arXiv:2602.18944v1 [math.AT] 21 Feb 2026

关于基本群上的拓扑的覆盖映射

Naghme Shahami，Behrooz Mashayekhy*

纯数学系，代数结构分析卓越中心，马什哈德费尔多西大学，邮政信箱 *1159-91775*，马什哈德，伊朗。

摘要

本文利用经典覆盖理论，引入了关于空间 X 的基本群 X上的拓扑 τ 的覆盖映射的推广。我们证明，著名的覆盖、半覆盖、广义覆盖和纤维化映射概念，都是这种新的 π_1^τ-覆盖映射的特殊情形。此外，在介绍这一新概念的一些性质的同时，我们比较了空间 X 关于基本群 X上的若干著名拓扑的 π_1^τ-覆盖映射。

关键词： 覆盖映射、半覆盖、广义覆盖、基本群、紧开拓扑、Spanier拓扑、胡须拓扑、套索拓扑、子群拓扑。

*2020*年数学主题分类： 57M10, 57M12, 57M05, 55Q05.

1. 引言与动机

$\tilde{}$ $\tilde{}$我们回顾一下，连续映射 $p\colon X \to X$ 是覆盖映射，当且仅当 X 连通且每个 X 中的点都有一个开邻域 U，该邻域被 p 均匀覆盖 $\tilde{}$；也就是说， $p^{-1}(U)$ 是 X 中若干开子集的不交并，且每个子集都被 p 同胚地映射到 U 上。在经典覆盖理论中，一个关键问题是：覆盖映射 $p\colon (X,\tilde{x}_0) \to (X,x_0)$ 是否存在，使得等式 $G = \pi_1(X,\tilde{x}_0)$ 成立，其中 G 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的一个子群。Spanier [34, 第 82] 页对此问题给出了如下回答（另见 Rotman [32, 第 295] 页）。

*通讯作者电子邮箱： na.shahami@mail.um.ac.ir (NaghmeShahami), bmashf@um.ac.ir (Behrooz Mashayekhy)

设 G 是 $\pi_1(X,x_0)$ 的一个子群，且设 $P(X,x_0)$ 为 X 中所有满足 $f(0)=x_0$ 的路径 f 所成的族。定义 $f\sim_G g$ 如下：$f(1)=g(1)$ 且 $[f*g^{-1}]\in G$。容易验证，$\sim_G$ 是 $P(X,x_0)$ 上的一个等价关系。将 $f\in P(X,x_0)$ 的等价类记为 $\langle f\rangle_G$，并将所有这类等价类组成的集合定义为 X_G。定义 $\widetilde{x}_0=\langle c_{x_0}\rangle_G$，其中 c_{x_0} 是 x_0 处的常值路径；再定义函数 $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$，使其满足 $\langle f\rangle_G\mapsto f(1)$，该函数称为端点投影。考虑 X_G 上由集合 $(U,\langle f\rangle_G)=\{\langle f*\lambda\rangle_G\mid \lambda([0,1])\subseteq U\}$ 生成的胡须拓扑，并将这些集合作为基，则函数 $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是连续的；若 X 道路连通，该函数还是满射（见 [32, 引理 10.31]）。此外，从 $\widetilde{x}_0$ 出发的 X 中任意路径 f 都可提升为一条从 $\widetilde{x}_0$ 出发、终止于 $\langle f\rangle_G$ 的 X_G 中的路径 $\widetilde{f}$，其定义为 $\widetilde{f}(t)=\langle f_t\rangle_G$，其中 $f_t(s)=f(ts)$（见 [32, 引理 10.32]）。注意，$\widetilde{f}$ 称为 f 的标准提升，因此映射 $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 具有路径提升性质。由此容易看出，X_G 是道路连通的。作为一条经典结果，已证明：若 X 连通、局部道路连通、$\widetilde{X}$ 且半局部单连通，则 $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是覆盖映射 $\widetilde{X}$，并且 $\pi_1(p_G)(\pi_1(X_G,\widetilde{x}_0))=G$（见 [32, 定理 10.34]）。更一般地，已证明：若 X 连通且局部道路连通，并且存在 X 的一个开覆盖 $\widetilde{\mathcal{U}}$，使得 $\pi(\mathcal{U},x_0)\subseteq G$，则 $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是覆盖映射 $\widetilde{X}$，且 $\pi_1(p_G)(\pi_1(X_G,\widetilde{x}_0))=G$；其中 $\pi(\mathcal{U},x_0)$ 是开覆盖 $\mathcal{U}$ 的 Spanier 子群，它是 $\pi_1(X,x_0)$ 中由棒棒糖曲线 $\alpha*\beta*\alpha^{-1}$ 的同伦类生成的正规子群。这里，β 是一条在 $U\in\mathcal{U}$ 的某个元素内、以 $\alpha(1)$ 为基点的环路，而 α 是任意一条以 x_0 为起点的路径（见 [34, 第 2.5 节定理 13]）。反过来，若 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是满足 $G=\pi_1(p)(\pi_1(X,\widetilde{x}_0))$ 的覆盖映射，则存在 X 的一个开覆盖 $\mathcal{U}$，使得 $\pi(\mathcal{U},x_0)\subseteq G$（见 [34, 第 2.5 节定理12]）。注意，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 上的 Spanier 拓扑 [41, 第 12] 页，记作 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$，是利用所有 Spanier 子群 $\pi(\mathcal{U},x_0)$ 构成的集族引入的。考虑 Spanier 拓扑 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 以及上述最后两个经典结果，对于连通且局部道路连通的空间 X，存在一个覆盖映射 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$，满足 $G=\pi_1(p)(\pi_1(X,\widetilde{x}_0))$，当且仅当 G 是 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 的开子群。

上述性质促使我们如下引入空间 X 相对于基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 上的拓扑 τ 的覆盖映射的推广。

定义 1.1。设 τ 是基本群 $\pi_1(X,x_0)$上的一个拓扑，记作$\widetilde{\pi}_1^{\tau}(X,x_0)$。那么，如果映射 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 满足以下条件，我们称其为“π_1^{τ}-覆盖映射”：

- p是连续的。$\sim$
- X 是道路连通的。
- p 具有路径提升性质。$\sim$
- $\pi_1(p)(\pi_1(X,\widetilde{x}_0))$ 在 $\pi_1^\tau(X,x_0)$中是开集。

注 *1.2.* 注意，利用路径提升性质，很容易看出 π_1^τ-覆盖映射是满射。此外，对于 $\pi_1^\tau(X,x_0)$ 的任意开子群 G，我们可以证明：如果 X道路连通且 $\pi_1^\tau(X,x_0)$ 是半拓扑群，那么端点投影 $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是一个 π_1^τ-覆盖映射。根据上述论证， p_G具有路径提升性质。如果 $[f]\in G$，那么 $f\sim_G c_{x_0}$，因此 $\langle f\rangle_G=\langle c_{x_0}\rangle_G=\widetilde{x}_0$。于是 $\widetilde{f}(1)=\widetilde{f}(0)$，从而 $\pi_1(p_G)([f])=[f]$，其中 f是 f的标准提升。因此我们有 $G\subseteq\pi_1(p_G)(\pi_1(X_G,\widetilde{x}_0))$。因此 p_G是一个 π_1^τ-覆盖映射。另请注意， *[10,* 中 ***Brazas*** 的引理 *5.9]* 证明了： $p_G:(X_G,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 具有唯一路径提升性质，当且仅当 $G=\pi_1(p_G)(\pi_1(X_G,\widetilde{x}_0))$，而这又当且仅当 p_G 具有唯一提升性质。

有人从不同角度推广了覆盖映射的概念，例如刚性覆盖映射 [4], 半覆盖映射 [7], 广义覆盖映射[10, 21] 以及纤维化 [34]。这些推广侧重于保留覆盖映射的某些性质，并去掉均匀覆盖性质。Brazas [7] 通过去掉均匀覆盖性质，同时保留局部同胚以及唯一路径提升性质和同伦提升性质，定义了半覆盖映射。对于广义覆盖映射，局部同胚被唯一提升性质所取代（见 [10, 21]）。我们证明，著名的覆盖、半覆盖、广义覆盖和纤维化映射这些概念，对于某些适当的拓扑 τ，都是这一新概念 π_1^τ-覆盖映射的特例。

为了研究 π_1^τ-覆盖映射的概念，我们需要回顾基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 上的一些著名拓扑，相关内容将在第 2 节介绍。在第 3 节中，为了处理 π_1^τ-覆盖映射的概念，我们研究并介绍了 π_1^τ-覆盖映射的一些性质。特别地，我们证明这一新概念π_1^τ-覆盖映射包含了经典覆盖映射的一些众所周知的推广，例如半覆盖、广义覆盖和纤维化映射。最后，在第 4 节中，我们比较空间 X 在基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 上几种著名拓扑下的 π_1^τ-覆盖映射。

2. 基本群上的一些拓扑

在基本群上赋予自然拓扑的想法可追溯至 Hurewicz 于 1935年 [23]提出的工作，以及 Dugundji 于 1950 年 [17]提出的工作。最近，一些研究人员指出，基本群上存在各种有用、有趣且函子性的拓扑，这些拓扑使基本群成为研究空间某些拓扑性质的强大工具（见 [1, 2, 6, 7, 8, 9, 10, 16, 18, 19, 24, 26, 28, 29, 37, 40]）。基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 上一些众所周知的拓扑如下（另见 [33]）。

1. **子群拓扑**：子群的集合 Σ 若满足以下条件，则称为邻域族：对于任意 $H, K \in \Sigma$，都存在一个子群 $S \in \Sigma$ 使得$S \subseteq H \cap K$。由这一性质，Σ 中所有元素的左陪集构成了 G 上某个拓扑的基，该拓扑称为由 Σ 确定的子群拓扑，记作 G^{Σ}。由邻域族指定的群 G 上的子群拓扑在 [5, 第 2 节5] 中定义，并由一些近期研究人员（例如 [2, 33, 41]）加以探讨。由于 G 中的元素所作的左平移确定了 G 的自同胚，因此它们是齐性空间。Bogley 等人 [5] 重点研究了子群拓扑的一些一般性质，并引入交集 $S_{\Sigma} = \cap\{H \mid H \in \Sigma\}$，称其为邻域族 Σ 的无穷小 子群；他们证明，元素 $g \in G$ 的闭包是陪集 gS_{Σ}。

设 H 是群 G 的一个子群。定义 Σ^H 为 $\Sigma^H = \{K \leqslant G \mid H \subseteq K\}$. 。容易看出，$\Sigma^H$ 是一个邻域族。我们考虑由 Σ^H 确定的 G 上的子群拓扑，并将其记为 G^H。注意，邻域族 Σ^H 对应的无穷小子群是 H。设 (X, x_0) 是一个带基点拓扑空间，且 H 是 $\pi_1(X, x_0)$ 的一个子群，则将由 Σ^H 确定的 $\pi_1(X, x_0)$ 上的子群拓扑记为 $\pi_1^H(X, x_0)$。

2. 胡须拓扑：设 (X, x_0) 是一个带基点拓扑空间。定义$\sim X = \{[\alpha] \mid \alpha : I \to X, \alpha(0) = x_0\}$ 为在 X 中以 x_0 为起点的所有路径$\sim$的路径同伦类的集合。Spanier 在 [34, 第 82] 页通过以下形式的 $[\alpha]$ 的基本开邻域 $N([\alpha], U) = \{[\alpha * \delta] \mid \delta : I \to U, \delta(0) = \alpha(1)\}$,$\sim$在 X 上引入了一种拓扑，其中 U 是 X 中 $\alpha(1)$ 的一个开邻域。Brodskiy 等人将 X 上的这种拓扑称为 [15] 胡须拓扑，因为 $N([\alpha], U)$ 只包含那些与 $[\alpha]$的差异仅在其终点处有微小变化或“胡须”的同伦类。函数$\sim p : X \to X$ 作为端点投影 $p([\alpha]) = \alpha(1)$是连续的；如果 X 连通、局部道路连通且半局部单连通，那么 p 就是万有覆盖映射。显然，$p^{-1}(\{x_0\}) = \pi_1(X, x_0)$，因此 $\pi_1(X, x_0)$ 是 X 的一个子空间$\sim$。可以考虑 $\pi_1(X, x_0)$ 继承自 X 的子空间拓扑；这种拓扑称为基本群上的胡须拓扑，记作 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$（见[15]）。

3. 紧开商拓扑：设 (X, x_0) 是一个带基点拓扑空间，$\Omega(X, x_0)$ 表示 X 中以 x_0 为基点的环路空间。$\Omega(X, x_0)$ 上有通常的紧开拓扑，其由子基集 $\langle K, U\rangle = \{\alpha \mid \alpha(K) \subseteq U\}$ 生成，其中 $K \subseteq [0,1]$ 是紧致的，$U \subseteq X$ 是开集。考虑满射 $q: \Omega(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ $q(\alpha) = [\alpha]$，可以在 $\pi_1(X, x_0)$ 上赋予关于映射 $q: \Omega(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 的商拓扑，该拓扑记作 $\pi_1^{qtop}(X, x_0)$。我们将 $\pi_1(X, x_0)$ 上的这种拓扑称为自然商拓扑（见 [4, 6, 18]）。

4. 套索拓扑：对于任意拓扑空间 X，Brodskiy 等人[14,3]在第 3] 节中，通过基$N(\langle\alpha\rangle, \mathcal{U}, W)$在万有路径空间 X 上引入了套索拓扑，其中 α是始于 x_0的路径，W是终点$\alpha(1)$的一个邻域，而 $\mathcal{U}$是 X的一个开覆盖。当且仅当一个类有如下形式的代表元时，该类 $\langle\gamma\rangle \in X$属于 $N(\langle\alpha\rangle, \mathcal{U}, W)$：$\alpha * L * \beta$，其中 L 属于 $\pi(\mathcal{U}, \alpha(1)) = \{[\prod_{j=1}^{n} u_j v_j u_j^{-1}] \mid u_j$是从 $\alpha(1)$出发的任意路径，并且每个 v_j都是位于 $U_j \in \mathcal{U}\}$ 之一内部的环路，而 β 是在 W 中基于 $\alpha(1)$的环路。基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 与基点$\sim p^{-1}(x_0)$的纤维之间存在一个双射，其中 $p: X \to X$ 是终点投影映射。因此，基本群 $\pi_1(X, x_0)$作为万有路径空间 X 的子空间，继承了 X上的任意拓扑。因此，形如 $N(\langle\alpha\rangle, \mathcal{U}, W) \cap p^{-1}(x_0)$的集合族是 $\pi_1(X, x_0)$上套索拓扑的一组基，记作 $\pi_1^{lasso}(X, x_0)$（见[15,定义 4.11]）。

5. **Tau拓扑**：Brazas 在 [8]中证明，在 $\pi_1(X, x_0)$ 上存在最细的拓扑，使得 $\pi: \Omega(X, x_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是连续的，且 $\pi_1(X, x_0)$ 是一个拓扑群。配备该拓扑的基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 记为 $\pi_1^{Tau}(X, x_0)$（见 [8]）。

6. **Spanier 拓扑**：作为子群拓扑的一个例子，*Spanier* 子群拓扑 [41, 第 12] 页利用基本群 $\pi_1(X, x_0)$ 的所有 Spanier 子群 $\pi(\mathcal{U}, x_0)$ 的全体作为邻域族 Σ^{Span} 而引入。回顾 [34, 第 81], 页，由 X 的开覆盖$\mathcal{U}$所确定的 Spanier 子群是 $\pi_1(X, x_0)$ 的正规子群 $\pi(\mathcal{U}, x_0)$，它由棒棒糖曲线 $\alpha * \beta * \alpha^{-1}$ 的同伦类生成，其中 β 是位于 $U \in \mathcal{U}$ 的某个元素中、以 $\alpha(1)$ 为基点的环路，而 α 是任意一条始于 x_0 的路径。配备 Spanier 子群拓扑的基本群记为 $\pi_1^{Span}(X, x_0)$（见 [2, 41]）。

7. **路径 Spanier 拓扑**：Torabi 等人 [36, 第 3]节在 Spanier 子群的定义中将空间 X 的开覆盖替换为路径开覆盖，并以相同方式引入了路径 Spanier 子群。回顾一下，路径连通分支 X 中涉及 x_0 的路径开覆盖 $\mathcal{V}$ 是由开子集 $\{V_\alpha \mid \alpha \in P(X, x_0)\}$ 组成的集合，而相对于该路径开覆盖的路径 Spanier 子群 $\tilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0)$

是子群 $\pi_1(X,\ x_0)$，由所有具有以下形式代表元的同伦类组成：

$$\prod_{j=1}^{n}\alpha_j\beta_j\alpha_j^{-1},$$

其中，α_j是以 x_0 为起点的任意路径，且对于所有 $j\in\{1,2,...,n\}$，每个 β_j 都是开集 V_{α_j}中的环路。请注意，一般而言，路径 Spanier 子群 $\tilde{\pi}(\mathcal{V},x_0)$并非正规子群（参见 [2, 例 3.7]）。若$\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$是空间 X的两个路径开覆盖，则集合族 $\mathcal{W}=\{U_\alpha\cap V_\alpha\mid\forall\alpha\in P(X,x_0)\ U_\alpha\in\mathcal{U}\ and\ V_\alpha\in\mathcal{V}\}$同时是$\mathcal{U}$和 $\mathcal{V}$的加细。因此，$\tilde{\pi}(\mathcal{W},x_0)\ \leq\tilde{\pi}(\mathcal{U},x_0)\cap\tilde{\pi}(\mathcal{V},x_0)$，这表明基本群的所有路径 Spanier 子群构成一个邻域族。对于带基点拓扑空间(X,x_0)，令 Σ^{pSpan} 为 $\pi_1(X,x_0)$的所有路径 Spanier 子群所成的集合族。由 Σ^{pSpan} 确定的子群拓扑称为路径 Spanier 拓扑，记作 $\pi_1^{pSpan}(X,x_0)$（参见 [2, 36]）。

8. **广义覆盖拓扑**：Brazas [10] 为带基点拓扑空间（X，x_0）引入了广义覆盖子群。令 Σ^{gcov} 为 π_1（X，x_0）的所有广义覆盖子群的集合。由 Σ^{gcov} 确定的子群拓扑称为广义覆盖拓扑，记作 π_1^{gcov}（X，x_0）（参见[1, 2, 10, 21]）。

9. **形状拓扑**：带基点拓扑空间（X，x_0）的第一形状同伦群是如下逆极限

$$\check{\pi}_1(X,x_0)=\varprojlim(\pi_1(|N(\mathcal{U})|,U_0),p_{\mathcal{U}\mathcal{V}*},\Lambda),$$

其中，离散群的逆系统 π_1（$|N$（$\mathcal{U}$）$|$，U_0） $p_{\mathcal{U}\mathcal{V}*}$，$\Lambda$）是赋予通常逆极限拓扑的第一前同伦群。$\pi_1$（$X$，$x_0$）上的形状拓扑是关于第一形状同态$\Psi_1$：$\pi_1$（$X$，$x_0$）$\to\check{}\pi_1$（$X$，$x_0$）的始拓扑。令 π_1^{sh}（X，x_0）表示赋予形状拓扑群结构的 π_1（X，x_0）。注意，π_1（X，x_0）上的形状拓扑也可视为一种子群拓扑，它由所有由映射$X\to K$ 至单纯复形 K 诱导的同态的核确定（更多详情见 [8, 11, 13] ）。

10. **厚 Spanier 拓扑**：为研究第一形状同态 Ψ_1的核，Brazs 和 Fabel [11]引入了相对于 X的一个开覆盖 $\mathcal{U}$的X 的厚 Spanier 子群，记作 $\Pi^{sp}(\mathcal{U},x_0)$。该定义对 Spanier 子群的定义作了修正，将其定义为由 $\alpha*\beta*\gamma*\alpha^{-1}$的同伦类生成的 $\pi_1(X,x_0)$的子群，其中，β 和 γ 分别是位于 $U_1,U_2\in\mathcal{U}$的元素中的路径，而 α 是任意一条起点为 x_0的路径。所有

基本群 $\pi_1(X,x_0)$的厚 Spanier 子群 $\Pi^{sp}(\mathcal{U},x_0)$构成一个邻域族 Σ^{tSpan}（见命题 3.10]）。赋予厚 Spanier 子群拓扑的基本群记作 $\pi_1^{tSpan}(X,x_0)$。X的厚 Spanier 子群记作 $\Pi^{sp}(X,x_0)$，它是相对于 X [11, 的开覆盖的所有厚 Spanier 子群的交集（定义 3.8]）。注意，厚 Spanier 子群 $\Pi^{sp}(\mathcal{U},x_0)$以及 $\Pi^{sp}(X,x_0)$都是 $\pi_1(X,x_0)$的正规子群。

3. 关于 π_1^τ -覆盖映射的一些结果

本节首先回顾一些众所周知的概念，以便研究 π_1^τ-覆盖映射的一些性质（见 [34, 35]）。

定义 3.1. 设 $p\colon E\to B$ 是连续的。则称：

(i) 若对每条路径 $\alpha: I\to B$，都存在（不一定唯一的）一条路径 $\widetilde{\alpha}: I\to E$ 使得 $p\circ\widetilde{\alpha}=\alpha$，则称 p 具有路径提升性质（简称 ***pl***）。

(ii) 若对每个连通、局部路径连通空间 (Y,y) 以及每个连续映射 $f:(Y,y)\to(B,b)$，满足 $\pi_1(f)\pi_1(Y,y)\subseteq_\sim\pi_1(p)\pi_1(E,e)$ 对于 $e\in p^{-1}(b)$，都存在唯一的连续映射 $f:(Y,y)\to\widetilde{(E,e)}$ 使得 $p\circ f=f$，则称 p 具有唯一提升性质（***ul***）。

(iii) p 具有唯一道路提升性质（***upl***），即对于任意两条路径 $\widetilde{\alpha},\beta: I\to E$，若等式 $p\circ\widetilde{\alpha}=p\circ\beta$ 成立，且 $\widetilde{\alpha}(0)=\beta(0)$，则有 $\widetilde{\alpha}=\beta$。

(iv) p具有唯一道路同伦提升性质（***uphl***），即对于任意两条路径 $\widetilde{\alpha},\beta: I\to E$，若道路同伦 $p\circ\widetilde{\alpha}\simeq p\circ\beta$ 相对于 I 成立，且 $\widetilde{\alpha}(0)=\beta(0)$，则有$\widetilde{\alpha}\simeq\beta$ 相对于 I。

(v) 若映射 $p: E\to B$ 满足关于空间 X 的同伦提升性质，则称其具有关于空间 X 的同伦提升性质：给定映射 $f': X\to E$ 和 $F: X\times I\to B$，使得$F(x,0)=p\circ f'(x)$对于 $x\in X$成立，则存在映射 $F': X\times I\to E$，使得$F'(x,0)=f'(x)$对于 $x\in X$成立，且 $p\circ F'=F$。

$$\begin{array}{ccc} X\times 0 & \xrightarrow{f'} & E \\ \downarrow & \overset{F'}{\nearrow} & \downarrow p \\ X\times I & \xrightarrow{F} & B \end{array}$$

若映射 $p: E\to B$ 满足相对于每个空间的同伦提升性质 p，则称其为纤维化。

(vi) 对于任意连续映射 p*:* $E \to B$*,* 存在一个映射 p*:* $E^I \to B$ *,* 定义为$p(\alpha)$ $=(\alpha(0)$ $p\circ\alpha)$*,* 其中 α*:* $I \to E$*,* 且 $B = \{(e, \alpha) \in E\times B^I | \alpha(0) = p(e)\}$。容易看出， p 具有路径提升性质，当且仅当存在一个映射 $\lambda : B \to E^I$*,* 它是 p的右逆。 p的提升函数是一个连续映射λ*:* $B \to E^I$ *,* 它是 p的右逆。*Spanier [34,* 定理 *2.7.8]* 证明，连续映射 p*:* $E \to B$ 是纤维化，当且仅当 p存在提升函数。

可以证明，每个覆盖映射都是纤维化，但反之一般不成立 ~ ~（见 [34]）。此外，若纤维化 $p : X \to X$ 具有 upl，且 X 和 X 是连通且局部道路连通的空间，那么它是覆盖映射，当且仅当存在 ~ ~的一个开覆盖 $\mathcal{U}$ 以及一个点 $\widetilde{x}_0 \in X$，使得 $\pi(\mathcal{U},\ p(\widetilde{x}_0))$ $\subseteq \pi_1(p)\pi_1(X,\ \widetilde{x}_0)$（见 [34, 定理 2.5.12]）。两个纤维化的复合与积也是纤维化。注意，upl 性质蕴含提升路径同伦性质，但反之一般不成立。此外，对于纤维化，upl 与提升路径同伦性质等价（见[35]）。根据 [34, 定理 2.4.5] ，每个具有 upl 的纤维化都具有唯一提升性质，因此是广义覆盖映射。显然，若具有 upl 的纤维化是局部同胚，则它是半覆盖映射。

~ ~ ~ ~**定理 3.2.** 若 $p_1 :\ X_1 \to X$ 具有 *pl*， $p_2 :\ X_2 \to X$ 具有 *upl*，且 $f :\ X_1 \to X_2$ 满足$p_2 \circ f = p_1$。则 f 具有路径提升性质。

~证明. 设 $\alpha :\ I \to X_2$ 为一条路径，则 $p_2 \circ \alpha$ 是 X 中的一条路径。由于 p_1 具有 pl，故~存在一条路径 $\widetilde{\alpha} :\ I \to X_1$ 使得 $p_1 \circ \widetilde{\alpha} = p_2 \circ \alpha$。从而 $p_2 \circ f \circ \widetilde{\alpha} = p_2 \circ \alpha$，又由于$p_2$ 具有 upl，故 $f \circ \widetilde{\alpha} = \alpha$。因此 f 具有路径提升性质。 □

~**定理 3.3.** 设 $p : (X, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 为连续映射。则 $\pi_1(p) :\sim\pi_1(X, \widetilde{x}_0) \to \pi_1(X, x_0)$ 是单态射当且仅当 p 具有唯一路径提升性质。

~ ~证明。设 $\pi_1(p)$ 是单态射，并设 $p \circ \widetilde{\alpha} \simeq p \circ \beta$ rel I, $\widetilde{\alpha}(0) = \beta(0)$。因此$\sim[p \circ \widetilde{\alpha}] = [p \circ \beta]$，即 $\pi_1(p)([\alpha]) = \pi_1(p)([\beta])$。由于 $\pi_1(p)$ 是单态射，故$[\alpha] = [\beta]$，即 $\alpha \simeq \beta$ rel I。因此 p 具有唯一路径提升性质。反之，设 p具有唯一路径提升性质，并设~ . $\sim\pi_1(p)([\alpha]) = \pi_1(p)([\beta])$。因此 $p \circ \widetilde{\alpha} \simeq p \circ \beta$ rel I，且 $\widetilde{\alpha}(0)$ $= \widetilde{x}_0 = \beta(0)$，故 $\alpha \simeq \beta$ rel$I$，因为 p 具有唯一路径提升性质。因此 $\pi_1(p)$ 是单态射。 □

~一些研究人员证明，若 $p : (X,\ \widetilde{x}_0) \to (X,\ x_0)$ 是连续映射，则 π_1^{Tau} [8], π_1^{qtop} [4, 命题 3.4] , $\pi_1^{wh}(p)$ [1, 引理 3.1] 和 $\pi_1^{lasso}(p)$ [14,命题 4.1]保持连续性。下文中，我们希望研究这一性质在子群拓扑下是否成立。

定理 3.4. 设 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是一个连续映射，且 $K\le\pi_1(p)^{-1}(H)$ 其中 $H\le\pi_1(X,x_0)$。那么 $\pi_1(p):\pi_1^K(X,\widetilde{x}_0)\to\pi_1^H(X,x_0)$ 是连续的。

证明。要证明 $\pi_1(p)$ 的连续性，只需证明对于每个 $g\in\pi_1(X,x_0)$，$\pi_1(p)^{-1}(gH)$ 在 $\sim\pi_1^K(X,\widetilde{x}_0)$ 中是开集。显然，$\pi_1(p)^{-1}(gH)=\phi$ 或 $\pi_1(p)^{-1}(gH)=\cup y_j\pi_1(p)^{-1}(H)$，其中 $\pi_1(p)(y_j)=g$。由于 $K\le\pi_1(p)^{-1}(H)$，因此 $\pi_1(p)^{-1}(gH)=\sim\cup y_j\pi_1(p)^{-1}(H)$ 在 $\pi_1^K(X,\widetilde{x}_0)$ 中是开集。因此 $\pi_1(p)$ 是连续的。 □

注意，如果 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是连续映射，且 $H=\pi^{sp}(X,x_0)$，那么$\sim\pi^{sp}(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\subseteq\pi_1(p)^{-1}(H)$。因此，根据 3.4 $\pi_1(p)$：$\pi^{\pi^{sp}(X,\widetilde{x}_0)}(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to\pi^{\pi^{sp}(X,x_0)}(X,x_0)$ 是连续的。

类似于关于 X, $Fib(X)$ [34] 的纤维化映射范畴，以及覆盖、半覆盖和广义覆盖映射的范畴，$COV(X)$ $SCOV(X)$ $GCOV(X)$[1] 可以定义关于 X 的 π_1^τ-覆盖映射范畴。在下述定理中，我们证明该范畴中的一个态射何时也是 π_1^τ-覆盖映射。

定理 3.5。令 $p_1:(X_1,\widetilde{x}_1)\to(X,x_0)$ 为一个 π_1^τ-覆盖映射，$p_2:(X_2,\widetilde{x}_2)\to(X,x_0)$ 为一个具有唯一路径提升性质的 π_1^τ-覆盖映射，并且 $f:X_1\to X_2$ 为一个满足 $p_2\circ f=p_1$ 的连续映射。若 $\pi_1^\tau(p_2)$ 是连续的，则 f 是一个 π_1^τ-覆盖映射。

证明。由于 p_2 具有唯一路径提升性质，因此 $\pi_1(p_2)$是单态射。从而$\mathrm{Im}\pi_1(f)=\pi_1(p_2)^{-1}(\pi_1(p_2)(\mathrm{Im}\pi_1(f)))$。另一方面，$\pi_1(p_2)(\mathrm{Im}\pi_1(f))=\mathrm{Im}\pi_1(p_1)$在 $\pi_1^\tau(X,x_0)$中是开集，因为 p_1是 π_1^τ-覆盖映射。由于 $\pi_1^\tau(p_2)$是连续的，所以$\widetilde{\mathrm{Im}\pi_1(f)}$在 $\pi_1^\tau(X_2,\widetilde{x}_2)$中是开集。由3.2 f具有路径提升性质。因此 f是 π_1^τ-覆盖映射。 □

定理 *3.6.* 设 $p_1:(X_1,\widetilde{x}_1)\to(X_1,x_1)$与 $p_2:(X_2,\widetilde{x}_2)\to(X_2,x_2)$是两个 π_1^τ-覆盖映射。若 $\psi:\pi_1^\tau(X_1\times X_2,(x_1,x_2))\to\pi_1^\tau(X_1,x_1)\times\pi_1^\tau(X_2,x_2)$；$\psi([f,g])=\widetilde{([f],[g])}$是同胚，则 $p_1\times p_2:(X_1\times X_2,(\widetilde{x}_1,\widetilde{x}_2))\to(X_1\times X_2,(x_1,x_2))$是 π_1^τ-覆盖映射。

证明。设 $\alpha:I\to X_1\times X_2$ 是一条路径，则 $\alpha=(\theta_1\circ\alpha,\theta_2\circ\alpha)$，其中 θ_i 是 $\widetilde{\ }$的投影映射，适用于 $i=1$、2。由于 p_i 具有路径提升性质，存在一条路径 $\widetilde{\alpha}_i:I\to X_i$，满足对 $i=1$、2，有 $p_i\circ\widetilde{\alpha}_i=\theta_i\circ\alpha$。令 $\widetilde{\alpha}=(\widetilde{\alpha}_1,\widetilde{\alpha}_2)$，则 $(p_1\times p_2)\circ\widetilde{\alpha}=\alpha$。因此 $p_1\times p_2$ 具有路径提升性质。由于 p_i 是一个 π_1^τ- 覆盖映射，对于 $i=1$、2，$\mathrm{Im}(\pi_1(p_i))$ 在 $\pi_1^\tau(X_i,x_i)$ 中是开集。由于 $\psi(\mathrm{Im}(\pi_1(p_1\times p_2)))=\mathrm{Im}(\pi_1(p_1))\times\mathrm{Im}(\pi_1(p_2))$，且 ψ 是一个同胚，$\mathrm{Im}(\pi_1(p_1\times p_2))$ 在 $\pi_1^\tau(X_1\times X_2,(x_1,x_2))$ 中是开集。因此 $p_1\times p_2$ 是一个 π_1^τ-覆盖映射。 □

注意， π_1^{qtop} （在某些条件下） [12, 引理 41]、 π_1^{Tau} [8, 命题 3.19]、 π_1^{lasso} [31, 注 4.15] 和 π_1^{H} （在某些条件下） [33, 定理 2.6] 保持有限乘积。

在下述定理中，我们证明，众所周知的概念——覆盖映射、半覆盖映射、广义覆盖映射和纤维化映射——都是这一新概念π_1^{τ}-覆盖的特例，其中 $\pi_1(X,x_0)$赋予适当的拓扑。我们回顾一下，连续映射 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$是半覆盖映射，当且仅当它是局部同胚且具有 pl 和 upl 性质（见 [25, 定理 2.4]）。此外，若连续映射 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$具有 ul 性质（见 [1, 定义 2.1]），则称其为广义覆盖映射。

定理 3.7。 设 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是一个连续映射。

(i) 若 p 是覆盖映射，则 p 是 π_1^{Span} -覆盖映射。此外，若 p 是具有唯一提升性质的 π_1^{Span} -覆盖映射，则 p 是覆盖映射。*(ii)* 若 p 是半覆盖映射，则 p 是 π_1^{pSpan} - 覆盖映射。此外，若 p 是具有唯一提升性质的 π_1^{pSpan} - 覆盖映射，则 p 是半覆盖映射。*(iii)* 若 p 是广义覆盖映射，则 p 是 π_1^{gcov} - 覆盖映射。*(iv)* 若 p 是纤维化映射，则 p 是 $\pi^{\pi^{fib}(X,x_0)}1$- 覆盖映射，其中 $\pi^{fib}(X,x_0)$ 是任意纤维化映射 $q:(E,e_0)\to(X,x_0)$ 的 $Im\pi_1(q)$ 的交集。

证明。 (i) 由于 p 是覆盖映射，根据 [34, 第 2.5 节定理 12], ，存在 X 的一个开覆盖 $\widetilde{}$，使得 $\pi(\mathcal{U},x_0)\subseteq\pi_1(p)\pi_1(X,\widetilde{x}_0)$。根据 $\pi_1(X,x_0)$ 上的 Spanier 拓扑， $\pi(\mathcal{U},x_0)$ 是 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 的开子群。由于 $\pi_1(p)\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$ 是 $\pi(\mathcal{U},x_0)$ 的若干陪集之并，因此它在 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 中是开集。注意，每个覆盖映射都具有唯一路径提升性质，因此 p 是 π_1^{Span}-覆盖映射。

反之，令 $p:(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 为具有唯一提升性质的 π_1^{Span}-覆盖映射。置 $H=\pi_1(p)\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0)$，则 H 在 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 中是开集。由于 H 是一个子群，因此存在 $\mathcal{U}$ 的一个开覆盖 X，使得 $\pi(\mathcal{U},x_0)\subseteq H$。根据 [34, 定理 2.5.13]， $p_H:\ X_H\to X$ 是一个覆盖映射，因此由提升判别法，存在一个连续映射 $\varphi:\ X\to X_H$，使得 $p_H\circ\varphi=p$。此外，由于 p 具有唯一提升性质，存在一个连续映射 $\psi:\ X_H\to X$，使得 $p\circ\psi=p_H$。由唯一性， $\psi\circ\varphi=\varphi\circ\psi=1$，即 φ 是一个同胚。因此， p 和 p_H 是等价的，从而 p 是一个覆盖映射，因为 p_H 是覆盖映射。

(ii) 由于 p 是一个半覆盖映射，根据 [36, 定理 4.1]，存在 X 的一个路径开覆盖 $\mathcal{V}$，使得 $\widetilde{\pi}(\mathcal{V},\ x_0)\subseteq\pi_1(p)\pi_1(X,\ \widetilde{x}_0)$。根据路径 Spanier 拓扑

在 $\pi_1(X, x_0)$ 上，$\pi(\mathcal{V}, x_0)$ 是 $\pi_1^{pSpan}(X, x_0)$ 的一个开子群。由于 $\pi_1(p)\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$ 是 $\pi(\mathcal{V}, x_0)$ 的若干陪集的并集，因此它在 $\pi_1^{pSpan}(X, x_0)$ 中是开集。注意，每个半覆盖映射都具有路径提升性质，因此 p 是一个 π_1^{pSpan}-覆盖映射。

反之，令 $p: (X, x_0) \to (X, x_0)$ 是具有唯一提升性质的 π_1^{pSpan}-覆盖映射。令 $H = \pi_1(p)\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{x}_0)$，则 H 在 $\pi_1^{pSpan}(X, x_0)$ 中是开集。由于 H 是一个子群，存在 X 的路径开覆盖 $\mathcal{V}$，使得 $\widetilde{\pi}(\mathcal{V}, x_0) \subseteq H$。根据 [36, 定理 4.1]，$p_H: X_H \to X$ 是一个半覆盖映射。由于每个半覆盖映射都是广义覆盖映射，因此具有唯一提升性质，故存在连续映射 $\widetilde{\varphi}: X \to X_H$，使得 $p_H \circ \varphi = p$。此外，由于 p 具有唯一提升性质，存在连续映射 $\psi: X_H \to X$，使得 $p \circ \psi = p_H$。由唯一性 $\psi \circ \varphi = \varphi \circ \psi = 1$，即 φ 是一个同胚。因此，p 和 p_H 等价，进而 p 也是一个半覆盖映射，因为 p_H 是半覆盖映射。

(iii) 由于 p 是广义覆盖映射，因此 $\pi_1(p)\pi_1(X, x_0)$ 是一个开子群（见 [10]）。根据 $\widetilde{\pi}_1(X, x_0)$ 上广义覆盖拓扑的定义，$\pi_1(p)\pi_1(X, \widetilde{x}_0)$ 在 $\pi_1^{gcov}(X, x_0)$ 中是开集。此外，我们知道每个广义覆盖映射都具有路径提升性质。因此，p 是一个 π_1^{gcov}-覆盖映射。

(iv) 注意，每个纤维化映射都具有路径提升性质。 □

Brazas 在 [10, 引理 5.10] 中证明，每个广义覆盖映射 $p: (X, \widehat{x}) \to (X, x_0)$ 都等价于 $p_H: (X_H, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$，其中 $H = \pi_1(p)\pi_1(X, \widehat{x})$。Abdullahi 等人在 [1, 推论 3.10] 中证明，如果 H 是广义覆盖子群，那么 H 是 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$ 的闭子群。此外，[1, 命题 3.2] 中证明，$\pi_1^{wh}(X, x_0)$ 是一个齐性空间。因此，如果 H 是 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$ 的闭子群，且 $[\pi_1(X, x_0): H] < \infty$，那么 H 也是开集。根据这些结果，我们得到 π_1^{wh}-覆盖映射与广义覆盖映射之间的如下关系。

定理 3.8。设 $p_H: (X_H, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 是一个广义覆盖映射。若 $[\pi_1(X, x_0): H] < \infty$，则 p_H 是一个 π_1^{wh}-覆盖映射。

证明。由于 p_H 是广义覆盖映射，H 是广义覆盖子群。然后由 [1, 推论 3.10] H 在 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$ 中是闭的，因此 H 在 $\pi_1^{wh}(X, x_0)$ 中是开集，因为 $[\pi_1(X, x_0): H] < \infty$。从而 $p_H: (X_H, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$ 是一个 π_1^{wh}-覆盖映射。 □

4. 基本群上的拓扑下 π_1^τ -覆盖映射的比较

在本节中，我们将比较空间 X 关于 $\pi_1(X,x_0)$的基本群上若干著名拓扑的 π_1^τ-覆盖映射，这些拓扑已在第 2 节中加以回顾。首先，我们回顾研究人员为比较上述拓扑所得到的若干结果。

Fischer 和 Zastrow [21, 引理 2.1]证明，任意空间 X的万有路径空间 $\tilde{X}$ 上，胡须拓扑比 $qtop$-拓扑更细。显然，将基本群 $\pi_1(X,x_0)$视为 X的子空间时，这一结果同样成立。根据 $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 和 $\pi_1^{Tau}(X,x_0)$ 的定义，很容易看出 $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 比 $\pi_1^{Tau}(X,x_0)$ 更细（见 [8]）。文献 [2] 证明，基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 上的套索拓扑与 Spanier 子群拓扑一致。由于基本群 $\pi_1(X,x_0)$ 的每个 Spanier 子群也是路径 Spanier 子群，因此对于任意带基点空间 (X,x_0)，基本群上的路径 Spanier 拓扑 $\pi_1^{pSpan}(X,x_0)$ 比 Spanier 拓扑 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 更细。作者还利用[8, 命题 3.16] 在文献 [2] 中证明，若 X 是局部道路连通空间，则 $\pi_1^{pSpan}(X,x_0)$ 比 $\pi_1^\tau(X,x_0)$ 更粗（见 [2, 推论 3.15]）。文献 [13, 的命题 3.2] 表明， $\pi_1^{sh}(X,x_0)$ 的形状拓扑比 $\pi_1^\tau(X,x_0)$ 的形状拓扑更粗。注意，利用 [11, 命题 3.5] 可以证明 $\pi_1^{Span}(X,x_0)$ 比 $\pi_1^{tSpan}(X,x_0)$ 更细。此外，根据 [11, 命题 5.8] π_1^{tSpan}， $X(x_0)$ 比$\pi_1^{sh}(X,x_0)$ 更细。

可以通过以下链式关系中的上述陈述来概括基本群上的所述拓扑之间的关系（请注意，我们使用符号 $\preccurlyeq$ 来表示群上更细的拓扑。例如， $G^{\tau_1}\preccurlyeq G^{\tau_2}$ 表示 τ_2 比 τ_1 更细，而 $G^{\tau_1}\prec G^{\tau_2}$ 表示 τ_2 严格比 τ_1更细）。

$$\pi_1^{sh}(X,x_0)\preccurlyeq\pi_1^{tSpan}(X,x_0)\preccurlyeq\pi_1^{lasso}(X,x_0)=\pi_1^{Span}(X,x_0)\preccurlyeq$$

$$\pi_1^{pSpan}(X,x_0)\preccurlyeq\pi_1^{\tau}(X,x_0)\preccurlyeq\pi_1^{qtop}(X,x_0)\preccurlyeq\pi_1^{wh}(X,x_0).$$

有一些例子表明，上述大多数拓扑都严格细于前一个拓扑。一个很好的例子是考虑夏威夷耳环空间 $\mathbb{HE}$。利用 [2, 8, 18, 24] 的结果，可以得到 $\mathbb{HE}$ 的基本群上的如下严格递增拓扑链:

$$\pi_1^{Span}(\mathbb{HE},0)\prec\pi_1^{pSpan}(\mathbb{HE},0),$$

$$\pi_1^{sh}(\mathbb{HE},0)\prec\pi_1^{\tau}(\mathbb{HE},0)\prec\pi_1^{qtop}(\mathbb{HE},0)\prec\pi_1^{wh}(\mathbb{HE},0).$$

对于 t 在广义覆盖拓扑中， [2, 命题 3.24] 证明了

$$\pi_1^{qtop}(X,x_0) \preccurlyeq \pi_1^{gcov}(X,x_0),$$

当 X 是连通且局部道路连通的空间时。注意， $\pi_1^{wh}(\mathbb{HE},\ 0) \prec \pi_1^{gcov}(\mathbb{HE},\ 0)$ 且 $\pi_1^{gcov}(\mathbb{HA},\ b) \prec \pi_1^{wh}(\mathbb{HA},\ b)$，其中 $\mathbb{HA}$ 是调和群岛，而 $b \neq 0$（见 [1, 2, 21]）。因此，胡须拓扑与广义覆盖拓扑通常不可比较。此外，若 X 是局部道路连通、仿紧的豪斯多夫空间，则由 [11, 定理 7.6] 可知，等式 $\pi_1^{sh}(X,\ x_0) = \pi_1^{tSpan}(X,\ x_0) = \pi_1^{Span}(X,\ x_0)$ 成立。

借助基本群 $\pi_1(X,\ x_0)$ 的以下子群链中一些著名子群所对应的子群拓扑，我们可以比较上述大多数拓扑在 $\pi_1(X,\ x_0)$ 上的情形（见 [1]）：

$$\{e\} \leq \pi^s(X,x_0) \leq \pi^{sg}(X,x_0) \leq \pi^{gc}(X,x_0) \leq \widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0) \leq \pi^{sp}(X,x_0) \leq \pi_1(p)\pi_1(\widetilde{X},\widetilde{x}_0),$$

其中， $\pi^s(X,x_0)$ 是 x_0 [39] 处所有小环路构成的子群， $\pi^{sg}(X,x_0)$ 是由 [39] 生成的所有小环路构成的子群， $\pi^{gc}(X,x_0)$ 是广义覆盖子群 [1] 的交集， $\pi^{sp}(X,x_0)$ 是 X 的 Spanier 群，即相对于 X [20, 的开覆盖的 Spanier 子群的交集。定义 2.3], $\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)$ 是路径 Spanier 群，即所有路径 Spanier 子群 $\widetilde{\pi}(\mathcal{V},x_0)$ 的交集，其中 $\mathcal{V}^{\sim}$ $^{\sim}$ 是 X [36, 的路径开覆盖。第 3], 节中， $\pi_1(p)\pi_1(X,\widetilde{x}_0) \cong \pi_1(X,\widetilde{x}_0)$ 是任意覆盖映射 $p:(X,\widetilde{x}_0) \to (X,x_0)$ 所诱导同态的像 $^{\sim}$。

最近， [33] 的作者通过展示该主题的更多结果，总结了基本群上各种著名拓扑之间的比较，如下图所示（注意， $A \longrightarrow B$ 意味着 $A \preccurlyeq B$）。

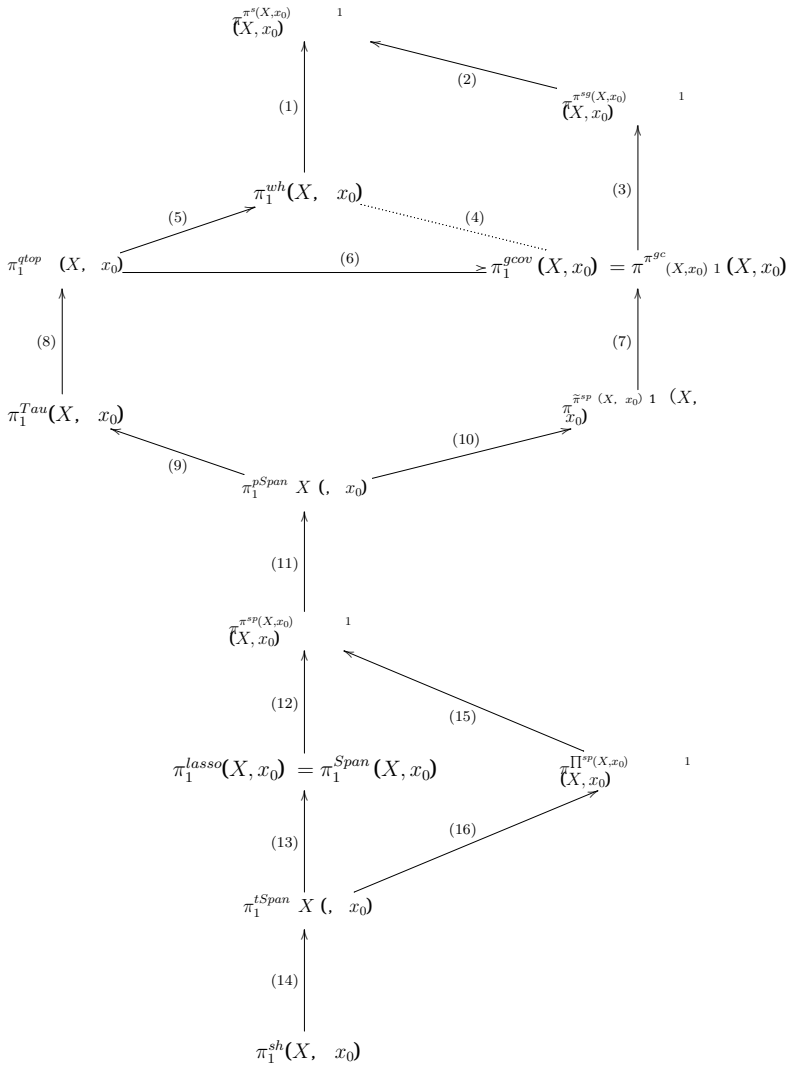

图 1

最后，我们总结了空间 X 的 π_1^{τ}-覆盖映射在 π_1的基本群上的几种著名拓扑下的比较，如下图所示（X， x_0）。注意， $A \longrightarrow B$ 意味着每个 A 类型的覆盖映射都是B类型的。此外， A-覆盖与 $= B$-覆盖意味着每个 A 类型的覆盖映射都是 B 类型的，反之亦然。

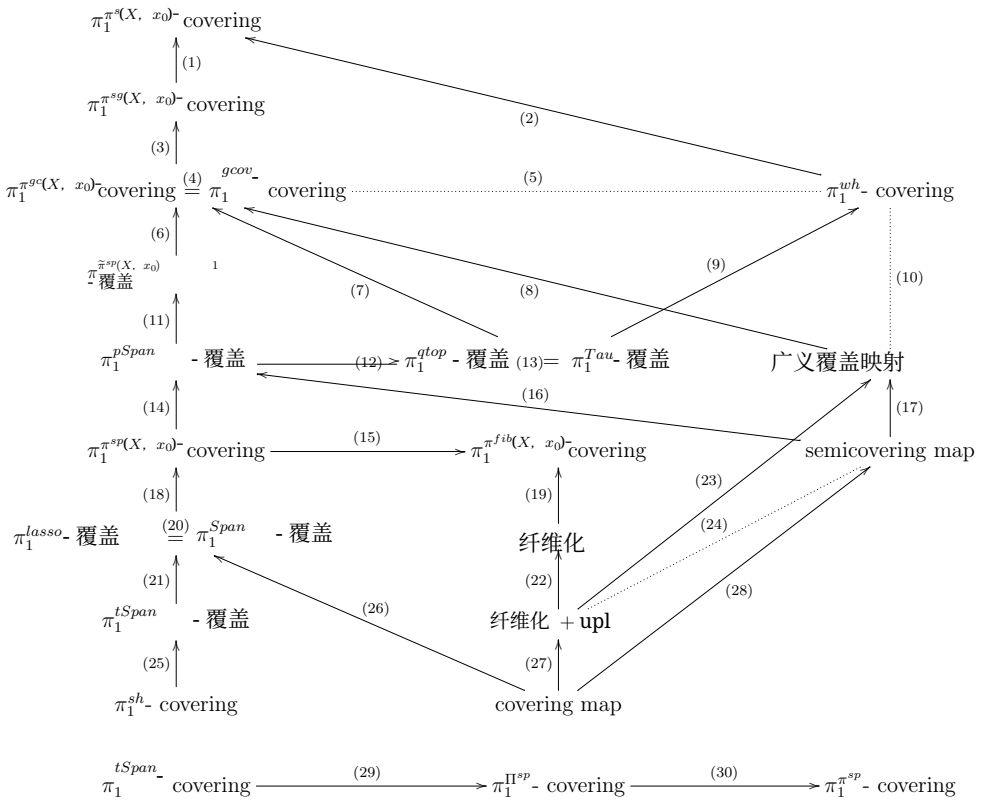

图2

下文将根据上图中的编号，为每个箭头提供参考文献和补充说明。

(1) 根据图 1 中的 (2)。显然，如果 $\pi^s(X,x_0) = \pi^{sg}(X,x_0)$，那么 $\pi^{\pi^s(X,x_0)}$ 1 - 覆盖映射 $= \pi^{\pi^{sg}(X,x_0)}$ 1 - 覆盖映射。根据 [1, 例 3.12] $\pi^s(\mathbb{HA},b) = 1$ 但 $\pi^{sg}(\mathbb{HA},b) = \pi_1(\mathbb{HA},b)$，其中 $b \neq 0$。考虑 $(X,x_0) = (\mathbb{HA},b)$ 和 $p_e : (X_e,\widetilde{x}) \to (X,x_0)$，则 $\mathrm{Im}\pi_1(p_e)$ 在 $\pi^{\pi^s(\mathbb{HA},b)}$ 1 (X, x_0) 中是开集，因为 $\pi^s(\mathbb{HA},b) = 1$。此外，p_e 具有路径提升性质，因此 p_e 是一个 $\pi^{\pi^s(\mathbb{HA},b)}$ 1 - 覆盖。我们猜想 $\mathrm{Im}\pi_1(p_e) \neq \pi^{sg}(\mathbb{HA},b)$；若如此，则 p_e 不是一个 $\pi^{\pi^{sg}(\mathbb{HA},b)}$ 1 - 覆盖，因为 $\pi^{\pi^{sg}(\mathbb{HA},b)}$ 1 (X,x_0) 是平凡拓扑（我们希望进一步探究这一猜想）。

(2) 根据图 1 中的 (1)。如果 X 在 x_0 处是半局部 $\pi^s(X,\ x_0)$-连通的，则等式成立，因为 $\pi_1^{wh}(X,\ x_0) = \pi^{\pi^s(X,\ x_0)\,1}(X,\ x_0)$（见命题 4.21]）。考虑 $X = \mathbb{HE}$，则 $\pi^s(\mathbb{HE},\ 0) = 1$，因此 p_e 是一个 $\pi_1^{\pi^s}$ -覆盖映射。我们猜想

$Im\pi_1(p_e)$ 在 $\pi_1^{wh}(\mathbb{HE}, 0)$ 中不是开集；如果是这样，那么 p_e 就不是一个 π_1^{wh}-覆盖映射。

(3) 由图 1 中的 (3) 可知。当 $\pi^{sg}(X, x_0) = \pi^{gc}(X, x_0)$ 时，$\pi_1^{gcov}(X, x_0) = \pi^{\pi^{sg}}(X, x_0)$ 1 (X, x_0)，等式成立。考虑 $X = RX$ in $[22, \text{Definition } 7]$, then $\pi^{sg}(X, x_0) = 1$ but $\pi^{gc}(X, x_0) \neq 1$。因此，p_e 是一个 $\pi_1^{\pi^{sg}}$-覆盖映射。我们猜想 $\text{Im}\pi_1(p_e)$ 在 $\pi^{\pi^{gc}}(X,x_0)$ 1 (X, x_0) 中不是开集；若确实如此，则 p_e 不是一个 $\pi_1^{\pi^{gc}}$-覆盖映射。

(4) 由于 $\pi_1^{gcov}(X, x_0) = \pi^{\pi^{gc}(X, x_0)\,1}(X, x_0)$（见 $[33, \text{定理 } 3.3]$）。

(5) 众所周知，$\pi_1^{wh}(X, x_0)$ 与 $\pi_1^{gcov}(X, x_0)$ 一般而言不可比较（见$[1, \text{例}3.25$ 和例$3.26]$），因此 π_1^{wh}-覆盖与 π_1^{gcov}-覆盖一般而言也不可比较。如果 X 是连通、局部道路连通且半局部 $\pi^{gc}(X, x_0)$-连通的，那么 $\pi_1^{gcov}(X, x_0) \preccurlyeq \pi_1^{wh}(X, x_0)$（见 $[33,$推论 3.4.2$]$），因此每个 π_1^{gcov}-覆盖都是一个 π_1^{wh}-覆盖。对于任意半局部单连通空间，等式成立，因为 $\pi_1^{gcov}(X, x_0) = \pi_1^{wh}(X, x_0)$。

(6) 由图 1 中的 (7)。若 $\widetilde{\pi}^{sp}(X, x_0) = \pi^{gc}(X, x_0)$，则等式成立。

(7) 由图 1 中的 (6)。若 X 是连通、局部道路连通且半局部 $\pi^{gc}(X, x_0)$-连通空间，则等式成立，因为 $\pi_1^{qtop}(X, x_0) = \pi_1^{gcov}(X, x_0)$（见 $[33,$ 推论 3.4.2$]$）。$\mathbb{HE}$ 的万有路径空间是广义覆盖空间，因此 p_e 是广义覆盖映射，但它不是 π_1^{qtop}-覆盖映射，因为 $\text{Im}\pi_1(p_e) = 1$，且它在 $\pi_1^{qtop}(\mathbb{HE}, 0)$ 中不是开集，因为 $\pi_1^{qtop}(\mathbb{HE}, 0)$ 不是离散的（见 $[1,$ 例 3.25$]$）。

(8) 由定理 3.7。

(9) 由图 1 中的 (5)。若 X 在 x_0 处局部道路连通且半局部单连通，则等式成立，因为 $\pi_1^{qtop}(X, x_0) = \pi_1^{wh}(X, x_0)$（见 $[30,$ 推论 3.3$]$）。

(10) 由定理 3.8。

(11) 由图 1 中的 (10)。若 $\widetilde{\pi}^{sp}(X, x_0)$ 是半覆盖子群，则等式成立。

(12) 由图 1 中的 (9)。若 X 是局部道路连通且半局部小生成的，则等式成立。

(13) 由 [8, 命题 3.16] $\pi_1^{qtop}(X,x_0)$ 与 $\pi_1^{Tau}(X,x_0)$ 具有相同的开子群，因此每个 π_1^{qtop} -覆盖都是 π_1^{Tau}-覆盖，反之亦然。(14) 在 [33, 定理 3.2] $\pi_1^{\pi^{sp}}(X,x_0)$ 中证明了 $(X,x_0)\preccurlyeq\pi_1^{pSpan}(X,x_0)$ 当且仅当$\pi^{sp}(X,x_0)$ 是半覆盖子群。因此，若 $\pi^{sp}(X,x_0)$ 是半覆盖子群，则每个 $\pi^{\pi^{sp}}(X,x_0)$ 1-覆盖映射都是 π_1^{pSpan} -覆盖映射。若 $\pi^{sp}(X,x_0)=\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)$，则等式成立。(15) 由于每个覆盖映射都是纤维化，$\pi^{fib}(X,x_0)\subseteq\pi^{sp}(X,x_0)$。若 $\pi^{fib}(X,x_0)=\pi^{sp}(X,x_0)$，则等式成立。(16) 由定理 3.7。(17) 已知每个半覆盖映射都是广义覆盖映射。反之，在 [1, 命题 2.10] 中证明了：若 X 连通且~局部道路连通，则广义覆盖映射 $p:(X,\widetilde{x}_0)\to(X,x_0)$ 是半覆盖映射当且仅当 p 是局部单射。注意，存在不是半覆盖映射的广义覆盖映射的例子（见[21,例 4.15]）。(18) 由图 1 中的 (12)。若 $\pi^{sp}(X,x_0)$ 是覆盖子群，则等式成立。令 $H=\pi^{sp}(\mathbb{HE},0)$，则 p_H 是 $\pi_1^{\pi^{sp}}$- 覆盖映射，但不是 π_1^{Span}- 覆盖映射，因为若 p_H 是 π_1^{Span}- 覆盖映射，则它是万有覆盖映射，但我们知道 $\mathbb{HE}$ 没有万有覆盖映射（见 [28, 推论 3.7]）。(19) 由 $\pi^{fib}(X,x_0)$ 的定义。

（20）由于 $\pi_1^{lasso}(X,x_0)=\pi_1^{Span}(X,x_0)$（参见 [1, 命题 3.5]）。

(21) 由图 1 中的 (13)。若 X 是局部道路连通、仿紧且豪斯多夫的，则等式成立（见 [11, 定理 7.6]）。(22) 这是显然的。(23) 由 [34] 中的定理 2.4.5。(24) 若具有 upl 的纤维化是局部同胚，则由 [34, 定理 2.4.5]它是半覆盖映射。(25) 由图 1 中的 (14)。若 X 是局部道路连通、仿紧且豪斯多夫的，则等式成立（见 [11, 定理 7.6]）。

(26) 由定理 3.7。

(27) 根据 [34, 定理 2.2.3]。若存在一个开覆盖 $\mathcal{U}$，覆盖$\sim$ $\sim X$，使得对于具有 upl [34, 定理 2.5.13] 的纤维化 $p: (X, \widetilde{x}_0) \to (X, x_0)$，有 $\pi(\mathcal{U}, x_0) \subseteq \pi_1(p)(X, \widetilde{x}_0)$，则等式成立。注意，[34, 例 2.2.9] 中给出了一个具有 upl、但不是覆盖映射的纤维化示例。

(28) 众所周知，每个覆盖映射都是半覆盖映射。根据 [1, 推论 4.7]，对于连通且局部道路连通空间 X，GCOV(X) =COV(X) 当且仅当 X 是半局部 $\pi_1^{gc}(X, x_0)$-连通的。Brazas 给出了一个不是覆盖映射的半覆盖映射示例（见 [7, 例 3.8]）。

（29）根据图 1 中的（16）。

（30）根据图 1 中的（15）。当 X 是 T_1 且为仿紧空间时，等式成立（见 [11, 定理 3.13]）。

为了进一步研究上述图示，我们在下文提出一些问题，并希望找到这些问题的答案。

(Q1) 是否存在一个 $\pi^{\pi^{gc}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射，它不是 $\pi^{\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射？(Q2) 在什么条件下，$\pi^{\pi^{gc}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射与广义覆盖映射相等？是否存在一个 $\pi^{\pi^{gc}(X,x_0)}$ 1- 覆盖映射，它不是广义覆盖映射？(Q3) 是否存在一个 π_1^{wh}- 覆盖映射，它不是 π_1^{qtop} -覆盖映射？(Q4) 在什么条件下，π_1^{wh}-覆盖映射与广义覆盖映射相等？是否存在一个 π_1^{wh}-覆盖映射，它不是广义覆盖映射？(Q5) 是否存在一个 $\pi^{\widetilde{\pi}^{sp}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射，它不是 π_1^{pSpan} -覆盖映射？(Q6) 是否存在一个 π_1^{qtop} -覆盖映射，它不是 π_1^{pSpan} -覆盖映射？(Q7) 是否存在一个 π_1^{pSpan} -覆盖映射，它不是 $\pi^{\pi^{sp}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射？(Q8) 是否存在一个 $\pi^{\pi^{fib}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射，它不是 $\pi^{\pi^{sp}(X,x_0)}$ 1-覆盖映射？(Q9) 是否存在一个 π_1^{pSpan} -覆盖映射，它不是半覆盖映射？

(Q10) 在什么条件下， $\pi^{\pi^{fib}}(X, x_0)$ 1-覆盖映射与纤维化相等？是否存在一个 $\pi^{\pi^{fib}}(X, x_0)$ 1-覆盖映射，它不是纤维化？

（Q11）是否存在一个不是 π_1^{tSpan} -覆盖映射的 π_1^{Span} -覆盖映射？（Q12）在什么条件下，广义覆盖映射与具有 upl 的纤维化相等？是否存在一个不是具有 upl 的纤维化的广义覆盖映射？（Q13）半覆盖映射与具有 upl over X 的纤维化相等的条件是什么？是否存在一个不是具有 upl 的纤维化的半覆盖映射？（Q14）是否存在一个不是 π_1^{sh}-覆盖映射的 a π_1^{tSpan} -覆盖映射？

（Q15）是否存在一个不是覆盖映射的 π_1^{Span} -覆盖映射？

（Q16）在什么条件下， $\pi^{\Pi^{sp}}(X, x_0)$ 1-覆盖映射与 π_1^{tSpan} -覆盖映射相等？是否存在一个不是 π_1^{tSpan} -覆盖映射的 a $\pi^{\Pi^{sp}}(X, x_0)$ 1-覆盖映射？

(Q17) 是否存在一个 $\pi^{\pi^{sp}}(X, x_0)$ 1 -覆盖映射，但它不是 $\pi^{\Pi^{sp}}(X, x_0)$ 1 -覆盖映射？

参考文献

[1] M. Abdullahi Rashid, B. Mashayekhy, H. Torabi, S.Z. Pashaei，关于拓扑化基本群的子群与广义覆盖，伊朗数学学会公报，**43**(7), 2349-2370, (2017年)。

[2] M. Abdullahi Rashid, N. Jamali, B. Mashayekhy, S.Z. Pashaei, H. Torabi, 关于基本群上的子群拓扑，哈杰特数学与统计学杂志，**49** (3), 935-949, (2020年)。

[3] A. Arhangelskii, M. Tkachenko，《拓扑群及相关结构》，亚特兰蒂斯数学研究，*1*。亚特兰蒂斯出版社，巴黎(2008年)。[4] D. Biss，拓扑基本群与广义覆盖空间，*Topology Appl.* **124**, 355–371, (2002年)。（撤稿声明发表于2017年, Topology Appl. 217, p. 116）。

[5]W.A. Bogley, A.J. Sieradski，万有路径空间，http://people.oregonstate.edu/~bogleyw/research/ups.pdf

[6] J. Brazas，拓扑基本群与自由拓扑群，Topology Appl. 158 (6), 779–802, (2011).[7] J. Brazas，半覆盖：覆盖空间理论的一种推广，Homology Homotopy Appl. 14, 33–63, (2012).[8] J. Brazas，作为拓扑群的基本群，Topology Appl. 160, 170—188, (2013).[9] J. Brazas，拟拓扑基本群的半覆盖、覆盖、叠覆和开子群，Topology Proc. 44, 285–313, (2014).[10] J. Brazas，广义覆盖空间理论，Theory Appl. Categ. 30, 1132- 1162, (2015).[11] J. Brazas, P. Fabel，厚斯潘尼尔群与第一形状群，Rocky Mountain J. Math. 44, 1415–1444, (2014).[12] J. Brazas, P. Fabel，商拓扑下的基本群，J. Homotopy Relat. Struct. 10 ,71–91, (2015).[13] J. Brazas, P. Fabel，度量空间同伦群上的自然伪度量，Glasgow Math. J. 66, 162–174, (2024).[14] N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra，局部道路连通空间的覆盖映射，Fundam. Math. 218 (1), 13–46, (2012).[15] N. Brodskiy, J. Dydak, B. Labuz, A. Mitra，万有覆盖空间上的拓扑结构与一致结构，arXiv:1206.0071v1.[16] J. S. Calcut, J. D. McCarthy，拓扑基本群的离散性与齐性，Topology Proc., 34, 339–349, (2009).[17] J. Dugundji, 带拓扑的基本群，Proc. Natl. Acad. Sci., 36 (2), 141–143, (1950).[18] P. Fabel, 夏威夷耳环群中的乘法不连续（赋予商拓扑时），Bull.Pol. Acad. Sci. Math., 59 (1) 77–83 (2011).[19] P. Fabel，乘法不连续的紧生成拟拓扑同伦群，Topology Proc., 40, 303–309, (2012).

[20] H. Fischer、D. Repovs、Z. Virk、A. Zastrow，论半局部单连通空间，*Topology Appl.*，**155**，1089–1097，（2008年）。[21] H. Fischer、A. Zastrow，广义万有覆盖空间与形状群，*Fundam. Math.*，**197**，167–196，（2007年）。[22] H. Fischer、A. Zastrow，夏威夷耳环的无核半覆盖，*Topology Appl.*，**160**，1957–1967，（2013年）。[23] W. Hurewicz，同伦、同调与局部连通性，Mathematicae，**25**(1)，467-485，（1935年）。[24] N. Jamali、B. Mashayekhy、H. Torabi、S.Z. Pashaei 与 M. Abdullahi Rashid，从小环传递观点看拓扑化基本群，*ActaMath. Vietnamica* **44**，711–722，（2019年）。[25] M. Kowkabi、B. Mashayekhy、H. Torabi，局部同胚何时为半覆盖映射？，*Acta Math. Vietnamica* **42**，653–663，（2017年）。[26] B. Mashayekhy、A. Pakdaman、H. Torabi，Spanier空间与非同伦路径豪斯多夫空间的覆盖理论，*Georgian Math. J.,* **20**，303–317，（2013年）。[27] T. Nasri、B. Mashayekhy，论逆极限空间的拟拓扑同伦群，*Topology Proc.*，**46**，145–157，（2015年）。[28] A. Pakdaman、H. Torabi、B. Mashayekhy，论范畴万有覆盖的存在性，*Ital. J. Pure Appl. Math.*，**37**，289–300，（2017年）。[29] A. Pakdaman、H. Torabi、B. Mashayekhy，H群范畴，*Caspian J.Math. Sci.,***9** (1)，1–23，（2020年）。[30] S.Z. Pashaei、B. Mashayekhy、H.Torabi、M. Abdullahi Rashid，相对于基本群子群的小环传递空间，*Topology Appl.,***232**，242–255，（2017年）。[31] S.Z. Pashaei、B. Mashayekhy、H. Torabi、M. Abdullahi Rashid，论相对于基本群子群的强小环传递空间，*TopologyAppl.,***254**，117–131，（2019年）。[32] J.J. Rotman，《代数拓扑导论》，*Springer-Verlag, GTM 119,* 纽约，（1988年）。

[33] N. Shahami、B. Mashayekhy，从子群拓扑观点比较基本群上的拓扑，*Math. Slovaca,***75 (1)**，189–204，（2025年）。[34] E.H. Spanier，代数拓扑，*McGraw-Hill,* 纽约，（1966年）。[35] M. Tajik、B. Mashayekhy、A. Pakdaman，从同伦观点看的唯一道路提升，Acta Math. Vietnam.**43**（2018年），257–273。[36] H. Torabi、A. Pakdaman、B. Mashayekhy，论Spanier 群以及覆盖空间与半覆盖空间，*arXiv:1207.4394v1.*[37] H. Torabi、A. Pakdaman、B. Mashayekhy，拓扑基本群与小生成覆盖，*Math. Slovaca,***65**，1153–1164，（2015年）。[38] H. Torabi，论第一可数拟拓扑同伦群，*Math. Slovaca,***71(3)**，773–779，（2021年）。[39] Ž. Virk，小环空间，*Topology Appl.,***157(2)**，451-455，（2010年）。[40] Ž. Virk、A. Zastrow，与广义覆盖空间各种概念相关的拓扑之比较，*Topology Appl.,* **170**，52–62，（2014年）。[41] J. Wilkins，测地空间的修正基本群与一致基本群及万有覆盖，*Topology Appl.,* **160**，812–835，（2013年）。