arXiv:2602.18878v1 [math.OA] 21 Feb 2026

谱较小的量子群表示的 Banach流形

Alexandru Chirvasitu

摘要

我们证明，紧量子群的有限谱表示，无论是在含幺C^*代数中，还是在 Banach空间 E 上，都具有与其经典对应物相同的、以 Banach 空间为模型的微分几何结构：（a）它们是 Banach解析流形；（b）在相关 Banach李群 $U(A)$ 或 $GL(E)$ 的共轭作用下局部齐性；（c）轨道映射具有主丛结构；（d）因此，这些轨道映射都具有局部解析分裂。

我们还指出，当紧量子群至少有一个经典点时，有限谱酉表示恰好就是在适当意义下范数连续的表示。这同样推广了 Kallman、Shtern 和作者的研究中以各种形式出现的经典对应结果。

关键词：*Banach*流形；*CQG*代数；伴随作用；解析流形；紧量子群；有限谱；范数连续；表示

MSC 2020: 46L67; 46L52; 20G42; 16T15; 22D10; 46H15; 46T05; 46T10

引言

本文的部分动机是将其置于如下一类广泛现象的背景之中：对附着于“充分半单”对象的表示论数据进行参数化的模空间具有丰富的几何结构，并表现出很强的正则性。对浩繁而多面的文献稍作抽样，便会发现许多以不同方式具体体现这一一般模式的实例。

- 将投影/酉元/部分等距/正交1-和投影 n-元组（以及许多其他同类对象）在Banach或 C^*-代数中 B 构造为（通常为解析的）*Banach*流形（在 [5, §5.1] 的意义下）符合这一模式，因为所述空间常常可解释为态射 $A \to B$，对应于性态良好的Banach/C^*-代数 A。例子包括 [4, 8, 9]，仅举数例。

- 更一般地（正如刚才提到的），对于顺从的或有限维半单 A，Banach 代数/C^* 态射 $A \to B$的空间通常也可以赋予 Banach 流形结构，并在 B的可逆群/酉群作用下具有局部齐性；由于该作用，它们还可分解为局部平凡纤维化，等等。参见例如 [3, 命题 2.2], [7,§4], [31, §8.2] 及其中引用的大量参考文献。

- 以同样的方式（且与本文联系最为直接），对于紧群 $\mathbb{G}$ 以及含幺C^*-代数 A， [23] 赋予$\mathrm{Rep}_\sigma(\mathbb{G}, A)$中由余循环扭曲的 $\mathbb{G}$-表示（于 A 中）构成的空间以Banach流形结构，并研究其右局部几何。 [7, 定理3.2与3.7] 推广

该讨论，此次聚焦于紧群的余循环空间 $\mathbb{G}$ 取值于*Banach*李群 [37,§6] $\mathbb{U}$。

本文的一个目标是通过将类似结果推广到紧致量子 $\mathbb{G}$ （按 [41,定义 2。1], 此处体现为相应的 C^*-代数 $\mathcal{C}(\mathbb{G})$ 连续函数，从而至少部分摆脱最后一个要点所描绘图景中的“经典包袱”。论述沿着两条相邻但并不完全重合的线索并行展开，以下概述对定理2.5和2.8 进行了压缩和改述，以适用于本文的引言。 $\mathbb{G}$ 始终表示紧致量子群，相关背景和术语将在后文展开说明。

定理 A 对于紧致量子 $\mathbb{G}$，有限谱 $\mathbb{G}$-表示在含幺 C^*-代数 A（或在*Banach* 空间 E上）

(1) 构成解析巴拿赫流形；

(2) 在自然作用的群 $\mathbb{U}$（一种情形下为酉群$U(A)$，另一种情形下为 $GL(E)$）通过共轭作用而局部齐性；

(3) 以及由此得到的轨道映射

$$\mathbb{U} \ni g \longmapsto (g \triangleright x \in orbit\ of\ x)$$

解析主纤维化 *[5, §6.2]*；

(4) 从而特别地，所述轨道映射可局部且解析地分裂：每个 x都有一个开邻域 $\mathcal{U} \ni x$，支撑一个解析映射

$$\mathcal{U} \ni x' \longmapsto u_{x'} \in \mathbb{U}, \quad u_x = 1, \quad \forall \left(x' \in \mathcal{U}\right) \left(u_{x'} \triangleright x' = x\right).$$

■

有限谱要求需要加以阐明，同时也用以衔接本文的两个主要部分。请注意，经典结果定理 A 所推广者均涉及范数连续紧群表示 $\mathbb{G} \to GL(E)$（Banach空间上 E 而非更广的、常见的 [30, §2]类中的强连续表示：

$$\forall (v \in E) \left(\mathbb{G} \ni g \xmapsto[\text{continuous}]{} gv \in E \right).$$

从经典观点看，所述范数连续性恰好可在表示论意义上由前述谱有限性刻画：范数连续表示正是那些具有有限多个同型分量者 [16, 定理 4.1] ρ^α:

$$\mathbb{G} \xrightarrow[\text{norm-continuous}]{} GL(E) \iff \rho = \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} \rho^\alpha \text{ is finite}$$

$$\rho^\alpha := \text{largest direct sum of copies of } \alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G}).$$

例如，参见 [32, 推论 2] 中的这一精确表述， [18, 定理 11] 中关于附加温和性约束作用于 $\mathbb{G}$时的酉前身，以及 [6, 定理 3.10] 中的多个等价刻画。

紧量子群允许对其 Banach 空间/酉表示进行同型分解（背景知识见 第1节），因此我们在下文将有限谱约束视为范数连续性的适当替代。

然而，也存在（量子）范数连续性更为直接的类比：对于紧量子群 $\mathbb{G}$的酉表示，例如将（1-1）视为酉元 $U \in M(\mathcal{C}(\mathbb{G})\otimes\mathcal{K}(H))$，只需要求 U 属于空间 C^* 张量积 $\mathcal{C}(\mathbb{G})\otimes\mathcal{L}(H)$。在此语境下，比较范数连续性的这两种相互竞争的概念便成为自然之事；定理 0.1证明，若假定 $\mathbb{G}$具有一个经典点，即量子函数代数$\mathcal{C}(\mathbb{G})$ 具有乘法态，则二者等价。

定理 0.1 设 $\mathbb{G}$ 是至少具有一个经典点的紧量子群。关于酉 $\mathbb{G}$-表示的下列条件

$$U \in M(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{K}(H)),\quad H \text{ a Hilbert space} \tag{0-1}$$

是等价的。

(a) U 具有有限多个同型分量。

(b) U 在如下意义下是一致连续的：$U \in \mathcal{C}(\mathbb{G})\otimes\mathcal{L}(H)$。 _

1 Norm 紧致量子群表示的连续性与有限谱

我们假定读者熟悉紧量子群 的相关背景知识，例如 [21, 26, 35, 41] 及类似资料所述的内容（必要时会提供针对性参考文献）。具体而言，每个此类对象都是一个虚拟对象 $\mathbb{G}$，与若干函数代数型实现对偶；具体情形决定了适当的选择：

- 一个紧量子群代数 [13, 定义 2.2] $\mathcal{O}$（$\mathbb{G}$），即一个复数（余半单 [24, 定义 2.4.1]）Hopf $*$代数，其简单余模均可酉化：存在一个右线性内积$\langle - \mid - \rangle$，在 $\mathcal{O}$（$\mathbb{G}$）余作用下保持不变，具体而言， [13, (1.8)]

$$\forall\, (v, w \in V)\, (\langle v \mid w_0\rangle\, Sw_1 = \langle v_0 \mid w\rangle\, v_1^*)$$

在*Sweedler* 记号 [24, 记号 1.4.2 和定义 1.6.2]之后，对余作用

$$V \ni v \longmapsto v_0 \otimes v_1 \in V \otimes \mathcal{O}(\mathbb{G}).$$

$\mathcal{O}$（$\mathbb{G}$）意在类比普通紧群上的代表函数 [16, 定义 3.3] 代数。

- 普遍 C^* 完备化 $\mathcal{C}_u$(G) [26, 推论 1.7.5] 的 $\mathcal{O}$(G)。
- 约化 版本 $\mathcal{C}_r$(G)，即 $\mathcal{O}$(G)相对于其*Haar*积分（或态）的GNS表示的像 $h_{\mathbb{G}} \in \mathcal{O}(\mathbb{G})^*$ [26, §1.2]。

- 介于 $\mathcal{C}_u$ 与 $\mathcal{C}_r$ 之间的中间形式（通常会导向 C^* 版本，即最广义的定义）：夹在以下形式之间的 C^*-代数 $A = \mathcal{C}(\mathbb{G})$

$$\mathcal{C}_u(\mathbb{G}) \twoheadrightarrow A \twoheadrightarrow \mathcal{C}_r(\mathbb{G})$$

以便 继承 $\mathcal{C}_u$ 的余结合 C^* 态射 $A \xrightarrow{\Delta} A\otimes A$ （最小张量积 ）.

我们还将大量参考紧量子群在希尔伯特空间上的酉表示，例如文中所述，便于回顾 [11, §2。2]：酉元

$$U\in M\left(\mathcal{C}_r(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{K}(H)\right)\subseteq L^\infty(\mathbb{G})\overline{\otimes}\mathcal{L}(H)\quad (W^*\text{ tensor product [33, Definition IV.5.1]})$$
$$(\Delta\otimes\mathrm{id})\,U=U_{13}U_{23}\quad (\textit{leg notation [35, §2.1.2]}),$$

其中 $M(-)$ 和 $\mathcal{K}(-)$ 分别表示乘子代数 [39, 命题 2.1.3] 以及紧算子代数，而 $L^\infty(\mathbb{G})\geq\mathcal{C}_r(\mathbb{G})$ 则表示与 $h_{\mathbb{G}}$ 关联的 GNS表示的冯·诺依曼闭包。

下文中，我们经常将 $\mathbb{G}$ 视为与此类一般 Hopf C^*-代数 $\mathcal{C}(\mathbb{G})$ 对偶（而非特指其约化版或普适版）。在这一框架下，令

$$\textsc{Rep}(\mathbb{G},H):=\left\{U\in UM\left(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{K}(H)\right)\ :\ (\Delta\otimes\mathrm{id})\,U=U_{13}U_{23}\right\}. \tag{1-1}$$

分解

$$\mathcal{O}(\mathbb{G})\cong\bigoplus_{\alpha\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}C^\alpha=\bigoplus_\alpha\mathrm{span}\{u^\alpha_{ij},\ 1\leq i,j\leq\dim V^\alpha\}$$
$$\mathrm{Irr}(\mathbb{G}):=\left(\text{classes of simple }\mathcal{O}(\mathbb{G})\text{-comodules }V^\alpha\xrightarrow{\rho^\alpha}V^\alpha\otimes\mathcal{O}(\mathbb{G})\right)$$

（其中 u^α_{ij} 是 $\mathbb{G}$ [40, 命题 4.7 及其相关讨论] 中通常所说的矩阵系数）给出 [29, 定理 1。5]

- 泛函 $\psi^\alpha\in\mathcal{O}(\mathbb{G})^*$ 分别消去除对角 u^α_{ii} 以外的所有项，并将对角项映为 1；
- 因此也有（谱）投影

$$P^\alpha=P^\alpha_U:=(\psi^\alpha\otimes\mathrm{id})\,U^*\in\mathcal{L}(H), \tag{1-2}$$

每一个都以表示 U 的 α-同型分量 $H^\alpha\leq H$ 作为其像：即 H 的最大$\mathbb{G}$-不变子空间，在该子空间上该表示分解为 ρ^α的若干副本之和。

于是谱 spec U是使 P^α非零的那些 α 的集合。

证明 定理 0.1 我们着重讨论较有意义的蕴含 (b) $\Rightarrow$ (a)，其逆命题是直接的（另见 [6,注 3.9]）。

该假设的含义是存在某个连续的乘性 $*$-态射$\mathcal{C}(\mathbb{G})\to\mathbb{C}$。如 [10, 定理 2.2], 之前的段落所解释的，由此可知，$\mathbb{G}$的余单位[26,（定义 1.6.1]之后）可连续延拓到 $\mathcal{C}(\mathbb{G})$上。

[6, 定理 3.16] 将(a) 等同于以下对象的可延拓性

$$\mathcal{K}(H)\ni T\longmapsto U^*(1\otimes T)U\in M(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{K}(H)) \tag{1-3}$$

为一个 作用 [29, 定义 1.4]

$$\mathcal{L}(H)\xrightarrow{\rho}\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{L}(H). \tag{1-4}$$

在所假定的(b)下，同一公式（1-3）确实给出了一个余结合的映射（1-4）；唯一尚缺的要素是 [29, 定义 1.4 b)]中的稠密性约束：

$$\overline{\mathrm{span}\left\{(y\otimes1)\rho(x)=(y\otimes1)U^*(1\otimes x)U\ \middle|\ x\in\mathcal{L}(H),\ y\in\mathcal{C}(\mathbb{G})\right\}}^{\|\cdot\|}=\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{L}(H).$$

在存在余单位 $\mathcal{C}(\mathbb{G}) \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{C}$ 的情况下，该稠密性条件（譬如可立即由 [28, 定理 6.3],推出）等价于

$$\mathcal{L}(H) \xrightarrow{(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\rho=\mathrm{id}} \mathcal{L}(H).$$

该条件对 $\mathcal{K}(H)$ 成立，因此存在到乘子代数的（唯一的，见引理 3.2.4 和定理 15.2.12]）延拓

$$\mathcal{K}(H) \hookrightarrow \mathcal{L}(H) \cong M(\mathcal{K}(H)) \xrightarrow{\mathrm{id}} \mathcal{L}(H), \qquad \mathcal{K}(H) \xhookrightarrow[(\varepsilon\otimes\mathrm{id})\rho]{} \mathcal{L}(H)$$

到乘子代数。 ■

定理 0.1重新得出了经典刻画：普通（非量子）紧群的范数连续酉表示，恰好是那些具有有限谱的表示（[32, 推论 2]一般而言， [6, 定理 3。10] 关于若干其他刻画，参见 [18, 定理 11]对局部紧致连通 2nd 可数群的酉表示）：显然，交换$\mathcal{C}(\mathbb{G})$ 总是具有余单位。

讨论还可推广到（我们将称之为）一致（或一致连续）$\mathbb{G}$-表示，在任意 C^*-代数中 A：参照一致酉$\mathbb{G}$-表示的定义（适用于定理 0.1），

$$\mathrm{Rep}(\mathbb{G}, A) := \{U \in \text{unitary group } U\,(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}A) \;:\; (\Delta\otimes\mathrm{id})\,U = U_{13}U_{23}\}$$

（参见 [20,第292]页）。在这种情形下，谱同样有意义。

定义 1.1 对于 $U \in \mathrm{Rep}(\mathbb{G}, A)$,

$$\operatorname{spec} U := \operatorname{spec} \widetilde{U}, \qquad \begin{array}{l} \widetilde{U} := (\mathrm{id}\otimes\iota)U \in U\,(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{L}(H)) \\ A \xrightarrow[C^* \text{ embedding}]{\iota} \mathcal{L}(H). \end{array}$$

~显然，(1-2)（用 U 替代 U）对某个 ι 成立，当且仅当对任何其他 ♦也成立，因此该定义与嵌入无关。

定理 0.1 的证明 现在还可推出：

定理 1.2 对于带有一个经典点的紧量子群 $\mathbb{G}$ 以及一个含幺 C^*-代数 A，表示 $U \in \mathcal{C}(\mathbb{G})\otimes A$ 具有有限谱，以下几种说法彼此等价：

(a) 酉 $\mathbb{G}$-表示

$$(\mathrm{id}\otimes\psi)U \in \mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{L}(H)$$

对于任意 $*$-表示 $A \xrightarrow{\psi} \mathcal{L}(H)$，其谱均为有限集。

(*b*) 同上，对于 单个 忠实的 $A \xrightarrow{\psi} \mathcal{L}(H)$。 (*c*) 由 $\mathbb{G}$ 诱导的 $\mathbb{G}$ 在 A 上的共轭 $\mathbb{G}$-作用 $U^*(1\otimes\bullet)U$ 具有有限谱。 ■

注 1.3 定理0.1 和1.2 尤其是以一种与文献中通常所见颇为不同的方式，重新得到其经典 $\mathbb{G}$ 对应结果：前述 [32, 推论 2], [6, 定理 3。10]及其类似结果往往依赖于局部紧群和/或 Banach李群的结构性质，而这些性质高度特定于其经典设定。♦

2 量子群表示流形

回顾 [23, §3.2]，对于任意紧群 $\mathbb{G}$、含单位元的 C^*-代数 A 以及连续 2-余循环 [23, §1.1] $\mathbb{G}\times\mathbb{G}\xrightarrow{\sigma}\mathbb{S}^1$，表示空间 $\mathrm{Rep}_\sigma(\mathbb{G},A)$——被 σ 扭曲的表示 $\mathbb{G}\to A$（即 σ-表示，见 [23, §1.4]，；也可采用 [38, §VII.2]，中的术语）——是 $\mathcal{C}(\mathbb{G},A)$ 的一个实解析巴拿赫子流形；后者应按照 [22, §II.2] 或 [5, §5.8.3] 的含义来理解。

鉴于紧群的酉表示中，一致连续的巴拿赫空间表示恰好是有限谱表示，对于紧量子 $\mathbb{G}$ 而言，有限谱酉表示定理 1.2 在赋予光滑的巴拿赫流形参数化方面表现得最好。

定理 2.5 将最后一条评述形式化，并要求对紧量子群表示谱的连续性性质作一些初步观察。

引理 2.1 设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群，H 是一个希尔伯特空间。

(1) 映射

$$R\mathit{EP}(\mathbb{G},H)\ni U\longmapsto \operatorname{spec}U\in 2^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}=\{0,1\}^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}.$$

对于定义域上的一致拓扑和陪域上的紧开拓扑是连续的。

（2）特别地，对于任意含单位元的 C^*-代数 A，映射

$$R\mathit{EP}(\mathbb{G},A)\ni U\longmapsto \operatorname{spec}U\in 2^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$$

具有相同的连续性，并且限制在开子集上时是局部常值映射

$$R\mathit{EP}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{G},A):=\{U\in R\mathit{EP}(\mathbb{G},A)\ :\ |\operatorname{spec}U|<\infty\}\subseteq R\mathit{EP}(\mathbb{G},A).$$

证明 **（1）**对于每个 $\alpha\in\mathrm{Irr}(\mathbb{G})$ 映射 $U\mapsto P_U^\alpha$（见（1-2））是范数-范数连续的，并且充分接近的投影是共轭的 [39, 命题 5.2。6]（因此它们会同时消失或同时不消失）。

（2）或许需要加以验证的两个方面是开性+和局部常值性。由（1）（及其证明），所有 U' 充分接近于 $U\in\mathrm{REP}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{G},A)$ 的表示 $P_{U'}^\alpha$，$\alpha\in\operatorname{spec}U$ 分别在范数意义下接近于 P_U^α。因此我们得到接近的

$$(P_{U'}^\alpha)_{\alpha\in\operatorname{spec}U}\ \sim\ (P_U^\alpha)_{\alpha\in\operatorname{spec}U}\ \text{ in } C^*\left(\mathbb{C}^{|\operatorname{spec}U|},A\right).$$

它们将在酉群 $U(A)$ 下互相共轭（例如 [7, 定理 4。1], [3, 命题 2。2] 对于 $A=\mathcal{L}(H)$ 等），从而

$$\sum_{\alpha\in\operatorname{spec}U}P_{U'}^\alpha=\sum_{\alpha\in\operatorname{spec}U}P_U^\alpha=1.$$

特别地，$\operatorname{spec}U'=\operatorname{spec}U$（按假设为有限）。 ■

备注 2.2 (1) 为酉 $\mathbb{G}$-表示赋予拓扑有几种自然方式。 [11,p.85], 例如，将 $M(-)$ 上的严格拓扑 [27, §3.12.17] 限制到其酉子群上。此外，通常赋予 $\mathcal{L}(H)$ 空间的所有常见的弱于范数的局部凸拓扑也都可用（例如可参见 [33, §II.2]或 [27, §2.1.7], 等处的回顾）。这些拓扑在酉群 $U(L^\infty(\mathbb{G})\bar{\otimes}\mathcal{L}(H))$ 上都一致（并赋予其拓扑群结构）：

- 弱=弱$_\sigma$、强=强$_\sigma$ 以及有界集上的强*=强$^*_\sigma$，如同一[27, §2.1.7]中所述；

- 弱=强（在等距算子上，因此在酉元上亦然），见 [15, 解答 20], ；而在正规算子上，无论如何都强=强*，见 [15, 解答 116];
- 根据 [1, 定理 II.7], ，在单位球上强*=*Mackey* 拓扑 [36, §36], 是赋予与弱$_\sigma$相同连续泛函空间的最强局部凸拓扑;
- 最后，根据 [17, 命题 18.4.15]，酉元在这些拓扑下构成一个拓扑群。

(2) 没有理由认为引理 2.1 在(1)上文所标出的较弱拓扑下仍然成立：只需一个简单构造（例 2.3），便可得到经典紧群表示的有限谱网，它们在严格拓扑（因此也在弱/强/Mackey 等拓扑）下收敛，却没有相应的紧开谱收敛。⧫

例 2.3 在无限维希尔伯特空间 H上，考虑一个递增网

$$\mathcal{L}(H)\ni(\text{projection } P_\lambda)\xrightarrow[\lambda]{\text{strong}^*}1\in\mathcal{L}(H),\quad \dim P_\lambda H^\perp=\infty$$

并令任意紧群 $\mathbb{G}$ 在 $P_\lambda H$ 上平凡作用，在 $P_\lambda H^\perp$ 上按 $1\neq\alpha\in$**Irr**$(\mathbb{G})$ 中某个元素 α-同型分量作用。相应的

$$U_\lambda\in\left(M\left(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}\mathcal{K}(H)\right),\ \text{strict topology}\right)\cong\mathcal{C}_b(\mathbb{G},\mathcal{L}(H)_{\text{strict}})\quad([2,\text{ Corollary 3.4}])$$
$$:=\left\{\mathbb{G}\xrightarrow[\text{strictly continuous}]{\text{bounded}}\mathcal{L}(H)\cong M\left(\mathcal{K}(H)\right)\right\}\tag{2-1}$$

它们的谱大小都为 2 $\{1,\alpha\}$ 并且严格收敛到作用于 H上的单点谱平凡表示：事实上，$\mathcal{L}(H)$ 上的严格拓扑是 Mackey [34, 推论 2。8], 因此，根据*定理 II，在有界集上它与强拓扑一致。 [1, 再参见定理 II。7] （另见 注 2.2(1) ）。⧫

注 2。4 $\mathbb{G}$ 由于是紧的，式（2-1）中的有界性要求并非必要（即自动满足）：

- 拓扑向量空间的紧子集是 [19, §15.6(6)] 有界的， 这里的有界取 [19, §15.6]中的抽象意义；

- 而对于 $\mathcal{L}(H)\cong M(\mathcal{K}(H))$ 上的严格拓扑，根据一致有界原理 [19, §15.13(2)]，抽象有界性与通常的范数有界性概念一致。⧫

定理 2.5 设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群，且 A 是一个含幺 C^*-代数。

(1) 有限谱表示 $U\in\mathcal{C}(\mathbb{G})\bar{\otimes}A$ 在其范数拓扑下构成一个实解析巴拿赫子流形

$$Rep_{FS}(\mathbb{G},A)\subset \textit{unitary group } U(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}A).\tag{2-2}$$

(2) 流形 (2-2在酉群的共轭作用下是局部齐性的$U(A)$，这意味着该作用的轨道在 $\mathrm{REP}_{\mathrm{FS}}$ 中是开集。

(3) 对于 $\mathrm{Rep}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{G}, A)$ 中的每一个 $U(A)$-轨道 $\mathcal{O}_U$，轨道映射

$$U(A) \ni V \longmapsto V \triangleright U := (1 \otimes V)U(1 \otimes V^*) \in \mathcal{O}_U$$

是一个解析主纤维化。

(4) 特别地，对于每一个 $U \in \mathrm{Rep}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{G}, A)$ ，存在一个开邻域 $\mathcal{U} \ni U$ 以及一个解析映射

$$\mathcal{U} \ni U' \longmapsto V_{U'} \in U(A), \quad V_U = 1, \quad V_{U'} \triangleright U' = U.$$

有必要澄清一点，涉及一个含糊的术语：子流形 $N \subseteq M$在此按如下方式理解，如同 [22, §II.2] （子流形，见 [5, §5.8.1]）：巴拿赫切空间嵌入 $T_pN \leq T_pM$， $p \in N$ 必须可分裂，即成为 有补的 [25, §4.9]。或者：[14, 定义 3.1.10] 所称的 分裂 子流形。

证明 嵌入 A 到某个 $\mathcal{L}(H)$中，从而 $\mathbb{G}$-表示在 A中同时也是酉 $\mathbb{G}$-表示，作用在 H上。给定一个有限谱的 $\mathbb{G}$-表示，作用在 H上，所有与之足够接近的其他表示都将具有相同的（有限）谱，依据 引理 2.1(2)。由此可知（2-2）分解为互不相交的开子集

$$\mathrm{REP}_{\mathcal{F}}(\mathbb{G}, A) := \{\rho \in \mathrm{REP}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{G}, A) \mid \mathrm{spec}(\rho) = \mathcal{F}\}, \quad \mathcal{F} \subseteq \mathrm{Irr}(\mathbb{G}) \text{ finite}.$$

接下来注意，根据引理 2.7 下文

$$\mathrm{REP}_{\subseteq \mathcal{F}}(\mathbb{G}, A) := \cup_{\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}} \mathrm{REP}_{\mathcal{F}'}(\mathbb{G}, A) \tag{2-3}$$

在拓扑上可识别为该空间

$$\{\text{unital morphisms } \mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}} \longrightarrow A\},$$

其中 $\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}$ 是子余代数的 C^*-代数对偶

$$\mathcal{C}(\mathbb{G})_{\mathcal{F}} := \bigoplus_{\alpha \in \mathcal{F}} \mathrm{span}\{u^{\alpha}_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq \dim \alpha\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbb{G}) \tag{2-4}$$

现在，结论完全可由关于有限维表示空间的类似结论推出 C^*-代数（[7, 例如定理 4。1] ），但有一点需要注意：各个开子空间

$$\mathrm{REP}_{\subseteq \mathcal{F}}(\mathbb{G}, A) \subseteq \mathrm{REP}_{\mathrm{FS}}(\mathbb{G}, A)$$

是相应 Banach 空间 $\mathcal{L}(\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}, A)$ 的子流形，而非所期望的环境空间 $U(\mathcal{C}(\mathbb{G})\otimes A)$。下述方法将弥补这一不足。

- 嵌入

$$U(\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}A) \leq (\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}A)^{\times} := \{\text{invertible elements in the displayed } C^*\text{-algebra}\}$$

为一个 子流形 [37,推论 15.22] ,只需确认一个流形嵌入

$$\mathrm{REP}_{\subseteq \mathcal{F}}(\mathbb{G}, A) \subseteq (\mathcal{C}(\mathbb{G})\underline{\otimes}A)^{\times}, \quad \text{fixed finite } \mathcal{F} \in 2^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}. \tag{2-5}$$

- 现在将注意力限制在这个（有补空间的）子空间上

$$\mathcal{L}\left(\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}, A\right) \cong \mathcal{C}(\mathbb{G})_{\mathcal{F}} \otimes A = \operatorname{im} \bigoplus_{\alpha\in\mathcal{F}} \left(P_\alpha \in \mathcal{LC}(\mathbb{G})\right) \leq \mathcal{C}(\mathbb{G}) \underline{\otimes} A \quad (\text{see (2-4)}).$$

- 该链

$$C^*\left(\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}, A\right) \leq (\text{unital-Banach-algebra morphisms } \mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}} \to A) \leq \mathcal{L}\left(\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}, A\right)$$

现在是解析巴拿赫子流形之一，这由 [7, 定理 **4.1** 和 **4.4**]得出。

- 最后，流形嵌入（2-5）通过与可逆元的开子流形相交而得到，该子流形位于 $\mathcal{C}$（$\mathbb{G}$）$\otimes A$。■

—

特别地，定理 1.2 和 2.5 共同得出

推论 2.6 关于定理 *2.5*的结论适用于

$$\mathit{REP}(\mathbb{G}, A) = \mathit{REP}_{FS}(\mathbb{G}, A) \subset U(\mathcal{C}(\mathbb{G}) \underline{\otimes} A)$$

对任意含幺 C^*-代数 A 以及具有经典点的紧量子群 $\mathbb{G}$ $t.$ ■

我们提醒读者，对于紧量子 $\mathbb{G}$ 以及一个含单位元的 C^*-代数 A （事实上在更广泛的一般情形下 [20,命题5.2和5.3]）存在一个双射

$$\text{(2-6)} \qquad \operatorname{MOR}\left(c_0(\widehat{\mathbb{G}}), A\right) \xrightarrow[\cong]{\text{CAN}=\text{CAN}_{\mathbb{G},A}} \operatorname{REP}(\mathbb{G}, A),$$

其中

- $\mathbf{Mor}(B, B')$表示非退化 C^* 态射 $\underline{B \xrightarrow{\psi} M(B')}$的空间，适用于可能非含单位元的 B、B'，即 [20, p.291] 且$\operatorname{span} \psi(B)B' = B'$;
- 以及

$$c_0(\widehat{\mathbb{G}}) := \left\{ (x_\alpha)_{\alpha\in\operatorname{Irr}(\mathbb{G})} \in \prod_{\operatorname{Irr}(\mathbb{G})} C^{\alpha *} \ : \ \lim_{\substack{\alpha \text{ away} \\ \text{from finite sets}}} \|x_\alpha\| = 0 \right\}$$

是 $\mathbb{G}$的（离散量子）庞特里亚金对偶 [35,§2.3]上在无穷远处消失的函数所构成的 C^*-代数。

引理 2.7 对于紧量子 $\mathbb{G}$ 该双射（*2-6*）诱导同胚

$$\forall \left(\textit{finite } \mathcal{F} \subseteq \operatorname{Irr}(\mathbb{G})\right) \ : \ \mathit{MOR}\left(\prod_{\alpha\in\mathcal{F}} C^{\alpha *}, A\right) \xrightarrow[\cong]{CAN=CAN_{\mathbb{G},A}} \mathit{REP}_{\subseteq\mathcal{F}}(\mathbb{G}, A)$$

对于（陪）域上的范数拓扑。

证明 回顾 $\mathsf{can}^{\pm 1}$ 的显式构造后，这一点便显而易见。在一个方向上，

$$\operatorname{MOR}\left(c_0(\widehat{\mathbb{G}}), A\right) \ni \psi \xmapsto{\text{CAN}} U_\psi := (\mathrm{id} \otimes \psi) W \in \operatorname{REP}(\mathbb{G}, A)$$

（事实上是范数-范数连续的）对于典范表示 [20,命题 5。1]

$$W \in \mathrm{REP}(\mathbb{G}, c_0(\widehat{\mathbb{G}})) \subseteq UM\left(\mathcal{C}_r(\mathbb{G}) \underline{\otimes} c_0(\widehat{\mathbb{G}})\right).$$

反过来,

$$\mathrm{REP}(\mathbb{G}, A) \ni U \xmapsto{\mathrm{CAN}^{-1}} \psi_U := \left(c_{00}(\widehat{\mathbb{G}}) \ni \varphi \longmapsto (\varphi \otimes \mathrm{id})U\right) \in \mathrm{MOR}\left(c_0(\widehat{\mathbb{G}}), A\right)$$

with

$$c_{00}(\widehat{\mathbb{G}}) := \bigoplus_{\alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})} C^{\alpha *} \underset{\text{dense ideal}}{\trianglelefteq} c_0(\widehat{\mathbb{G}})$$

视为 $\mathcal{C}_r(\mathbb{G})$ 上的泛函空间。将其限制到包含于 $c_{00}(\mathbb{G})$ 中的有限维 $\widehat{\ } \prod_{\alpha \in \mathcal{F}} C^{\alpha *}$ 后，即可得出结论。
■

还请回顾 [6, §3.1] 中关于 Banach 空间上的一般 $\mathbb{G}$-表示（或作用） E 的讨论（与希尔伯特空间上的酉表示相对）。这种构造在 [6,定义 3.1] 中表述为

- 一个连续线性

(2-7) $$E \xrightarrow{\rho} \mathcal{C}(\mathbb{G}) \otimes_{\varepsilon} E \quad (\textit{injective} \text{ Banach-space tensor product [12, p.43]}),$$

余结合的，亦即 $(\Delta \otimes \mathrm{id})\rho = (\mathrm{id} \otimes \rho)\rho$;

- 其中

$$\overline{\{(x \otimes \mathrm{id})\rho v \ : \ x \in \mathcal{C}(\mathbb{G}),\ v \in E\}} = \mathcal{C}(\mathbb{G}) \otimes_{\varepsilon} E.$$

对于 Banach 空间表示，谱理论工具同样适用，这与更为熟悉的 [29, Theorem 1.5] 中 $\mathbb{G}$-作用于 C^*-代数的论证如出一辙：存在幂等元

$$P^{\alpha} := (\psi^{\alpha} \otimes \mathrm{id})\,\rho \in \mathcal{L}(E)$$

截取同型分量 E^{α}，然后以显而易见的方式定义谱 $\mathrm{spec}\,\rho$ ，等等。

定理 2.5 现在有了逐点对应的 Banach 空间表示版本，具体表述如下。

定理2.8 设 $\mathbb{G}$ 为紧量子群， E 为 *Banach* 空间。

（*1*）有限谱表示（*2-7*）在其范数拓扑下构成一个实解析巴拿赫子流形

$$REP_{FS}(\mathbb{G}, E) \subset \mathcal{L}(E, \mathcal{C}(\mathbb{G}) \otimes_{\varepsilon} E).$$

(2) 该流形在一般线性群 $GL(E)$的共轭作用下是局部齐性的，即该作用的轨道在 Rep_{FS} 中是开集。

(3) 对于 $Rep_{FS}(\mathbb{G}, E)$ 中的每个 $GL(E)$-轨道 $\mathcal{O}_\rho$，轨道映射

$$GL(E) \ni V \longmapsto V \triangleright \rho := (1 \otimes V)\rho(1 \otimes V^*) \in \mathcal{O}_\rho$$

是一个解析主纤维化。

（*4*）特别地，对于每个 $\rho \in Rep_{FS}$（$\mathbb{G}$，E），存在一个开邻域 $\mathcal{U} \ni \rho$ 以及一个解析映射

$$\mathcal{U} \ni \rho' \longmapsto V_{\rho'} \in GL(E), \quad V_\rho = 1, \quad V_{\rho'} \triangleright \rho' = \rho.$$

证明 定理 2.5的证明中的大部分框架可以保留，这一次只需转而依赖 Banach 类比的 C^*型 [7, 定理 4。1]。

$\mathbb{G}$表示在 E 充分接近 $\rho \in \mathrm{REP}_{FS}(\mathbb{G}, E)$ 的表示，其谱仍将等于 $\mathcal{F} := \operatorname{spec}\rho$，理由与证明定理 2.5 （根据引理 2.9）时所使用的理由完全类似，因此只需关注

$$\mathrm{REP}_{\subseteq\mathcal{F}}(\mathbb{G}, E) \subseteq \mathrm{REP}_{FS}(\mathbb{G}, E)$$

通过类比（2-3）定义。现在确定

$$\begin{aligned}
\mathrm{REP}_{\subseteq\mathcal{F}}(\mathbb{G}, E) &\cong \{\mathcal{C}(\mathbb{G})_{\mathcal{F}}\text{-comodule structures on } E\} \\
&\cong \{\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}\text{-module structures on } E\} \quad ([24, \text{Lemma } 1.6.4]) \\
&\cong \mathrm{BALG}_1(\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}, \mathcal{L}(E)) := \{\text{unital Banach-algebra morphisms } \mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}} \to \mathcal{L}(E)\} \\
&\subseteq \mathcal{L}\left(\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}, \mathcal{L}(E)\right) \quad (\text{Banach submanifold: } [7, \text{Theorem } 4.4]) \\
&\cong \mathcal{L}\left(E, \mathcal{C}(\mathbb{G})_{\mathcal{F}} \otimes E\right) \\
&\cong \mathcal{L}\left(E, \mathcal{C}(\mathbb{G}) \otimes_\varepsilon E\right) \quad (\text{split linear, hence submanifold}).
\end{aligned}$$

这些断言再次都可由其关于 [7, 定理 4.4] 的类比推出，适用于子流形 $\mathrm{BAlg}_1(A, B) \leq \mathcal{L}(A, B)$，其中 A，B 是具有 A 有限维半单性质的（因为 $\mathcal{C}(\mathbb{G})^*_{\mathcal{F}}$ 显然如此）。■

引理 2.9 设 $\mathbb{G}$ 是一个紧量子群，E 是一个 *Banach* 空间。

(1) 映射

$$REP(\mathbb{G}, E) \ni \rho \longmapsto \operatorname{spec}\rho \in 2^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})} = \{0, 1\}^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}.$$

在定义域的一致拓扑和陪域的紧开拓扑下连续。

(2) 特别地，该映射在开子集

$$REP_{FS}(\mathbb{G}, E) \subseteq REP(\mathbb{G}, E)$$

上的限制是局部常值的。

证明 该论证与其 Hilbert 空间先例平行：对每个 $\alpha \in \mathrm{Irr}(\mathbb{G})$，映射

$$\mathrm{REP}(\mathbb{G}, E) \ni \rho \longmapsto P^\alpha_\rho = (\psi^\alpha \otimes \mathrm{id})\,\rho \in \mathcal{L}(E)$$

是范数-范数连续的，因此对于有限的 $\mathcal{F} \in 2^{\mathrm{Irr}(\mathbb{G})}$ 充分接近的元组 $\left(P_\rho^\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{F}}$ 与 $\left(P_{\rho'}^\alpha\right)_{\alpha\in\mathcal{F}}$ 将互为 $GL(E)$ 共轭（[31, 定理 8.2.3] 或 [7, 定理 4.4]）。特别地，其中一个这样的元组之和为 $1 \in \mathcal{L}(E)$ 当且仅当另一个也如此。 ■

参考文献

[1] C. A. Akemann. 算子代数的对偶空间。Trans. Am. Math. Soc., 126:286–302, 1967. 7[2] Charles A. Akemann, Gert K. Pedersen, and Jun Tomiyama. C^*代数的乘子。J. Functional Analysis, 13:277–301, 1973. 7[3] E. Andruchow, G. Corach, and D. Stojanoff. 核性与内射性的几何刻画。J. Funct. Anal., 133(2):474–494, 1995. 1, 6[4] Esteban Andruchow and Gustavo Corach. 部分等距与部分酉算子的微分几何。Illinois J. Math., 48(1):97–120, 2004. 1[5] N. Bourbaki. 数学原本。第XXXIII分册。微分与解析流形。成果分册（第1至7段）。Actualités Scientifiques et Industrielles [科学与工业新成果], 第1333号。Hermann, 巴黎, 1967. 1, 2, 6, 8[6] Alexandru Chirvăsitu. （量子）离散性、谱紧性与一致连续性。Journal of Noncommutative Geometry, 20(1):69–94, 2026. 2, 4, 5, 10[7] Alexandru Chirvasitu and J un Peng. 李群值余循环流形与离散上同调。SIGMA, Symmetry Integrability Geom. Methods Appl., 19:paper 106, 28, 2023. 1, 6, 8, 9, 11, 12[8] G. Corach, H. Porta, and L. Recht. C^*代数中投影空间的几何。Adv. Math., 101(1):59–77, 1993. 1[9] Gustavo Corach, Horacio Porta, and Lázaro Recht. Banach代数中投影系统的微分几何。Pacific J. Math., 143(2):209–228, 1990. 1[10] Ludwik Dąbrowski, Piotr M. Hajac, and Sergey Neshveyev. 非交换 Borsuk-Ulam 型猜想再探。J. Noncommut. Geom., 14(4):1305–1324, 2020. 4[11] Matthew Daws, Adam Skalski, and Ami Viselter. 量子群的(T)性质探讨。数学物理通讯, 353(1):69–118, 2017. 4, 7[12] Joe Diestel, Jan Fourie, and Johan Swart. 张量积的度量理论（重访格罗滕迪克综述）。I. 张量范数。Quaest. Math., 25(1):37–72, 2002. 10[13] Mathijs S. Dijkhuizen and Tom H. Koornwinder. 紧量子群代数：紧量子群的直接代数方法。Lett. Math. Phys., 32(4):315–330, 1994. 3[14] Helge Gloeckner and Karl-Hermann Neeb. 无限维李群, 2026. https: //arxiv.org/abs/2602.12362v1. 8[15] Paul R. Halmos. 希尔伯特空间问题集。第2版，修订增补版，数学研究生教材第19卷。Springer, Cham, 1982. 7

[16] Karl H. Hofmann and Sidney A. Morris. 紧群的结构。学生入门读物，专家参考手册，De Gruyter数学研究第25卷。柏林：De Gruyter，第5版，2023。2, 3[17] D. Husemöller, M. Joachim, B. Jurčo, and M. Schottenloher. 基础丛理论与 K上同调不变量，物理学讲义第726卷。Springer, 柏林, 2008。另有 Siegfried Echterhoff、Stefan Fredenhagen 和 Bernhard Krötz 撰稿。7[18] R. R. Kallman. 连通局部紧群的一致连续酉表示的刻画。密歇根数学杂志, 16:257–263, 1969. 2, 5[19] Gottfried Köthe. 拓扑向量空间。I. 数学科学基础原理丛书第159卷。Springer-Verlag New York, Inc., 纽约, 1969。D. J. H. Garling 从德文译出。7[20] Johan Kustermans. 普适框架下的局部紧量子群。国际数学杂志, 12(3):289–338, 2001. 5, 9, 10[21] Johan Kustermans and Lars Tuset. C^*代数量子群综述。I. Irish Math. Soc. Bull., 43:8–63, 1999. 3[22] Serge Lang. 微分几何基础，数学研究生教材第191卷。Springer-Verlag, 纽约, 1999. 6, 8[23] Mircea Martin. C^*代数中的紧群射影表示。载于《函数空间中的线性算子》（蒂米什瓦拉，1988），算子理论：进展与应用第43卷，第237–253页。Birkhäuser, 巴塞尔, 1990. 1, 6[24] S. Montgomery. Hopf代数及其在环上的作用，数学科学会议委员会区域会议系列第82卷。由数学科学会议委员会出版，华盛顿哥伦比亚特区，1993。3, 11[25] Lawrence Narici and Edward Beckenstein. 拓扑向量空间，纯粹与应用数学（博卡拉顿）第296卷。CRC出版社，佛罗里达州博卡拉顿，第二版，2011。8[26] Sergey Neshveyev and Lars Tuset. 紧量子群及其表示范畴，专题课程 /专题课程/。法国数学会，巴黎，2013。3, 4[27] Gert K. Pedersen. C^*代数及其自同构群。纯粹与应用数学（阿姆斯特丹）。学术出版社，伦敦，2018。 [MR0548006], Søren Eilers 和 Dorte Olesen 编，附序。7[28] P. Podleś and E. Müller. 量子群导论。数学物理评论, 10(4):511–551, 1998. 5[29] Piotr Podleś. 量子空间的对称性。量子SU(2)群和SO(3)群的子群与商空间。数学物理通讯, 170(1):1–20, 1995. 4, 10[30] Alain Robert. 紧群与局部紧群表示论导论，伦敦数学学会讲义系列第80卷。剑桥大学出版社，剑桥—纽约，1983。2

[31] Volker Runde。《顺从性讲义》，数学讲义第1774卷。施普林格出版社，柏林，2002年。1, 12[32] A. I. Shtern。《局部紧群的范数连续表示》。俄罗斯数学物理杂志，15(4):552–553，2008年。2, 5[33] 竹崎正道。《算子代数理论》。I，数学科学百科全书第124卷。施普林格出版社，柏林，2002年。1979年第一版的重印本，《算子代数与非交换几何》第5卷。4, 7[34] Donald Curtis Taylor。《双中心化子代数的严格拓扑》。美国数学会汇刊，150:633–643，1970年。7[35] Thomas Timmermann。《量子群与对偶性入门》。EMS数学教材。欧洲数学会，苏黎世，2008年。从Hopf代数到乘性酉算子及其他。3, 4, 9[36] François Trèves。《拓扑向量空间、分布与核》。多佛出版社，米尼奥拉，纽约州，2006年。1967年原版的完整重印本。7[37] Harald Upmeier。《对称Banach流形与Jordan C^*代数》，北荷兰数学研究第104卷。北荷兰出版公司，阿姆斯特丹，1985年。《数学笔记》[《数学札记》], 96。2, 8[38] V. S. Varadarajan。《量子理论几何》。施普林格出版社，纽约，第二版，1985年。6[39] N. E. Wegge-Olsen。《 K理论与 C^*代数》。牛津科学丛书。克拉伦登出版社，牛津大学出版社，纽约，1993年。通俗易懂的入门书。4, 5, 6[40] S. L. Woronowicz。《紧矩阵伪群》。数学物理通讯，111(4):613–665，1987年。4[41] S. L. Woronowicz。《紧量子群》。载于《量子对称》（莱苏什，1995年），第845–884页。北荷兰，阿姆斯特丹，1998年。2, 3

数学系，布法罗大学，布法罗，纽约州 14260-2900，美国电子邮件地址：achirvas@buffalo.edu