arXiv:2602.19046v1 [math.NA] 22 Feb 2026

Benjamin–Ono 方程与连续Calogero–Moser方程的 L^2 解的显式公式之收敛性

Yvonne AlamaBronsard*、ThierryLaurens†

2026年2月24日

摘要

通过为非线性可积性近期进展，尤其是显式公式的发现，构建离散对应形式，我们设计并分析了环面上 Benjamin–Ono (BO) 方程和连续Calogero–Moser方程 (CCM) 的全离散近似。我们的工作基于一项关键观察：对这类显式公式进行离散化，能够得到时间上精确的格式（只需进行空间离散化），且其计算成本与终止时间 T 无关。在本文中，我们首先推广了 [3] 的全离散格式，使其包含具有更优结构保持性质的数值近似，其中包括 (BO) 方程中质量和动量的守恒。其次，基于近期对相应 Lax 算子的分析，我们将这类格式的收敛结果推广到粗糙解 $u(t)$，这些解仅属于 (BO) 方程的 $L^2(\mathbb{T})$ 和 CCM 方程的 $L^2_+(\mathbb{T})$，后者恰好是尺度临界正则性。我们的主定理指出，当截断参数趋于无穷时，误差的$L^2(\mathbb{T})$范数趋于零，并且这一收敛在任意有界时间区间 $[-T,T]$ 上一致成立。作为示例，我们将该格式应用于具有方波初始剖面的 (BO) 方程，并获得了首个由严格收敛结果支持的 (BO) 塔尔博特效应数值证据。

关键词：非线性可积性、Lax 算子、低正则性、保结构格式、误差分析、塔尔博特效应数学主题分类：主要分类——37K10、65M70；次要分类——65M15、35Q55、35Q35

1 引言

本文涉及两个系统。第一个是 Benjamin–Ono 方程

$$\partial_t u(t,x) = \partial_x \left(|\partial_x| u - u^2\right)(t,x), \quad u_{|t=0}(x) = u_0(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{T}, \tag{BO}$$

其中 $u(t,\ x) \in \mathbb{R}$ 是一个实值解，而非局部算子 $|\partial_x|$ 在傅里叶空间中定义为

$$\widehat{|\partial_x| f}(k) = |k| \widehat{f}(k), \quad f \in L^2(\mathbb{T}).$$

这是一个非局部、可积的色散模型，由 Benjamin [10] 和 Davis–Acrivos [15]提出，用于描述深层层化流体中的内波，后来由 Ono [43]推广开来。在这

*麻省理工学院，美国马萨诸塞州剑桥市，邮编 02139，yvonneab@mit.edu
†威斯康星大学麦迪逊分校，美国威斯康星州麦迪逊市，邮编 53706，laurens@math.wisc.edu

项工作中，我们研究初始数据为 $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ 时 (BO) 的数值近似。在这一框架下，Molinet [40] 首次利用 Tao规范变换结合 Bourgain 空间估计证明了整体适定性，随后 Molinet–Pilod [41]又对此进行了研究。之后，Gérard–Kappeler–Topalov [26], 利用方程的完全可积性，特别是 Birkhoff正规形变换，得到了更精确的结果：他们证明 (BO) 在 H^s, $s > -\frac{1}{2}$ 中整体适定，而在其他空间中则不适定。我们指出，直线上的类似 L^2 适定性结果由 Ionescu–Kenig [34] 证明，并在 [33, 41, 51], 中重新考察；Killip–Laurens–Vişan [36]则得到了尖锐的适定性结果。关于 (BO) 早期结果的综述，请参阅 Klein–Saut [39, 的著作第 3], 章；关于将 (BO) 严格推导为内水波模型，请参阅 Paulsen [44]。

我们考虑的第二个方程是聚焦型（+ 符号）或散焦型（− 符号）连续Calogero–Moser方程, 也称为Calogero–Sutherland导数非线性薛定谔（DNLS）方程,

$$i\partial_t u + \partial_x^2 u \pm \frac{2}{i} u \partial_x \Pi(|u|^2) = 0, \quad u_{|t=0}(x) = u_0(x), \quad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T}. \tag{CCM}$$

聚焦方程由 Abanov–Bettelheim–Wiegmann [1] 推导而来，是Calogero–Moser粒子系统的连续极限；散焦模型则由 Pelinovsky [45]提出，用于描述（BO）近似单色波包解的调制。这里, Riesz–Szegő投影算子 Π 在傅里叶空间中的定义为

$$\widehat{\Pi f}(k) = \mathbb{1}_{k \geq 0}\, \widehat{f}(k), \quad f \in L^2(\mathbb{T}). \tag{Π}$$

这是 L^2上的一个正交投影，其对应的闭子空间为 Hardy 空间

$$L^2_+ = \{f \in L^2 : \widehat{f}(k) = 0 \text{ for } k < 0\}. \tag{1}$$

在文献 [6], 中，Badreddine 证明了（CCM）方程在尺度临界正则性下，即在 L^2_+中，具有整体适定性，并满足条件

$$\|u_0\|_{L^2}^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |u_0|^2 \, dx < 1$$

在聚焦情形下。正如文献 [6], 所阐释的，这一阈值对应于某些行波轮廓的 L^2-范数；然而，这些轮廓并不能生成$\mathbb{T}$上的所有行波解，而这些解一般可以具有任意的 L^2 范数 [8]。聚焦情形下的这一适定性阈值很可能是尖锐的：在直线 $\mathbb{R}$上，Hogan–Kowalski [31] 展示了光滑解，这些解会在（至多）无限时间内爆破；随后，Kim–Kim–Kwon [38] 构造出了质量任意接近该阈值的有限时爆破解[1]。

在这项工作中，我们发展了非线性可积性近期进展的离散对应形式。首先，我们讨论格式的设计 , 其基础是发现了某些非局部可积偏微分方程的显式公式 。环面上的显式公式 $\mathbb{T}$ 由 Gérard [28]针对

[1]在直线 $\mathbb{R}$ 上，适定性的阈值为 $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} |u_0|^2 \leq 2\pi$。

(BO) 方程建立，Badreddine [6] 则针对 (CCM) 方程建立。关于三次 Szegő 方程，请参阅注 1.2，其中将对此作详细讨论。三次 Szegő 方程是首个发现显式公式的方程 [25] ，也是迄今为止环面上已知具有显式公式的唯一另一方程。

这些显式公式产生了显著影响，帮助人们理解相应流的整体适定性及其定性行为。特别是，这些公式促成了关于 (CCM) 方程 [6,8], 整体适定性的结果，并使人们得以刻画其行波；此外，它们还推动了对 (CCM) 和 (BO) 零色散极限的分析，参见 Badreddine [7], Gassot [23], 和 Mæhlen [42]的研究。对于实数直线 $\mathbb{R}$上的情形，类似公式也已被证明是解决各类问题不可或缺的工具。对于 (BO)，相关研究包括零色散极限 [11, 29], 多孤子动力学 [49], 有理初值的演化[12], ，以及最近由 Gérard–Gassot–Miller [24] 针对具有足够正则性且衰减的解解决的孤子分解猜想。对于 $\mathbb{R}$上的 (CCM)，也称为 Calogero–Moser DNLS，这些公式在适定性分析 [37], 、建立散射结果 [14], 以及研究湍流行为 [31]方面都发挥了核心作用。

在离散情形中，这些公式也已证明颇具价值：Alama Bronsard– Chen–Dolbeault [3] 的研究首次将它们用于数值近似，并通过定量误差界深入揭示了这些方程的长时间动力学。

下一节将介绍这些公式，并概述其数值近似背后的关键思想。

1.1 显式公式

显式公式的定义涉及三个重要算子：在 (Π) 中定义的 Riesz–Szegő 算子，以及移位算子 S^* 和 Lax 算子 L_{u_0} ；后两者在下文介绍的 (1) 中 Hardy 空间L^2_+ 上均有良好定义。

首先，令 $S^* = \Pi(e^{-ix}\,\cdot)$ 表示 L^2_+ 上对应于频率变量左移的算子：

$$\widehat{S^* f}(k) = \mathbb{1}_{k\geq 0}\, \widehat{f}(k+1), \quad f \in L^2_+.$$

接下来，(BO) 和 (CCM) 的 Lax 算子是定义在$H^1_+ = H^1 \cap L^2$ 上的半有界自伴算子，其定义如下：

$$L^{\mathrm{BO}}_{u_0} f = -i\partial_x f - \Pi(u_0 f) \quad and \quad L^{\mathrm{CS}}_{u_0} f = -i\partial_x f \mp u_0 \Pi(\overline{u_0} f), \tag{2}$$

它们是 分别对 $u_0 \in L^2$ 和 $u_0 \in L^2_+$定义良好；参见命题 4.5 和 4.6 .

映射到频率空间后，Gérard 的 [28] 和 Badreddine 的 [6] 显式公式如下：对于 $k \geq 0$,

$$\widehat{u}_{\mathrm{BO}}(t,k) = \left\langle (e^{it(I+2L^{\mathrm{BO}}_{u_0})} S^*)^k \Pi u_0, 1 \right\rangle \quad \text{and} \quad \widehat{u}_{\mathrm{CS}}(t,k) = \left\langle (e^{-it(I+2L^{\mathrm{CS}}_{u_0})} S^*)^k u_0, 1 \right\rangle. \tag{3}$$

对于 (BO)，当 $k < 0$ 时，我们取 $\widehat{u}(t,\ k) = \overline{\widehat{u}(t,\ -k)}$，因为 u 是实值的；而对于 (CCM)，当 $k < 0$时， $\widehat{u}(t,\ k) = 0$ ，因为 $u(t) \in L^2_+$。

注 1.1. 对于 $\mathbb{R}$, *Gérard* 的工作[28], 也给出了 *Benjamin–Ono* 方程(BO)的一个显式公式，而其推广到 *Benjamin–Ono* 方程(BO) 的完整层级则见 *Killip–Laurens–Vişan* [36]。关于(CCM)，实直线 $\mathbb{R}$上的一个显式公式可参见 *Killip–Laurens–Vişan* [37]。

在这项工作中，我们没有像传统做法那样对底层方程 (BO) 和 (CCM) 进行离散化，而是利用由显式公式 (3) 所编码的方程强大可积结构，得到了更精确的结果。这是继 [3], 的工作之后，第二次采用这种新方法。与直接处理底层方程相比，采用这些显式公式的巨大优势在于一个关键观察：对这类显式公式进行离散化，可得到时间上精确的格式（只需进行空间离散化），且其计算成本与终止时间 T无关。因此，这些格式的精度显著更高，并且可以模拟任意长的时间。

特别地，将公式 (3) 写成解的第 k 个傅里叶系数的刻画后，它们非常适合通过谱离散化进行数值逼近。令 K 为离散化中所使用的傅里叶频率数量，并对于 $j \in \mathbb{N}$，定义截断的 Riesz–Szegő 投影 Π_j 为

$$\widehat{\Pi_j f}(k) = \mathbb{1}_{0\le k<j}\widehat{f}(k) \quad \text{and} \quad \Pi_\infty = \Pi.$$

在这些显式公式的众多可能离散化方法中， [3] 的作者介绍了最简单的一种：在 (3) 中将算子 Π 替换为其频率截断 Π_K 后，他们得到了一种格式，该格式在 (BO) 的情形下写为

$$\widehat{u_K}(t,k) = \langle (e^{it(I+2L_K)}S^*)^k \Pi_K u_0, 1\rangle, \quad \text{with} \quad L_K f = -i\partial_x f - \Pi_K(u_0 \Pi_K f), \quad f \in L^2_+.$$

利用 Lax 对与移位算子 S^* 的交换性质、显式公式 (3) 以及范数等价性，作者随后证明了对于足够光滑的解 $u \in C$（$[0,T]$, H^s）， $s>1$，其收敛性成立；误差常数 C_T 对最终时间 T 具有最优的线性依赖关系，另见注 1.5。

在本文中，我们首先将上述针对 [3] 的格式推广到格式 (5) 这一类，我们将在下文第 2 节介绍该类格式。其思路是在离散化中增加自由度：不再于每次迭代时在频率K处截断 Lax 算子 L 中的投影 Π，而是引入一个截断参数序列，记为 $n_K(k)$，并允许根据迭代 k采用不同的截断方式$L_{n_K(k)}$。这一额外自由度使我们得以发现新颖的格式，它们在离散层面精确保留解的平均值和 L^2-范数，并具有更优的保结构性质。

其次，我们将收敛结果推广到上述格式类，使其适用于粗糙解 $u(t)$；对于 (BO) 和 (CCM)，这些解分别仅属于 $L^2(\mathbb{T})$ 或 $L^2_+(\mathbb{T})$（见下文定理 1.3）。我们强调，此处用于证明收敛的工具与以往数值研究所用的工具截然不同，专门用于处理不具备正 Sobolev 正则性的粗糙解。

注 1.2 （三次 Szegő 方程）。 *Gérard* 和 *Grellier* [25] 发现了三次 *Szegő* 方程的一个显式公式

$$\partial_t u = \Pi(|u|^2 u) \tag{S}$$

对于初始数据 $u_0 \in H^s_+$、 $s \ge 1/2$。在此工作的基础上，*Gérard* 与 *Pushnitski* [30] 利用显式公式将数据到解映射连续延拓至 L^2_+，从而得到该方程对于 $u_0 \in L^2_+$ 的整体适定性。

我们注意到，针对 (S) 的一种格式已在工作 [3] 中基于显式公式 [25]构造出来；然而，本文仅讨论 (BO) 与 (CCM) 的情形。对于足够正则的初始数据 $u_0 \in H^s_+$、 $s \geq \frac{1}{2}$，*Gérard* 与 *Grellier* 的显式公式 [25] 适用，此处构造的一类数值格式可改用于 (S) 方程的情形。然而，我们的收敛性分析对 (S) 并不成立。

事实上，(S) 与另外两个方程 (BO)和 (CCM)有显著差异。 [25, 30] 中的显式公式基于 *Lax* 对

$$H_{u_0}(f) = \Pi(u_0 \bar{f}) \quad and \quad K^2_{u_0} f = H^2_{u_0} f - \langle f, u_0 \rangle u_0, \quad f \in L^2_+.$$

与 *Lax* 算子 (2)不同，算子 H_{u_0} 不含对角导数项 $-i\partial_x$。这与(S)缺乏色散密切相关，因为在显式公式(3) 中出现的 *Lax* 算子里令 $u_0 = 0$，即可得到线性流的公式。最终，我们将把 u_0 在 L^2 或 L^2_+ 中的算子(2) 构造为 $-i\partial_x$的无穷小范数有界扰动，因此这一分析不适用于H_{u_0} （另见注 *2.11*）。相比之下，文献 [25] 证明了，当 $u_0 \in H^s_+$ 且$s \geq \frac{1}{2}$ 时，H_{u_0} 是一个有界算子。随后，文献 [30] 的作者通过一种专用于 *Hankel* 算子的新方法，发现了如何仅针对 $u_0 \in L^2_+$ 将H_{u_0} 构造为无界算子。

1.2 结果

我们的主要结果是：对于粗糙数据 $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$ 和 $u_0 \in L^2_+(\mathbb{T})$，新型全离散格式（5）对 (BO) 和 (CCM) 的收敛性如下所述。

定理 1.3. 令 $u(t)$ 表示具有初始数据u_0 的 (BO) 或 (CCM) 方程的整体解，初始数据分别属于 $L^2(\mathbb{T})$ 或 $L^2_+(\mathbb{T})$；在聚焦型 (CCM) 方程的情形下，$\|u_0\|_{L^2} < 1$ 属于相应空间。记 $u_K(t)$ 为对应于 u_0 的数值格式(5)，其频率为 K，截断参数为 $\big(n_K(k)\big)_{k\geq 0}$。若对每个 $k \geq 0$ 都有 $n_K(k) \xrightarrow{K\to\infty} \infty$，则对任意 $T > 0$，有

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|u_K(t) - u(t)\|_{L^2} \xrightarrow{K\to\infty} 0. \tag{4}$$

上述定理的一个直接推论是，数值近似的 L^2 范数渐近收敛于精确解。

推论 1.4. 在定理 *1.3* 的假设下，我们有

$$\|u_K(t)\|_{L^2} \xrightarrow{K\to\infty} \|u(t)\|_{L^2},$$

对 $t \in [-T, T]$一致成立。

在将我们的 L^2 收敛结果与文献中的结果进行比较之前，我们先讨论定理 1.3 的陈述，然后通过塔尔博特效应这一例子加以说明。

在上述定理中，我们只要求截断参数 K和$(n_K(k))_{k\geq 0}$简单收敛，不规定其顺序。这是最一般的收敛概念。我们强调，对 K 和$(n_K(k))_{k\geq 0}$ 提出上述条件是自然的，因为我们希望截断算子渐近收敛到其连续对应物。

我们认为，对于L^2 数据而言，我们结果中的收敛方式已是所能期望的最强方式。首先，由于没有假设额外的 Sobolev 正则性，最好的可能结果是像式（4）中那样的L^2-收敛，且没有定量收敛速率。其次，由于截断的 Lax 算子 L_n 的特征值对任何 $n \in \mathbb{N}$都不等于 L 的特征值，传播子 $e^{itL_n}f$ 必然会在足够大的时间下偏离 $e^{itL}f$。因此，在分析酉群 $t \mapsto e^{itL}$ （它们出现在显式公式（3）中）以及据此获得 L^2 收敛结果时，必须要求时间 $[-T,T]$ 限制在有界区间内。

我们主要结果的证明依赖于对 Lax 算子 $L = L_{u_0}$ 及其相应酉群 $t \mapsto e^{itL}$的细致分析。具体而言，我们需要解决的主要问题是：若将 Lax 算子 L 替换为一个截断 L_n，如何有效地估计 $e^{itL_n}f$与 $e^{itL}f$之间的偏离？我们的解决方案受到 $[36,37]$,中对 Lax 算子所作分析的启发，并将在第 4 节中给出。

示例：塔尔博特效应。 我们的收敛结果所涵盖的初始数据类别比工作 $[3]$广泛得多。特别地，我们的分析中（在 (BO) 情形下）包含的一个重要例子是方波轮廓，它属于 $H^{\frac{1}{2}-}$（但不属于 L^2_+）。在图 1 中，我们绘制了从初始数据 $u_0(x)$ =sgn(x) 出发的线性与非线性 (BO) 方程在某些有理时刻和无理时刻的演化。

线性动力学 $\partial_t u = \partial_x|\partial_x|u$ 已经展现出显著的行为：当且仅当 $t/2\pi$ 为无理数时，轮廓 $x \mapsto u(t,\ x)$ 连续；而当 $t/2\pi$ 为有理数时，它则具有跳跃间断和垂直渐近线。[13, 中的定理 2], 对这一现象给出了严格解释：该定理证明，当 $t/2\pi$ 为有理数时，解是初始条件 u_0 （产生跳跃间断）及其希尔伯特变换 Hu_0 （引入垂直渐近线）的有限线性组合。这被称为线性 (BO) 方程的塔尔博特效应，其名称源自一位物理学家；他在实验中发现了线性薛定谔方程 $[50]$ 中类似的行为。

显然，图 1 表明，非线性 (BO) 方程也呈现出类似现象。定理 1.3 证实了这一点。然而，关于 (BO) 方程塔尔博特效应的严格证明仍是一个悬而未决的问题。

相比之下，众所周知，在薛定谔方程的情形下，即使存在三次非线性，塔尔博特效应仍然存在，正如 Erdoğan 和 Tzirakis $[21]$ 所证明的那样。此前，这两位作者已针对科尔特韦格–德弗里斯方程建立了类似的结果 $[20]$。这两个结果都源于一项非线性平滑估计，该估计表明，线性演化与非线性演化之差比每个解本身都具有更高的正则性。例如，在三次非线性薛定谔方程的情形下，线性流和非线性流都属于 $H^{\frac{1}{2}-}$，也就是初始数据所属的空间，而它们的差则属于 H^{1-}。特别是，这意味着该差在每个时刻都是连续轮廓，因此非线性流与线性流具有相同的不连续点。

图 1 表明，这种策略对于 (BO) 方程行不通！当$t = \frac{\pi}{2}$ 时，我们已经可以看到，线性演化与非线性演化之差是不连续剖面，因此不属于 $H^{\frac{1}{2}+}$。

然而，人们或许可以期待，在进行变量变换后，非线性平滑结果能够得以恢复。 $[27, 35]$, 对此进行了研究，其中考虑了 Tao 的规范变换

$u \mapsto w$ [52], 并为由 w所求解的方程建立了非线性平滑估计。由此可知，与方波初始剖面 $w(0,x)$相对应的解 $w(t,x)$表现出塔尔博特效应，但目前尚不清楚这是否意味着在原变量 u下也存在塔尔博特效应。这个问题留待未来研究。

尽管这对我们的分析而言只是附带内容，但我们注意到，塔尔博特实验也可以用带有狄拉克梳状初始数据的薛定谔方程来描述，该初始数据属于 $H^{-\frac{1}{2}-}$；详见 Banīca– Vega [9], Eceizabarrena [19], 及其中的参考文献。然而，对于 (BO) 方程而言，这个初值问题是不适定的。不仅这种正则性超出了适定性的范围，而且狄拉克梳状初始数据恰好是 Angulo Pava–Hakkaev [5] 用来证明不适定性的例子，这表明解在某种意义下必须以无限快的速度传播。此外，通过重整化方程来抵消这些空间平移，并不能立即解决这一问题，因为由此得到的系统在 $H^{-\frac{1}{2}-}$ 中仍然是不适定的，Gérard– Kappeler–Topalov [26, 附录 B]中的例子便说明了这一点。

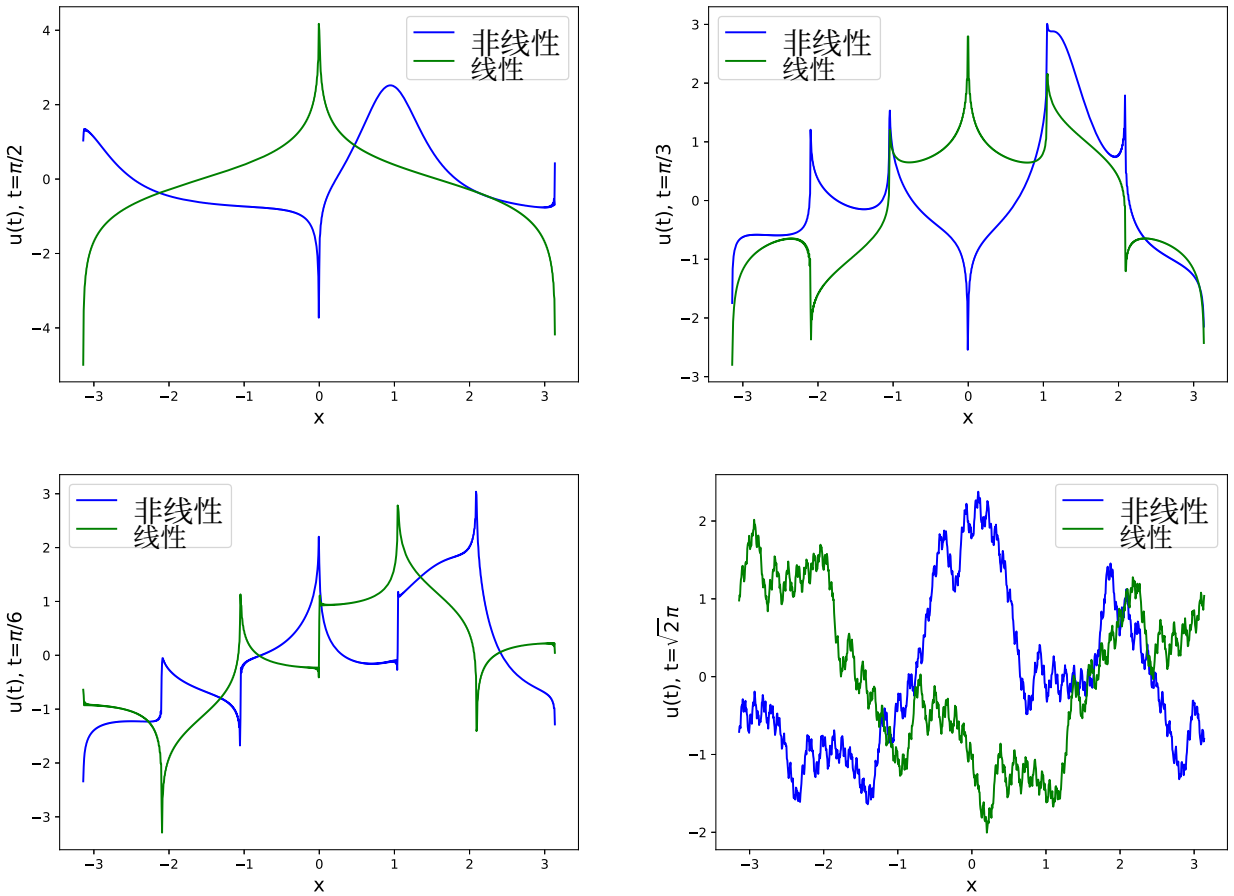

图 1：由阶跃函数初始数据 $u_0(x)$ =sgn(x) 出发的 (BO) 方程的演化。前三个面板展示了有理时刻 $t=\pi/2$、 $t=\pi/3$ 和 $t=\pi/6$ 处的塔尔博特效应，而最后一个面板对应于无理时刻 $t=\sqrt{2}\,\pi$。绿色所示的格式 (12) 逼近线性化方程。蓝色所示的格式 (6) 采用谱截断：当 $0 \le k \le K/2$ 时取 $n(k) = K/2$ ，否则取 $n(k) = 0$ ，并逼近 (BO)。我们取 $K = 2^{10}$。

与文献中收敛结果的比较。据我们所知，这是首个误差分析结果，证明了数值格式在 $C([0,T],$ $L^2(\mathbb{T}))$ 范数下，对于仅具有 L^2 的初始数据，并且在 任意时间 $T>0$ 内都收敛。

对于 (CCM)，目前唯一可用的收敛性分析由 [3], 给出，它仅适用于 H^s_+ 中带有 $s>1$ 的充分光滑解，另见注 1.5。

对于 (BO)，关于粗糙数据 $u_0 \in L^2$ 的现有收敛结果仅在较弱范数 $L^2([0,T], L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ 中得到，且仅针对某个有限的 $T>0$，并局限于实直线 $\mathbb{R}$。具体而言，在 $\mathbb{R}$上，通过将加藤平滑效应与 Aubin–Lions 紧性相结合，Galtung [22]证明了 (BO) 的 Crank–Nicolson–Galerkin 格式在空间 $L^2([0,T], L^2_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}))$ 中的收敛，其中 $u_0 \in L^2(\mathbb{R})$ 以及某个 $T>0$。该结果建立在 [17,18], 更早的误差分析之上，其中利用基于加藤平滑的类似论证，对 Korteweg–de Vries (KdV) 方程建立了同样的收敛；另见 [4,32] 中同类的更早工作。在环面 $\mathbb{T}$上，此类局部平滑效应并不成立，因此需要采用不同的方法。对于 Benjamin–Ono 方程， [16], 考虑了这一问题，但仅针对正则数据。在该工作中，证明了克兰克–尼科尔森格式当 $\Delta x \to 0$ 且 $\Delta t = O(\Delta x)$ 时在更正则的范数 $C([0,T]\times\mathbb{T})$ 中的收敛，其中某个 $T>0$ 以及 $u_0 \in H^2(\mathbb{T})$。

最后，我们指出，近年来已有若干工作引入了基于离散 Bourgain 空间或离散 Strichartz 估计的精细误差分析技术，用以建立低正则性数据下半线性色散方程数值格式的收敛性。这些方法针对任意低于最大存在时间的终止时间 T，给出了以初始数据 $u_0 \in H^s$, $s>0$ 的 Sobolev 正则性表示的、在 $C([0,T], L^2)$ 范数下的显式收敛速率。然而，它们并不涵盖 L^2-解（$s=0$）的情形；例如可参见 [48] 关于 KdV 方程的结果，以及[2, 第 1 章第 3] 节对相关结果的综述。为了对 L^2 数据得到一致的 L^2- 收敛结果，我们引入了基于紧性论证与 Lax 算子、并结合这些新显式公式的完全不同的技术。

注 1.5 （ u_K 对较高正则性数据的收敛）。 设 u_K 为由（5） 定义的格式，其中 n（k） $\geq cK$, $c>0$ 为与 K 无关的某个常数。通过采用与~在 [3] 中相同的证明，并取截断参数 $K := cK$, 我们得到该格式子类 u_K 的收敛结果，即对任意 $t\in\mathbb{R}$、 $0\leq r\leq s$ 以及满足 $s>1$ 的 $u_0 \in H^s$（$\mathbb{T}$） , 存在 $C>0$ 使得

$$\|u_K(t) - u(t)\|_{H^r} \leq C(1+t)K^{-s+1+r}.$$

我们注意到，正则性条件 $s>1$ 是自然的，这源于显式公式(3)的结构。事实上，对每个指数 e^{2itL} 进行离散化会诱导一个阶为 K^{-s}的 L^2 误差，从而在应用 $\tilde{K}$次以控制$0\leq k<\tilde{K}$上的误差项 $(e^{2itL}S^*)^k - (e^{2itL_{\tilde{K}}}S^*)^k$时得到速率 K^{-s+1}。由于误差是在 L^2 中或在更强的 H^r 范数中度量的，这就解释了为什么我们至少需要 $s>1$ 的正则性才能证明收敛速率。

我们注意到，满足条件 (13) 且在离散层面保持 L^2-范数的格式不属于上述情形。因此，对于这些格式，目前唯一可用的收敛结果就是本文所给出的结果。

1.3 结构概述

第 2 节用于介绍我们所研究的数值格式类。具体而言，我们在第 2.1 节中根据引言部分给出的显式公式定义这些格式。随后，我们在第 2.2 节讨论它们的保持性质，并在第 2.3 节讨论其计算成本。在第 3 节中，我们介绍证明主定理所需的预备材料，而主定理将在第 4 节中给出。

致谢

Y.A.B. 的工作由美国国家科学基金会通过项目 DMS-2401858 资助。T.L. 的工作获得了 NSF CAREER 基金 DMS-1845037 和 AMS-Simons 旅行基金的支持。作者感谢 Louise Gassot 和雷恩数学研究所（IRMAR）在本项目早期提供支持与接待，并感谢 Andreia Chapouto 就塔尔博特效应进行讨论。

2 基于显式公式的格式

2.1 定义格式类

格式 u_K 的一般形式在傅里叶空间中如下给出。令 $K \in \mathbb{N}$ 为离散化中使用的傅里叶频率数。对于每个 K，选取一列截断参数 $n(k) = n_K(k) \in \mathbb{N}$，其中 $k \in \mathbb{N}$，并令

$$\widehat{u_K}(t,k) = \langle u^k, 1\rangle \quad \text{for} \quad 0 \le k < K, \tag{5}$$

其中 $u^0 = \Pi_{n(0)} u_0$，且对于 $k \ge 1$

$$u^k = \left(e^{it(I+2L_{n(k)})}S^*\right) u^{k-1} \text{ with } \quad L_j = -i\partial_x - \Pi_j u_0 \Pi_j, \quad j \in \mathbb{N} \tag{6}$$

对于 (BO) 的情形，而对于 (CCM)

$$u^k = \left(e^{-it(I+2L_{n(k)})}S^*\right) u^{k-1} \text{ with } \quad L_j = -i\partial_x \pm \Pi_j u_0 \Pi_j \overline{u}_0 \Pi_j, \quad j \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

对于 (CCM)，通过令 $\widehat{u_K}(t,\ k) = 0$ 对于 $k < 0$ 或 $k \ge K$，公式 (5) 定义了 L^2_+ 中的一个元素，从而得到我们对 $u(t)$的近似。对于 (BO)，为了确保 u_K 是实值，我们令

$$\widehat{u_K}(t,k) = \overline{\widehat{u_K}(t,-k)} \quad \text{for} \quad -K < k < 0,$$

然后取 $\widehat{u_K}(t,\ k) = 0$ 对于 $|k| \ge K$。

注 2.1. 格式 (5) 与 $n(k)$ 在 $k \ge K$ 时的取值无关，因为迭代项 u^k 仅在 $0 \le k < K$ 时计算。不过，我们仍用完整序列 $(n(k))_{k\ge 0}$来定义该格式，因为这样可以识别出其中保结构性质更好的格式，详见下文。

注 2.2. (6) 和(7) 中出现的矩阵指数分别对 $u_0 \in L^2$ 和 L^2_+ 定义良好。事实上，我们在第 *4.2* 节证明，对于任意 $j \in \mathbb{N}$，(6) 和(7) 中出现的 ***Lax*** 算子 L_j 是 H^1_+ 上的半有界自伴算子，因此生成 H^1_+ 上的强连续单参数酉群 $t \to e^{itL_j}$。

2.2 保结构性质和示例

在给出属于此类格式 (5) 的示例之前，我们先讨论该类格式所继承的一些保持性质。考察系数 $\widehat{u_K}(t,\ 0)$，可知格式 (5) 保持 u_0 的平均值。这是 (BO) 和 (CCM) 的守恒量；对于 (BO)，它对应于质量。

命题 2.3。设 $n(0) \geq 1$。那么对于所有 $t \in \mathbb{R}$，格式 u_K 满足 (5)

$$\int_{\mathbb{T}} u_K(t,x)\,dx = \int_{\mathbb{T}} u_0(x)\,dx.$$

L^2 范数是两个系统共有的另一守恒量。上述格式 (5) 的第二个重要特点是，其 L^2 范数不超过初始数据的范数，如下述命题所示。

命题 2.4。给定 $t \in \mathbb{R}$ 有

$$\|\Pi u_K(t)\|_{L^2} \leq \|\Pi_{n(0)} u_0\|_{L^2}. \tag{8}$$

特别地，这意味着

$$\|u_K(t)\|_{L^2} \leq \|u_0\|_{L^2}. \tag{9}$$

证明。固定初始数据 $u_0 \in L^2$ 或 $u_0 \in L^2_+$，并令 u_K 表示由递归序列 u^k 构造的数值格式 (5)；该递归序列针对 (BO) 由 (6) 定义，针对 (CCM) 由 (7) 定义。

由于每个 $L_{n(k)}$ 都是自伴的（详见下文命题 4.5 和 4.6），它生成一个单参数酉群 $t \mapsto e^{itL_{n(k)}}$。因此，对于 $k \geq 1$，有

$$\|u^k\|^2_{L^2} = \|e^{\pm it(I+2L_{n(k)})} S^* u^{k-1}\|^2_{L^2} = \|S^* u^{k-1}\|^2_{L^2} = \|u^{k-1}\|^2_{L^2} - \left|\langle u^{k-1}, 1\rangle\right|^2.$$

通过归纳法，我们得出

$$0 \leq \|u^K\|^2_{L^2} = \|u^0\|^2_{L^2} - \sum_{k=0}^{K-1} \left|\langle u^k, 1\rangle\right|^2 = \|\Pi_{n(0)} u_0\|^2_{L^2} - \|\Pi u_K(t)\|^2_{L^2}. \tag{10}$$

特别地，利用命题 2.3，我们有

$$\|u_K(t)\|^2_{L^2} = \|\Pi u_K(t)\|^2_{L^2} + \left\|\overline{\Pi u_K(t)}\right\|^2_{L^2} - \langle u_K(t), 1\rangle^2 \leq 2\|\Pi_{n(0)} u_0\|^2_{L^2} - \langle u_0, 1\rangle^2 \leq \|u_0\|^2_{L^2}. \tag{11}$$

□

L^2-不等式 (8) 是从弱收敛过渡到强 L^2 收敛所必需的关键步骤，因此对于第 4 节中给出的收敛性分析至关重要。

现在我们给出属于上述（5）类的各种格式的例子。

例 2.5（线性情形）。 最简单的例子是取 n<style id='8'>（0） $= K$ 和 n（k） $= 0$，其中 $k \geq 1$。由此得到的格式为

$$\widehat{u_K}(t,k) = \langle (e^{\alpha i t(I-2i\partial_x)} S^*)^k \Pi_K u_0, 1\rangle, \quad 0 \leq k < K, \tag{12}$$

其中 $\alpha = 1$ 对应 (BO)， $\alpha = -1$ 对应 (CCM)。上述格式近似线性化方程 $\partial_t u = \alpha \partial_x |\partial_x| u.$ 。事实上，容易验证，对于 $K = \infty$，上述公式等价于线性流 $e^{\alpha t \partial_x |\partial_x|} u_0$。

例 2.6 ([3] 的格式)。 通过取 $n(k) = K$，对于每个 $k \geq 0$，我们便得到 *Alama Bronsard–Chen–Dolbeault* 最近提出的格式 [3]。

接下来，通过对 Lax 算子以及 $n(k)$ 作更精细的近似，我们可以得到能够保持截断初始数据 L^2-范数的格式。

例 2.7（保持离散 L^2-范数的格式）。 通过取

$$n(k) \leq K - k \quad for \quad 0 \leq k < K \tag{13}$$

我们得到新的格式，它们在离散层面上精确保持 L^2-范数。以下命题对此作出阐述。

命题 2.8。 设 $t \in \mathbb{R}$，并令 u_K 为任意满足假设 (13)、由 (5) 定义的格式。该格式满足

$$\|\Pi u_K(t)\|_{L^2} = \|\Pi_{n(0)} u_0\|_{L^2}$$

证明。 证明可由命题 2.4 的证明得出，只需注意到 $u^K \equiv 0$，因此 (10) 中取等号。事实上，在频率变量中，每个 u^k 的大小为 $K - k$（见注 2.10），且支撑位于频率 0 与 $K-k-1$ 之间，因此特别地， u^K 必处处为零。于是可得

$$\|\Pi u_K(t)\|_{L^2}^2 = 2\|\Pi_{n(0)} u_0\|_{L^2}^2 - \langle u_0, 1\rangle^2 = \|\Pi_{n(0)} u_0\|_{L^2}^2.$$

□

注 2.9。 我们不能期望 (9) 中取等号，因为 u_0 的最高频模态已被截断。因此，(11) 中的第二个估计必然是不等式。我们所能期望的最强结果是，截断初始数据的 L^2-范数在时间演化过程中守恒，而这正是命题 *2.8* 所保证的。

注 2.10（迭代项的大小 u^k）。 在频率变量中，数值格式 (6) 和 (7) 中的迭代项 u^k 是大小为

$$m_k := \max_{0 \leq \ell \leq k} \{n(\ell) - (k - \ell)\}, \tag{14}$$

其关于 $0 \leq k < K$ 被 $M =$ 最大值$_{0 \leq k < K}\, n(k)$所控制。事实上， u^0 的大小为 $n(0)$；移位后，$S^* u^0$ 的大小为 $n(0) - 1$；而应用 $e^{itL_{n(1)}}$时， u^1 的大小为 最大值$\{n(0) - 1, n(1)\}$，因为对角部分 $-i\partial_x$ 在 (6) 和 (7)中没有被 Π_j 截断。因此，通过归纳法可得(14)。

注 2.11 (截断的 Lax 算子与对 $-i\partial_x$**)的扰动**。 如注 *2.10* 所述，该格式以一个大小为 M的向量实现，而 L_n 的计算等同于$\Pi_M L_n \Pi_M$的计算。尽管如此，在分析中，我们不会对截断的 *Lax* 算子 (6)和 (7)定义中的第一项$-i\partial_x$ 施加任何截断 Π_M。事实上，这对于将 *Toeplitz* 项 $\Pi_n u \Pi_n$ 或 $\Pi_n u \Pi_n u \Pi_n$ 视为 $-i\partial_x$的扰动至关重要，从而得到所需的收敛结果，见第 *4.2* 节。出于同样的原因，我们的收敛证明不适用于三次 *Szegő* 方程：其 *Lax* 算子缺少导数项 $-i\partial_x$，因此无法用扰动方法处理这个问题。

2.3 计算成本

主要计算成本来自计算式 (6) 和 (7) 中的矩阵指数，以近似 Lax 算子 e^{2itL} 的流。因此，格式 (5) 的成本必然取决于 Lax 算子截断方式的选择，而该选择由 $n(k)$ 决定。

如果不施加任何结构约束，并且任意选取 $n(k)$，那么该格式的实现成本很高，需要 $O(K^4)$ 次运算。这是因为，为了计算格式 (5) 的傅里叶系数，我们需要计算 $K-1$ 个形如 $e^{it(I+2L_{n(k)})}$ 的矩阵指数，而每个矩阵指数的计算成本为 $\mathcal{O}(K^3)$。

但是，如果施加结构约束，例如取 $n(k) = K$，或者取与 $n(k) = K/2$ 对应的 L^2-保持格式（该格式在 $0 \le k \le K/2$ 时满足相应条件，否则为零，因而满足式 (13)），那么矩阵指数 $e^{it(I+2L_{n(k)})}$ 可在 $\mathcal{O}(K^3)$ 内计算一次。事实上，由于这些矩阵是自伴的，可以将其对角化为 $P\Lambda P^T$，从而能够在 $\mathcal{O}(K^3)$ 次运算内计算 $Pe^{it\Lambda}P^T$。此外，对角矩阵 Λ 的特征值 λ_j 是实值，因此对所有 t 都有 $|e^{it\lambda_j}| = 1$，确保该方法随时间推移保持稳定性。计算出矩阵指数后，我们可以通过 $\mathcal{O}(K)$ 次矩阵-向量乘法计算所有向量，其计算成本同样为$\mathcal{O}(K^3)$。

我们强调，关键在于方法的平衡，即精度 ϵ 与计算成本 $\mathcal{C}$ 之间的权衡，而不是仅关注其中一个量。在权衡ϵ 与 $\mathcal{C}$时，基于显式公式的格式优于文献中此前提出的格式，详见 [3, 第 4 节2]。

3 傅里叶变换、范数和预解式

我们对 L^2 上的内积采用如下约定：

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\bar{g}\, dx.$$

接下来，我们将傅里叶变换定义为

$$\widehat{f}(k) = \langle f, e^{ikx}\rangle, \quad \text{so that} \quad f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

普朗歇尔恒等式由此写作

$$\|f\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2.$$

我们将算子范数定义如下

$$\|A\|_{\mathrm{op}} := \|A\|_{L^2_+\to L^2_+} = \sup_{\substack{\|f\|_{L^2}\le 1\\ f\in L^2_+}} \|Af\|_{L^2}.$$

现在回顾 (BO) 和 (CCM) 在 L^2_+上的截断拉克斯算子；在写出格式时，我们已在 (6) 和 (7) 中对其作了形式上的定义。对于 (BO)，令 $u\in L^2$ 为实值初始数据，并定义

$$L_n = -i\partial_x - \Pi_n u\Pi_n \quad \text{and} \quad L_\infty = L = -i\partial_x - \Pi u. \tag{15}$$

对于 (CCM)，令 $u\in L^2_+$，并构造截断拉克斯算子

$$L_n = -i\partial_x \mp \Pi_n u\Pi_n \bar{u}\Pi_n \quad \text{and} \quad L_\infty = L = -i\partial_x \mp u\Pi\bar{u}. \tag{16}$$

在下一节中，我们将把 L_n 构造为L^2_+上的自由算子 $L_0=-i\partial_x$ 的扰动，其定义域为 $D(L_0)=H^1_+$。我们将后者的预解式记为

$$R_0(\kappa) = (L_0+\kappa)^{-1}, \quad \kappa\ge 1.$$

定义与该预解式相适配的范数也很方便:

$$\|f\|^2_{H^s_\kappa} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} (|k|+\kappa)^{2s}|\widehat{f}(k)|^2. \tag{17}$$

4 收敛性证明

本节旨在证明定理 1.3 中给出的主要收敛结果。证明见第 4.5 节，我们将在该节说明，如何结合弱收敛与命题 2.4，推出 $L^2(\mathbb{T})$中的强收敛。为了证明弱收敛，我们依赖第 4.4 节的结果；该节证明了与截断的 Lax 算子 L_n相关联的酉群 e^{itL_n}，在有界时间区间 $[-T,T]$ 上以及 L^2_+的紧子集 $\mathcal{F}$ 上均一致收敛。为证明后者，我们将在第 4.3 节证明 L_n的范数预解式收敛，而这又用到了第 4.1 和 4.2 节中的算子界与范数等价。

4.1 算子界

接下来的几节将使用以下估计，严格定义式 (15) 和 (16) 中的截断拉克斯算子 L_n，构造其预解式，并研究其映射性质。前两个引理表明，$\Pi_n u\Pi_n$ 和 $\Pi_n u\Pi_n u\Pi_n$ 是 L_0的相对有界扰动。事实上，这些估计的适用范围更广，因为它们不要求最左侧的截断 Π_n，而只考虑 $u\Pi_n u$ 和 $u\Pi_n\bar{u}\Pi_n$，另见备注 4.4。

我们先讨论 (BO) 方程的情形。

引理 4.1。对于任意 $u\in L^2$，有

$$\|u\Pi_n R_0(\kappa)\|_{\mathrm{op}} \le \sqrt{3}\kappa^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}, \tag{18}$$

对 $1\le n\le\infty$ 和 $\kappa\ge 1$ 一致成立。

证明。对于任意 $s > \frac{1}{2}$，空间 H^s 嵌入到 L^∞ 中。更具体地，对于 $g \in H^s_\kappa$，在傅里叶变量中应用柯西–施瓦茨不等式可得

$$\|g\|_{L^\infty} \le \|\widehat{g}\|_{\ell^1} \le \sqrt{\frac{2s+1}{2s-1}}\kappa^{\frac{1}{2}-s}\|g\|_{H^s_\kappa}, \quad \kappa \ge 1. \tag{19}$$

将上述内容中的 $s=1$ 代入，并回顾 H^s_κ-范数 (17)，可知对所有 $1 \le n \le \infty$ 和 $\kappa \ge 1$,

$$\|u\Pi_n R_0 f\|_{L^2} \le \|u\|_{L^2}\|\Pi_n R_0 f\|_{L^\infty} \le \sqrt{3}\kappa^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}\|R_0 f\|_{H^1_\kappa} = \sqrt{3}\kappa^{-\frac{1}{2}}\|u\|_{L^2}\|f\|_{L^2}.$$

这就证明了 (18)。 □

现在我们来证明 (CCM) 方程对应的上述引理。注意，Lax 算子现在包含两个 u，因此，初等估计 (19) 已不足以控制这两个因子。相反，我们利用 $u \in L^2_+$ 的傅里叶支集。此外，引理 4.2 中的算子估计未给出关于 κ 的显式衰减率；因此，在 (CCM) 的情形下，需要单独论证以证明当 $\kappa \to \infty$ 时的衰减。

引理 4.2。对任意 $u \in L^2_+$、$1 \le n \le \infty$ 和 $\kappa \ge 1$，有

$$\|u\Pi_n \overline{u}\Pi_n R_0(\kappa)\|_{\mathrm{op}} \le 2\|u\|^2_{L^2}. \tag{20}$$

此外，对每个 $u \in L^2_+$，当 $\kappa \to \infty$ 时，左端趋于 0，且对 $1 \le n \le \infty$ 一致。

证明。首先，我们有

$$\|u\Pi_n \overline{u}\Pi_n R_0 f\|_{L^2} \le \|u\|_{L^2}\|\Pi_n \overline{u}\Pi_n R_0 f\|_{L^\infty}.$$

我们用傅里叶系数的 ℓ^1 范数来估计 L^∞ 范数:

$$\begin{aligned}
\|\Pi_n \overline{u}\Pi_n R_0 f\|_{L^\infty} &\le \sum_{k=0}^{n-1}\left|\sum_{l=0}^{n-1}\overline{\widehat{u}(l-k)}\frac{\widehat{f}(l)}{l+\kappa}\right| \\
&\le \sum_{l=0}^{n-1}\frac{|\widehat{f}(l)|}{l+\kappa}\sum_{k=0}^{l}|\widehat{u}(l-k)| \\
&\le \|f\|_{L^2}\left\|\frac{1}{l+\kappa}\sum_{m=0}^{l}|\widehat{u}(m)|\right\|_{\ell^2},
\end{aligned}$$

其中第二行用到了这样一个事实： $u \in L^2_+$，因此当 $l < k$ 时，这些项为零。由于 $\kappa \ge 1$，我们应用哈代不等式得到以下估计

$$\left\|\frac{1}{l+\kappa}\sum_{m=0}^{l}|\widehat{u}(m)|\right\|_{\ell^2} \le \left\|\frac{1}{l+1}\sum_{m=0}^{l}|\widehat{u}(m)|\right\|_{\ell^2} \le 2\|u\|_{L^2},$$

由此证明了 (20)。

此外，由上述内容可得

$$\left\|\frac{1}{l+\kappa}\sum_{m=0}^{l}|\widehat{u}(m)|\right\|_{\ell^2_{l\ge N}} \xrightarrow{N\to\infty} 0.$$

因此，对于固定的 $N \geq 1$，我们估计低频 $l < N$ 的贡献 :

$$\begin{aligned}\left\| \frac{1}{l+\kappa} \sum_{m=0}^{l} |\widehat{u}(m)| \right\|_{\ell^2_{l<N}}^2 &\leq \frac{1}{\kappa^2} \sum_{l=0}^{N-1} \left(\sum_{m=0}^{l} |\widehat{u}(m)| \right)^2 \\ &\leq \frac{1}{\kappa^2} \sum_{l=0}^{N-1} (l+1) \sum_{m=0}^{l} |\widehat{u}(m)|^2 \\ &\leq \frac{N^2}{\kappa^2} \|u\|_{L^2}^2 \xrightarrow{\kappa \to \infty} 0.\end{aligned}$$

因此，所需的收敛可通过先选取充分大的 N，再令 $\kappa \to \infty$趋于极限而得到。 □

下面的引理用于第 4.3 节，以得到当 $n \to \infty$时的预解式收敛。

引理 4.3。我们有

$$\|(\Pi - \Pi_n) R_0\|_{\mathrm{op}} = \|R_0(\Pi - \Pi_n)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{n}, \tag{21}$$

对 $\kappa \geq 1$一致成立。

证明。 首先注意到， R_0 与 $\Pi - \Pi_n$ 可交换，因为它们都是傅里叶乘子。对于 $f \in L^2_+$，我们有

$$\|R_0(\Pi - \Pi_n) f\|_{L^2}^2 = \sum_{k \geq n} \frac{|\widehat{f}(k)|^2}{(k+\kappa)^2} \leq \frac{1}{n^2} \|f\|_{L^2}^2. \qquad \square$$

注 4.4。 由于 $\|\Pi_n\|_{\mathrm{op}} \leq 1$，在前面加上截断算子 Π_n 并估计扰动项 $\Pi_n u \Pi_n R_0$ 或 $\Pi_n u \Pi_n u R_0$时，估计(18) 与(20) 仍然成立。尽管如此，我们仍保留上述更一般的陈述，因为在第 *4.3* 节中，我们先应用方程(21)，再应用方程(18) 与(20)，且左侧不加截断 Π_n 。

4.2 自伴算子与范数等价

命题 4.5 (截断的 Lax 算子（针对 (BO)）**)**。 给定 $u \in L^2$ 实值且 $1 \leq n \leq \infty$，算子

$$L_n = -i\partial_x - \Pi_n u \Pi_n$$

其定义域为 $D(L_n) = H^1_+$ ，是自伴且半有界的。此外，存在一个常数 $\kappa_0 = \kappa_0(\|u\|_{L^2}) \geq 1$ ，使得对所有 $\kappa \geq \kappa_0$， L_n 的预解式

$$R_n(\kappa; u) = (L_n + \kappa)^{-1}$$

存在，且将 L^2_+ 映射到 H^1_+。此外，以下估计成立

$$\tfrac{1}{2} \|f\|_{H^1_\kappa} \leq \|(L_n + \kappa) f\|_{L^2} \leq \tfrac{3}{2} \|f\|_{H^1_\kappa}, \tag{22}$$

$$\tfrac{2}{3} \|f\|_{H^{-1}_\kappa} \leq \|R_n(\kappa) f\|_{L^2} \leq 2 \|f\|_{H^{-1}_\kappa} \tag{23}$$

对 $1 \leq n \leq \infty$ 和 $\kappa \geq \kappa_0$一致成立。

证明。 首先，线性算子 $L_0 = -i\partial_x$ 是自伴的，其定义域为 H^1_+。因此，我们考虑对称算子 $\Pi_n u \Pi_n$。对于 $f \in H^1_+$，应用估计（18）可得

$$\|\Pi_n u \Pi_n f\|_{L^2} \le \|\Pi_n\|_{\mathrm{op}} \|u\Pi_n R_0\|_{\mathrm{op}} \|(L_0+\kappa)f\|_{L^2} \le \sqrt{3}\kappa^{-\frac{1}{2}} \|u\|_{L^2} \|(L_0+\kappa)f\|_{L^2}. \tag{24}$$

取 κ 足够大，由上述估计可知，算子 $\Pi_n u \Pi_n$ 相对于 L^2_+ [47, Chp. X.2]上的算子 $L_0 = -i\partial_x$ 是无穷小的。特别地，选择$\kappa_0 \ge \max\{12\|u\|^2_{L^2}, 1\}$ 后，我们有

$$\|\Pi_n u \Pi_n f\|_{L^2} \le \tfrac{1}{2} \|(L_0+\kappa)f\|_{L^2}, \quad \kappa \ge \kappa_0, \quad 1 \le n \le \infty \tag{25}$$

因此 $\Pi_n u \Pi_n$ 是 L_0-有界的。于是，根据 Kato–Rellich 定理 [47, Th. X.12], ，我们可知L_n 是一个定义域为 H^1_+的自伴算子，且下半有界，下界为 $-\kappa_0$。最后，再次应用 (25)，可得

$$\tfrac{1}{2}\|(L_0+\kappa)f\|_{L^2} \le \|(L_n+\kappa)f\|_{L^2} \le \tfrac{3}{2}\|(L_0+\kappa)f\|_{L^2},$$

这就证明了 (22)。由对偶性可得估计 (23)。 □

命题 4.6 (（CCM）的截断 Lax 算子)。 给定 $u \in L^2_+$ 和 $1 \le n \le \infty$，算子

$$L_n f = -i\partial f \mp \Pi_n[u\Pi_n(\overline{u}\Pi_n f)]$$

其定义域为 $D(L_n) = H^1_+$，是自伴且半有界的。此外，存在常数 $\kappa_0 = \kappa_0(u) \ge 1$，使得对所有 $\kappa \ge \kappa_0$，L_n 的预解式 $R_n(\kappa;\ u)$ 均存在，将 L^2_+ 映射到 H^1_+，且

$$\tfrac{1}{2}\|f\|_{H^1_\kappa} \le \|(L_n+\kappa)f\|_{L^2} \le \tfrac{3}{2}\|f\|_{H^1_\kappa}, \tag{26}$$

$$\tfrac{2}{3}\|f\|_{H^{-1}_\kappa} \le \|R_n(\kappa)f\|_{L^2} \le 2\|f\|_{H^{-1}_\kappa} \tag{27}$$

对 $1 \le n \le \infty$ 一致成立。

证明。 借助引理 4.2 的收敛结果，存在 $\kappa_0 = \kappa_0(u) \ge 1$，使得对所有 $\kappa \ge \kappa_0$，我们有

$$\|\Pi_n u \Pi_n \overline{u} \Pi_n f\|_{L^2} \le \|\Pi_n\|_{\mathrm{op}} \|u\Pi_n \overline{u}\Pi_n R_0\|_{\mathrm{op}} \|(L_0+\kappa)f\|_{L^2} \le \tfrac{1}{2}\|(L_0+\kappa)f\|_{L^2}$$

对所有 $1 \le n \le \infty$。因此，由 Kato–Rellich 定理 [47, 定理 X.12], 可知， L_n 是定义域 H^1_+ 上的自伴且半有界算子。事实上，我们再次得到更强的结果： $\Pi_n u \Pi_n u \Pi_n$ 相对于 L^2_+ 上的算子 $L_0 = -i\partial$ 是无穷小的。

因此，由上述不等式可得

$$\tfrac{1}{2}\|(L_0+\kappa)f\|_{L^2} \le \|(L_n+\kappa)f\|_{L^2} \le \tfrac{3}{2}\|(L_0+\kappa)f\|_{L^2},$$

由此证明了 (26)。利用对偶性即可得到估计 (27)。 □

4.3 范数预解式收敛

引理 4.7 (Benjamin–Ono 方程的范数预解式收敛)。 给定一个实值函数 $u \in L^2$，算子 L_n 在范数预解式意义下收敛到 L_∞，当 $n \to \infty$。

证明。 令 κ_0 表示命题 4.5 中的常数。只需证明，对于任意 $\kappa \geq \kappa_0$，都有

$$\|R_n(\kappa) - R_\infty(\kappa)\|_{\mathrm{op}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

利用预解式恒等式

$$R_n - R_\infty = R_n(L_\infty - L_n)R_\infty = -R_n(\Pi u \Pi - \Pi_n u \Pi_n)R_\infty,$$

我们有

$$\|R_n - R_\infty\|_{\mathrm{op}} \leq \|R_n R_0^{-1}\|_{\mathrm{op}} \|R_0(\Pi u \Pi - \Pi_n u \Pi_n)R_0\|_{\mathrm{op}} \|R_0^{-1} R_\infty\|_{\mathrm{op}}.$$

利用不等式 (23)，对于 $f \in L^2_+$，我们有

$$\|R_n R_0^{-1} f\|_{L^2} \leq 2\|R_0^{-1} f\|_{H^{-1}_\kappa} = 2\|f\|_{L^2},$$

因此，第一个因子以 $\|R_n R_0^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq 2$ 为界。接下来，在 $n = \infty$ 的情形下应用 (22)，我们有

$$\|R_0^{-1} R_\infty f\|_{L^2} = \|R_\infty f\|_{H^1_\kappa} \leq 2\|(L_\infty + \kappa)R_\infty f\|_{L^2} = 2\|f\|_{L^2},$$

因此，最后一个因子由 $\|R_0^{-1} R_\infty\|_{\mathrm{op}} \leq 2$ 控制。故要完成证明，只需证明

$$\|R_0(\Pi u \Pi - \Pi_n u \Pi_n)R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \|R_0(\Pi - \Pi_n)u \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} + \|R_0 \Pi_n u(\Pi - \Pi_n)R_0\|_{\mathrm{op}}$$

当 $n \to \infty$ 时收敛到零。

对于第一项，利用 (21) 和 (18)，并取 $n = \infty$，可得

$$\|R_0(\Pi - \Pi_n)u \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \|R_0(\Pi - \Pi_n)\|_{\mathrm{op}} \|u \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{n}\sqrt{3}\kappa^{-1/2}\|u\|_{L^2}.$$

接下来，回顾一下，对于希尔伯特空间上的有界算子 B，我们有

$$\|B^*\|_{\mathrm{op}} = \|B\|_{\mathrm{op}}. \tag{28}$$

因此，第二项由下式控制：

$$\begin{aligned}\|R_0 \Pi_n u(\Pi - \Pi_n)R_0\|_{\mathrm{op}} &\leq \|R_0 \Pi_n(u\,\cdot)\|_{\mathrm{op}} \|(\Pi - \Pi_n)R_0\|_{\mathrm{op}} \\ &= \|u \Pi_n R_0\|_{\mathrm{op}} \|R_0(\Pi - \Pi_n)\|_{\mathrm{op}} \\ &\leq \frac{1}{n}\sqrt{3}\kappa^{-1/2}\|u\|_{L^2},\end{aligned}$$

其中再次用到了估计 (18) 和 (21)。综上，

$$\|R_n(\kappa) - R_\infty(\kappa)\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{n} 8\sqrt{3}\kappa^{-1/2}\|u\|_{L^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0. \qquad \square$$

引理 4.8 (（CCM）的范数预解式收敛)。 给定 $u \in L^2_+$，算子 L_n 在范数预解式意义下收敛到 L_∞，当 $n \to \infty$。

证明。令 κ_0 表示命题 4.6 中的常数。参照引理 4.7 的证明，只需证明对于任意 $\kappa \geq \kappa_0$，我们有

$$\|R_n - R_\infty\|_{\mathrm{op}} \leq \|R_n R_0^{-1}\|_{\mathrm{op}} \|R_0(\Pi u \Pi \overline{u} \Pi - \Pi_n u \Pi_n \overline{u} \Pi_n) R_0\|_{\mathrm{op}} \|R_0^{-1} R_\infty\|_{\mathrm{op}}$$

当 $n \to \infty$ 时趋于零。

利用不等式 (26) 和 (27)，我们再次得到

$$\|R_n R_0^{-1}\|_{\mathrm{op}} \leq 2 \quad \text{and} \quad \|R_0^{-1} R_\infty\|_{\mathrm{op}} \leq 2.$$

因此，要完成证明，只需证明

$$\begin{aligned} \|R_0(\Pi u \Pi \overline{u} \Pi - \Pi_n u \Pi_n \overline{u} \Pi_n) R_0\|_{\mathrm{op}} \leq\ & \|R_0(\Pi - \Pi_n) u \Pi \overline{u} \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} \\ & + \|R_0 \Pi_n u (\Pi - \Pi_n) \overline{u} \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} \\ & + \|R_0 \Pi_n u \Pi_n \overline{u} (\Pi - \Pi_n) R_0\|_{\mathrm{op}} \end{aligned}$$

当 $n \to \infty$ 时趋于零。对于第一项，利用估计 (21) 和 (20)，我们得到

$$\|R_0(\Pi - \Pi_n) u \Pi \overline{u} \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{1}{n} \|u \Pi \overline{u} \Pi R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{2\|u\|^2}{n}$$

当 $n \to \infty$ 时趋于零。此外，由于 $u \in L^2_+$，算子 $\Pi_n u(\Pi - \Pi_n)$ 为零，因此第二项消失。最后，对于第三项，注意到 $(R_0 \Pi_n u \Pi_n u)^* = u \Pi_n u \Pi_n R_0$ 并应用方程 (28)，我们得到

$$\|R_0 \Pi_n u \Pi_n \overline{u} (\Pi - \Pi_n) R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \|u \Pi_n \overline{u} \Pi_n R_0\|_{\mathrm{op}} \|(\Pi - \Pi_n) R_0\|_{\mathrm{op}} \leq \frac{2\|u\|^2}{n},$$

这里我们再次用到了 (21) 和 (20)。证明至此完成。 □

4.4 生成的酉群

由第 4.2 节可知，(BO) 和 (CCM) 的截断 Lax 算子 L_n 是自伴的。根据函数演算可知，这些算子分别生成强连续单参数酉群 $t \mapsto e^{itL_n}$，其作用于 L^2_+，参见 [46, 定理 VIII.7]。

作为本节的总结，我们将证明以下关于这些酉群在 $n \to \infty$ 时收敛的结果。证明的一个关键要点是引理 4.7 和 4.8，它们证明 L_n 在范数预解式意义下收敛到 L。众所周知，这意味着对每个时间 t，$e^{itL_n} \to e^{itL}$ 在强算子拓扑下成立，参见例如 [46, 定理 VIII.20]。相比之下，我们的结果 (29) 表明，对于截断 Lax 算子序列 L_n，酉群 e^{itL_n} 的收敛在紧时间区间和 紧子集 L^2_+ 上均为一致收敛。

命题 4.9. 对于 $1 \leq n \leq \infty$，令 L_n 表示针对(BO) 或(CCM)、由命题 *4.5* 或 *4.6* 对任意固定初始数据 u 构造的截断拉克斯算子。则对任意 $T > 0$ 以及任意紧集 $\mathcal{F} \subset L^2_+$，我们有

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \sup_{t \in [-T,T]} \|(e^{itL_n} - e^{itL_\infty}) f\|_{L^2} \xrightarrow{n \to \infty} 0. \tag{29}$$

证明。 我们将并行给出 (BO) 与 (CCM) 两种情形下的论证，并在必要时指出两种情形中各成分的来源。

令 $\kappa = \kappa_0$，其中 $\kappa_0 = \kappa_0(u)$ 分别由命题 4.5 和 4.6 针对 (BO) 和 (CCM) 定义。对于 $M \geq 1$，令 $\chi_{\leq M}\colon \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个光滑函数，在 $[-\kappa, M]$ 上等于 1，并且当 $x \to +\infty$ 时趋于 0。我们还令 $X = [-T,T] \times [-\kappa, +\infty)$ 并定义

$$g\colon \begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (t,x) & \longmapsto & e^{itx}\chi_{\leq M}(x). \end{array}$$

根据斯通-魏尔斯特拉斯定理， t中的多项式以及 $(x+\kappa)^{-1}$ 在 $C_0(X)$中稠密。因此，对于任意 $\epsilon > 0$，存在多项式 $P(t,\ y)$，使得

$$\sup_{(t,x)\in X} \left|P\big(t,(x+\kappa)^{-1}\big) - g(t,x)\right| \leq \epsilon.$$

因此，由函数演算可得

$$\sup_{\substack{t\in[-T,T]\\ 1\leq n\leq\infty}} \left\|P\big(t,(L_n+\kappa)^{-1}\big) - g(t,L_n)\right\|_{\mathrm{op}} \leq \epsilon. \tag{30}$$

接下来，我们可以将误差分解为三项:

$$\begin{aligned} \|(e^{itL_n} - e^{itL_\infty})f\|_{L^2} \leq\ & 2 \sup_{\substack{t\in[-T,T]\\ 1\leq n\leq\infty}} \|e^{itL_n}f - g(t,L_n)f\|_{L^2} \\ & + 2C \sup_{\substack{t\in[-T,T]\\ 1\leq n\leq\infty}} \left\|P\big(t,(L_n+\kappa)^{-1}\big) - g(t,L_n)\right\|_{\mathrm{op}} \\ & + C \sup_{t\in[-T,T]} \left\|P\big(t,(L_n+\kappa)^{-1}\big) - P\big(t,(L+\kappa)^{-1}\big)\right\|_{\mathrm{op}}, \end{aligned} \tag{31}$$

其中 $C = \sup_{f\in\mathcal{F}} \|f\|_{L^2}$。 利用 (30)，可以使 (31) 中的第二项任意小。现在我们证明 (31) 中的第三项在 $n \to \infty$ 时趋于零。事实上，对于 $m \in \mathbb{N}$，我们有

$$R_n^m - R_\infty^m = R_n^{m-1}\left(R_n - R_\infty\right) + \left(R_n^{m-1} - R_\infty^{m-1}\right) R_\infty,$$

因此，利用 (23) 和 (27),

$$\|R_n^m - R_\infty^m\|_{\mathrm{op}} \leq 2^{m-1}\|R_n - R_\infty\|_{\mathrm{op}} + 2\|R_n^{m-1} - R_\infty^{m-1}\|_{\mathrm{op}}.$$

通过归纳法， $\|R_n^m - R_\infty^m\|_{\mathrm{op}} \leq 3^m\|R_n - R_\infty\|_{\mathrm{op}}$，根据引理 4.7 和 4.8，当 $n \to \infty$ 时趋于零。接下来，将该多项式写成 $P(t,\ y) = \sum_{\ell,\ m} \alpha_{\ell,\ m} t^\ell y^m$，可得

$$\sup_{t\in[-T,T]} \|P\big(t,(L_n+\kappa)^{-1}\big) - P\big(t,(L+\kappa)^{-1}\big)\|_{\mathrm{op}} \leq \sum_{\ell,m} \alpha_{\ell,m} T^\ell \|R_n^m - R_\infty^m\|_{\mathrm{op}} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

最后，我们证明式 (31) 中的第一项在 $M \to \infty$时趋于零，从而完成证明。由于$\mathcal{F} \subset L^2_+$ 是紧的，且 H^1_+ 在 L^2_+中稠密，因此，对于任意 $\epsilon > 0$，都存在 $m \in \mathbb{N}$ 和ϕ_1、……、 $\phi_m \in H^1_+$，使得

$$\forall f \in \mathcal{F},\ \exists j \in \{1,\ldots,m\},\ \|\phi_j - f\|_{L^2} \leq \epsilon.$$

因此，令 $\chi_{>M} = 1 - \chi_{\le M}$，可得对于 $t \in [-T, T]$ 和 $n \in \mathbb{N}$

$$\|e^{itL_n} f - g(t, L_n) f\|_{L^2} \le \|\chi_{>M}(L_n) e^{itL_n} f\|_{L^2} \le \|\chi_{>M}(L_n)(f - \phi_i)\|_{L^2} + \|\chi_{>M}(L_n)\phi_i\|_{L^2}.$$

上式右端的第一项由 ϵ 控制；对于第二项，利用函数演算以及不等式 (23) 和 (27)，我们有

$$\|\chi_{>M}(L_n)\phi_i\|_{L^2} \le \left\| \chi_{>M}(L_n) \frac{L_n + \kappa}{M + \kappa} \phi_i \right\|_{L^2} \le \frac{1}{M} \|(L_n + \kappa)\phi_i\|_{L^2} \le \frac{3}{2M} \max_{1 \le i \le m} \|\phi_i\|_{H^1_\kappa},$$

该量与 n 无关，并且当 $M \to \infty$ 时趋于零。为完成证明，我们先取 M，再取 $\deg(P)$，最后取足够大的 n，从而使 (31) 中的三项都可以任意小。 □

4.5 定理 1.3 的证明

我们将证明分为两步。首先，利用命题 4.9 证明格式 $u_K(t)$ 弱 L^2-收敛于解 $u(t)$，且该收敛关于 $t \in [-T, T]$ 一致。随后，利用格式的 L^2-范数有界性，将其提升为强收敛，见命题 2.4。

定理 *1.3* 的证明。 我们将同时考虑 (BO) 和 (CCM) 两种情形。实际上，主要依据是命题 2.4 和命题 4.9，这两个命题适用于这两种情形。

固定 $T > 0$，并令 (BO) 中的 $u_0 \in L^2(\mathbb{T})$，以及 (CCM) 中的 $u_0 \in L^2_+$，同时在聚焦情形下附加假设 $\|u_0\|_{L^2} < 1$。令 $K > 0$ 为近似中的最高频率，并令 $(n(k))_{k \ge 0} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ 为一个序列，使得

$$n(k) \xrightarrow[K \to \infty]{} \infty, \quad \text{for each } k \ge 0.$$

我们首先将格式 u_K 与序列 w_K 进行比较。该序列由与 u_K 相同的递推关系 (6) 生成，但以 $w^0 = \Pi u_0$ 而非 $u^0 = \Pi_{n(0)} u_0$ 作为初始种子。具体而言，对于 $t \in [-T, T]$ 和 $0 \le k < K$，我们将 w_K 的傅里叶系数定义为

$$\widehat{w}_K(t, k) = \left\langle \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(k)})} S^*\right) \cdots \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(2)})} S^*\right) \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(1)})} S^*\right) \Pi u_0, 1 \right\rangle$$

并且对 $k \ge K$，我们令 $\widehat{w}_K(t,\ k) = 0$。对于 (BO)，上述结论取正号 (+)；对于 (CCM)，则取负号 (–)。对于 $j \in \mathbb{N}$，每个算子 e^{itL_j} 都是酉的，且 $\|S^*\|_{\mathrm{op}} \le 1$，因此由柯西-施瓦茨不等式可得

$$\begin{aligned} \left|\widehat{w}_K(t, k) - \widehat{u}_K(t, k)\right| &= \left|\left\langle \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(k)})} S^*\right) \cdots \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(1)})} S^*\right) (\Pi - \Pi_{n(0)}) u_0, 1 \right\rangle\right| \\ &\le \left\| \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(k)})} S^*\right) \cdots \left(e^{\pm it(1 + 2L_{n(1)})} S^*\right) (\Pi - \Pi_{n(0)}) u_0 \right\|_{L^2} \\ &\le \left\| (\Pi - \Pi_{n(0)}) u_0 \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

因此，当 $n(0) \to \infty$ 时，上述右端趋于零。于是，对于每个 $k \ge 0$，我们有

$$|\widehat{w}_K(t, k) - \widehat{u}_K(t, k)| \xrightarrow{K \to \infty} 0, \quad \text{uniformly for } t \in [-T, T]. \tag{32}$$

鉴于此，只需研究 w_K 的傅里叶系数的行为，而无需研究 u_K 的。

对于 $k \geq 0$，我们写作

$$\widehat{w}_K(t,k) - \widehat{u}(t,k) = \sum_{j=1}^{k} \Big\langle Z_{k,j} \, \big(e^{\pm it(1+2L_{n(j)})} - e^{\pm it(1+2L)}\big) S^* (e^{\pm it(1+2L)} S^*)^{j-1} \Pi u_0, 1 \Big\rangle,$$

其中 $Z_{k,\ k} = \mathrm{Id}$ 和 $Z_{k,\ j-1} = Z_{k,\ j}\ e^{\pm it(1+2L_{n(j)})} S^*$。特别地，我们有

$$Z_{k,j} = e^{\pm it(1+2L_{n(k)})} S^* \cdots e^{\pm it(1+2L_{n(j+1)})} S^*, \quad j < k-1.$$

因此，以下估计成立

$$\big|\widehat{w}_K(t,k) - \widehat{u}(t,k)\big| \leq \sum_{j=1}^{k} \big\| \big(e^{\pm 2itL_{n(j)}} - e^{\pm 2itL}\big) S^* (e^{\pm 2itL} S^*)^{j-1} \Pi u_0 \big\|_{L^2}.$$

接下来，注意到算子

$$\begin{array}{rccc} e^{itL}\colon & \mathbb{R} \times L^2_+ & \longrightarrow & L^2_+ \\ & (t,f) & \longmapsto & e^{itL} f \end{array}$$

是联合连续的。事实上，给定一个序列 $t_m \to t$ 属于 $\mathbb{R}$，且 $\phi_m \to \phi$ 属于 L^2_+，我们有 ave

$$\|e^{it_m L}\phi_m - e^{itL}\phi\|_{L^2} \leq \|e^{it_m L}\|_{\mathrm{op}} \|\phi_m - \phi\|_{L^2} + \|e^{it_m L}\phi - e^{itL}\phi\|_{L^2}.$$

由于估计 $\|e^{it_m L}\|_{\mathrm{op}} = 1$ 以及映射 $t \mapsto e^{itL}$ 是强连续的这一事实（例如参见 [46, Th. VIII.7]），上面的右端在 $m \to \infty$ 时趋于零。

因此，由连续映射的复合可知，该映射

$$\begin{array}{rccc} & \mathbb{R} & \longrightarrow & L^2_+ \\ & t & \longmapsto & S^* (e^{\pm 2itL} S^*)^{j-1} \Pi u_0 \end{array}$$

对每个 $j = 1$、.....、k 都连续。因此，对任意 $T > 0$，集合

$$\mathcal{F}_T = \big\{ S^* (e^{\pm 2itL} S^*)^{j-1} \Pi u_0 : t \in [-T, T],\ j = 1, \ldots, k \big\}$$

在 L^2_+ 中是紧的。将命题 4.9 应用于集合 $\mathcal{F}_T$，我们得出，对每个 $k \geq 0$，我们有 e

$$\widehat{w}_K(t,k) \xrightarrow{K \to \infty} \widehat{u}(t,k) \quad \text{uniformly for } t \in [-T, T].$$

将此与 (32) 比较可知，对每个 $0 \leq k < K$，

$$\widehat{u}_K(t,k) \xrightarrow{K \to \infty} \widehat{u}(t,k) \quad \text{uniformly for } t \in [-T, T].$$

在 (BO) 的情形下，利用解为实值这一事实以及格式的定义，可知上述收敛对 $-K < k \leq 0$ 也成立。

因此，我们得出弱 L^2 收敛：

$$u_K(t) \xrightarrow{K \to \infty} u(t) \quad \text{uniformly for } t \in [-T, T]. \tag{33}$$

事实上，由命题 2.4 可知，该格式一致有界，因此

$$\|u(t)-u_K(t)\|_{L^2}\le\|u(t)\|_{L^2}+\|u_K(t)\|_{L^2}\le 2\|u_0\|_{L^2}.$$

因此，给定 $\epsilon>0$ 和一个测试函数 $\phi\in L^2$，对于满足 $\sum_{|k|\ge K_0}|\widehat{\phi}(k)|^2\le\epsilon^2$ 的 $K_0\in\mathbb{N}$，我们有

$$|\langle u(t)-u_K(t),\phi\rangle|\le\sum_{|k|<K_0}|\widehat{\phi}(k)|\,|\widehat{u}(t,k)-\widehat{u}_K(t,k)|+2\epsilon\|u_0\|_{L^2},$$

其中，取足够大的 $K>K_0$和 $n(j)$，对于 $0\le j<K_0$，第一项可以一致地（对 $t\in[-T,T]$而言）任意小。这就证明了 (33)。

为完成证明，我们将其提升为强收敛：

$$\sup_{t\in[-T,T]}\|u_K(t)-u(t)\|_{L^2}\xrightarrow{K\to\infty}0. \tag{34}$$

利用数值格式 (9) 的 L^2-范数有界性，我们有

$$\begin{aligned}\|u_K(t)-u(t)\|_{L^2}^2&=\|u_K(t)\|_{L^2}^2+\|u(t)\|_{L^2}^2-2\,\mathrm{Re}\langle u_K(t),u(t)\rangle\\&\le 2\|u(t)\|_{L^2}^2-2\,\mathrm{Re}\langle u_K(t),u(t)\rangle\\&=2\,\mathrm{Re}\langle u(t)-u_K(t),u(t)\rangle.\end{aligned} \tag{35}$$

根据引言中讨论的 (BO) 和 (CCM) 的整体适定性结果，映射

$$(\mathrm{BO}):\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&L^2\\t&\longmapsto&u(t)\end{array}\quad\text{and}\quad(\mathrm{CCM}):\begin{array}{ccc}\mathbb{R}&\longrightarrow&L^2_+\\t&\longmapsto&u(t)\end{array}$$

是连续的，因此轨道 $\{u(t):t\in[-T,T]\}$ 分别在 L^2 和 L^2_+ 中是紧的。因此，给定 $\delta>0$，存在有限多个点 $t_1,\dots,t_M\in[-T,T]$，使得该轨道可以被 L^2 中半径为 $\delta>0$、以 $u(t_1)\dots,u(t_M)$ 为中心的开球覆盖。利用方程 (33) 中的弱极限，对于每个 $m=1,\dots,M$，我们有

$$\sup_{[-T,T]}\big|\langle u(t)-u_K(t),u(t_m)\rangle\big|\xrightarrow{K\to\infty}0.$$

由上可知，对于任意 $t\in[-T,T]$和 $\delta>0$，都存在 $m\in\{1,\dots,M\}$，使得 $\|u(t)-u(t_m)\|\le\delta$，因此

$$\limsup_{K\to\infty}\big|\langle u(t)-u_K(t),u(t)\rangle\big|\le\limsup_{K\to\infty}\big|\langle u(t)-u_K(t),u(t_m)\rangle\big|+2\delta\|u(t)\|_{L^2}=2\delta\|u_0\|_{L^2},$$

一致地对于 $t\in[-T,T]$。上述结论对任意 $\delta>0$ 均成立，因此我们可以得出结论： at

$$\sup_{t\in[-T,T]}\big|\langle u_K(t)-u(t),u(t)\rangle\big|\xrightarrow{K\to\infty}0.$$

鉴于估计（35），由此可得L^2中格式所期望的强收敛（34）。

□

参考文献

[1] Alexander G. Abanov、Eldad Bettelheim与Paul Wiegmann，卡洛杰罗–萨瑟兰模型的可积流体力学：双向本杰明–奥诺方程，《物理学杂志A：数学与理论》42（2009年），第13期，135201。[2] Yvonne Alama Bronsard，非线性色散偏微分方程的低正则性与对称时间积分器的统一方法，世界科技出版公司，2025年。[3] Yvonne Alama Bronsard、Xi Chen与Matthieu Dolbeault，借助显式公式得到的若干非局部非线性可积偏微分方程的谱精度全离散格式，《计算数学基础》（2026年）。[4] Paulo Amorim与Mário Figueira，具有 L^2 数据的KdV方程与修正KdV方程有限差分法的收敛，《葡萄牙数学》70（2013年），第1期，23–50。[5] Jaime Angulo Pava与Sevdzhan Hakkaev，周期非线性色散方程的不适定性，《电子微分方程杂志》（2010年），第119号，19。MR2685029[6] Rana Badreddine，论Calogero–Sutherland导数非线性薛定谔方程的整体适定性，纯粹与应用分析6（2024年），第2期，379–414。[7] ，卡洛杰罗–莫泽导数非线性薛定谔方程的零色散极限，《SIAM数学分析期刊》56（2024年），第6期，7228–7249。[8] ，Calogero–Sutherland导数非线性薛定谔方程的行波与有限带隙势，《H. 庞加莱研究所纪事C：非线性分析》42（2025年），第4期，1037–1092。[9] Valeria Banica与Luis Vega，多边形折线在副法向流作用下的演化，《偏微分方程年刊》6 1, 6 2020( ), 第. 。[10] T. Brooke Benjamin，大深度流体中永久波形的内波，《流体力学期刊》29（1967年），第3期，559–592。[11] Elliot Blackstone、Louise Gassot、Patrick Gérard与Peter D. Miller，有理初值下Benjamin–Ono 方程的零色散极限：色散激波的产生，arXiv电子预印本（2024年）。arXiv:2410.17405。[12] ,有理数据的Benjamin–Ono初值问题及其在长时间渐近与散射中的应用，arXiv电子预印本（2024年）。arXiv:2410.14870。[13] Lyonell Boulton、Peter J. Olver、Beatrice Pelloni与David A. Smith，线性积分–微分方程的新重现现象，《应用数学研究》147（2021年），第4期，1209–1239。[14] Xi Chen，散焦卡洛杰罗–莫泽导数非线性薛定谔方程的散射，arXiv电子预印本（2025年）。arXiv:2511.06432。[15] Russ E. Davis与Andreas Acrivos，深水中的孤立内波，《流体力学期刊》29（1967年），第3期，593–607。[16] Rajib Dutta、Helge Holden、Ujjwal Koley与Nils Henrik Risebro，Benjamin–Ono 方程有限差分格式的收敛，《数值数学》134（2016年），第2期，249–274（英文）。[17] Rajib Dutta、Ujjwal Koley与Nils Henrik Risebro，科尔特韦格–德弗里斯方程高阶格式的收敛，《SIAM数值分析期刊》53（2015年），第4期，1963–1983。[18] Rajib Dutta与Nils Henrik Risebro，关于KdV 方程克兰克–尼科尔森格式收敛性的一个注记，《国际数值分析与建模杂志》13（2016年），第5期，567–575。[19] Daniel Eceizabarrena，作为自由薛定谔方程基本解的塔尔博特效应，《葡萄牙数学》78（2021年），第2期，233–253。[20] Mehmet Burak Erdoğan与Nikolaos Tzirakis，周期KdV演化的全局光滑化，《国际数学研究通讯》IMRN 20（2013年），4589–4614。[21] ，环面上三次非线性薛定谔方程的塔尔博特效应，《数学研究快报》20（2014年），第6期，1081–1090。[22] Sondre Tesdal Galtung，Benjamin–Ono 方程的一个收敛的克兰克–尼科尔森伽辽金格式，《离散与连续动力系统》38（2018年），第3期，1243–1268（英文）。[23] Louise Gassot，环面上Benjamin–Ono 方程零色散极限中的Lax特征值，《SIAM数学分析期刊》55（2023年），第5期，5782–5822。

[24] Louise Gassot、Patrick Gérard 和 Peter D. Miller，《Benjamin–Ono 方程孤子分解猜想的证明》，arXiv 预印本（2026）。arXiv:2601.10488。[25] Patrick Gérard 和 Sandrine Grellier，《三次 Szegő 方程的显式公式》，美国数学会会刊 367（2015），第 4 期，2979–2995。[26] Patrick Gérard、Thomas Kappeler 和 Petar Topalov，《Benjamin–Ono 方程在 $H^s(\mathbb{T},\mathbb{R})$ 中的尖锐适定性结果及其解的定性性质》，数学学报 231（2023），第 1 期，31–88。[27] ，《环面上 Benjamin–Ono 方程的平滑性质与 Tao规范变换》，高等师范学校科学年刊 (4) 57（2024），第 4 期，1233–1270。[28] Patrick Gérard，《Benjamin–Ono 方程的显式公式》，突尼斯数学杂志 5（2023），第 3 期，~~593–6~~03。[29] ，《直线上的 Benjamin–Ono 方程：显式公式与小色散极限》，《偏微分方程：波、非线性与非局部性》，2025年，第 73–91 页。[30] Patrick Gérard 和 Alexander Pushnitski，《无界 Hankel 算子与三次 Szegő 方程的流》，数学发明 232（2023），第 3 期，995–1026。[31] James Hogan 和 Matthew Kowalski，《连续统 Calogero–Moser 模型的湍流阈值》，《纯粹与应用分析》6（2024），第 4 期，941–954。[32] Helge Holden、Ujjwal Koley 和 Nils Henrik Risebro，《科尔特韦格–德弗里斯方程全离散有限差分格式的收敛性》，IMA 数值分析杂志 35（2015），第 3 期，1047–1077。[33] Mihaela Ifrim 和 Daniel Tataru，《Benjamin–Ono 方程小初值解的适定性与色散衰减》，高等师范学校科学年刊 (4) 52（2019），第 2 期，297–335。[34] Alexandru D. Ionescu 和 Carlos E. Kenig，《Benjamin–Ono 方程在低正则性空间中的整体适定性》，美国数学会杂志 20（2007），第 3 期，753–798。[35] Bradley Isom、Dionyssios Mantzavinos、Seungly Oh 和 Atanas Stefanov，《圆上 Benjamin–Ono 方程的多项式界与非线性平滑》，微分方程杂志 297（2021），25–46。[36] Rowan Killip、Thierry Laurens 和 Monica Vişan，《Benjamin–Ono 方程的尖锐适定性》，数学发明 236（2024），第 3 期，999–1054。[37] ，《直线上连续统 Calogero–Moser 模型的尺度临界适定性》，美国数学会通讯 5（2025），第 07 期，284–320。[38] Kihyun Kim、Taegyu Kim 和 Soonsik Kwon，《Calogero–Moser 导数非线性薛定谔方程光滑手征有限时爆破解的构造》，arXiv 预印本（2024）。arXiv:2404.09603。[39] Christian Klein 和 Jean-Claude Saut，《非线性色散方程》，第 209 卷，Springer，2021年。[40] Luc Molinet，《周期 Benjamin–Ono 方程在 L^2 中的整体适定性》，美国数学杂志 130（2008），第 3 期，635–683。[41] Luc Molinet 和 Didier Pilod，《Benjamin–Ono 方程在 L^2 中的柯西问题再探》，偏微分方程分析 5（2012），第 2 期，365–395。[42] Ola Mæhlen，《圆上 Benjamin–Ono 方程的零色散极限》，arXiv 预印本（2025）。arXiv:2509.14134。[43] Hiroaki Ono，《层化流体中的代数孤立波》，日本物理学会杂志 39（1975），第 4 期，1082–1091。[44] Martin Oen Paulsen，《将 Benjamin–Ono 方程确立为内波模型》，《偏微分方程年刊》10（2024），第 2 期，25。[45] Dmitry Pelinovsky，《有限水深流体内波的中间型非线性薛定谔方程》，物理快报 A 197（1995），第 5–6 期，401–406。[46] M. Reed 和 B. Simon，《现代数理物理方法。I. 泛函分析》，Academic Press，纽约–伦敦，1972年。[47] ，《现代数理物理方法。II. 傅里叶分析、自伴性》，Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich，出版社],纽约–伦敦，1975年。[48] Frédéric Rousset 和 Katharina Schratz，《KdV 时间离散化在低正则性下的收敛误差估计》，纯粹与应用分析 4（2022），第 1 期，127–152（英文）。

[49] Ruoci Sun，多孤子流形上 *Benjamin–Ono* 方程的完全可积性，《Communications in Mathematical Physics》**383**（2021），第 2 期，1051–1092。[50] H. F. Talbot，《与光学科学相关的事实，第四篇》，《Philosophical Magazine》**9**（1836年），401–407。[51] Blaine Talbut，《低正则性下的 *Benjamin–Ono*：一种可积性方法》，ProQuest LLC，美国密歇根州安娜堡，2021年。博士论文[52] 陶哲轩，《*Benjamin–Ono* 方程在 H^1（实数直线）中的整体适定性》，《Journal of Hyperbolic Differential Equations》**1**（2004年），第 1 期，27–49。