arXiv:2602.18836v1 [math.LO] 21 Feb 2026

康托尔集的大拉姆齐组合论及 Blass 完美集定理的一个简单证明

Dragan Maˇsulovi´c 诺维萨德大学，理学院，
数学与信息学系，Trg Dositeja Obradovi´ca 3，
21000 诺维萨德，塞尔维亚 邮箱：
dragan.masulovic@dmi.uns.ac.rs

2026年2月24日

摘要

本文介绍了一种研究康托尔集 2^ω 的大拉姆齐组合论的简便方法。利用 Carlson 和 Simpson 的无限对偶拉姆齐定理，我们证明 2^ω 作为拓扑空间具有有限大拉姆齐度。随后，我们考察了由康托尔集导出的若干自然的拓扑一阶结构，并证明它们各自都继承了有限大拉姆齐度。因此，我们得到了 Blass 完美集定理的一个简单证明，尽管我们的方法无法给出颜色数的精确上界 $(n-1)!$。我们还证明，具有可数多个原子的完备布尔代数具有有限大拉姆齐度；与此相反，近期结果表明，可数无原子布尔代数不具有大拉姆齐度。

关键词与短语： 康托尔集，大拉姆齐度，对偶拉姆齐定理，完美集，布尔代数。

AMS 学科分类（2020）： 05C55, 03C68,54F99.

1 引言

结构拉姆齐理论在世纪之交迎来范式转变，其标志是 Kechris、Pestov 和 Todorˇcevi´c [8] 的开创性著作问世。该论文确立了如今所称的 *KPT* 对应，揭示了某一类

有限结构的拉姆齐性质与其 Fra¨ıss´e 极限的自同构群的拓扑动力学之间的深刻联系。值得注意的是，KPT 对应开启了多个新的研究方向，其中包括重新兴起并日益深入的对大拉姆齐度的研究。尽管大拉姆齐度的研究植根于 Fra¨ıss´e 极限这一背景，但也已有针对其他类型可数结构的研究成果 [9, 4, 10]。

若结构 $\mathcal{S}$ 满足以下条件，则称其具有 有限大拉姆齐度：对于 $\mathcal{S}$ 的每个有限子结构 $\mathcal{A}$，都存在一个正整数 $t = t(\mathcal{A}) \in \mathbb{N}$，使得对任意有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \to k$，都存在一个嵌入 $w : \mathcal{S} \hookrightarrow \mathcal{S}$，满足 $|\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{S}))| \leqslant t$。如果 $|calS$的至少一个有限子结构不存在这样的上界，则称 $\mathcal{S}$ 不具有大拉姆齐度。

当 $\mathcal{S}$ 是可数关系结构时，对于 $\mathcal{S}$的每个有限子结构 $\mathcal{A}$，$\mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{S})$ 上的博雷尔 σ- 代数都是平凡的，因此每个有限着色 $\mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{S}) \to k$ 都是博雷尔的。相比之下，当 $\mathcal{S}$ 不可数时（本文始终如此），着色 γ 为博雷尔的这一假设就至关重要。

与关于可数关系结构大拉姆齐度的大量研究成果相比，我们对不可数情形的认识仍主要集中在线性序和树状结构上，这在很大程度上是因为转向不可数情形，要求我们从纯组合技巧转向更复杂的集合论工具。完美集的 Ramsey 定理开启了这条研究路线，其基础很大程度上来自 Milliken 定理和 Halpern-L¨auchli 定理。Blass 对 Galvin 猜想的证明——该猜想涉及完美子集 $\mathbb{R}$的一个划分结果——是一个里程碑式的例子。原始证明基于 Halpern-L¨auchli 定理，后来 Todorˇcevi´c 使用 Milliken 空间对其作了简化（见 [11]）。

定理 1.1 (Blass [2]). 对于 $\mathbb{R}$的每一个完美子集 P，以及 P的所有 n元子集所成集合 $[P]^n$ 的每一种有限连续着色，存在一个完美集 $Q \subseteq P$，使得 $[Q]^n$ 至多有$(n-1)!$种颜色。

其他具有有限大Ramsey度的不可数结构的例子包括 κ-有理数 [6]，以及适合基数κ的 κ-Rado图 [7]，还有一大族泛逆极限结构 [5]。

本文给出了 Blass 完美集定理的一个简洁组合证明，并推导出若干关于可自然地与康托尔集关联的一阶结构的推论。虽然我们的方法更易理解，但所得结果较弱：我们证明了康托尔集存在大拉姆齐度，却未能得出 n 元子集的度的精确值 $(n-1)!$。

本文的组织结构如下。第 2 节固定记号，并回顾 Carlson 和 Simpson 的对偶拉姆齐定理，这是我们处理康托尔集及其相关结构的大拉姆齐度时的主要工具。第 3 节证明对偶拉姆齐定理的一个有用推论，并说明不带额外结构的康托尔集具有有限大拉姆齐度。最后，第 4 节回顾康托尔集可以通过多种自然方式赋予额外的一阶结构，并证明由此得到的每一种一阶结构都具有有限大拉姆齐度。特别是，我们给出 Blass 完美集定理的一个简洁证明。此外，我们证明具有可数多个原子的完备布尔代数具有有限大拉姆齐度；这与近期结果形成鲜明对比： [1]可数无原子布尔代数不具有大拉姆齐度。

2 预备知识

我们采用通常的集合论记号 $\omega = \{0,1,2,3,\ldots\}$ 和 $n = \{0,1,\ldots,n-1\}$，并令 $\mathbb{N} = \{1,2,3,\ldots\}$。有时，用映射$(A,B)$来表示所有映射 $A \to B$ 的集合 B^A 会更为方便。

设$(X,<)$与$(Y,<)$为良序集。函数 $f\colon X \to Y$是刚性满射，如果 f是满射，并且对满足 $y_1 < y_2$的$y_1, y_2 \in Y$，有$\min f^{-1}(y_1) < \min f^{-1}(y_2)$。令$\mathrm{RSurj}(X,Y)$表示所有刚性满射 $X \to Y$的集合。

每个刚性满射 $f\colon (X,<) \to (Y,<)$都唯一确定一个嵌入 $f^{\partial}\colon (Y,<) \hookrightarrow (X,<)$，其定义为 $f^{\partial}(y) = \min f^{-1}(y)$，$y \in Y$。该构造在如下意义下是函子性的：

$$(\mathrm{id}_X)^{\partial} = \mathrm{id}_X \text{ and } (g \circ f)^{\partial} = f^{\partial} \circ g^{\partial}. \tag{2.1}$$

集合 S 的有限着色 是一个映射 $\gamma\colon S \to k$，其中 $k \in \mathbb{N}$。拓扑空间 S 的有限着色 $\gamma\colon S \to k$ 是博雷尔着色，当且仅当对每个 $i \in k$，$\gamma^{-1}(i)$ 都是一个博雷尔集。

用刚性满射的语言表述，Carlson 和 Simpson 的无限对偶拉姆齐定理如下。

定理 2.1 (对偶拉姆齐定理 [3, 定理 1.2])**.** 对于每个有限线性序 L 以及每个有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{RSurj}(\omega,L) \to k$，存在一个$w \in \mathrm{RSurj}(\omega,\omega)$，使得 $|\gamma(\mathrm{RSurj}(\omega,L) \circ w)| = 1$。

设 L 是一个由函数符号、关系符号和常元符号组成的一阶语言。在一阶结构 (X, L^X) 和 (Y, L^Y) 之间的单射 $\varphi\colon X \to Y$ 若满足 φ 是一个同构，则称其为（一阶）嵌入

X 到 Y 的子结构上的映射，其底集为 $\mathrm{im}(\varphi) = \{\varphi(x) : x \in X\} \subseteq Y$。（注意，这隐含要求：对于每个函数符号 $f \in L$，若其存在，则 $\mathrm{im}(\varphi)$ 在 Y 的基本运算 f^Y 下封闭。）拓扑空间 (X, τ) 和 (Y, σ) 之间的单射 $\varphi : X \to Y$ 若满足 φ 是从 X 到 Y 中底集为 $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq Y$ 的子空间的同胚，则称其为拓扑嵌入。

一个拓扑一阶结构 是一个拓扑空间 (X, τ)，带有一阶结构 (X, L^X)；对于每个函数符号 $f \in L$，基本运算 f^X都是连续的；对于每个关系符号 $R \in L$，关系 R^X 都是闭的。两个拓扑一阶结构之间的单射函数 $\varphi : X \to Y$，若 φ 既是拓扑嵌入又是一阶嵌入，将 X 嵌入到 Y中，则称为拓扑一阶嵌入 。如果 $\varphi : X \to Y$是一个拓扑一阶嵌入，那么 $\mathrm{im}(\varphi) \subseteq Y$ 就是 Y中的拓扑副本 X 。

3 康托尔集具有有限大拉姆齐度

利用对偶拉姆齐定理的一个直接推论，本节证明康托尔集作为拓扑空间具有有限大拉姆齐度。我们的证明比 Blass 和 Todor˘cevi´c 的证明更简单，但得到的结果较弱：我们证明了大拉姆齐度的存在性，却没有得到一个 n 元子集的度的精确值 $(n-1)!$。

命题 3.1。 对于每个非空有限集 A，存在一个 $t = t(|A|) \in \mathbb{N}$，使得对于每个有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{Map}(\omega, A) \to k$，都存在一个$h \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$ 满足 $|\gamma(\mathrm{Map}(\omega, A) \circ h)| \leqslant t$。

证明。 令 $\mathcal{T}$表示字母表A上所有字母不重复的非空有限词的集合。令

$$t = |\mathcal{T}| = \sum_{i=1}^{n} \frac{n!}{(n-i)!}$$

其中 $n = |A|$。我们称 $\tau \in \mathcal{T}$ 为 $f \in \mathrm{Map}(\omega, A)$ 的映射类型，并记作 $\mathrm{tp}(f) = \tau$，若 $f : \omega \to \tau$ 是一个刚性满射，其中我们现在取$\tau = a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_\ell}$为一个有限线性序 $a_{i_1} \prec a_{i_2} \prec \dots \prec a_{i_\ell}$。注意到

$$\mathrm{RSurj}(\omega, \tau) = \{f \in \mathrm{Map}(\omega, A) : \mathrm{tp}(f) = \tau\},$$

因此，$\{\mathrm{RSurj}(\omega, \tau) : \tau \in \mathcal{T}\}$ 是将映射(ω, A)划分为 t 个块的一个划分。容易看出，这是映射(ω, A)的一个博雷尔划分。

任取一个有限博雷尔着色 γ： 映射$(\omega, A) \to k$。现在我们将归纳地构造一列刚性满射 $g_0, g_1, \ldots, g_t \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$以及一列博雷尔着色 γ_1，…， γ_t，如下。

为开始归纳，令 g_0 为恒等映射 $\omega \to \omega$。归纳步骤中，假设已构造出 g_0、...、g_{j-1} 以及 γ_1、...、γ_{j-1}。定义 $\gamma_j : \mathrm{RSurj}(\omega, \tau_j) \to k$ 如下：

$$\gamma_j(f) = \gamma(f \circ g_{j-1} \circ \ldots \circ g_1 \circ g_0).$$

由无限对偶拉姆齐定理，存在一个 $g_j \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$，使得$|\gamma_j(\mathrm{RSurj}(\omega, \tau_j) \circ g_j)| = 1$。因此，

$$|\gamma(\mathrm{RSurj}(\omega, \tau_j) \circ g_j \circ g_{j-1} \circ \ldots \circ g_1)| = 1.$$

最后，令 $h = g_t \circ g_{t-1} \circ \ldots \circ g_1$。那么，注意到

$$\mathrm{RSurj}(\omega, L) \circ g \subseteq \mathrm{RSurj}(\omega, L)$$

对于每个有限线性序 L 以及每个 $g \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$：

$$\begin{aligned} |\gamma(\mathrm{Map}(\omega, A) \circ h)| &= \textstyle\sum_{j=1}^{t} |\gamma(\mathrm{RSurj}(\omega, \tau_j) \circ h)| \\ &= \textstyle\sum_{j=1}^{t} |\gamma(\mathrm{RSurj}(\omega, \tau_j) \circ g_t \circ \ldots \circ g_{j+1} \circ g_j \circ \ldots \circ g_1)| \\ &\leqslant \textstyle\sum_{j=1}^{t} |\gamma(\mathrm{RSurj}(\omega, \tau_j) \circ g_j \cdot \ldots \cdot g_1)| = t. \end{aligned}$$

证明至此完成。 □

令 $\mathcal{P}(A) = 2^A$ 表示反变幂集函子。给定一个映射$f : A \to B$， $\mathcal{P}(f) : 2^B \to 2^A$ 将 $x \in 2^B$ 映为 $x \circ f \in 2^A$。直观地说，若取 $\mathcal{P}(A)$ 为 A 的所有子集构成的集合，则 $\mathcal{P}(f)$将 $X \subseteq B$ 映为$f^{-1}(X) \subseteq A$。

对于任意非空集合 A和 B，我们在集合 B^A 上赋予逐点收敛拓扑，使得 2^ω 成为康托空间。容易看出，对于每个**集合**映射$f : A \to B$， $\mathcal{P}(f) : 2^B \to 2^A$ 都是连续的；若 f 是满射，则 $\mathcal{P}(f)$ 是拓扑嵌入。

由于 2^A 带有逐点收敛拓扑，我们在 $(2^A)^B$上赋予蒂科诺夫积拓扑。按照这一约定，$(2^A)^B$ 与$2^{A \times B}$ 同胚。此外，转置：

$$\Phi_{A,B} : (2^A)^B \to (2^B)^A \text{ given by } \Phi_{A,B}(f)(a)(b) = f(b)(a)$$

是一个同胚。注意 $\Phi_A^{-1}{}_{,\ B} = \Phi_{B,\ A}$。

引理 3.2。 令 $\Phi_{A,\ B} : (2^A)^B \to (2^B)^A$ 为上文定义的转置。任取映射 $h : A \to A$。则对每个 $f \in (2^A)^B$，都有 $\Phi_{A,\ B}(\mathcal{P}(h) \circ f) = \Phi_{A,\ B}(f) \circ h$。

证明。 任取 $a \in A$ 和 $b \in B$。于是：

$$\begin{aligned}\Phi_{A,B}(\mathcal{P}(h) \circ f)(a)(b) = (\mathcal{P}(h) \circ f)(b)(a) = \\ = \mathcal{P}(h)(f(b))(a) = (f(b) \circ h)(a) = f(b)(h(a)) = \\ = \Phi_{A,B}(f)(h(a))(b) = (\Phi_{A,B}(f) \circ h)(a)(b).\end{aligned}$$

引理的证明至此完成。 □

定理 3.3。 设 2^ω 是康托尔集。对于每个非空有限集 A，存在一个 $t \in \mathbb{N}$，使得对于每个有限博雷尔着色 $\gamma : \text{映射}(A, 2^\omega) \to k$，都存在一个 $h \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$，使得 $|\gamma(\mathcal{P}(h) \circ \text{映射}(A, 2^\omega))| \leqslant t$。特别地，存在一个康托尔集 $\mathcal{K} \subseteq 2^\omega$，使得 $|\gamma(\text{映射}(A, \mathcal{K}))| \leqslant t$。

证明。 任取非空有限集 A，并令 t 为命题 3.1 针对 2^A 给出的正整数。任取有限博雷尔着色 $\gamma : \text{映射}(A, 2^\omega) \to k$，然后定义

$$\gamma^* : \mathrm{Map}(\omega, 2^A) \to k \quad \text{by} \quad \gamma^* = \gamma \circ \Phi_{A,\omega},$$

其中 $\Phi_{-,-}$ 是上文定义的转置。由于 γ^* 是博雷尔着色，命题 3.1 适用，因此存在一个 $h \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$，使得

$$|\gamma^*((2^A)^\omega \circ h)| \leqslant t.$$

我们来证明 $|\gamma(\mathcal{P}(h) \circ \text{映射}(A, 2^\omega))| \leqslant t$。引理 3.2 推出：

$$\Phi_{\omega,A}(\mathcal{P}(h) \circ \mathrm{Map}(A, 2^\omega)) \subseteq (2^A)^\omega \circ h,$$

由此可得

$$\gamma^*(\Phi_{\omega,A}(\mathcal{P}(h) \circ \mathrm{Map}(A, 2^\omega))) \subseteq \gamma^*((2^A)^\omega \circ h).$$

注意，$\gamma^* \circ \Phi_{\omega,A} = \gamma$ 因为 $\Phi^{-1}_{A\ ,\omega} = \Phi_{\omega,A}$。因此，

$$|\gamma(\mathcal{P}(h) \circ \mathrm{Map}(A, 2^\omega))| \leqslant |\gamma^*((2^A)^\omega \circ h)| \leqslant t.$$

回忆一下，$\mathcal{P}(h)$ 是一个拓扑嵌入，因为 h 是满射。因此，$|\gamma(\text{映射}(A, \mathcal{K}))| \leqslant t$，其中 $\mathcal{K} = \mathrm{im}(\mathcal{P}(h)) \subseteq 2^\omega$。 □

4 康托尔集作为拓扑一阶结构

令 $\leqslant_{lex}$ 表示 2^ω 上的字典序。如果我们将 2^ω 的元素与 ω 的子集对应起来，那么 $\leqslant_{lex}$ 可描述如下：当且仅当 $A \subseteq B$，或者在 A 和 B 不可比较的情况下，$\min(B \setminus A) < \min(A \setminus B)$。

令 $\mathrm{Emb}(n, 2^\omega)$ 表示有限线性序 $n = \{0, 1, \ldots, n-1\}$ 到 $(2^\omega, \leqslant_{lex})$ 的所有嵌入所构成的集合。注意，$\mathrm{Emb}(n, 2^\omega)$ 只是对集合 $[2^\omega]^n$ 的一种便捷表示；该集合由 2^ω 的所有 n 元子集组成。

定理 4.1. 设 2^ω 是按 $\leqslant_{lex}$ 排列的康托尔集。对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 $t \in \mathbb{N}$，使得对于每个有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{Emb}(n, 2^\omega) \to k$，都存在一个拓扑一阶嵌入 $g : (2^\omega, \leqslant_{lex}) \hookrightarrow (2^\omega, \leqslant_{lex})$，使得 $|\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(n, 2^\omega))| \leqslant t$。特别地，存在一个康托尔集 $\mathcal{K} \subseteq 2^\omega$，使得 $|\gamma(\mathrm{Emb}(n, \mathcal{K}))| \leqslant t$。

证明。任取 $n \in \mathbb{N}$，令 $t = t(n)$ 为定理 3.3 给出的正整数。任取有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{Emb}(n, 2^\omega) \to k$，然后定义 $\gamma' : \mathrm{Map}(n, 2^\omega) \to k$ 为

$$\gamma'(a) = \gamma(a), \text{ for } a \in \mathrm{Emb}(n, 2^\omega)$$
$$\gamma'(x) = 0, \text{ otherwise.}$$

这是一个博雷尔着色，因为 $\mathrm{Emb}(n, 2^\omega)$ 是 $\mathrm{Map}(n, 2^\omega)$ 的博雷尔子集。定理 3.3 告诉我们，存在一个 $h \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$，使得

$$|\gamma'(\mathcal{P}(h) \circ \mathrm{Map}(n, 2^\omega))| \leqslant t.$$

令 $g = \mathcal{P}(h)$。我们已经看到，g 是一个拓扑嵌入。下面证明它也是一个关系嵌入（$2^\omega, \leqslant_{lex}$）$\hookrightarrow (2^\omega, \leqslant_{lex})$。对于这部分证明，取 $\mathcal{P}(\omega)$ 为 ω 的所有子集组成的集合会更加方便。于是，对于 $A \subseteq \omega$，有 $g(A) = h^{-1}(A)$。

命题 1. 对每个 $\varnothing \neq A \in \mathcal{P}(\omega)$，$\min g(A) = \min h^{-1}(\min A)$。

证明。设 $s = \min A$。那么，对所有 $a \in A \setminus \{s\}$，$\min h^{-1}(s) < \min h^{-1}(a)$，因为 h 是一个刚性满射。因此，$\min g(A) = \min \left(h^{-1}(s) \cup \bigcup_{a \in A \setminus \{s\}} h^{-1}(a)\right) = \min h^{-1}(s)$。这证明了命题 1。

命题 2. $A \leqslant_{lex} B$ 当且仅当对所有 $A, B \in \mathcal{P}(\omega)$，$g(A) \leqslant_{lex} g(B)$。

证明。注意到 $A = \varnothing$ 当且仅当 $g(A) = h^{-1}(A) = \varnothing$，因此根据 $\leqslant_{lex}$ 的定义，当 A、B 中有一个为空时，命题成立。在证明的其余部分中，假设 $A, B \neq \varnothing$。如果 $A \subseteq B$，那么 $h^{-1}(A) \subseteq h^{-1}(B)$ 显然成立。假设，

因此， A 和 B 不可比。那么 $A \leqslant_{lex} B$ 意味着 $\min(B \setminus A) < \min(A \setminus B)$。命题 1 以及 h 是刚性满射这一事实现在推出：$\min g(B \setminus A) = \min h^{-1}(\min(B \setminus A)) < \min h^{-1}(\min(A \setminus B)) = \min g(A \setminus B)$。这就证明了命题 2。

由于 g 是拓扑一阶嵌入 $(2^\omega, \leqslant_{lex}) \hookrightarrow (2^\omega, \leqslant_{lex})$，因此 $g \circ \mathrm{Emb}(n, 2^\omega) \subseteq \mathrm{Emb}(n, 2^\omega)$。因此，

$$\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(n, 2^\omega)) = \gamma'(g \circ \mathrm{Emb}(n, 2^\omega)) \subseteq \gamma'(g \circ \mathrm{Map}(n, 2^\omega))$$

这表明 $|\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(n, 2^\omega))| \leqslant t$。换言之，$|\gamma(\mathrm{Emb}(n, \mathcal{K}))| \leqslant t$，其中 $\mathcal{K} = \mathrm{im}(g) \subseteq 2^\omega$。 □

推论 4.2 (参见 Blass [2])。对于每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一个 $t \in \mathbb{N}$，使得对于每个完美集 $P \subseteq \mathbb{R}$ 以及每个有限博雷尔着色 $\gamma\colon [P]^n \to k$，它对 P 中元素构成的严格递增 n 元组进行着色时，都存在一个完美集 $Q \subseteq P$，使得 $|\gamma([Q]^n)| \leqslant t$。

证明。任取 $n \in \mathbb{N}$，并令 t 为定理 4.1 针对 n 给出的正整数。任取一个完美 $P \subseteq \mathbb{R}$ 和一个有限博雷尔着色 $\gamma\colon [P]^n \to k$。令 $\mathcal{C} \subseteq P$ 为包含于 P 中的康托尔集的一个同胚像，并令 $\gamma'\colon \mathrm{Emb}(n, \mathcal{C}) \to k$ 为 γ 在 $[\mathcal{C}]^n = \mathrm{Emb}(n, \mathcal{C})$ 上的限制。由定理 4.1，存在一个康托尔集 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$，使得 $|\gamma'(\mathrm{Emb}(n, \mathcal{K}))| \leqslant t$。因此，我们可以取 $Q = \mathcal{K}$。 □

除了线性序 $\leqslant_{lex}$，康托尔集 2^ω 还带有显然的偏序 $\leqslant$，该偏序按坐标逐一（$f \sqsubseteq g$ 当且仅当 $f(n) \leqslant g(n)$ 对所有 $n \in \omega$都成立）定义，从而使2^ω 成为拓扑偏序集 $\mathcal{Q} = (2^\omega, \sqsubseteq)$。注意，$\leqslant_{lex}$ 是2^ω 上的一个线性序，并且扩展了 $\sqsubseteq$，因此 $\mathcal{EQ} = (2^\omega, \sqsubseteq, \leqslant_{lex})$ 是一个线性序偏序集（即由一个偏序集以及一个扩展该偏序的线性序构成）。康托尔集还具有自然的图结构：对于 $f, g \in 2^\omega$，若 $f \neq g$ 且存在一个 $n \in \omega$，使得 $f(n) = g(n) = 1$，我们就令 $f \sim g$。令 $\mathcal{G} = (2^\omega, \sim)$ 为相应的拓扑图，并用 $\mathcal{OG} = (2^\omega, \sim, \leqslant_{lex})$ 表示其有序版本。

此外，容易验证，并 $\vee$、交 $\wedge$ 以及取补运算$(-)^c$（逐坐标定义为$(f \vee g)(n) = \max\{f(n), g(n)\}$，$f, g \in 2^\omega$，对 $\wedge$和$(-)^c$亦类似）关于康托尔集的拓扑都是连续的。因此，$\mathcal{B} = (2^\omega, \wedge, \vee, (-)^c, 0, 1)$是一个拓扑布尔代数。同样，$\leqslant_{lex}$ 延拓了布尔结构固有的偏序，因此 $\mathcal{EB} = (2^\omega, \wedge, \vee, (-)^c, 0, 1, \leqslant_{lex})$ 是一个线性有序拓扑布尔代数。

注意， $\mathcal{L} = (2^\omega, \wedge, \vee)$是一个拓扑布尔格，并且 $\mathcal{EL} = (2^\omega, \wedge, \vee, \leqslant_{lex})$是一个线性有序拓扑布尔格。

定理 4.1 的证明为下述命题的证明提供了蓝图。

定理 4.3. 设 $\mathcal{C}$ 是上述以康托尔集为基础的八种结构中的任意一种。对于 $\mathcal{C}$ 的每个有限子结构 $\mathcal{A}$，都存在一个 $t \in \mathbb{N}$，使得对于每个有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \to k$，都存在一个拓扑一阶嵌入 $g : \mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}$，满足 $|\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))| \leqslant t$。特别地，存在 $\mathcal{C}$ 的一个拓扑副本 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$，使得 $|\gamma(\mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{K}))| \leqslant t$。

证明。设 L 为 $\mathcal{C}$ 的一阶语言。取 $\mathcal{C}$ 的一个有限子结构 $\mathcal{A} = (A, L^A)$，并令 t 为定理 3.3 针对 A 给出的正整数。任取一个有限博雷尔着色 $\gamma : \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \to k$，然后定义 $\gamma' : \mathrm{Map}(A, 2^\omega) \to k$ 如下：

$$\gamma'(a) = \gamma(a), \text{ for } a \in \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$$
$$\gamma'(x) = 0, \text{ otherwise.}$$

这是一个博雷尔着色，因为 $\mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$ 是 $\mathrm{Map}(A, 2^\omega)$ 的博雷尔子集。定理 3.3 随即告诉我们，存在一个 $h \in \mathrm{RSurj}(\omega, \omega)$，使得

$$|\gamma'(\mathcal{P}(h) \circ \mathrm{Map}(A, 2^\omega))| \leqslant t.$$

令 $g = \mathcal{P}(h)$。很容易证明 g 是一个拓扑一阶嵌入 $\mathcal{C} \hookrightarrow \mathcal{C}$，因此 $g \circ \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C}) \subseteq \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C})$。因此，

$$\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C})) = \gamma'(g \circ \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C})) \subseteq \gamma'(g \circ \mathrm{Map}(A, 2^\omega)),$$

这表明 $|\gamma(g \circ \mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{C}))| \leqslant t$。换句话说，$|\gamma(\mathrm{Emb}(\mathcal{A}, \mathcal{K}))| \leqslant t$，其中 $\mathcal{K} = \mathrm{im}(g) \subseteq \mathcal{C}$。 □

特别是，这一结果告诉我们，拓扑布尔代数 $\mathcal{B} = (2^\omega, \wedge, \vee, (-)^c, 0, 1)$ 具有有限大拉姆齐度。相比之下，近来已有证明 [1] 可数无原子布尔代数不具有大拉姆齐度。这一鲜明的区别引出了以下结论：

公开问题。刻画具有有限大拉姆齐度的布尔代数。

参考文献

[1] D. Bartoˇsov´a, D. Chodounsk´y, B. Csima, J. Hubiˇcka, M. Koneˇcn´y, J. Lakerdas-Gayle, S. Unger, A. Zucker. 无原子可数布尔代数的振荡子代数。arXiv:2505.22603[2] A. Blass. 完美集的一个分割定理。美国数学会会刊 82 (1981), 271–277[3] T. J. Carlson, S. G. Simpson. 拉姆齐定理的对偶形式。《数学进展》53 (1984), 265–290.[4] K. Dasilva Barbosa, D. Maˇsulovi´c, R. Nenadov. 关于具有有限大拉姆齐谱的可数链刻画的简短札记。《序》41 (2024), 573–577.[5] N. Dobrinen, K. Wang. 泛逆极限结构中的大拉姆齐度。《数学逻辑档案》62 (2023), 471–503.[6] M. Dˇzamonja, J. Larson, W. J. Mitchell. 大型稠密线性序的一个分割定理。《以色列数学杂志》171 (2009), 237–284.[7]M. Dˇzamonja, J. Larson, W. J. Mitchell. 大型拉多图的分割。《数学逻辑档案》48 (2009), 579–606.[8] A. S. Kechris, V. G. Pestov, S. Todorˇcevi´c. Fra¨ıss´e 极限、拉姆齐理论与自同构群的拓扑动力学。《几何与泛函分析》15 (2005), 106–189[9] D. Maˇsulovi´c. 可数链的大拉姆齐谱。《序》40 (2023), 237–256[10] D. Maˇsulovi´c, V. Tolji´c. Fra¨ıss´e 猜想与具有有限单形分解的结构的大拉姆齐度。《序》（即将出版）。[11] S. Todorˇcevi´c.《拉姆齐空间导论》。《数学年刊研究丛书》。普林斯顿大学出版社, 普林斯顿（2010）