arXiv:2602.18828v1 [math.GN] 21 Feb 2026

# 非对称局部凸空间中弱紧集的可数性性质

Jobst Ziebell 0000-0002-9715-6356

德国耶拿弗里德里希·席勒大学数学与计算机科学学院

2026年2月24日

本文建立了非对称局部凸空间的对偶对表述，对通常的向量空间情形作了严格推广。极拓扑的概念延伸到了非对称情形，并重现或推广了一些熟知结果，例如双极定理和 Mackey-Arens 型定理。本文研究了弱紧性与可数性性质的影响，发现它们与分离性质密切相关。本文引入了著名空间 $C_p(K)$ 的非对称对应空间 $C_a(K)$，并考察了（相对）（可数或序列）紧子空间的性质。特别地，本文证明了 $C_a([0,1])$ 不具有天使性。然而，对于满足简单闭包条件的豪斯多夫子空间，不同的紧性条件彼此等价，并蕴含弗雷歇-乌雷松性质。此外，在非对称赋范空间中，Eberlein-Šmulian定理的一个对应版本成立。

## 1 引言

本文旨在推导 Eberlein-Šmulian 定理的非对称类比，尤其关注非对称赋范空间中弱紧集的序列性质。研究这些问题的动机源于测度论中的一个简单考量：设在某个可测空间 $(X,\ \mathcal{A})$ 上有一个有限测度 $\mu$，以及一列定义在 $X$ 上的实值 $\mu$-可测函数 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$。我们可以考察这列函数的收敛性质

$$n \mapsto \int_X \exp\left[f_n\right] \mathrm{d}\mu\,. \tag{1}$$

如果它收敛到一个有限数，就可以立即得知，当 $N \in \mathbb{N}$ 足够大时，函数 $(\max\{f_n, 0\})_{n=N}^{\infty}$ 是一致 $\mu$-可积的。利用 Komlos定理以及被积函数的凸性，可以推出 $\{\max\{\sum_{m=N}^{n} f_m/n, 0\} : n \in \mathbb{N}_{\geq N}\}$ 在 $L^1(\mu)$ 中相对紧。与此同时，我们对这些 $f_n$s 的负部所知甚少，因此甚至无法确定，当 $n \in \mathbb{N}$ 足够大时，是否有 $f_n \in L^1(\mu)$。这一现象可以通过非对称半范数 $f \mapsto \int_X \max\{f, 0\}\mathrm{d}\mu$ 轻易地刻画，从而得到一个非对称赋范空间。事实上，该非对称赋范空间中的这个集合在弱拓扑下具有强大的紧性性质。若所讨论的集合具有序列性质，便可据此利用 Fatou引理、控制收敛定理等得出结论。

Eberlein-Šmulian定理的自然背景是对偶对。然而，据作者所知，这一概念尚未在非对称局部凸空间的语境中得到探讨。KR92第二章为局部凸锥建立了一个范围广得多的框架 [KR92，第二章。3], 但该框架建立在相当抽象的序结构之上，与相对简单的半范数族概念缺乏直接联系。因此，本文的目的有三：

- 构建一种简洁的非对称对偶对表述，类似于局部凸向量空间领域中的表述。
- 探讨可数性性质与弱紧性之间的相互作用。
- 将这些结果应用于非对称赋范空间的弱拓扑。

在对称情形下，将带有弱拓扑的赋范空间嵌入函数空间 $C_p(K)$ 中颇有启发意义；该函数空间由紧Hausdorff空间上的连续函数构成，并赋予逐点收敛拓扑。在非对称情形中，与之对应的空间 $C_a(K)$ 成为 $C_p(K)$ 的非对称版本。遗憾的是，$C_p(K)$ 的天使性在过渡到 $C_a(K)$ 时无法保留，不过仍可推导出非常有用的紧性和序列性质。

在第2节中，我们介绍基本概念，并说明一些可能不熟悉的技术细节。 第3节将非对称对偶对阐述为向量空间与锥之间的配对。基于这一表述，我们定义极拓扑，特别是弱拓扑和弱-$*$ 拓扑，并证明双极定理以及一类 Mackey-Arens 型定理。我们还证明，每一种 $T_0$ 非对称局部凸拓扑都自然地是极拓扑。 第4节阐明弱紧性与可数性性质之间的关系，并将这些结果应用于空间 $C_a(K)$，见第5节。该节证明，$C_p(K)$ 的若干拓扑性质可以传递到 $C_a(K)$。此外，文中还证明，$C_a([0,1])$ 不具有天使性，并指出天使性失效的原因可能是紧子集不具备豪斯多夫性。最后，第6节给出非对称赋范空间的弱拓扑所带来的一些直接推论。

# 2 预备知识

## 2.1 一些拓扑概念

我们不默认拓扑空间是豪斯多夫的。如果每个点都有一个由闭集构成的邻域基，则称该空间为正则空间 [Sch97，例15.33.c]。拓扑空间 $X$ 的子集 $A$ 是紧的，如果 $A$ 的每个开覆盖都有有限子覆盖；按照 [KK87]，的用法，我们称 $A$ 在 $X$ 中相对紧，如果 $X$ 的每个开覆盖都有 $A$ 的有限子覆盖。类似地，如果每个可数开覆盖都有有限子覆盖，则称 $A$ 为可数紧；如果 $X$ 的每个可数开覆盖都有 $A$ 的有限子覆盖，则称 $A$ 在 $X$ 中相对可数紧。最后，如果 $A$ 中的每个序列在 $A$ 中都有收敛子序列，则称 $A$ 为序列紧；如果 $A$ 中的每个序列在 $X$ 中都有收敛子序列，则称 $X$ 为相对序列紧。为完整起见，我们陈述如下结果：

**推论 2.1**。 $A$ 在 $X$ 中是相对紧的，当且仅当 $A$ 中的每个网 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 在 $X$中都有一个聚点。$A$ 在 $X$ 中是相对可数紧的，当且仅当 $A$中的每个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 在 $X$中都有一个聚点。

¯注意，如果 $X$ 是正则的，那么 $A$ <style id='8}是相对紧的，当且仅当其闭包 $A$ 是紧的[Sch97，命题 17。15]。

**定义 2.2** （[KK87]）。 拓扑空间 $X$ 是 **天使性的**，如果给定一个相对可数紧子集 $A\subseteq X$

(i) $A$ 是相对紧的，

(ii) 对每个 $a\in \operatorname{cl} A$，存在一个序列 $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 属于 $A$，且收敛到 $a$。

一个 **网络** 在拓扑空间 $X$ 中是一个集合族 $\mathcal{N}$，由 $X$ 的子集组成，并且满足：对每个 $x\in X$ 以及每个邻域 $U$ 中的 $x$，都存在某个 $N\in\mathcal{N}$ 使得 $x\in N\subseteq U$。拓扑空间 $X$ 称为 **林德洛夫空间**，如果每个开覆盖都有一个 $X$ 的可数子覆盖。若对 **的每个子空间** $X$ 都满足同样的性质，则称其为遗传林德勒夫空间。以下引理 是众所周知的，这里陈述它以求完整。

**引理 2.3**。 设 $X$ 是一个具有可数网络的拓扑空间。那么 $X$ 是遗传林德勒夫的。

证明。 将该可数网络记为 $\mathcal{N}$，并设 $A\subseteq X$ 和 $(U_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是$A$的一个开覆盖。对每个 $x\in A$，根据定义，存在某个 $N_x\in\mathcal{N}$使得 $x\in N_x$，且存在某个 $\alpha_x\in I$ 使得$N_x\subseteq U_{\alpha_x}$。因此，$\cup_{x\in A}N_x$ 是由可数集合族构成的 $A$ 的一个覆盖

$$\mathcal{M}=\{N_x : x\in A\}\subseteq\mathcal{N}. \tag{2}$$

因此，存在一个可数子集 $B\subseteq A$，其具有

$$A\subseteq\bigcup_{x\in B}N_x\subseteq\bigcup_{x\in B}U_{\alpha_x}. \tag{3}$$

□

这是一个众所周知命题的变体，其中涉及一个能够分离点的连续函数族。

**引理 2.4**。设 $X$ 是一个可数紧空间，$F$ 是定义在 $X$ 上的实值上半连续函数的可数族，并且满足以下性质：

$$\forall x, y \in X \exists f \in F : f(x) < f(y) . \tag{4}$$

那么 $X$ 是紧的，$T_1$ 并且具有可数网络。

证明。显然，$X$ 是 $T_1$。对每个 $f \in F$ 和每个 $q \in \mathbb{Q}$，考虑闭集

$$C(f, q) = \{x \in X : f(x) \geq q\} \tag{5}$$

并令 $\mathcal{N}$ 为所有这类集合的有限交所组成的集族。那么 $\mathcal{N}$ 是可数的，而且实际上是 $X$ 的一个网络。为此，设 $x \in X$，且 $U$ 是 $x$ 的一个开邻域。显然，$K = X \setminus U$ 是可数紧的，并且对每个 $y \in K$，我们都能找到某个 $f_y \in F$，使得 $f_y(y) < f_y(x)$。因此，存在某个 $q_y \in \mathbb{Q}$，使得 $x \in C(f_y, q_y)$ 且 $y \notin C(f_y, q_y)$，于是我们可以令 $V_y = X \setminus C(f_y, q_y)$。由于 $\mathcal{N}$ 是可数的，$\{V_y : y \in K\}$ 是 $K$ 的一个可数开覆盖。因此，存在 $y_1, \ldots\ldots, y_n \in K$，使得 $\cup_{m=1}^{n} V_{y_m} \supseteq K$。于是，

$$x \in \bigcap_{m=1}^{n} C(f_{y_m}, q_{y_m}) = \bigcap_{m=1}^{n} [X \setminus V_{y_m}] = X \setminus \bigcup_{m=1}^{n} V_{y_m} \subseteq X \setminus K = U . \tag{6}$$

因此，$X$ 具有可数网络，根据引理 2.3，$X$ 是林德洛夫的，因此是紧的。 □

**定义 2.5**。集合 $X$ 上的**拟一致性**是 $X \times X$,的非空子集族 $\mathcal{U}$，满足

$$\begin{gathered} \forall U \in \mathcal{U} \forall x \in X : (x, x) \in U \\ \forall U \in \mathcal{U}, V \subseteq X \times X : U \subseteq V \implies V \in \mathcal{U} \\ \forall U, V \in \mathcal{U} : U \cap V \in \mathcal{U} \\ \forall U \in \mathcal{U} \exists V \in \mathcal{U} : V \circ V \subseteq U , \end{gathered} \tag{7}$$

其中 $U \circ V = \{(x, z) \in X \times X \mid \exists y \in X : (x, y) \in U \text{且} (y, z) \in V\}$。$\mathcal{U}$在 $X$ 上诱导出一个拓扑 $\tau_{\mathcal{U}}$，对于该拓扑，子集 $A \subseteq X$ 是开集当且仅当

$$\forall x \in A \exists U \in \mathcal{U} : U[x] \subseteq A , \tag{8}$$

其中 $U[x] = \{y \in X : (x, y) \in U\}$，并且可以证明 $U[x]$是 $x$的一个邻域。集合族 $\mathcal{U}^{-1} = \{U^{-1} : U \in \mathcal{U}\}$是 $X$上的另一种拟一致性，称为**共轭拟一致性**，其中

$$U^{-1} = \{(y, x) \in X \times X : (x, y) \in U\} . \tag{9}$$

$\mathcal{U}$是一个**一致性**，如果 $\mathcal{U} = \mathcal{U}^{-1}$。此外，我们用 $\mathcal{U}_s$（‘s’表示对称）表示包含拟一致性 $\mathcal{U}$的最小一致性。给定 $U \in \mathcal{U}$，子集 $A \subseteq X$ 的 $U$**-加厚集** $A_U$定义为

$$A = \{y \in X | \exists x \in A : (x, y) \in A\} = \bigcup_{x \in A} U[x] . \tag{10}$$

**引理 2.6.** 设 $\mathcal{U}$ 是集合 $X$ 上的拟一致性，该集合配备了诱导拓扑和$A \subset X$。那么，

$$\operatorname{cl} A = \bigcap_{U \in \mathcal{U}} U^{-1}[A] \,. \tag{11}$$

证明。 设 $x \in \operatorname{cl} A$，即对每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在某个 $x_U \in A$满足 $x_U \in U[x]$。于是，$x \in U^{-1}[x_U]$。反之，若 $x \in \cap_{U\in\mathcal{U}} U^{-1}[A]$，则对每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在某个 $x_U \in A$满足 $x \in U^{-1}[x_U]$，因此， $x_U \in U[x]$。 □

拟一致空间 $(X, \mathcal{U})$ 的子集 $A$ 若对所有 $U \in \mathcal{U}$，都存在$a_1, \ldots, a_n \in A$ 满足 $\cup_{m=1}^{n} U[a_m] \supseteq A$，则称其为**预紧** 。

拓扑空间 $X$ 在点 $x \in X$ 处的**伪特征** 若存在一个可数开集集，其交等于 $\{x\}$，则称其为可数。这个引理在文献中可能早已为人所知，但作者未能找到任何相关参考文献。

**引理 2.7.** 设 $X$ 是一个可数紧正则拓扑空间，$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是$X$ 中的一个序列，且有某个 $x \in X$ 是其聚点。若 $X$ 在 $x$ 处的伪特征可数，则存在一个收敛到 $x$的子序列。

证明。 设 $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是一个开集递减序列，且 $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n = \{x\}$。由于 $X$ 是正则的，存在 $x$ 的闭邻域递减序列 $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ，使得 $V_n \subseteq U_n$。现在，由于 $x$ 是 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$的聚点，存在某个 $n(1) \in \mathbb{N}$ ，使得 $x_{n(1)} \in V_1$。归纳地，对每个 $m \in \mathbb{N}$，都可以找到 $n(m+1)$，满足

$$n\,(m+1) \geq n\,(m) \qquad \text{and} \qquad a_{n(m+1)} \in V_{m+1}\,. \tag{12}$$

由于 $X$ 是可数紧的，序列 $(x_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ 有一个聚点 $y \in X$。然而，由于 $(V_m)_{m\in\mathbb{N}}$ 是递减的，该序列最终包含于每个 $V_m$中，因此

$$y \in \bigcap_{m\in\mathbb{N}} V_m \subseteq \bigcap_{m\in\mathbb{N}} U_m = \{x\}\,. \tag{13}$$

因此，$(x_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ 恰好有一个聚点，即 $x$。现在假设 $(x_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ 不收敛于 $x$。那么，存在 $U$的一个邻域 $x$ 以及一个完全位于 $X \setminus U$中的子序列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$。由可数紧性，$(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 有一个聚点$y \in X \setminus U$。然而，该聚点必然也是 $(x_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$的聚点，使得 $y = x$ ，这就产生了矛盾。因此，$(x_{n(m)})_{m\in\mathbb{N}}$ 收敛于 $x$。 □

## 2.2 非对称局部凸空间

向量空间和锥始终被视为定义在实数域上的对象。在向量空间或锥 $X$ 上，函数$p : X \to [0, \infty)$称为**非对称半范数**，如果

$$p\,(rx) = rp\,(x) \qquad p\,(x+y) \leq p\,(x) + p\,(y)\,, \tag{14}$$

对所有 $r \geq 0$ 以及所有 $x$， $y \in X$。请注意，这与 [Cob12 第 2.3 节3], 中所讨论的锥上的非对称半范数有所不同，后者还包含某种正定性。

由于向量空间上的半范数不具备正定性条件，本文将对锥上的类似函数也使用同一术语。给定一个向量空间或锥 $X$，其上的一族非对称半范数 $\mathcal{P}$ 会在 $X$ 上诱导出一个拓扑 $\tau_{\mathcal{P}}$，该拓扑的基由如下形式的集合构成：

$$U_{x,F,\epsilon} = \{y \in X | \exists \Delta \in X : y = x + \Delta \text{ and } \forall p \in F : p(\Delta) < \epsilon\} , \tag{15}$$

对于每个 $x \in X$、$\epsilon > 0$，以及 $\mathcal{P}$的每个有限子集 $F$。赋予此拓扑的向量空间 $X$ 是一个非对称局部凸空间，且加法连续 [Cob12，第 1.1 节。7]。当且仅当对于每个 $x \in X \setminus \{0\}$，存在某个 $p \in \mathcal{P}$使得 $p(x) > 0$ 或 $p(-x) > 0$ [Cob12，命题 1.1。63]，该拓扑才是 $T_0$。此外，显然每个 $p \in \mathcal{P}$ 相对于 $\tau_{\mathcal{P}}$都是上半连续的。还有一个与之相关、诱导出 $\tau_{\mathcal{P}}$的拟一致结构 $\mathcal{U}$，它是包含所有如下形式集合的最小此类对象

$$V_{F,\epsilon} = \{(x, y) \in X \times X | \forall p \in F : p(y - x) < \epsilon\} \tag{16}$$

对于 $F$ 且 $\epsilon$ 如上所述 [Cob12，第 1.1 节。7]。等价地，正如阿贝尔拓扑群的情形，$\mathcal{U}$ 由以下对象生成

$$\{(x, x + U) | x \in X, U \subseteq X \text{ is a neighbourhood of the origin}\} . \tag{17}$$

因此，无需提及其生成半范数，我们也可以谈论非对称局部凸空间的典范拟一致结构。非对称半范数的**共轭**族定义为$\underline{\mathcal{P}} = \{\underline{p} : p \in \mathcal{P}\}$，其中$\underline{p}$对于所有 $x \in X$，$\underline{p}(x) = p(-x)$。于是，$(X, \mathcal{P})$ 是共轭非对称局部凸空间，其关联的拟一致结构由 $U = \{U^{-1} : U \in \mathcal{U}\}$ 给出。非对称半范数 $p$定义在 $X$上，并满足

$$\forall x \in X : p(x) = 0 \text{ and } p(-x) = 0 \implies x = 0 , \tag{18}$$

是一个**非对称范数** [Cob12，第 1.1 节。1]。若 $\mathcal{P}$ 由单个非对称范数组成$p$，$(X, \mathcal{P})$ 记作$(X, p)$，并称为**非对称赋范空间**。对于非对称局部凸空间 $X$，我们关联如下**对偶空间** $X^*$：它由定义在 $X$上的所有线性、上半连续实值函数组成。显然，它是一个可消锥。注意，每个局部凸空间都是非对称局部凸空间；在这种情形下，对偶空间与通常的定义相对应。子集 $H \subseteq X^*$ 是**等度连续的**，如果对每个 $\epsilon > 0$，都存在原点的一个邻域 $U \subseteq X$，使得

$$\forall \phi \in H \forall x \in U : \phi(x) < \epsilon . \tag{19}$$

同样，在通常的局部凸情形下，这与通常定义一致，其中$|\phi(x)| < \epsilon$，因为零的每个邻域都包含零的一个平衡邻域。

# 3 非对称对偶对

**定义 3.1.** 元组 $(X, Y, b)$ 由向量空间 $X$、锥 $Y$以及关于第二变量中非负标量双线性的映射 $b : X \times Y \to \mathbb{R}$ 构成，该映射在如下意义下是**非退化的**：对所有 $x \in X$ 以及所有 $y, z \in Y$，

$$b(x, \cdot) = 0 \implies x = 0 \quad \text{and} \quad b(\cdot, y) = b(\cdot, z) \implies y = z, \tag{20}$$

是一个**非对称对偶对**。我们将使用缩写 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 来代替 $b$，并且也简单地写成 $X$ 与 $Y$**处于对偶**。

显然，每个普通对偶对都是非对称对偶对；而非对称对偶对当且仅当两个空间都是向量空间时，才是普通对偶对。在本节余下部分，我们固定一组处于对偶关系中的 $X$ 和 $Y$。

**推论 3.2**。 $Y$ 是可消去的。

证明。 设 $a,b,c\in Y$，并假设 $a+c=b+c$。那么，由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是双线性的，

$$\langle x,a\rangle=\langle x,a+c\rangle-\langle x,c\rangle=\langle x,b+c\rangle-\langle x,c\rangle=\langle x,b\rangle\ , \tag{21}$$

对每个 $x\in X$ 都成立。由于 $\langle\cdot,\cdot\rangle$ 是非退化的，故可得 $a=b$。 □

由于 $Y$ 是可消去的，因此可以将其嵌入一个向量空间中。具体而言，令 $\widetilde{Y}=$ 线性张成 $\{\langle\cdot,y\rangle:\ y\in Y\}$，并注意到 $X$ 和 $Y$ 以显然的方式构成一对向量空间的对偶对。因此，我们可以考虑子集 $A\subset X$ 的**湮灭子**，定义如下：

$$\mathrm{ann}A=\left\{y\in\widetilde{Y}\middle|\forall x\in A:\langle x,y\rangle=0\right\}\ . \tag{22}$$

**命题 3.3**。

$$p_y:X\to[0,\infty),x\mapsto\max\left\{\langle x,y\rangle,0\right\} \tag{23}$$

是一个非对称半范数。此外，$\mathcal{P}=\{p_y:\ y\in Y\}$ 使 $(X,\mathcal{P})$ 成为一个 $T_0$ 非对称局部凸空间。如果 $Y$ 是一个向量空间，那么 $(X,\mathcal{P})$ 是一个豪斯多夫局部凸空间。还存在一个自然的偏序 $\leq$ 定义在 $X$ 上，其定义如下：

$$x\leq x'\iff\forall y\in Y:\langle x,y\rangle\leq\langle x',y\rangle \tag{24}$$

对所有 $x,x'\in X$ 均成立。它与 $(X,\mathcal{P})$ 上的特化序一致，即 $x\leq x'\iff x'\in\mathrm{cl}\{x\}$。特别地，如果 $(X,\mathcal{P})$ 是 $T_1$，那么 $\leq$ 就是 $X\times X$ 的对角线。

证明。 $p_y$ 是一个非对称半范数显然成立，因此 $(X,\mathcal{P})$ 是一个非对称局部凸空间。设 $x\in X$，使得对于所有 $y\in Y,p_y(x)=0$ 且 $(-x)=0$。于是，对于所有 $y\in Y$，有 $\langle x,y\rangle=0$，其中 $x=0$ 由假设成立，因此 $(X,\mathcal{P})$ 是 $T_0$。如果 $Y$ 是一个向量空间，则可得 $(X,\mathcal{P})$ 是一个 $T_0$ 局部凸空间，因而是豪斯多夫的。容易看出，$\leq$ 是一个偏序。此外，对于所有 $x,x'\in X$，

$$x'\in\mathrm{cl}\{x\}\iff\forall\epsilon>0\forall y\in Y:p_y(x-x')<\epsilon\iff\forall y\in Y:\langle x,y\rangle\leq\langle x',y\rangle\ . \tag{25}$$

□

在 $X$ 上相应的拓扑记作 $\sigma(X,Y)$，这符合对偶对的通常记法。此外，我们将共轭拓扑记作 $\sigma(X,Y)$，将同时包含这两种拓扑的最小拓扑记作 $\sigma_s(X,Y)$。当然，也存在相应的对偶拓扑。

**命题 3.4** ([Cob12，命题 2.4。1])。

$$q_x : Y \to [0,\infty), y \mapsto \max\{\langle x,y\rangle, 0\} \tag{26}$$

是一个非对称半范数。由 $\mathcal{Q} = \{q_x : \quad x \in X\}$ 生成的拓扑 $\sigma(Y,X)$ 是逐点收敛拓扑，即网 $(y_\alpha)_{\alpha\in I}$ 在 $Y$ $\sigma(Y,X)$中收敛于 $y \in Y$，当且仅当

$$\forall x \in X : \lim_\alpha \langle x, y_\alpha\rangle = \langle x,y\rangle \ . \tag{27}$$

~因此，$\sigma(Y,X)$ 与 $\sigma(Y,X)$ 所诱导的子空间拓扑一致，并且~集合的湮灭子必为 $\sigma(Y,X)$- 闭。对偶空间相对于 $\sigma(X,Y)$ 性质良好。

**定理 3.5.** $(X,\sigma(X,Y))^*$ 与 $Y$同构，其含义是

*(i)* 对每个 $\phi \in (X,\sigma(X,Y))^*$，都存在唯一的 $y \in Y$，使得 $\phi = \langle \cdot, y\rangle$,

*(ii) for every* $y \in Y, \langle \cdot, y\rangle \in (X,\sigma(X,Y))^*$.

证明。$(ii)$：显然，$\langle \cdot,\ y\rangle \le p_y$ 使得该结论可由 [Cob12，命题 2.1。11]。$(i)$：由于 $\phi$ 在非对称赋范空间 $(X,\sigma(X,Y))^*$上连续，因此存在$y_1$，.....，$y_n$ 以及某个 $C>0$ 满足

$$\phi(x) \le C\max\{p_{y_1}(x),\dots,p_{y_n}(x)\} = C\max\{\langle x,y_1\rangle,\dots,\langle x,y_n\rangle,0\}\ , \tag{28}$$

对所有 $x \in X$ [Cob12，命题 2.1。11]。集合 $K = \{Cy_1,\dots,Cy_n\}$ 显然是 $\sigma(Y,X)$-紧的，并且

$$\forall x \in X : \sup_{y\in K}\langle x,y\rangle \le 1 \implies \phi(x) \le 1\,. \tag{29}$$

因此，所求 $y \in Y$的存在性由 [KR92，定理 3。8]。由 $\langle\cdot$的非退化性 $\cdot\rangle$可知其唯一性显然。 □

因此，以下我们将使用这一等同关系 $Y \simeq (X,\sigma(X,Y))^*$。考虑到这一点，很明显，$\sigma(X,Y)$ 与非对称局部凸空间 $(X,\sigma(X,Y))$ 的弱拓扑一致，定义见 [Cob12, 第 2.4 节。6]。特别地，网 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}\sigma(X,Y)$-收敛到 $x \in X$，当且仅当对所有 $y \in Y$，$\limsup_\alpha\langle x_\alpha,y\rangle \le \langle x,y\rangle$。

**推论 3.6.** 设 $X$ 是一个 $T_0$ 非对称局部凸空间。那么，$X$ 与 $X^*$ 具有对偶性，且 $\sigma(X,X^*)$ 是 $X$ 上保持对偶空间 $X^*$的最弱 $T_0$ 非对称局部凸拓扑。

证明。我们只需证明 $X$ 和 $X^*$ 互为对偶，其余部分显而易见。若 $\phi,\psi \in X^*$ 满足：对所有 $x \in X$，$\phi(x) = \psi(x)$，则根据定义有 $\phi = \psi$。反之，假设 $x \in X$，且对所有 $\phi \in X^*$，$\phi(x) = 0$。若 $x \ne 0$，由于 $X$ 是 $T_0$，存在一个定义该拓扑的非对称半范数 $p$，使得 $p(x) > 0$ 或 $p(-x) < 0$。因此，Hahn-Banach 定理 [Cob12, Theorem 2.2.2] 给出一个线性泛函 $\psi \in X^*$，满足 $\psi(x) \ne 0$，从而产生矛盾。 □

类似地， $\sigma(Y,\ X)$ 与 $w^\flat$ 中定义的“ [Cob12，第 2.4 节。6] ”拓扑一致，因此称为**弱拓扑**。称集合 $A \subseteq X$ $\sigma(X,\ Y)$**- 有界**，相应地 $B \subseteq Y$ $\sigma(Y,\ X)$**- 有界**，如果

$$\forall y \in Y : \sup_{x\in A} \langle x, y\rangle < \infty \quad \text{respectively} \quad \forall x \in X : \sup_{y\in B} \langle x, y\rangle < \infty . \tag{30}$$

容易看出，这种有界性与普通对偶对中的有界性一致。

**命题 3.7.** 设 $A \subseteq X$ 与 $B \subseteq Y$。则函数

$$p_B : X \to [0,\infty], x \mapsto \sup_{y\in B} p_y(x) \tag{31}$$

是非对称半范数当且仅当 $B$ 是 $\sigma(Y, X)$-有界的。类似地，

$$q_A : Y \to [0,\infty], y \mapsto \sup_{x\in A} q_x(y) \tag{32}$$

是非对称半范数当且仅当 $A$ 是 $\sigma(X, Y)$-有界的。

因此，我们可以像在向量空间情形中那样，考虑由 $Y$上分别 $X$上的适当集合在 $X$ 上分别 $Y$上生成的**极拓扑**。设 $\mathcal{G}$表示 $Y$的分别 $X$的任意子集族，则由非对称半范数 $\{p_G :\ G \in \mathcal{G}\}$ 分别 $\{q_G :\ G \in \mathcal{G}\}$ 诱导的相应拓扑称为 $X$上分别 $Y$上的 $\mathcal{G}$**-拓扑**。特别地， $\sigma(X, Y)$与 $\sigma(Y, X)$照例由 $Y$中分别 $X$中所有单点集的族生成。

**命题 3.8.** 设 $A \subset X$ 和 $B \subseteq Y$。定义极 $A^\circ$ 和预极 $^\circ B$ 如下：

$$\begin{aligned} A^\circ &= \{y \in Y : q_A(y) \le 1\} = \left\{ y \in Y : \sup_{x\in A} \langle x, y\rangle \le 1 \right\} \\ {}^\circ B &= \{x \in Y : p_B(x) \le 1\} = \left\{ x \in X : \sup_{y\in B} \langle x, y\rangle \le 1 \right\} . \end{aligned} \tag{33}$$

那么， $A^\circ$ 是 $\sigma(Y, X)$-闭且凸的。此外，它是非负平衡 的，即 $y \in A^\circ$ 蕴含对所有 $t \in [0, 1]$都有 $ty \in A^\circ$。类似地， $^\circ B$ 是$\sigma(X, Y)$-闭、凸且非负平衡的。

证明。 $A^\circ$ 和 $^\circ B$ 是凸且非负平衡的，这显然成立。此外，由 [Cob12，命题 2.4.29]可知， $A^\circ$ 是$\sigma(Y, X)$-闭的。为证明 $^\circ B$ 是 $\sigma(X, Y)$-闭的，设 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$是 $^\circ B$ 中的一个网，它在 $\sigma(X, Y)$意义下收敛到某个 $x \in \overline{X}$。于是，

$$\langle x, y\rangle \le \liminf_\alpha \langle x_\alpha, y\rangle \le 1 , \tag{34}$$

对于所有满足 $x \in {}^\circ B$的 $y \in Y$。 □

**定理 3.9** (双极定理)。 设 $A \subset X$ 且 $B \subseteq Y$。令 $\mathcal{N}$ 表示 $\sigma(X,Y)$ 中原点的邻域基，

$$^{\circ}(A^{\circ}) = \mathrm{cl}_{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}\,[A \cup \{0\}] = \bigcap_{N\in\mathcal{N}} [N + \mathrm{conv}\,(A \cup \{0\})] \tag{35}$$

$$(^{\circ}B)^{\circ} = \mathrm{cl}_{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}\,[B \cup \{0\}]\,. \tag{36}$$

证明。 首先，我们证明 $A$ 的双极定理。显然， $0 \in {}^{\circ}(A^{\circ})$ 且 $\langle x, y\rangle \leq 1$对所有 $x \in A$, $y \in A^{\circ}$，使得 $A \subseteq {}^{\circ}(A^{\circ})$。根据 命题 3.8，可得

$$\mathrm{cl}_{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}\,(A \cup \{0\}) \subseteq {}^{\circ}(A^{\circ})\,. \tag{37}$$

若满足严格不等式，则存在某个 $x \in {}^{\circ}(A^{\circ})$ 不属于 $\mathrm{cl}^{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}(A \cup \{0\})$。因此，我们可以应用 Hahn-Banach 定理 [Cob12，定理 2.2。9] 并找到一个 $\phi \in (X, \sigma(X,Y))^{*}$，满足

$$\phi(x) < \inf \phi\left(\mathrm{cl}_{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}\,(A \cup \{0\})\right)\,. \tag{38}$$

根据定义， $\phi$ 是 $\sigma(X,Y)$-上半连续的，因此 $\psi = -\phi \in Y$满足

$$\sup \psi\left(\mathrm{cl}_{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}\,(A \cup \{0\})\right) < \psi(x)\,. \tag{39}$$

由于左侧包含原点， $\psi(x) > 0$，并且根据严格不等式，存在某个 $r > 1$ 满足 $r\psi/\psi(x) \in A^{\circ}$。然而，这与 $x \in {}^{\circ}(A^{\circ})$ 矛盾。因此，

$$^{\circ}(A^{\circ}) = \mathrm{cl}_{\sigma(Y,X)}\mathrm{conv}\,(A \cup \{0\})\,. \tag{40}$$

其余部分的方程 (35) 由引理 2.6得出。

对于 $B$，回想起 $\sigma(Y, X)$ 与由 $\sigma(Y, X)$ 诱导的子空间拓扑~一致，再应用向量空间对偶对的双极定理，即可显然得到该结论。 □

令 $\tau(X, Y)$ 表示 $X$ 上的**麦基拓扑**，即由以下内容诱导的 $\mathcal{G}$-拓扑：

$$\mathcal{G} = \{B \subseteq Y : B \text{ is convex and } \sigma(Y,X)\text{-compact}\}\,. \tag{41}$$

注意，在任意豪斯多夫拓扑向量空间中，凸紧集的凸平衡包是一个紧圆盘 [SW99，第 66 页，10。2]。因此，在向量空间的情形下， $\tau(X, Y)$ 与通常的麦基拓扑一致。

**引理 3.10**。 设 $X$ 是带有 $T_0$ 非对称局部凸拓扑 $\alpha$ 的向量空间。则，$\alpha \subseteq \tau(X, (X,\alpha)^{*})$。

证明。为简便起见，设 $Y = (X,\alpha)^{*}$，并令 $\mathcal{P}$ 表示生成其拓扑的 $X$ 上的非对称半范数组。此外，令 $\beta$ 表示由半范数共轭族 $\mathcal{P}$ 诱导的非对称局部凸拓扑。对于每个 $p \in \mathcal{P}$，集合 $p^{-1}([0,1])$ 是$\beta$-闭的 [Cob12，命题 1.1。59] 而且，配对 $(X,Y)$ 中的极 $K = p^{-1}([0,1])^{\circ}$ 是一个凸的、 $\sigma(Y,X)$-紧集 [Cob12，定理 2.4。30]此外，由定理 3.9，

$$\forall x \in X : p_K(x) \leq 1 \iff p(x) \leq 1\,. \tag{42}$$

因此， $p = p_K$，即 $p$ 是定义麦基拓扑的非对称半范数。 □

**定理 3.11.** 设 $X$ 和 $Y$ 互为对偶。则， $\tau(X,Y)^*$ 是 $X$ 上以 $Y$ 为对偶空间的最细非对称局部凸拓扑。

证明。 我们遵循 [SW99第 131 页定理 32] 中针对向量空间情形给出的证明。显然， $\tau(X,Y)$ 比 $\sigma(X,Y)$ 更细，因此

$$Y \simeq (X,\sigma(X,Y))^* \subseteq (X,\tau(X,Y))^* =: Z\,. \tag{43}$$

对于 $\phi \in Z$ 存在 $C > 0$ 和 $\sigma(Y,X)$-紧凸集 $B_1,\dots B_n \subseteq Y$ [Cob12命题 2.111]，满足

$$\phi \leq C \max\left\{p_{B_1},\dots,p_{B_n}\right\}\,. \tag{44}$$

~回顾一下， $\sigma(Y,X)$ 与 $\sigma(Y,X)$ 所诱导的子空间拓扑一致，并且拓扑向量空间中有限个凸紧集的凸包是紧集。于是，

$$B = \operatorname{conv}\left[\{0\} \cup C \bigcup_{m=1}^{n} B_m\right] \tag{45}$$

也具有凸性，且是 $\sigma(Y,X)$-紧的，即 $B \in \mathcal{G}$。显然， $\phi \leq p_B$ 因此，

$$^\circ\{\phi\} = \{x \in X : \phi(x) \leq 1\} \supseteq \{x \in X : p_B(x) \leq 1\} = {}^\circ B\,, \tag{46}$$

其中，预极集是在对偶对 $(X,Z)$ 中考察的。在 $(X,Z)$ 中对两边取极集，因而有 $(^\circ\{\phi\})^\circ \subseteq (^\circ B)^\circ$。赋予 $Y$ 和 $Z$ 各自的弱-$*$拓扑后，显然，典范嵌入 $Y \to Z$ 是线性且连续的。由于 $B$ 在 $Y$ 中是凸紧集，因此它在 $Z$ 中也具有凸性且是紧集。于是，由双极定理，

$$\phi \subseteq (^\circ\{\phi\})^\circ \subseteq (^\circ B)^\circ = B\,. \tag{47}$$

因此， $\phi \in Y$ 和 $Y = Z$。麦基拓扑是以对偶空间 $Y$ 为对偶的最细非对称局部凸拓扑，这一点由引理 3.10立即得出。 □

以下结果构成了麦基–阿伦斯定理的非对称类比。

**推论 3.12**。 设 $X$ 是一个拓扑为 $\alpha$ 的 $T_0$ 非对称局部凸空间 $X$ 。那么，$\sigma(X,X^*) \subseteq \alpha \subseteq \tau(X,X^*)$。

**推论 3.13**。 设 $\alpha$ 是定义在 $X$ 上的一个 $T_0$ 非对称局部凸拓扑，其 $\sigma(X,Y) \subseteq \alpha \subseteq \tau(X,Y)$。那么 $(X,\alpha)^* = Y$。

最后，每个 $T_0$ 非对称局部凸拓扑自然都是一个 $\mathcal{G}$-拓扑。

**命题 3.14**。 设 $X$ 是一个非对称局部凸空间， $V \subseteq X$ 是原点的一个邻域。那么 $V^\circ$ 是等度连续的。

**定理 3.15.** 设 $X$ 为一个 $T_0$ 非对称局部凸空间，并令

$$\mathcal{G} = \{H \subseteq X^* : H \textit{ is equicontinuous}\}\,. \tag{48}$$

$\mathcal{G}$ 拓扑与 $X$ 的原拓扑一致。

证明。 首先，我们需要证明每个 $H \in \mathcal{G}$ 都是 $\sigma(X^*, X)$-有界的。令 $\epsilon > 0$ 和 $U \subseteq X$为原点的一个邻域，且满足 $H(U) \subseteq (-\infty, \epsilon)$。对于每个 $x \in X$，显然存在某个 $t > 0$，使得 $tx \in U$，从而

$$\sup_{\phi \in H} \phi(x) = \frac{1}{t} \sup_{\phi \in H} \phi(tx) < \frac{\epsilon}{t}. \tag{49}$$

因此， $H$ 是 $\sigma(X^*, X)$-有界的，而 $\mathcal{G}$ 确实在 $X$上定义了一个非对称局部凸拓扑$\tau'$。令 $\tau$ 表示 $X$ 上的原拓扑， $\tau$ 表示共轭拓扑，则 $\tau$ 在原点处具有一个邻域基 $\mathcal{N}$，其由凸的、$\tau$-闭的集合组成 [Cob12, Section 1.1.7]。此外，对于每个 $U \in \mathcal{N}$，极 $U^\circ$ 根据命题 3.14 是等度连续的，因此 $p_{U^\circ}$ 是 $\tau'$上的上半连续非对称半范数。根据双极定理，

$$p_{U^\circ}^{-1}([0,1)) \subseteq p_{U^\circ}^{-1}([0,1]) = U. \tag{50}$$

由于 $p_{U^\circ}^{-1}([0,1))$是 $\tau'$中的一个 0-邻域， $U$也是如此，因而 $\tau \subseteq \tau'$也是如此。

反之，令$U \subseteq X$为 $\tau'$中的一个 0-邻域。于是，存在等度连续子集$H_1, \ldots, H_n \subseteq Y$以及某个 $\epsilon > 0$，使得

$$\cap_{m=1}^{n} p_{H_m}^{-1}([0,\epsilon)) \subseteq U. \tag{51}$$

显然，集合 $H = \cup_{m=1}^{n} H_m$ 也是等度连续的，并且 $p_H^{-1}([0,\epsilon)) \subseteq U$。根据定义，存在一个原点的 $\tau$-邻域 $V$，使得$V \subseteq p_H^{-1}([0,\epsilon/2))$，因此 $U$ 是 $\tau$ 中的一个 0-邻域，即 $\tau' \subseteq \tau$。 □

# 4 可数性条件与弱紧性

通过取有理系数的线性组合（锥组合），显然可得以下结论。

**命题 4.1**。 设 $X$ 和 $Y$ 互为对偶，并在两者上分别赋予任意的 $\mathcal{G}$-拓扑。若 $A \subseteq X$（分别地， $B \subseteq Y$）是可分的，则 线性张成 $A$（分别地，锥 $B$）是可分的。

在本节余下部分， $X$ 和 $Y$ 互为对偶，并假设分别赋有各自的弱拓扑。以下命题似乎是众所周知的结果。

**命题 4.2.** 设 $X$ 可分且 $Y$ 是一个向量空间。则 $Y$ 的每个可数紧子集都是紧的且可度量化的。

证明。 设 $A \subseteq Y$可数紧，且$(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 是 $X$中的一个稠密序列。对每个 $n \in \mathbb{N}$，考虑函数

$$f_n : Y \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x_n, y \rangle. \tag{52}$$

对偶地，我们可以考虑所有 $y \in Y$ 的函数 $g_y \colon X \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, y \rangle$。根据 $\sigma(X, Y)$ 的定义，每个 $g_y$ 都是上半连续的。由于 $Y$ 是一个向量空间， $g_{-y} = -g_y$ 也是向量空间，因此 $g_y$ 实际上是连续的。因此，显然， $G = F \cup (-F)$ 连同 $F = \{f_n \colon n \in \mathbb{N}\}$ 满足引理 2.4 的条件。由于命题 3.4 表明 $S$ 是豪斯多夫的，结论由 [Eng89, Theorem 3.1.19] 得出。 □

I在非对称情形中，可分性还不够，但可数基足以满足要求 .

**引理4.3**。 若 $X =$ 线性张成 $E$ 由某个可数集 $E \subseteq X$给出，则 $Y$ 的每个可数紧子集都是紧的且可度量化。

证明。 设 $S \subseteq Y$ 是可数紧的，且 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $E$的一个枚举。由非退化性可知，若存在 $y$，$z \in Y$满足 $\langle x_n,\ y\rangle = \langle x_n,\ z\rangle$ 对所有 $n \in \mathbb{N}$均成立，则 $y = z$。因此，集合 $F = \{f_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$ 满足

$$f_n : Y \to \mathbb{R}, y \mapsto \langle x_n, y\rangle\ , \tag{53}$$

在 $Y$中分离点。由于每个 $f_n$都是连续的，依据 命题 3.4，集合 $G = F \cup (-F)$满足 引理 2.4的条件。因此， $S$ 是紧的，并具有可数网络命题 3.4 和 [Eng89，定理 3.1。19] 共同推出其可度量化。 □

在反向情形下，可分性已足够，但需要额外的分离假设。

**定理4.4**。 如果 $Y$ 是可分的，则 $S \subseteq X$ 的每个既是 $T_1$ 又是可数紧的子集都是紧的，并且具有可数网络。

证明。 首先注意到，对于每个 $y \in Y$，函数

$$f_y : X \to \mathbb{R}, x \mapsto \langle x, y\rangle \tag{54}$$

都是上半连续的。现在，设 $x_1$， $x_2 \in S$ 互不相同。根据假设，每个点都有一个不包含另一个点的邻域，使得存在 $y_1$、.....、 $y_n \in Y$以及某个 $\epsilon > 0$，满足

$$\max_{m\in\{1,\ldots,n\}} \langle x_2 - x_1, y_m\rangle > \epsilon\,. \tag{55}$$

特别地，存在某个$y' \in Y$，使得 $\langle x_1,\ y'\rangle < \langle x_2,\ y'\rangle$。令 $D \subseteq Y$表示一个可数$\sigma(Y,\ X)$-稠密集，由命题 3.4可知，存在某个 $y \in D$，使得 $\langle x_1,\ y\rangle <\langle x_2,\ y\rangle$。因此，引理 2.4 适用。 □

注 4.5。 作者不知道，如果不考虑 $S$ 的 $T_1$ 假设，是否还能得到任何有用的结论。然而，回想一下， $X$ 根据 $T_0$ 命题 3.3是。

注记 4.6。 如果所讨论的子集是豪斯多夫的，那么可度量性即可由此得出 [Eng89，定理 3.1。19]。

如果 $X$ 是林德勒夫的，那么每个闭的可数紧集显然都是紧集。值得注意的是，鉴于 $\sigma_s$（$X$，$Y$）具有林德勒夫性质，可数紧集不紧这一现象与其在对称拓扑中非闭有关。

**引理 4.7**。 如果$(X, \sigma_s(X, Y))$ 是林德洛夫的，那么 $X$ 的每个可数紧子集都是预紧的。此外，每个可数紧 $A \subseteq X$ 在闭包$_{\sigma_s(X,\ Y)}A$ 中相对紧，其拓扑为从 $X$ 继承的子空间拓扑。

证明。令 $\mathcal{U}$ 表示 $(X,\sigma(X,Y))$ 上的典范拟一致结构，并令 $U\in\mathcal{U}$。于是，根据引理 2.6，$U[A]\supseteq B$。由于 $B$ 是 $\sigma_s(X,Y)$-闭的，$B$ 是 $\sigma_s(X,Y)$-林德洛夫的，因而也是 $\sigma(X,Y)$-林德洛夫的。因此，存在一个可数的 $S\subseteq A$，使得 $\cup_{a\in S}U[a]\supseteq B\supseteq A$。由于 $A$ 是可数紧的，因此存在一个有限的 $F\subseteq S$，使得 $\cup_{a\in F}U[a]\supseteq A$。同理，由于 $B$ 是林德洛夫的，$B$ 的每个开覆盖都有可数子覆盖，因而 $A$ 有有限子覆盖。 □

**定理 4.8**。若 $(X,\sigma_s(X,Y))$ 是林德洛夫空间，则可数紧子集 $A\subseteq X$ 是紧的，当且仅当

$$\mathrm{cl}_{\sigma_s(X,Y)}A\subseteq{\downarrow}A\,, \tag{56}$$

其中 $\downarrow A$ 表示 $A$ 在 命题 3.3中引入的偏序下的向下闭包。

证明。 $\Rightarrow$：假设方程 (56) 成立，并设 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $A$中的一个网。由引理 4.7，存在一个聚点 $x\in\mathrm{cl}_{\sigma_s(X,Y)}A$，因此 $x\in{\downarrow}A$。于是，存在某个 $x'\in A$，使得$x\in U$ 对 $x'$的每个开邻域 $U$ 都成立。因此，$x'$ 也是一个聚点。

$\Leftarrow$：假设 $A$ 是紧的，并设 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $A$ $\sigma_s(X,Y)$-收敛到某个$x\in\mathrm{cl}_{\sigma_s(X,Y)}$的网。由紧性，存在一个聚点 $x'\in A$，显然 $x\leq x'$，因此 $x\in{\downarrow}A$。 □

这引出了一个问题：对称拓扑中的闭包是否保留可数紧性。

**定理 4.9.** 若 $(X,\sigma_s(X,Y))$ 是林德洛夫的，则 $X$ 中每个可数紧子集的 $\sigma_s(X,Y)$-闭包都是紧的。

证明. 设 $A\subseteq X$ 是可数紧的，并设 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $B=\mathrm{cl}_{\sigma_s(X,Y)}A$ 中的一个序列。令

$$\mathcal{V}=\left\{U\in\mathcal{U}_s:U=U^{-1}\right\}. \tag{57}$$

对每个 $V\in\mathcal{V}$ 和每个 $m\in\mathbb{N}$，取一个 $a_m^V\in V[b_n]$。于是 $(a_m^V)_{V\in\mathcal{V},m\in\mathbb{N}}$ 在偏序下成为一个网

$$(V,m)\leq(W,n)\iff V\supseteq W\text{ and }m\leq n\,, \tag{58}$$

对所有 $V,W\in\mathcal{V}$以及所有 $m,n\in\mathbb{N}$。由 引理 4.7，存在一个聚点 $b\in B$，即 .

$$\forall U\in\mathcal{U}\forall V\in\mathcal{V}\forall m\in\mathbb{N}\exists W\in\mathcal{V},n\in\mathbb{N}:V\supseteq W,m\leq n\text{ and }a_n^W\in U\left[b\right]. \tag{59}$$

由于 $W=W^{-1}$，我们有

$$b_n\in W\left[a_n^W\right]\subseteq W\left[U\left[b\right]\right]. \tag{60}$$

通过设定 $V=U\cap U^{-1}$，我们因此得到 $b_n\in(U\circ U)[b]$。由此可知，$b$是序列 $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$的聚点。因此，$B$ 是可数紧的，进而是紧的。 □

在满足适当的可数性条件时，无需取对称闭包。

**定理 4.10**。设 $X$ 与 $Y$互为对偶，并分别赋予各自的弱拓扑。若 $(X,\sigma_s(X,Y))$ 具有可数紧致度，且是林德洛夫空间，并且 $Y$可分，则 $X$ 的每个可数紧子集都是紧集。

证明。 设 $A \subseteq X$ 是可数紧的，令 $B = 为_{\sigma_s}在\ x中的闭包_{(X,Y)}A$，并赋予 $X$ 的子空间拓扑；任取 $b \in B$。由于 $(X, \sigma_s(X,Y))$具有可数紧致度，存在可数集 $S \subseteq A$，使得 $b \in 是_{\sigma_s}在\ x中的闭包_{(X,Y)}S$。现在，取 $Y$的一个稠密序列 $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$，并注意映射

$$\Phi : (X, \sigma_s(X,Y)) \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, x \mapsto (\langle x, y_n\rangle)_{n\in\mathbb{N}} \tag{61}$$

是连续的。此外，由于值域可度量化，在 $S$ 中存在序列$(a'_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得$\lim_{n\to\infty}\Phi(a'_n) = \Phi(b)$。因此，对所有 $m \in \mathbb{N}$，有$\lim_{n\to\infty}\langle a'_n,\ y_m\rangle = \langle b,\ y_m\rangle$。由于 $A$ 是可数紧的，存在收敛到某个 $c \in A$的子网$(a''_\beta)_{\beta\in J}$。因此，

$$\langle b, y_m\rangle = \lim_\beta \left\langle a''_\beta, y_m\right\rangle \leq \langle c, y_m\rangle\ , \tag{62}$$

对所有 $m \in \mathbb{N}$。由命题 3.4，$b \leq c$，即 $B \subseteq{\downarrow} A$，并且定理 4.8 适用。 □

最后，可数紧致度的一个简单判别准则与向量空间情形相同。

**命题 4.11.** 设 $X$ 与 $Y$ 成对偶，且 $Y = \cup_{n\in\mathbb{N}}M_n$ 对某个序列$(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$成立，该序列由 $Y$的 $\sigma(Y,X)$-紧子集组成。则 $\sigma(X,Y)$ 具有可数紧致度。

证明。 我们仿照 [Fab+11，定理 354] 中针对对称情形给出的证明。令$A \subseteq X$ 非空，$\bar{a} \in \mathrm{cl}_{\sigma(X,Y)}A$，且不失一般性，假设对于每个 $M_n \subseteq M_{n+1}$，$n \in \mathbb{N}$。现在，对每个 $m$，$n$，$k \in \mathbb{N}$ 以及每个 $n$元组 $T = (y_1, \ldots,\ y_n) \in M_m^n$，选取某个 $a_T \in A$使得

$$a_T \in \left\{ x \in X \middle| \forall i \in \{1,\ldots,n\} : \langle x - \bar{a}, y_i\rangle < \frac{1}{k} \right\}\ . \tag{63}$$

集合 $V_T = \{y \in M_m :\ \langle a_T - \bar{a},\ y\rangle < 1/k\}$ 在 $M_m$ 中关于由 $\sigma(Y,\ X)$ 诱导的子空间拓扑是开的。此外，存在 $V_T^n$，使得 $V_T^n$是 $T \in M_m^n$的一个开邻域。对 $M_m$中的每个 $n$元组类似地进行处理，我们得到 $M_m^n$的一个开覆盖，它有一个由有限族 $T_1,\ \ldots,\ T_j \in M_m^n$索引的有限子覆盖。令 $A_{m,\ n,\ k} =\{a_{T_1},\ \ldots,\ a_{T_j}\}$ 和 $B = \cup_{m,n,k\in\mathbb{N}}A_{m,n,k}$，由构造可知 $\bar{a} \in \mathrm{cl}_{\sigma(X,Y)}B$。 □

# 5 空间 $C_a(K)$

关于给定拓扑空间上连续函数空间及其逐点收敛拓扑的文献十分丰富（例如参见 [Ark91]）。本节将分析其非对称版本的一些基本性质。鉴于这似乎是对这类空间的首次研究，本文不打算将文献中已知的非常一般的结果推广到此处。相反，本文旨在探究一些容易理解的性质，看看它们能否延续到非对称情形。希望这些探究能带来一些直观认识，并为更一般的研究奠定基础。

令 $K$ 表示一个紧豪斯多夫空间，$C(K)$ 表示 $K$ 上实值连续函数构成的线性空间。此外，对每个 $x \in K$，令

$$\delta_x : C(K) \to \mathbb{R}, f \mapsto f(x)\ . \tag{64}$$

设 $K = \{\delta_x : x \in K\}, L =$ 锥 $K$，并注意到 $C(K)$ 与 $L$ 以显然的方式构成对偶。令 $C_a(K)$ 表示赋予 $\sigma(C(K)\ L)$ 拓扑（“a”代表“非对称”）的空间 $C(K)$。该拓扑类似于 $C_p(K)$ 的拓扑，即逐点收敛拓扑。

**推论5.1.** 网 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 在 $C_a(K)$ 中收敛到 $f \in C_a(K)$ 当且仅当对所有 $x \in K$，

$$\limsup_\alpha f_\alpha(x) \le f(x)\ . \tag{65}$$

**推论5.2.** $C_a(K)$ 是超连通且超连通（参见例如 *[SS78，第 29]*页）。

证明。设 $f$，$g \in C_a(K)$为任意两个函数，显然$\min\{f,\ g\}$ 位于 $f$与 $g$的每个邻域中。类似地，$\max\{f,\ g\} \subseteq \{f\} \cap \{g\}$。 □

**推论5.3.** $\sigma_s(C(K)\ L)$ 与 $C_p(K)$的拓扑一致，即逐点收敛的拓扑。

众所周知，$C_p(K)$是K-解析的，因而也是林德洛夫的。

**推论5.4.** $C_a(K)$ 是林德洛夫的。

**推论5.5.** 当 $K$ 配备 $\sigma(L, C(K))$-拓扑时，映射 $K \to K :\ x \mapsto \delta_x$ 是一个同胚。

证明。由命题 3.4，$\sigma(L,\ C(K))$-拓扑在 $K$ 上与 $\sigma(L,\ C(K))$-拓扑一致。因此，该结论由 [Fab+11，引理3.55]得出。 □

**推论5.6.** 对于 $f,\ g \in C_a(K),\ f \le g$ 在命题 *3.3* 的意义下成立，当且仅当 $f \le g$ 作为函数成立。

空间 $C_p(K)$的一个重要性质是其天使性。特别地，（相对）可数紧子集类分别与（相对）紧子集类和（相对）序列紧子集类重合。$C_a(K)$也具有类似性质。

**引理 5.7.** 设 $A \subseteq C_a(K)$ 是相对可数紧的。则对$A$ 中的每一个网$(f_\alpha)_{\alpha\in I}$，存在一个共尾的有向子集 $J \subseteq I$，使得

$$\sup_{x\in K} \limsup_{\beta\in J} f_\beta(x) < \infty\ . \tag{66}$$

证明。假设结论不成立，并固定某个 $x_1 \in K$，使得 $\limsup_\alpha f_\alpha(x_1) > 1$。那么 $J_1 = \{\alpha \in I :\ f_\alpha(x_1) \ge 1\}$ 是共尾且有向的，并且 $(f_\beta)_{\beta\in J_1}$ 是一个子网，满足对每个 $\beta \in J_1,\ f_\beta(x_1) \ge 1$。由归纳法，存在一个序列 $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$，属于 $K$，且对每个 $n \in \mathbb{N}$，存在一个共尾且有向的集合 $J_n \subseteq I$，使得对每个 $\beta \in J_n$和 $m \in \{1,\ g_\beta(x_m) \ge m$，……，$n\}$。现在，对每个 $n \in \mathbb{N}$，取某个 $\alpha(n) \in J_n$，并考虑序列 $(f_{\alpha(n)})_{n\in\mathbb{N}}$。根据假设，它有一个聚点 $f \in C_a(K)$，因此对每个 $m \in \mathbb{N},\ f(x_m) \ge m$。于是，$\sup_{x\in K} f(x) = \infty$，这与连续函数 $f$ 在紧集 $K$上有界这一事实矛盾。 □

**推论 5.8**。 设 $A \subseteq C_a(K)$。那么以下条件等价:

*(i)* $A$ 是相对紧的

*(ii)* $A$ 是相对可数紧的

*(iii)* $A$ 是相对序列紧的

证明。 $(i) \implies (ii)$ 与 $(iii) \implies (ii)$ 是显然的。

$(ii) \implies (i)$: 设 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 为 $A$中的一个网。由引理 5.7，存在某个 $C \in \mathbb{R}$ 以及一个子网$(g_\beta)_{\beta\in J}$，使得

$$\sup_{x\in K} \limsup_{\beta} g_\beta(x) \leq C\,. \tag{67}$$

因此，$(g_\beta)_{\beta\in J}$ 收敛到取值为 $C$ 的常值函数（定义于 $K$）。

$(ii) \implies (iii)$: 设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $A$中的一个序列。由 引理 5.7，存在某个 $C \in \mathbb{R}$ 以及一个子序列$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$，使得

$$\sup_{x\in K} \limsup_{n\to\infty} g_n(x) \leq C\,. \tag{68}$$

因此，$(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 收敛到在 $K$ 上取值为 $C$ 的常值函数。 □

因此， $C_a(K)$ 满足定义 (i) 中的定义 2.2。我们可以进一步询问， $C_a(K)$ 是否也具有天使性；也就是说，对于每个相对可数紧子集 $A \subseteq C_a(K)$以及每个 $\bar{a} \in$ 闭包 $A$，是否存在一个 $A$ 中的序列收敛到 $\bar{a}$。遗憾的是，一般而言，答案是否定的。

**定理 5.9**。 $C_a([0,1])$ 不具有天使性。

证明。根据 [Ark91，引理 II.3，5], 存在一个可数集 $Z \subseteq C_p([0,1])$，使得对每个 $f \in Z$，$f([0,1]) \subseteq [0,1]$ 且 0 2 cl $(Z \setminus \{0\})$，但没有任何 $Z \setminus \{0\}$中的序列收敛到 0。由于 $C_a([0,1])$ 的拓扑比 $C_p([0,1])$ 的拓扑更粗，0 也属于 $C_a(K)$-闭包 $Z$。此外，由于 $Z$ 中的所有函数均非负，一个网在 $ZC_a([0,1])$-收敛到 0，当且仅当它 $C_p([0,1])$-收敛到 0。同时，很容易看出 $Z$ 在 $C_a(K)$ 中是相对紧的，因为 $Z$ $C_a(K)$ 中的每个网都收敛到值为 1 的常值函数。 □

然而，从 $C_p(K)$ 过渡到 $C_a(K)$ 时，可数紧致度仍然保持不变。

**推论 5.10.** 空间 $C_a(K)$ 具有可数紧致度。

证明. 对于每个 $m, n \in \mathbb{N}$，集合

$$L_{m,n} = \left\{ \sum_{i=1}^{m} t_i \delta_{x_i} \,\middle|\, t_1, \ldots, t_m \in [0,\infty), x_1, \ldots x_m \in K : \sum_{i=1}^{m} t_i \leq n \right\} \tag{69}$$

是 $\sigma(L,\ C_a(K))$-紧。由于 $L = \cup_{m,n\in\mathbb{N}} L_{m,n}$, 该结论由命题 4.11得出。

□

$C_a([0,1])$ 之所以不是天使性的，是因为缺乏弗雷歇-乌雷松性质，这一点已在定理 5.9中得到证明。在天使空间中，该性质意味着紧子集、可数紧子集和序列紧子集这几类集合彼此等价；而在非对称情形下，这一特征也不复存在。

**定理 5.11.** 令 $\omega_1$ 表示第一个不可数序数，则存在一个可数紧的$A \subseteq C_a([0,\omega_1])$，但它不是紧的。

证明. 令 $A = \{ f_\alpha : \alpha < \omega_1\}$，其中对每个序数 $\alpha < \omega_1$,

$$f_\alpha : [0,\omega_1] \to \mathbb{R}, \beta \mapsto \begin{cases} 1 & \text{if } \beta \leq \alpha \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases} \tag{70}$$

由于赋值 $\alpha \mapsto f_\alpha$ 是保序的，且每个可数序数集都有一个小于 $\omega_1$的上界，因此显然，$A$ 中的每个序列在 $A$中都有聚点。然而，网 $(f_\alpha)_{\alpha<\omega_1}$ 在 $A$中没有聚点。 □

这种等价性失效的根本原因在于，$C_a(K)$的可数紧子集不一定是 $C_p(K)$-闭的。

**命题 5.12.** 设 $A \subseteq C_a(K)$ 是可数紧的，并令 $B = \mathrm{cl}_{C_p(K)}A$，赋予从 $C_a(K)$继承的子空间拓扑。那么，

*(i)* $A$ 是预紧的，

*(ii)* $A$ 在 $B$ 中相对紧，

*(iii)* $A$ 是紧的，当且仅当 $B \subseteq\downarrow A$,

*(iv)* $B$ 是紧的。

证明。 这直接由 引理 4.7 以及定理 4.8 和 4.9得出。 □

推论 5.17 表明，正则性和可数紧性蕴含序列紧性。然而，正如下列例子所示，$C_a([0,1])$存在一些紧子集并非序列集。

例 5.13. 集合 $Z$ 来自定理 5.9 与取值为一的常值函数一起是紧的，并且 $T_0$ 但不是 $T_1$。然而，它不是序列的，因为 $(Z \cup \{1\}) \setminus \{0\}$ 中的任何序列都不收敛到 0。

例 5.14. 为了构造一个非序列紧的紧 $T_1$ 集，设 $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $Z \setminus \{0\}$的一个枚举。取一个连续函数 $h : [0,3] \to \mathbb{R}$，使得 $h([0,1]) = \{1\}$，$h([1,2]) = [0,1]$，且 $h((2,3]) \subseteq (-\infty, 0)$。现在，对每个 $n \in \mathbb{N}$，取一个连续延拓 $g_n : [0,3] \to \mathbb{R}$，使其为 $f_n$ 的延拓，并满足

- $g_n([1, 1+4^{-n}]) \subseteq [0,1]$,
- $g_n((1+4^{-n}, 1+2\cdot 4^{-n})) \subseteq (1,\infty)$,

- $g_n([1+2\cdot 4^{-n}, 1+3\cdot 4^{-n}]) \subseteq [0,1]$,
- $g_n((1+3\cdot 4^{-n}, 1+4\cdot 4^{-n})) \subseteq (-\infty, 0)$,
- $g_n([1+4\cdot 4^{-n}, 2]) = \{0\}$
- $g_n = h$ on $[2,3]$

那么集合 $D = \{g_n\colon\ n \in \mathbb{N}\} \cup \{h, 0\} \subseteq C_a([0,3])$ 是可数紧的，因为 $g_n$收敛到 $h$，因而是紧的，这是因为它是可数的。注意，$0 \in \mathrm{cl}\{g_n\colon\ n \in \mathbb{N}\}$，因为 $g_n$ 逐点收敛到零（在$1,2]$ 上），并且在 $[2,3]$ 上 $g_n \leq 0$。根据构造， $D$ 是$T_1$，但不是序列紧的，因为 $D \setminus \{0\}$ 中没有任何序列收敛到0。

乍看之下或许并不明显，例 5.14 并非豪斯多夫空间。只需考察 $(1,2]$ 中靠近 1 的点，就能直接看出这一点。事实上，存在一个具有可数紧致度但非序列的紧豪斯多夫空间，这一命题独立于 ZFC。这就是 Moore-Mrówka 问题（参见例如 [Bal89] 和 [77, 经典问题 VI]）。不过，紧豪斯多夫子空间是正则的，因此根据推论 5.17，它们是弗雷歇-乌雷松的。

对于任意集合 $Q$，记 $C(Q)$ 为定义在 $Q$ 上的实值下半连续函数集，并赋予从 $(\mathbb{R}, u)^Q$ 继承的子空间拓扑。这里， $u\colon\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是满足 $x \mapsto \max\{x, 0\}$ 的非对称半范数，使得 $(x_\alpha)_{\alpha\in I}$ 是 $(\mathbb{R}, u)$ 中的一个网，当且仅当 $\limsup_\alpha x_\alpha \leq x$ 时，该网收敛到 $x \in (\mathbb{R}, u)$。因此， $C(Q)$ 中的网 $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ 收敛到某个 $f \in C(Q)$，当且仅当对所有 $q \in Q$，$\limsup_\alpha f_\alpha(q) \leq f(q)$。

**引理 5.15.** 设 $B \subseteq C_a(K)$ 为豪斯多夫， $T \subseteq B$ 且 $\pi_2\colon\ L \to L/\mathrm{ann}\, T$ 为典范商映射，其中 $L$ 配备 $\sigma(L, C_a(K))$-拓扑。令 $Q = \pi_2(K)$ 并定义映射

$$\pi_1 : \mathrm{cl}_B T \to \underline{C}(Q),\ \textit{with}\ (\pi_1 f)(q) = \inf\left\{ f(k) \middle| k \in K : \delta_k \in \pi_2^{-1}(\{q\}) \right\}, \tag{71}$$

对所有 $f \in \mathrm{cl}_B T$ 与 $q \in Q$。则，

*(i) For all $f \in T$ and all $k \in K$, $(\pi_1 f)(\pi_2 \delta_k) = f(k)$,*

*(ii)* 对所有 $f \in T$， $\pi_1 f$ 是从 $Q$ 到 $\mathbb{R}$的连续函数，

*(iii)* $\pi_1$ 是连续且单射的，并具有豪斯多夫像，

*(iv) A net $(f_\alpha)_{\alpha\in I}$ in $T$ converges to $f \in \mathrm{cl}_B T$ if and only if $(\pi_1 f_\alpha)_{\alpha\in I}$ converges to $\pi_1 f$,*

*(v)* 若 $B$ 是正则的，则 $\pi_1$ 是到其像上的同胚。

证明。 首先，注意到 ann $T$是 $\sigma(L, C_a(K))$-闭。因此，$L/\mathrm{ann}\ T$ 是豪斯多夫的，从而 $Q$ 是紧豪斯多夫空间。由 推论 5.5 与命题 3.4，映射

$$\psi : K \to Q, k \mapsto \pi_2(\delta_k) \tag{72}$$

是连续的，因此也是闭的且为真映射。用 $\psi$ 代替 $\pi_2$，可得

$$(\pi_1 f)(q) = \inf\left\{ f(k) \middle| k \in \psi^{-1}(\{q\}) \right\}, \tag{73}$$

对所有 $f \in \mathrm{cl}_B T$ 以及所有 $q \in Q$ 均成立。现在，令 $r \in \mathbb{R}$ 并设 $C = (\pi_1 f)^{-1}((-\infty, r])$，以及 $D = f^{-1}((-\infty, r])$。由于 $\psi$ 是真映射且 $f$ 连续，方程 (73) 中的下确界总能取到。因此，$q \in C$ 意味着存在某个 $k \in K$，使得 $\psi(k) = q$ 且 $f(k) \leq r$，也就是说 $C \subseteq \psi(D)$。逆不等式显然成立，因此 $C = \psi(D)$。由于 $D$ 是闭的，$C$ 也如此，因此 $\pi_1 f$ 是下半连续的，且 $\pi_1$ 是良定义的。

$(i)$：若 $f \in T$ 和 $k,\ k' \in K$ 满足 $\psi(k) = \psi(k')$，则有

$$f(k) = \langle f, \delta_k \rangle = \langle f, \delta_{k'} \rangle = f(k') , \tag{74}$$

根据定义，使得第 (i) 项 成立。

$(ii)$：固定某个 $f \in T, r \in \mathbb{R}$，并令 $U = (\pi_1 f)^{-1}((-\infty, r))$，以及 $V = f^{-1}((-\infty, r))$。显然，$\psi(V) = U$，使得若 $\psi^{-1}(\psi(V))$ 是开集，则 $U$ 是开集。然而，根据方程 (74)，$V = \psi^{-1}(\psi(V))$。由于 $f$ 连续，$V$ 是开集，因此 $U$ 是开集。因此，$\pi_1 f$ 是上半连续的，进而连续。

$(iii)$。设 $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ 是 $B$ 中一个网，且收敛到某个 $f \in B$。那么，

$$\begin{aligned} \limsup_\alpha (\pi_1 f_\alpha)(q) &= \limsup_\alpha \inf_{k \in \psi^{-1}(\{q\})} f_\alpha(k) \\ &\leq \inf_{k \in \psi^{-1}(\{q\})} \limsup_\alpha f_\alpha(k) \leq \inf_{k \in \psi^{-1}(\{q\})} f(k) = (\pi_1 f)(q) , \end{aligned} \tag{75}$$

对所有 $q \in Q$ 均成立。现在，令 $f,\ g \in \mathrm{cl}_B T$，并设 $a = \pi_1 f$ 以及 $b = \pi_1 g$。由于 $\pi_1$ 连续，对于所有满足 $U \cap \pi_1(\mathrm{cl}_B T) \neq \emptyset$ 的开集 $U \subseteq C(Q)$，都有 $U \cap \pi_1(T) \neq \emptyset$。特别地，对于所有包含 $a$ 的开邻域 $U$ 和包含 $b$ 的开邻域 $V$，只要 $U \cap V \neq \emptyset$，$U \cap V$ 就是开集，且 $U \cap V \cap \pi_1(T) \neq \emptyset$。因此，若 $a$ 和 $b$ 没有不相交邻域，则存在 $T$ 中的一个网 $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$，使得 $(\pi_1 f_\alpha)_{\alpha \in I}$ 同时收敛到 $a$ 和 $b$。然而，此时

$$f(k) \geq a(\psi(k)) \geq \limsup_\alpha (\pi_1 f_\alpha)(\psi(k)) = \limsup_\alpha f_\alpha(k) , \tag{76}$$

对所有 $k \in K$。因此，$(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ 收敛于 $f$，并且同样也收敛于 $g$。由于 $\mathrm{cl}_B T$ 是豪斯多夫的，由此可得 $f = g$。因此，$\pi_1$ 是单射，并且具有豪斯多夫像。

$(iv)$：正向蕴含不过是 $\pi_1$ 的连续性。对于逆，设 $f \in \mathrm{cl}_B T$ 且 $(f_\alpha)_{\alpha \in I}$ 为 $T$ 中的一个网，使得 $(\pi_1 f_\alpha)_{\alpha \in I}$ 收敛于 $\pi_1 f$。然后，通过应用 第 (i) 项对所有 $k \in K$，

$$\limsup_\alpha f_\alpha(k) = \limsup_\alpha (\pi_1 f_\alpha)(\psi(k)) \leq (\pi_1 f)(\psi(k)) \leq f(k) . \tag{77}$$

$(v)$：考虑函数 $g = \pi_1^{-1} \restriction \pi_1(T)$。应用 [Bou66，第 81 页，定理 1]，$g$ 具有到 $\pi_1(\mathrm{cl}_B T)$ 的唯一连续延拓，依定义与 $\pi_1^{-1}$ 重合。 □

**定理 5.16.** 设 $B \subseteq C_a(K)$ 为可数紧且正则的。则 $B$ 是弗雷歇-乌雷松 .

证明。设 $A \subseteq B$ and $\bar{a} \in \mathrm{cl}_B A$。由于 $C_a(K)$ 具有可数紧致度，因此存在一个序列 $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ in $A$，其聚点为 $\bar{a}$。令 $T = \{a_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\bar{a}\}$，并应用引理 5.15，我们 得到典范投影 $\pi_2 : L \to L/\mathrm{ann}\ T, Q = \pi_2(K)$，以及一个连续的单射函数 $\pi_1 : \mathrm{cl}_B T \to C(Q)$，其像为豪斯多夫空间。

显然，(span $T$, cone $Q$) 是对偶性，且 $Q$ 上的拓扑由 $\sigma$(cone $Q$, span $T$) 的子空间拓扑给出。由于 $T$ 是可数的，引理4.3适用，因此 $Q$ 是可度量化的，进而可分。因此，存在一个稠密序列 $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $Q$。现在，将 $\bar{g}=\pi_1(\bar{a})$ 和 $g_n=\pi_1(a_n)$ 分别记作……，接下来我们证明 $C$ 在 $\bar{g}$ 处的伪特征是可数的。事实上，对于每个 $n\in\mathbb{N}$，考虑 $\bar{g}$ 的如下开邻域

$$U_n=\left\{g\in C\middle|\forall m\in\{1,\dots,n\}:g\left(q_m\right)<\bar{g}\left(q_m\right)+\frac{1}{n}\right\}. \tag{78}$$

如果 $g\in\cap_{n\in\mathbb{N}}U_n$，则可推出 $g(q_m)\leq\bar{g}(q_m)$ 对所有 $m\in\mathbb{N}$ 成立。此外，由引理 5.15 可知 $\bar{g}$ 是连续的，而 $g$ 是下半连续的，因此可推出 $g\leq\bar{g}$。然而，由于 $C$ 是豪斯多夫的，推论5.6 蕴含 $g=\bar{g}$。由于 $B$ 是正则的，$\pi_1$ 是到 $C$ 上的同胚，且 $C$ 也是正则的，故结论由引理 2.7得出。

□

**推论 5.17**。 $C_a(K)$ 的每个正则可数紧子集都是序列紧的。

**推论 5.18**。 对于豪斯多夫子集 $A$ *of* $C_a(K)$，以下命题等价：

*(i)* $A$ 是紧的

*(ii)* $A$ 是可数紧的，并且 $\mathrm{cl}_{C_p(K)}A\subseteq\downarrow A$,

*(iii)* $A$ 是序列紧的，且闭包 $_{C_p(K)}A\subseteq\downarrow A$。

此外，在肯定的情况下，$A$ 是弗雷歇-乌雷松的，因而具有天使性。

证明。 应用命题 5.12 以及紧豪斯多夫空间是正则的这一事实。 □

# 6 非对称赋范空间上的弱拓扑

众所周知，赋范空间上的弱拓扑具有天使性 [Fab+11，命题 3。108]。本节将应用前一节的结果来研究非对称赋范空间。

**命题 6.1**。 设 $(X,p)$ 是一个非对称赋范空间。那么，$(X,(X,p)^*)$ 与 $C_a(K)$ 的一个子集同胚，其中

$$K=\left\{\phi\in Y:\sup_{p(x)\leq1}\phi\left(x\right)\leq1\right\} \tag{79}$$

在 $\sigma\left(Y,X\right)$ 拓扑中是紧的。

证明。 $K$ 是紧的，这是众所周知的结果 [Cob12，定理 2.4。3]。设 $f\colon(X,(X,p)^*)\to C_a(K)$ 由 $f(x)(\phi)=\phi(x)$ 对所有 $x\in X$ 和 $\phi\in K$ 给出。那么，根据命题 3.4 和推论 3.6 和 5.1，$f$ 是一个同胚。 □

**推论 6.2**。 非对称赋范空间在其弱拓扑中具有可数紧致度。

**推论 6.3.** 设 $X$ 为非对称赋范空间，$A\subseteq X$ 为配备弱拓扑的子集。若 $A$ 可数紧，且 $\sigma_s(X,X^*)$-闭于 $X$，则 $A$ 是紧的。此外，若 $A$ 是豪斯多夫的，则它是弗雷歇-乌雷松的且具有天使性。

# 参考文献

[77] “问题部分”。载于：《拓扑学论文集》2.2（1977），第658–688页。[Ark91] A V Arkhangel’skii。拓扑函数空间。1992年版。数学及其应用。多德雷赫特，荷兰：施普林格，1991年11月。[Bal89] Zoltán T. Balogh。“论具有可数紧致度的紧豪斯多夫空间”。载于：《美国数学会论文集》105.3（1989），第755–764页。doi: 10 . 1090/s0002-9939-1989-0930252-6。[Bou66] N Bourbaki。数学原本，一般拓扑学，第1部分。1966。[Cob12] S. Cobzas。非对称赋范空间中的泛函分析。数学前沿。施普林格巴塞尔，2012。[Eng89] R. Engelking。一般拓扑学。西格玛纯数学丛书。Heldermann，1989。[Fab+11] Marián Fabian等。巴拿赫空间理论：线性与非线性分析的基础。施普林格纽约，2011。doi: 10.1007/978-1-4419-7515-7。[KK87] Heinz König与Norbert Kuhn。“天使空间与双重极限关系”。载于：《伦敦数学会杂志》s2-35.3（1987），第454–470页。doi: https://doi.org/10.1112/jlms/s2-35.3.454。[KR92] Klaus Keimel与Walter Roth。有序锥与逼近。施普林格柏林海德堡，1992。doi: 10.1007/bfb0089190。[Sch97] Eric Schechter。《分析及其基础手册》。Eric Schechter编。圣迭戈：学术出版社，1997。doi: https://doi.org/10.1016/B9 78-0-12-622760-4.X5000-6。[SS78] Lynn Arthur Steen与J. Arthur Seebach。《拓扑学中的反例》。施普林格纽约，1978。doi: 10.1007/978-1-4612-6290-9。[SW99] H. H. Schaefer与M. P. Wolff。拓扑向量空间。施普林格纽约，1999。doi: 10.1007/978-1-4612-1468-7。