为 **余约化** 。值得注意的是，对于环 R 的理想 I 和一个 R-模 M，I-余素 R-模 M 的定义中的条件$IM = 0$，与 I-素 R-模 M的定义中的条件 $(0 :_M I) = M$ 相同。因此，如果 $IM = 0$，那么 R-模 M 既是 I-素模，也是 I-余素模。

3.2 局部互素模

将定义 1.1 对偶化，即得定义 3.1。

定义 3.1 设 I 和 J 是 R的固定理想。 R-模 M 称为:

1. 若 $IM = I^2M$，则称为 I-余约化 [24]；2. 若 $IM = 0$ 或 $IM = M$，则称为 I-互素，即若 IM 是M的平凡子模；3. 若 $IJM = IM$或 $IJM = JM$，则称为 (I, J)-互素 。

命题 3.2 设 M 是一个 R-模，且 I 是 R的一个理想。以下陈述等价:

1. M 是 I-余素，2. $M/IM = M$ 或 $M/IM = 0$，3. $R/I \otimes_R M \cong M$ 或 $R/I \otimes_R M \cong 0$。

证明: 显然。

■

例 3.1 每个单环上的模都是互素的，单环上的每个模也都是如此。环的每个幂等理想 I 都是作为 R-模的 R -互素模，满足 $I^2 = 0$ 的 R 的每个理想 I 也都是如此。

I-进完备化函子 Λ_I 将每个 R-模 M 映射为一个 R-模

$$\Lambda_I(M) := \varprojlim_k (M/I^kM) \cong \varprojlim_k (R/I^k \otimes_R M). \tag{3}$$

这对于刻画 I-余约化模至关重要，见 [24]（命题 3.3 已证明），在获得 I-余约化 R-模在 [16, 25] 中的应用时也同样重要。本文将始终使用命题 3.3 中的陈述。

命题 3.3 [24, ov命题 2.3] 对于任意 R-模 M 及 R 的理想 I，以下陈述等价:

1. M 是 I-余约化，2. $IM = I^2M$，3. $R/I \otimes_R M = R/I^2 \otimes_R M$，
4. $\Lambda_I(M) = R/I \otimes_R M$，

5. $I\Lambda_I(M) = 0$。

命题 3.4 设 (I, J) 是 R 的一对固定理想，且 M 是一个 R-模。以下陈述等价：

1. M 是 (I, J)-余素的（即 $IJM = IM$ 或 $IJM = JM$）；2. $M/IJM = M/IM$ 或 $M/IJM = M/JM$；3. $R/IJ \otimes_R M \cong R/I \otimes_R M$ 或 $R/IJ \otimes_R M \cong R/J \otimes_R M$。

命题 3.5 设 (I, J) 是环 R 的一对固定理想。对于任意 R-模M，我们有图表 2 中的蕴含关系，它们与图表 1 中的蕴含关系互为对偶。

$$
\begin{array}{ccc}
 & & M \text{ is } I\text{-coreduced module} \\
 & & \Uparrow \\
 & & M \text{ is a coreduced module} \\
 & & \Uparrow \\
M \text{ is coprime} & \Rightarrow & M \text{ is weakly coprime} \\
\Downarrow & & \Downarrow \\
M \text{ is } I\text{-coprime} & \Rightarrow & M \text{ is } (I, J)\text{-coprime} \\
\Downarrow & & \\
M \text{ is } I\text{-coreduced} & &
\end{array}
$$

图表 2：不同余素模之间蕴含关系图。

证明：我们只证明以下蕴含关系： I-余素蕴含 $\Rightarrow$ I-余约化，以及 I-余素蕴含 (I, J)-余素。余素蕴含 $\Rightarrow$ 弱余素、弱余素蕴含 $\Rightarrow$ 余约化，可由 [3, 推论 5.4] 得出。其余蕴含关系则由已知结果得出。 I-余素蕴含 $\Rightarrow$ I-余约化：若 $IM = 0$，则 $I^2M = I(IM) = 0$。因此 $IM = I^2M$。若 $IM = M$，则 $I^2M = I(IM) = IM$。 I-余素蕴含 $\Rightarrow$ (I, J)-余素：若 $IM = 0$，则对于 R 的任意理想 I 和 J， $IJM = J(IM) \subseteq IM = 0$；或者若 $IM = M$，则 $IJM = J(IM) = JM$。因此， $IJM = IM$ 或 $IJM = JM$。

■

例 3.2、3.3、3.4 和 3.5 表明，Chart2 中的逆向蕴含一般并不成立。

例 3.2 设 $R := \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}$-模 $M := \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$。若 $I := (6)$ 和 $J := (2)$ 是 $\mathbb{Z}$的理想，则 M 是 I-互素的，但它并非互素。这是因为， $IM = 0$ ，但 $JM = 0$和 $JM = M$均不成立。

例 3.3 设 $R := \mathbb{Z}$和 $M := \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$。若 $I :=$ (4) 和 $J :=$ (3) 是 R的理想，则 M是 $(I,\ J)$-互素的，但它并非弱余素。因为对于理想 $K :=$ (2)，$K^2M = 0$ 成立，但 $KM \neq 0$不成立。

例 3.4 考虑环 $R := \mathbb{Z}$ 和 $\mathbb{Z}$-模 $M := \mathbb{Z}$。若 $I :=$(2) 和 $J := \mathbb{Z}$ 是 $\mathbb{Z}$ 的理想，则 M 是 (I, J)-互素的，但它不是 I-互素的。因为 IM 既不为零，也不等于 M。

例 3.5 若环 R 的幂等理想 I 存在一个 R-模M，使得 $IM \neq 0$ 且 $IM \neq M$，则 M 是 I-余约化的，但它不是 I-互素的。例如，取环 $R := \mathbb{Z}_6$ 的理想 $I := 3\mathbb{Z}_6$ 和 $\mathbb{Z}_6$-模 $M := \mathbb{Z}_6$，$IM = 3\mathbb{Z}_6$ 既不为零，也不等于 M，但 $I^2 = I$。

命题 3.6 </style}-互素 -模和 (, J)-互素 R-模对取同态像封闭。

证明：假设 N 是 M 的一个子模，且 M 是一个 I-互素 R-模。要么 $IM = 0$，要么 $IM = M$。若 $IM = 0$，则我们有 $I(M/N) = (IM + N)/N = 0$。假设 $IM = M$。则 $I(M/N) = (IM + N)/N = M/N$。因此，商模 M/N是 I-互素的。现在假设 M是一个(I, J)-互素 R-模，即对于 R的固定理想 I和 J，$IJM = IM$或 $IJM = JM$。若 $IJM = IM$，则$IJ(M/N) = (IJM + N)/N = (IM + N)/N = I(M/N)$。类似地，若 $IJM = JM$，则 $IJ(M/N) = J(M/N)$，至此证明完成。 ∎

4 GM 对偶与 MGM 等价

本节给出 Greenlees-May 对偶和 Matlis-Greenlees-May 等价的 I-素 R-模与 I-互素 R-模版本。令 $(R\text{-Mod})_{I\text{-prime}}$、$(R\text{-Mod})_{I\text{-coprime}}$、$(R\text{-Mod})_{I\text{-red}}$ 和$(R\text{-Mod})_{I\text{-cor}}$ 分别表示由 R-模中 I-素、 I-互素、 I-约化和 I-余约化的对象组成的满子范畴。

命题 4.1 若 M 是一个 I-素（分别地， I-互素） R-模，则 $M,\ \Gamma_I(M)$的子模（分别地， R-模 $\Lambda_I(M)$）是一个 I-互素（分别地，一个 I-素）R-模。特别地，下面的函子 (4) 和 (5) 存在。

$$\Gamma_I : (R\text{-Mod})_{I\text{-prime}} \longrightarrow (R\text{-Mod})_{I\text{-coprime}} \tag{4}$$

$$\Lambda_I : (R\text{-Mod})_{I\text{-coprime}} \longrightarrow (R\text{-Mod})_{I\text{-prime}}. \tag{5}$$

证明： 如果 M 是 I-素的，那么根据图表 1， M 是 I-约化的。由 [24, 命题 2.2], $I\Gamma_I(M) = 0$。根据定义 3.1可知， $\Gamma_I(M)$ 是一个 I-互素的 R-模。设 M 是一个 I- 互素的 R- 模。根据图表 2， M 是 I- 余约化的。由 [24, 命题 2.3] 可知， $I\Lambda_I(M) = 0$。因此，$(0 :_{\Lambda_I(M)} I) = \Lambda_I(M)$。根据命题 2.1， $\Lambda_I(M)$ 是 I-素的。 ∎

在 [24, 定理 3.4], 中，证明了这些函子

$$\Gamma_I : (R\text{-Mod})_{I\text{-red}} \longrightarrow (R\text{-Mod})_{I\text{-cor}} \tag{6}$$

and

$$\Lambda_I : (R\text{-Mod})_{I\text{-cor}} \longrightarrow (R\text{-Mod})_{I\text{-red}} \tag{7}$$

存在并构成一个伴随对，其中 Γ_I 是 Λ_I 的右伴随。现在我们得到定理 4.1，它是定理 3.4] 在局部素模和局部互素模上的限制。

定理 4.1（局部素模的 GM 对偶）函子 *(6)* 和 *(7)* 的伴随关系限制到 I-素 R-模和 I-互素 R-模，如图表 *3* 所示。

$$\begin{array}{ccc} (R\text{-Mod})_{I\text{-red}} & \overset{\Gamma_I}{\underset{\Lambda_I}{\rightleftarrows}} & (R\text{-Mod})_{I\text{-cor}} \\ \cup\mid & & \cup\mid \\ (R\text{-Mod})_{I\text{-prime}} & \overset{\Gamma_I}{\underset{\Lambda_I}{\rightleftarrows}} & (R\text{-Mod})_{I\text{-coprime}} \end{array}$$

图表 3：伴随函子图表。

证明： 将 Γ_I 和 Λ_I 限制到这些子范畴是良定义的，见命题 4.1。若 M 是 I-素的，则由图表 1 可知它是 I-约化的。因此，根据命题 2.2], $\Gamma_I(M) \cong \mathrm{Hom}(R/I,\ M)$ 是 M 中的自然同构。另一方面，若 M 是 I-互素的，则由图表 2 可知它是 I-余约化的；根据命题 2.3], $\Lambda_I(M) \cong R/I \otimes M$ 也是 M 中的自然同构。然而，众所周知，$\mathrm{Hom}(R/I,\ -)$ 是 $R/I \otimes -$ 的右伴随。由此可得，(4) 中给出的 Γ_I 是 (5) 中给出的 Λ_I 的右伴随。 ∎

例 4.1 对于环 R 的固定理想 I，选取两个 R-模 M 和 N，使得 $IM = IN = 0$。那么 M 和 N 都是 I-素且 I-互素的，因此二者都是 I-约化且 I-余约化的。所以，$\Gamma_I(M) = (0 :_M I) = M$，且 $\Lambda_I(N) \cong N/IN = N$。由此可知，$M$ 和 N 满足伴随 $\mathrm{Hom}_R(\Lambda_I(N)\ M) \cong \mathrm{Hom}_R(N,\ \Gamma_I(M))$。

Matlis-Greenlees-May（MGM）等价讨论的是，何时 I-挠 R-模的子范畴与 I-完备 R-模的子范畴等价。在定理 4.2 中，我们给出了以局部素模和局部互素模表述的条件，在这些条件下该等价成立。这推广了 [24, 定理 4.3]。

定理 4.2 对于任意固定的环 R 的理想 I 和任意 R-模 M，以下陈述等价：

1. M 是 I-素且 I-挠，

2. M 是 I-互素且 I-进完备，*3.* M 是 I-约化且 I-挠，*4.* M 是 I-余约化且 I-进完备，*5.* $IM = 0$。

证明：由图表 1、图表 2 和 [25, 命题 4.2], 可知，对于任意 R-模 M，(I-素 $+$ I-挠) $\Rightarrow$ (I-约化 $+$ I-挠) $\Leftrightarrow$ $IM = 0$，且(I-互素 $+$ I-进完备) $\Rightarrow$ (I-余约化 $+$ I-进完备) $\Leftrightarrow$ $IM = 0$，因此只需证明：若 $IM = 0$，则 M 既是 I-素又是 I-挠，且 M 既是I-互素又是 I-进完备。设 $IM = 0$，则 $\Gamma_I(M) = M$且$(0 :_M I) = M$。因此，M 是 I-素且 I-挠。再设 $IM = 0$。根据定义，M是 I-互素。此外，对所有 $k \in \mathbb{Z}^+$，$I^k M = 0$。因此，$\Lambda_I(M) \cong M$，且 M是I-进完备。

■

5 更多函子性性质

命题 5.1 若 M是一个 (I, J)-互素 R-模，则对任意 R-模 N，$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是一个 (I, J)-素 R-模。若 N是内射余生成元，则逆命题也成立。

证明：取 R 的任意两个理想 I 和 J，并设 M 是 (I, J)-互素的。利用 Hom-张量伴随和命题 2.4，我们有 $\mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{Hom}_R(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(R/IJ \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(R/IJ, \mathrm{Hom}_R(M, N))$。因此 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是 (I, J)-素的。对于逆命题，$\mathrm{Hom}_R(R/I \otimes M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(R/I, \mathrm{Hom}_R(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_R(R/IJ, \mathrm{Hom}_R(M, N)) \cong \mathrm{Hom}_R(R/IJ \otimes M, N)$。根据假设，$N$是内射余生成元。因此，$\mathrm{Hom}_R(-, N)$ 反映同构，且 $R/I \otimes M \cong R/IJ \otimes M$。所以，$M$是 (I, J)-互素的。

■

命题 5.2 设 I和 J是 R的有限生成理想，且 N是一个内射R-模。若 M是一个 (I, J)-素 R-模，则 R-模 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是 (I, J)-互素的。

证明：由 [23, 引理 1.46], 可知，对于 R的任意有限生成理想 I 和 J，$R/I \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R/I, M)\ N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R/IJ, M)\ N) \cong R/IJ \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N)$ 或 $R/J \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R/J, M)\ N) \cong \mathrm{Hom}_R(\mathrm{Hom}_R(R/IJ, M)\ N) \cong R/IJ \otimes_R \mathrm{Hom}_R(M, N)$。因此，$\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是 (I, J)-互素的。

■

命题 5.3 如果 M是一个 I-素（分别为 (I,J)-素、 I-互素以及 (I,J)-互素），那么对于 R 的所有素理想 $\mathcal{P}$， $R_{\mathcal{P}}$-模 $M_{\mathcal{P}}$也为 $I_{\mathcal{P}}$-素（分别为 $(I_{\mathcal{P}},J_{\mathcal{P}})$-素、 $I_{\mathcal{P}}$-互素以及 $(I_{\mathcal{P}},J_{\mathcal{P}})$-互素）。

证明：假设 M 是一个 I-素 R-模。根据命题 2.1，$\mathrm{Hom}_R(R/I,M)=0$ 或 $\mathrm{Hom}_R(R/I,M)=M$。根据 [22,引理 4.87],，$\mathrm{Hom}^{R_{\mathcal{P}}}(R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}},M_{\mathcal{P}})=0$或 $\mathrm{Hom}^{R_{\mathcal{P}}}(R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}},M_{\mathcal{P}})=M_{\mathcal{P}}$。假设 M是一个 (I,J)-素 R-模。根据命题 2.4，对于 R的任意理想 I 和 J，$\mathrm{Hom}_R(R/IJ,M)\cong\mathrm{Hom}_R(R/I,M)$ 或 $\mathrm{Hom}_R(R/IJ,M)\cong\mathrm{Hom}_R(R/J,M)$。根据 [22,引理 4.87]，$\mathrm{Hom}^{R_{\mathcal{P}}}(R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}J_{\mathcal{P}},M_{\mathcal{P}})\cong\mathrm{Hom}^{R_{\mathcal{P}}}(R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}},M_{\mathcal{P}})$ 或 $\mathrm{Hom}^{R_{\mathcal{P}}}(R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}J_{\mathcal{P}},M_{\mathcal{P}})=\mathrm{Hom}^{R_{\mathcal{P}}}(R_{\mathcal{P}}/J_{\mathcal{P}},M_{\mathcal{P}})$。现在，假设 M是一个 I-互素 R-模。$R/I\otimes_R M=0$ 或 $R/I\otimes_R M=M$。根据 [22, 命题 4.84],， $R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}\otimes_{R_{\mathcal{P}}}M_{\mathcal{P}}=0$或 $R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}\otimes_{R_{\mathcal{P}}}M_{\mathcal{P}}=M_{\mathcal{P}}$。假设 M是一个 (I,J)-互素 R-模。对于 R的任意理想 I和 J，$R/IJ\otimes_R M=R/I\otimes_R M$或 $R/IJ\otimes_R M=R/J\otimes_R M$。根据 [22,命题 4.84], $R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}J_{\mathcal{P}}\otimes_{R_{\mathcal{P}}}M_{\mathcal{P}}=R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}\otimes_{R_{\mathcal{P}}}M_{\mathcal{P}}$或 $R_{\mathcal{P}}/I_{\mathcal{P}}J_{\mathcal{P}}\otimes_{R_{\mathcal{P}}}M_{\mathcal{P}}=R_{\mathcal{P}}/J_{\mathcal{P}}\otimes_{R_{\mathcal{P}}}M_{\mathcal{P}}$。 ■

命题 5.4 </style}一个内射余生成元 -模，若同时是 -约化的（分别是 (, J)-素的），则是 I-余约化的（分别是 (I,J)-互素的）。

证明：设 N 是一个 R-模内射余生成元，且为 I-约化的。根据 [24,命题 2.2],$\mathrm{Hom}_R(R/I,N)\cong\mathrm{Hom}_R(R/I^2,N)$。由 Hom-张量伴随，$\mathrm{Hom}_R(N\otimes_R R/I,N)\cong\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{Hom}_R(R/I,N))\cong\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{Hom}_R(R/I^2,N))\cong\mathrm{Hom}_R(N\otimes_R R/I^2,N)$。根据假设， N 是内射余生成元。因此，$\mathrm{Hom}_R(-,N)$ 保持同构。于是， $R/I\otimes_R N\cong R/I^2\otimes_R N$，且根据 [24, 命题 2.3]， N 是 I-余约化的。现在假设 N 是一个内射余生成元R-模，且为 (I,J)-素的。令 $\mathrm{Hom}_R(R/IJ,N)\cong\mathrm{Hom}_R(R/I,N)$。由 Hom-张量伴随，对于 R 的任意理想 I 和 J，$\mathrm{Hom}_R(N\otimes_R R/I,N)\cong\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{Hom}_R(R/I,N))\cong\mathrm{Hom}_R(N,\mathrm{Hom}_R(R/IJ,N))\cong\mathrm{Hom}_R(N\otimes_R R/IJ,N)$。根据假设， N 是内射余生成元。因此，$\mathrm{Hom}_R(-,N)$ 保持同构，且 $R/I\otimes_R N\cong R/IJ\otimes_R N$。类似地，若 $\mathrm{Hom}_R(R/IJ,N)\cong\mathrm{Hom}_R(R/J,N)$，则$R/J\otimes_R N\cong R/IJ\otimes_R N$。 ■

命题 5.5 一个投射生成元 R-模若是 I-余约化的（分别地，(I,J)-互素的），则也是 I-约化的（分别地，(I,J)-素的）。

证明：设 M 是一个 R-模投射生成元，且为 I-余约化。假设$R/I\otimes_R M\cong R/I^2\otimes_R M$。由 Hom-张量伴随可得，$\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(R/I,M))\cong\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R R/I,M)\cong\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R R/I^2,M)\cong\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(R/I^2,M))$。根据假设， M是投射生成元。因此，$\mathrm{Hom}_R(M,-)$ 反映同构，且 $\mathrm{Hom}_R(R/I,M)\cong\mathrm{Hom}_R(R/I^2,M)$。现在假设 M 是一个 R-模投射生成元，且为(I,J)-互素。令 $R/I\otimes_R M\cong R/IJ\otimes_R M$。由 Hom-张量伴随，对 R的任意理想 I 和 J，$\mathrm{Hom}_R(M,\mathrm{Hom}_R(R/I,M))\cong\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R R/I,M)\cong\mathrm{Hom}_R(M\otimes_R R/IJ,M)\cong$

$\mathrm{Hom}_R(M, \mathrm{Hom}_R(R/IJ, M))$。根据假设，$M$是投射生成元。因此，$\mathrm{Hom}_R(M, -)$ 反映同构。因此，$\mathrm{Hom}_R(R/I, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/IJ, M)$。类似地，若 $R/J \otimes_R M \cong R/IJ \otimes_R M$，则 $\mathrm{Hom}_R(R/J, M) \cong \mathrm{Hom}_R(R/IJ, M)$。 ■

推论 5.1 下列每一陈述均成立：

1. 若一个 R-模 M 是互素的，且 N 是任意 R-模，则 R-模 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是素的。当 N是内射余生成元时，逆命题成立。2. 设 R 是诺特环，且 N 是内射余生成元 R-模。若M是素 R-模，则 $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ 是互素 R-模。3. 若 M 是素（相应地，弱素、互素和弱余素） R-模，则对 R的所有素理想 $\mathcal{P}$， $R_{\mathcal{P}}$-模 $M_{\mathcal{P}}$ 是素（相应地，弱素、互素和弱余素）的。4. 约化（相应地，弱素）的内射余生成元 R-模也是余约化（相应地，弱余素）的。5. 余约化（相应地，弱余素）的投射生成元 R-模也是约化（相应地，弱素）的。

证明： 这分别由命题 5.1、5.2、5.3、5.4 和 5.5，以及如下事实得出：模是全局素的，当且仅当它们对环 R的每个理想都是局部素的。 ■

注 5.1 推论 5.1 得到了 [29, 定理 3.1] 中的一些结果。

5.1 结论

尽管本文主要研究局部素模，我们也已表明，局部素模是理解全局素模的一条途径。此外，不难看出，局部素模的定义允许将素性概念自然地推广到其他范畴。这些范畴包括：R-模的链复形范畴 $\mathrm{Ch}(R)$、群范畴、 R-模的导出范畴 $\mathrm{D}(R)$，以及某个群 G 的G-集范畴。一般而言，它们提供了一种途径，可将素性概念推广到由某种其他结构的作用所定义的范畴并加以研究。对于 G的群，该作用作用于自身。另一方面，研究局部素模也存在不利之处。它们较为刚性，不如其全局对应物灵活，后者允许使用任意理想。因此，若干对全局素成立的现象无法对局部素模成立。其中包括无法像全局素模那样建立模的局部素谱理论，见 [18, 19, 20, 27]。

问题 5.1 能否为环 R 的一对理想 (I, J) 定义类似于 Γ_I 与 Λ_I 的函子，使得 (I, J)-素 R-模与 (I, J)-互素 R-模的子范畴之间存在伴随?

致谢

第一作者感谢多多马大学在她于马凯雷雷大学访问期间提供的经费支持。第二作者则得到了国际科学计划通过东非代数研究小组提供的资助。

利益冲突披露

作者声明不存在需要披露的利益冲突。

参考文献

[1] T. Abebaw, A. Mamo, D. Ssevviiri 和 Z. Teshome. 关于 Greenlees-May 对偶与 Matlis-Greenlees-May 等价. 数学研究, 12(1):2469953, 2025年.[2] L. Alonso, A. Jeremias 和 J. Lipman. ´概形上的局部同调与上同调. *Annales scientifiques de l'Ecole normale sup´erieure*, 30:1–39, 1997.[3] H. Ansari-Toroghy 和 F. Farshadifar. 某些素子模推广概念的对偶概念. 代数通讯, 39(7):2396–2416, 2011.[4] A. Azizi. 关于素子模和弱素子模. 越南数学杂志, 36:315–325, 2008.[5] A. Azizi. 根式公式与弱素子模. 格拉斯哥数学杂志, 51(2):405–412, 2009.[6] M. Behbood, O. A. S. Karamzadeh 和 H. Koohy. 某些子模为素子模的模. 越南数学杂志, 32(3):303–317, 2004.[7] M. Behboodi. 模上的 Baer 下零根的一种推广 . 代数及其应用杂志 , 6(2):337–353, 2007.[8] M. Behboodi. 关于模的素根和 Baer 下零根.匈牙利数学学报, 122(3):293–306, 2009.[9] M. Behboodi 和 H. Koohy. 弱素模. 越南数学杂志, 32(2):185–195, 2004.

[10] S. Ceken, M. Alkan 和 P. F. Smith. 非交换环上的第二类模. 代数通讯, 41(1):83–98, 2013.[11] J. Dauns. 素模. *Journal f¨ur die reine und angewandte Mathematik*, 298:156–181, 1978年.[12] H. Faridian. Greenlees-May 对偶简述. 数学及其应用综述, 14:17–48, 2019.[13] N. J. Groenewald. 近环中的不同素理想. 代数通讯, 19(10):2667–2675, 1991.[14] A. Konovalov, A. Smoktunowicz 和 L. Vendramin. 关于斜括号及其理想. 实验数学, 30(1):95–104, 2021.[15] A. Kyomuhangi 和 D. Ssevviiri. 交换环上模的局部幂零根. *Beitr¨age zur Algebra und Geometrie/Contributions to Algebraand Geometry*, 61(4):759–769, 2020年.[16] A. Kyomuhangi 和 D. Ssevviiri. 广义约化模. 巴勒莫数学学会汇刊（第二辑）, 72(1):421–431, 2023.[17] T. K. Lee 和 Y. Zhou. 约化模 . 载于环、模、代数与阿贝尔群，纯粹与应用数学讲义第236卷，第365–377页。Marcel Dekker，纽约, 2004.[18] C. P. Lu. 模的素谱上的扎里斯基拓扑. 休斯敦数学杂志, 25(3):417–432, 1999.[19] R. L. McCasland, M. E. Moore 和 P. F. Smith. 关于交换环上模的谱. 代数通讯, 25(1):79–103, 1997.[20] M. A. Parsa 和 H. Fazaeli Moghimi. 与交换环上模相关的概形. 代数通讯, 52(12):5289–5301, 2024.[21] M. Porta, L. Shaul 和 A. Yekutieli. 关于完备化与挠的同调. 代数与表示论, 17(1):31–67, 2014.[22] J. J. Rotman. 同调代数导论. Springer，纽约，第2版，2009.[23] P. Schenzel 和 A. M. Simon. 完备化、*Čech*、局部同调与上同调：它们之间的相互作用. Springer，沙姆，2018.[24] D. Ssevviiri. 约化模与余约化模的应用 I. 国际代数电子期刊, 35(35):61–81, 2024.

[25] D. Ssevviiri. 约化与核约化模的应用 II：函子 $\mathrm{Hom}_R(R/I, -)$ 的根性. https://arxiv.org/abs/2306.12871v2, 2025.[26] D. Ssevviiri 与 N. J. Groenewald. 环元素的幂零性向模元素的推广. 代数通讯, 42(2):571–577, 2014..
[27] U. Tekir. 关于模层. 代数通讯, 33(8):2557– 2562, 2005.[28] Y. Tiras、A. Harmanci 与 P. F. Smith. 素子模的一个刻画. 代数通讯, 27(6):2767–2783, 1999.[29] S. Yassemi. 素子模的对偶概念. $Archivum\ Mathematicum$, 37(4):273–278, 2001.