arXiv:2602.19056v1 [math.LO] 22 Feb 2026

Affine logic with the integration operator

Seyed-Mohammad Bagheri

纯数学系，数学科学学院，塔比阿特莫达勒斯大学，德黑兰，伊朗，
邮政信箱 14115-134，电子邮箱：bagheri@modares.ac.ir

摘要

仿射连续逻辑被扩展为仿射积分逻辑。通过超均值构造和亨金方法证明了仿射紧致性定理。此外，还给出了一个证明系统和一个完备性定理。在这一框架下，适当变体的凯斯勒–谢拉同构定理成立。这使我们能够借助扩展逻辑中的初等嵌入概念，刻画仿射稳定理论中的非分叉扩张。

Keywords：仿射逻辑，积分，紧致性，完备性
AMS subject classification: 03C20, 03C66, 03C80

1 引言

逻辑与概率之间的相互作用是一个引人入胜的课题，已有多位作者采用不同的技术对其进行研究。在这方面，一种相关的方法是积分逻辑，最初由 Hoover 和 Keisler 提出 [11, 12]。其主要目标是将积分算子加入一阶逻辑（另见 [6]）。本文则将积分算子加入连续逻辑。文献 [5],对这一做法进行了初步研究，其中将 σ可加积分理论与连续逻辑结合起来。在这方面，一个技术难题是，σ可加性与诸如 Henkin 构造等有限逻辑论证并不十分契合。另一方面，使用超积方法则会带来额外的集合论要求。在本文中，我们以有限可加测度取代 σ可加测度，并更加专注于连续逻辑的仿射部分[3]。完整的连续情形也有相应的论证。此时 ZFC 已足够，且可利用平均值性质进行 Heknin 构造。σ可加积分理论的重要性质包括富比尼性质和法图引理。前者很容易用仿射公理表述，后者则仍是一个无穷性质。相比之下，这种放宽的一个优点是，通过里斯表示定理，仿射理论中的类型也得以纳入讨论。更确切地说，如果 $p(x)$ 是连续结构 M上的一个类型 M，那么这一对（p）可视为一个概率度量结构。当然，连续积分逻辑的首要目标，是构建一个逻辑框架，用以表述和研究来自遍历理论或数学其他领域的度量测度结构的性质。

总而言之，连续结构假定配备了定义在其博雷尔代数上的有限可加概率测度。不过必须注意，较小的

博雷尔代数子代数通常已足以满足这一目的。这是因为我们只需对连续公式进行积分。假定存在这类额外信息并无妨，也不会影响预期的语义。因为定义在这类子代数上的每个有限可加概率测度总能扩展到整个博雷尔代数，且不改变积分。这样，我们就能对这类概率结构进行统一讨论。当然，这一假设的一个缺点是，配备不同测度的结构在模型论意义上可能同构，因而会被视为相同。

设 $\mathcal{A}$ 是 X 的子集构成的布尔代数。$\mathcal{A}$ 上的概率测度是指任意有限可加函数 $\mu\colon \mathcal{A} \to [0,1]$，满足 $\mu(X) = 1$。我们通常用“电荷”一词表示概率测度。如果 $\mathcal{A}$ 是 X 的幂集，则称其为超电荷。设 $(X, \mathcal{A}, \mu)$ 是一个电荷空间，$\mathcal{H}(\mathbb{R})$ 是由半区间 $[r,s)$ 生成的 $\mathbb{R}$ 的子集构成的布尔代数。若对于每个 $A \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$，都有 $f^{-1}(A) \in \mathcal{A}$，则称函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$ 是 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}(\mathbb{R}))$- 可测的。有界的 $(\mathcal{A}, \mathcal{H}(\mathbb{R}))$- 可测函数总是可积的（[2] 定理 11.8）。如果将 $\mathcal{H}(\mathbb{R})$ 替换为由有理半区间生成的布尔代数 $\mathcal{H}_{\mathbb{Q}}(\mathbb{R})$，即区间 $[r,s)$，其中 $r, s \in \mathbb{Q}$，这一事实仍然成立。

设 M 为一个度量空间。$\mathcal{A}(M)$ 表示 M 的博雷尔代数，即由 M 的开子集生成的布尔代数，而 $\mathcal{B}(M)$ 表示 M 的博雷尔σ代数。在 $\mathcal{A}(M)$ 上定义的电荷称为博雷尔电荷。若博雷尔电荷 μ 同时是内正则和外正则的，则称其为正则的，即对于每个 $A \in \mathcal{A}(M)$

$$\mu(A) = \sup\{\mu(F) |\ A \supseteq F \in \mathcal{A}(M),\ F \text{ is closed}\}$$

$$\mu(A) = \inf\{\mu(G) |\ A \subseteq G \in \mathcal{A}(M),\ G \text{ is open}\}.$$

事实上，由于 $\mu(M)$ 是有限的，这些性质中的任意一个都蕴含其他性质。若 μ 是 M 上的博雷尔电荷，则 M 上的每个有界连续实值函数都是 μ-可积的。

在本文中，我们将积分用于两种完全不同的目的。首先，若 M 是一个度量结构，$\mathcal{A}$ 是其博雷尔代数，则我们对连续公式进行积分，以生成新的连续公式。其次，若 $X = I$ 是一个指标集，$\mathcal{A}$ 是其幂集，则我们对函数 $f\colon I \to \mathbb{R}$ 进行积分，以构造超均值。在第二种情况下，我们将使用记号 $\int_I$。

2 句法与语义

伪度量空间记作 X, M, N 等。若不会引起混淆，它们的度量以及相应的商度量都用符号 ρ 表示。若 M 是一个伪度量空间，我们在 M^n 上定义伪度量 $\sum_i \rho(a_i, b_i)$。函数 $f\colon M \to N$ 是 λ- 利普希茨的，当且仅当

$$\rho(f(x), f(y)) \leqslant \lambda\rho(x, y) \qquad \forall x, y \in M.$$

我们使用 $\mathbb{R}$ 作为真值空间，并将 $\mathbf{1}$、加法 $+$ 和标量乘法 $r\cdot$（对于任意 $r \in \mathbb{R}$）作为仿射逻辑中的联结词。此外，下确界、上确界、$\int$ 是量词，并且

x、y、z、.....是个体变量列表。在完整的连续逻辑（CL）中，还会使用联结词 $\wedge$ 和 $\vee$。这一组符号生成连续积分逻辑。

Lipschitz 语言是一阶语言 $L = \{F, ...;\ R,\ .....;\ c,\ ...\}$，其中每个函数符号 F 都指定一个 Lipschitz 常数 $\lambda_F \geqslant 0$，每个关系符号 R 都指定一个 Lipschitz 常数 $\lambda_R \geqslant 0$。我们还为度量另设一个符号 ρ（其中 $\lambda_\rho = 1$），按照一阶逻辑中的惯例，将其列入逻辑符号清单。带测度语言由 Lipschitz 语言 L 扩充而成，其中加入了概率电荷符号 μ，并再次将其列入逻辑符号清单。通常，我们可以允许有多个这样的符号，它们可解释为预期结构 M 上的博雷尔电荷。我们甚至可以允许 n 维符号，它们可解释为 M^n 上的博雷尔电荷。接下来的论述也可类似进行。本文中，我们只使用一个一元电荷符号 μ。有时，为了强调该语言带有测度，我们将其记为 L_μ。

定义 2.1。L 中的预结构是一个伪度量空间（M, ρ），并配备：- 对每个 $c \in L$，一个元素 $c^M \in M$- 对每个 n元函数符号 F，一个 λ_F-利普希茨函数 F^M：$M^n \to M$- 对于 n元关系符号 R（包括 ρ），一个 λ_R-利普希茨函数 R^M：$M^n \to [0,1]$- 在 M上的一个正则博雷尔概率电荷 μ。

众所周知，如果 M 是一个紧豪斯多夫空间，则其上的每个正则博雷尔电荷M 都唯一延拓为 M 上的一个正则博雷尔测度（参见 [2] §14）。因此，对于紧预结构，可以假定 μ 是一个正则博雷尔测度。

L-项及其利普希茨常数归纳定义如下：

- 每个 $c \in L$ 和变量 x 都是项，其利普希茨常数分别为 0 和 1。- 如果 F 是一个 n元函数符号，且 $t_1, ..., t_n$ 是项，那么 $t = F(t_1, ..., t_n)$ 是一个项，其利普希茨常数为 $\lambda_t = \lambda_F \cdot \sum_i \lambda_{t_i}$。

可以验证，对任意 M 和项 $t(\bar{x})$，t^M：$M^n \to M$ 是 λ_t-利普希茨的。仿射积分逻辑中的 L-公式（AL$\int$-公式）及其 Lipschitz 常数和界按如下方式归纳定义：

- 1 是一个原子公式，其 Lipschitz 常数为 0，界为 1。
- 若 R 是一个 n 元关系符号（包括带有 $n = 2$ 的 ρ），且 $t_1, ..., t_n$ 是项，则 $R(t_1, ..., t_n)$ 是一个原子公式，其 Lipschitz 常数为 $\lambda_R \cdot \sum \lambda_{t_i}$，界为 $\mathsf{b}_R = 1$。

- 若 ϕ、ψ 是公式且 $r \in \mathbb{R}$，则 $\phi + \psi$ 与 $r\phi$ 是公式，其 Lipschitz 常数分别为 $\lambda_\phi + \lambda_\psi$、$|r|\lambda_\phi$，界分别为 $\mathsf{b}_\phi + \mathsf{b}_\psi$、$|r|\mathsf{b}_\phi$。
- 若 ϕ 是一个公式且 x 是一个变元，则下确界$_x\,\phi$、上确界$_x\,\phi$ 和 $\int \phi\ dx$ 是与 ϕ具有相同 Lipschitz 常数和界的公式。

将 AL$\int$ 限制为无积分公式，便得到仿射逻辑 AL [3]。在本文中，公式指 AL$\int$-公式。自由变元的概念按通常方式定义，即把符号上确界、下确界和 $\int$ 视为一元量词。通常记作$\phi(\bar{x})$以表明 $\bar{x}$ 包含 ϕ的自由变量。语句是不含自由变量的公式。

定义 2.2. 设 M 是一个 L-预结构。公式 $\phi(\bar{x})$ 在 $\bar{a} \in M$ 中的值按如下方式归纳定义：

y

- $(R(t_1, ..., t_n))^M(\bar{a}) = R^M(t_1^M(\bar{a}), ..., t_n^M(\bar{a}))$
- $(r\phi + s\psi)^M(\bar{a}) = r\phi^M(\bar{a}) + s\psi^M(\bar{a})$
- $(\inf_y \phi)^M(\bar{a}) = \inf_{b\in M} \phi^M(\bar{a}, b)$ (where $\phi = \phi(\bar{x}, y)$)
- $(\sup_y \phi)^M(\bar{a}) = \sup_{b\in M} \phi^M(\bar{a}, b)$ ...
- $(\int \phi\ dy)^M(\bar{a}) = \int \phi^M(\bar{a}, y)\ d\mu$ ...

容易证明，对于每个 L-预结构 M，$\phi^M(\bar{x})$ 都是 M^n 上的 λ_ϕ-利普希茨函数，并且对所有 $\bar{a}$，$|\phi^M(\bar{a})| \leqslant b_\phi$。以下两个定理对我们的讨论至关重要。

定理 2.3.（坎托罗维奇，[2]Th. 8.32）设 G 是里斯空间 E 的控制向量子空间。设 $\Lambda : G \to \mathbb{R}$ 是一个正线性函数。那么 Λ 可扩张为 E 上的正线性函数。

定理 2.4.（里斯表示定理 *[2],* Th.14.9）设 X 是一个正规豪斯多夫拓扑空间，且 $\Lambda : C_b(X) \to \mathbb{R}$ 是一个正线性泛函。那么存在唯一的有限正则博雷尔负荷 μ，使得 $\mu(X) = \|\Lambda\| = \Lambda(1)$，并且

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \qquad \forall f \in \mathbf{C}_b(X).$$

随后，我们将频繁使用以下推论，以便在结构上找到博雷尔电荷。

推论 2.5. 设 X 是一个度量空间，且 $G \subseteq C_b(X)$ 是一个控制向量子空间。那么，对于每个正线性 $\Lambda : G \to \mathbb{R}$，存在一个正则博雷尔电荷 μ 定义在 X 上，使得 $\mu(X) = \Lambda(1)$，并且

$$\Lambda(f) = \int f d\mu \qquad \forall f \in G.$$

L-结构是一个预结构 (M, ρ, μ)，其中 ρ 是完备度量。每个预结构都能以自然的方式转化为一个 L-结构。我们简要回顾这一论证。设 M 是 L 中的一个预结构，N 是相应的商度量空间。设 $\pi : M \to N$ 是商映射。容易验证

$$\mathcal{A}(N) = \{X \subseteq N |\ \pi^{-1}(X) \in \mathcal{A}(M)\}.$$

函数符号与关系符号在 M 上的解释会在 N上诱导出定义良好的函数和关系。此外，π 通过以下方式在 N 上诱导出博雷尔电荷 ν：

$$\nu(X) = \mu(\pi^{-1}(X)), \qquad X \in \mathcal{A}(N).$$

那么，(N, ν) 是一个 L-预结构，并且

$$\int f \, d\nu = \int f \circ \pi \, d\mu \qquad \forall f \in \mathbf{C}_b(N).$$

现在，我们必须将这个预结构扩展到 N的完备化 $\bar{N}$。显然，每个函数（分别地，关系）符号的解释都会在 N上诱导出唯一且定义良好的函数$\bar{\ }$（分别地，关系）。此外，ν 通过下式在 $\mathbf{C}_b(N)$ 上诱导出一个正线性泛函 Λ：

$$\bar{\Lambda}(\bar{f}) = \int f d\nu$$

其中 f 是 f 在 N上的自然延拓。因此，根据推论 2.5，存在一个正则博雷尔电荷 $\bar{\nu}$ 定义在 $\bar{N}$ 上，使得

$$\int f \, d\nu = \bar{\Lambda}(\bar{f}) = \int \bar{f} \, d\bar{\nu} \qquad \forall f \in \mathbf{C}_b(N). \qquad (*)$$

现在我们可以陈述关于利普希茨预结构完备化的主要结果。

命题 2.6. 对每个 L-预结构 M，都存在一个 L-结构 K 和一个稠密映射$\pi\colon M \to K$，使得对于每个公式 $\phi(\bar{x})$和 a_1，...，$a_k \in M$

$$\phi^M(a_1, ..., a_k) = \phi^K(\pi a_1, ..., \pi a_k).$$

证明。采用上述记号，令 $K = \bar{N}$。通过对 ϕ的复杂度进行归纳法证明该断言。假设积分情形已对 $\phi(x)$证明，现来验证该情形。令 f 为 $\phi^M(x)$在 K 上诱导的映射（通过 $M \xrightarrow{\pi} N \xrightarrow{id} K$）。那么，根据归纳假设，对于所有 $x \in M$，我们有 $f(\pi x) = \phi^M(x) = \phi^K(\pi x)$，从而 $\bar{f} = \phi^K$。因此，根据上面的（$*$）

$$\Big(\int \phi(x) dx \Big)^K = \int \phi^K(x) d\bar{\nu} = \int \bar{f} d\bar{\nu}$$

$$= \int f \, d\nu = \int f \circ \pi \, d\mu = \Big(\int \phi(x) dx \Big)^M.$$

□

例 2.7. 1. 每个配备博雷尔概率测度 μ 的紧致度量空间 (M, ρ)，都是空语言中的带电度量结构。如果 $(M, \cdot)$ 是一个群，且 ρ 左不变，那么 $(M, \rho, \cdot, \mu)$ 是一个带电度量结构。如果 $f\colon M \to M$ 是利普希茨的，那么 (M, ρ, f, μ) 是一个带电度量结构。

2. 设 M 是一个一阶模型。那么，M 的博雷尔代数与 M 的幂集一致，而 M 上的博雷尔电荷 μ 不过是一个超电荷（它必然是正则的）。因此，(M, μ) 是一个带电度量结构。在这方面，一个有趣的例子是配备任意超电荷 μ 的 $(\mathbb{N}, +, \cdot)$。例如，若 $\mathcal{F}$ 是 $\mathbb{N}$ 上的一个超滤子，那么

$$\mu(A) = \lim_{n, \mathcal{F}} \frac{|A \cap n|}{n} \qquad (A \subseteq \mathbb{N})$$

定义了一个扩张自然密度的超电荷。关于配备超滤子的一阶模型的研究，见 [10]，其名称为超滤子逻辑。因此，连续积分逻辑扩张了超滤子逻辑。每个一阶结构（M， a）都可以视为带电度量结构，并且对于每个 $\int \phi^M(x)dx = \phi^M(a)$。更自然地将度量结构 M 视为带电结构的方法，是允许 $0 \leqslant \mu(M) \leqslant 1$。那么， $\mu(M) = 0$ 对应于不带电的情形。

两个 L-结构 M、 N等价，记作 $M \equiv N$，如果对每个语句 σ都有 $\sigma^M = \sigma^N$。映射 f： $M \to N$是嵌入，如果对每个无量词公式 $\phi(\bar{x})$以及 $\bar{a} \in M$，都有 $\phi^M(\bar{a}) = \phi^N(f(\bar{a}))$。若对每个公式 $\phi(\bar{x})$以及 $\bar{a} \in M$，都有 $\phi^M(\bar{a}) = \phi^N(f(\bar{a}))$，则它是初等嵌入。同构是满射的初等嵌入。因此，同构未必是保测的。这是因为我们通常有一组与语义无关的可测子集。同时，每个满射的保测嵌入都是同构。若 $f = id$ 是嵌入（相应地，初等嵌入），我们称 M 是 N 的子结构（相应地，初等子结构），并记作 $M \subseteq N$ （相应地 $M \preccurlyeq N$）。同样，要成为子结构，我们并不要求 M 与 N的电荷之间存在任何有机关联。不过，用如下定义的子空间电荷来诱导$(N, \mathcal{B}, \mu)$的每个纯度量子结构 M是自然的

$$\mathcal{A} = \{Y \cap M : \ Y \in \mathcal{B}\}$$
$$\nu_M(X) = \inf\{\nu(Y) : \ X \subseteq Y \in \mathcal{B}\} \qquad \text{for any } X \in \mathcal{A}.$$

那么， $\nu_M \leqslant 1$。这也是我们通常必须允许 $\mu(N) \leqslant 1$ 的另一个原因。在这种情况下，计算中通常会出现一个常数系数。以下引理表明，对 μ 的正则性假设并非严格限制。

引理 2.8. 设 M 是一个度量空间，并配备了定义在 $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}(M)$ 上的电荷 μ 。设 $G \subseteq \mathsf{C}_b$ 是由 μ-可积函数构成的向量空间。那么，存在一个定义在 M 上的正则博雷尔电荷 ν，使得对所有 $f \in G$，$\int f d\mu = \int f d\nu$。

证明。 我们还可以假设 G包含常值映射。令 $\Lambda_0(f) = \int f d\mu$对每个$f \in G$。根据推论 2.5， Λ 可由定义在 M 上的正则博雷尔电荷 ν 表示。因此我们有 $\int f d\mu = \Lambda(f) = \int f d\nu$对每个 $f \in G$。 □

特别是，对于两个不同的博雷尔电荷 μ和 ν，$(M, \mu) \simeq (M, \nu)$ 通过恒等映射成立，这完全有可能。

命题 2.9. 设 $(M_i)_{i<\kappa}$ 是一个由 L-结构构成的初等链。那么，在 $M = \bigcup_i M_i$ 的完备化 M 上存在一个 L-结构，使得对每个 j，都有 $M_j \preccurlyeq M$。

证明。 M 的度量结构按自然方式定义，例如 $R^M = \cup_i R^{M_i}$。设$\phi(\bar{x}, y)$ 是一个公式，且 $\bar{a} \in M_i$。那么，当 $i \leqslant j$ 时， $\phi^{M_j}(\bar{a}, y)$ 扩展了 $\phi^{M_i}(\bar{a}, y)$。设 G 为所有满足 $\bar{a} \in \cup_i M_i$ 的函数 $\cup_i \phi^{M_i}(\bar{a}, y)$ 构成的族。这是 $\mathsf{C}_b(M)$ 的一个主化子空间。若 $\bar{a} \in M_j$，则置

$$\Lambda(\cup_i \phi^{M_i}(\bar{a}, y)) = \int \phi^{M_j}(\bar{a}, y) \, d\mu_j.$$

根据假设， Λ_0 是定义在 G上的良定义正线性泛函。应用推论2.5 可找到一个正则博雷尔电荷 μ，定义在 $\mathcal{A}(M$上，表示 Λ。因此，对于每个公式 $\phi(\bar{x}, y)$ 以及 $\bar{a} \in M_j$，有

$$\int \phi^{M_j}(\bar{a}, y)\ d\mu_j = \int \cup_i \phi^{M_i}(\bar{a}, y)\ d\mu.$$

现在我们可以证明，对每个 i， $M_i \preccurlyeq M$。为此，我们对 ϕ 的复杂度使用归纳法，证明对每个 i，只要 $\bar{a} \in M_i$，就有 $\phi^{M_i}(\bar{a}) = \phi^M(\bar{a})$。我们来检验积分情形。假设结论对 $\phi(\bar{x}, y)$ 成立。那么，若 $\bar{a} \in M_j$，

$$\int \phi^M(\bar{a}, x)d\mu = \int (\cup_i \phi^{M_i}(\bar{a}, x))d\mu = \int \phi^{M_j}(\bar{a}, x)d\mu_j.$$

现在，使用命题2.6 □

设 $(N, \mathcal{B}, \nu)$ 是一个结构，且 M 是 N 的度量子结构。设 ν_M 为上文定义的子空间测度。如果每个测度为正的 $Y \in \mathcal{B}$ 都与 M 有非空交集，那么对于每个这样的 Y， $\nu(Y) = \nu_M(Y \cap M)$。此外，在这种情形下，若 $f:\ N \to \mathbb{R}$ 有界且是 $(\mathcal{B}, \mathcal{H}(\mathbb{R}))$-可测的，那么

$$\int f d\nu = \int f|_M\ d\nu_M.$$

命题 2.10.（向下）设 $|L| + \aleph_0 \leqslant \kappa$。假设 (N, ν) 是一个 L-结构，且 $X \subseteq N$ 的密度特征为 $\leqslant \kappa$。那么，存在 $X \subseteq M \preccurlyeq N$，使得 $\mathrm{dc}(M) \leqslant \kappa$。

证明。我们构造链

$$M_0 \subseteq M_1 \subseteq \ \cdots \ \subseteq N$$

$$\mathcal{C}_0 \subseteq \mathcal{C}_1 \subseteq \ \cdots \ \subseteq \mathcal{A}(N)$$

不完备度量子结构和布尔子代数，使得 $|M_k| \leqslant \kappa$ and$|\mathcal{C}_k| \leqslant \kappa$。不失一般性，我们可以假设 $X \subseteq M_0$。另外，设 $\mathcal{C}_0 = \{\emptyset, N\}$。假设已构造 M_k and $\mathcal{C}_k$。我们按如下方式构造 M_{k+1} and $\mathcal{C}_{k+1}$。对于每个正测度的 $X \in \mathcal{C}_k$，取 $a_X \in N$。此外，对于每个 $n \geqslant 1$and $f(x) = \phi^N(\bar{a}, x)$，其中 ϕ是有理公式，且 $\bar{a} \in M_k$，取 $b_{nf} \in N$，使得

$$\sup_x f(x) - \frac{1}{n} \leqslant f(b_{nf}).$$

设 M_{k+1} 为由 M_k 以及如此定义的点 a_X、 $b_{f,n}$所生成的 N 的度量预结构。此外，设 $\mathcal{C}_{k+1} \subseteq \mathcal{A}(N)$为由形如 $f^{-1}([0, \infty))$的集合所生成的布尔子代数，其中 f如上所述。令

$$M = \overline{\bigcup_k M_k}, \qquad \mathcal{C} = \bigcup_k \mathcal{C}_k.$$

注意，每一个具有正测度的 $A \in \mathcal{C}$ 与 M的交集非空。设 μ 为$(\nu|_{\mathcal{C}})_M$到 M上博雷尔电荷的任一扩张。则(M, μ)是 L中的一个结构。我们证明，对每一个 L-公式 ϕ以及 $\bar{a} \in M$，有 $\phi^M(\bar{a}) = \phi^N(\bar{a})$。这通过对 ϕ的复杂度运用归纳法来完成。我们验证积分情形。假设该断言对 $\phi(y)$成立。则对每一个 $r < s$，集合$(\phi^M)^{-1}([r, s))$与$(\phi^N)^{-1}([r, s))$具有相同的测度。因此，根据积分的定义，我们有 $\int \phi^M(y)d\mu = \int \phi^N(y)d\nu$。 □

命题 2.11。（塔斯基-沃特检验）假设 $M \subseteq N$，并且对于每个公式 $\phi(\bar{a}, y)$，其中 $\bar{a} \in M$，都有：(i) $\inf\{\phi^N(\bar{a}, c) \mid c \in N\} = \inf\{\phi^N(\bar{a}, b) \mid b \in M\}$；(ii) 对任意有理数 r_i、s_i 和 $\bar{a} \in M$，若 $\bigcap_{i=1}^n \phi_i^N(\bar{a}, y)^{-1}([r_i, s_i))$ 非空，则它与 M 的交集非空。那么，$M \preccurlyeq N$。

证明。我们对 $\phi(\bar{x})$ 的复杂度作归纳法，证明对于每个 $\bar{a} \in M$, $\phi^M(\bar{a}) = \phi^N(\bar{a})$。下面验证积分情形。假设结论对 $\psi(\bar{x}, y)$ 成立。令 $\mathcal{B}$ 为由形如 $\phi^N(\bar{a}, y)^{-1}([r_i, s_i))$ 的集合生成的布尔代数，其中 ϕ 是公式且 $\bar{a} \in N$。条件 (ii) 意味着，任何测度为正的 $Y \in \mathcal{B}$ 都与 M 有非空交集。因此，对于任意 $\bar{a}$, $\int \psi^M(\bar{a}, y)dy = \int \psi^N(\bar{a}, y)dy$。 □

3 仿射紧致性

设 L 是一种语言。条件是形如 $\phi \leqslant \psi$ 的表达式，其中 ϕ、ψ 是公式。条件 $\phi \leqslant \psi$（其中 ϕ、ψ 是语句）可满足，当且仅当存在一个结构 M 使得 $\phi^M \leqslant \psi^M$。任何此类条件的集合都称为理论。理论 T 可满足，当且仅当存在一个结构满足 T 中的每个条件。概念 $T \vDash \phi \leqslant \psi$ 的定义与通常相同。下面给出一些简单的例子。

例 3.1. 1. 设 $L = \{+, \cdot, 0, 1\}$ 和 μ 是自然密度在 $\mathbb{N}$ 上到超电荷的扩张。那么，条件

$$\int (1 - \inf_{yz} \rho(x, y^2 z))dx = \frac{6}{\pi^2}$$

表示无平方因子数集合的密度为 $\frac{6}{\pi^2}$。类似地，素数的密度为零这一点也可以表达出来。

2. 设 $L = \{\wedge, \vee, 0, 1\}$ 和 $M = \{0, 1\}$ 配备离散度量和电荷

$$\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}.$$

M 的度量理论消去了上确界-下确界量词，并且每个度量公式 $\phi(\bar{x}, y)$ 都等价于公式 $\rho(t(\bar{x}) y)$ 的线性组合，其中 $t(\bar{x})$ 是项。因此，由于

$$\int \rho(x, y)dy = \frac{1}{2},$$

M 的积分理论消去了量词 $\int$。我们得出结论： M 的 AL$\int$ 理论与 M 的 AL 理论具有相同的可定义关系。

3. 考虑赋有欧几里得度量和勒贝格测度的单位区间 $[0,1]$ 。那么 $\int \rho(x,y)dy = x^2 - x + \frac{1}{2}$。因此， $x(1-x)$ 在此处是一个可定义关系。
4. 条件 $\inf_x \int \rho(x,y)dy = 0$ 表示 μ 是一个滤子，其中包含某个 a 周围的开球族。为此，对每个 n，取满足 $\int \rho(a_n,y)dy < \frac{1}{2^{n+1}}$的 a_n。那么，

$$\mu(B(a_n, \frac{1}{2^n})) \geqslant 1 - \frac{1}{2^n}.$$

因此，我们必然有 $d(a_n, a_{n+1}) < \frac{1}{2^{n-1}}$。如果 a_n 收敛到 a，那么 a 的每个开邻域的电荷都是 1。

若理论 T 满足以下条件，则称其为仿射可满足：对于 T 中每组满足 $i=1$ 的条件 $\phi_i \leqslant \psi_i$，..., k，以及每个 $r_1, ..., r_k \geqslant 0$，条件 $\sum_i r_i\phi_i \leqslant \sum_i r_i\psi_i$ 都是可满足的。我们通过超平均和亨金方法证明仿射紧致性。

超均值构造
设 I 为一个非空指标集， $\wp$ 为 I上的一个超电荷。对每个 $i \in I$，设(M_i, ρ_i, μ_i)为一个 L-结构。对 a、$b \in \prod_{i\in I} M_i$ ，令

$$\rho(a,b) = \int_I \rho_i(a_i, b_i)\ d\wp.$$

回顾， $\int_I$ 表示关于 $\wp$的积分， $\int$ 表示关于 μ的积分。显然， ρ 是一个伪度量，且 $\rho(a, b) = 0$ 是一个等价关系。我们将所得商空间记为$M = \prod_\wp M_i$ ，其上的诱导度量仍记为 ρ。此外，(a_i)的等价类记为 $[a_i]$。如下在 M 上定义一个 L-预结构。对每个常元符号 c、n元函数符号 F 以及 n元关系符号 R ，令

$$c^M = [c^{M_i}]$$
$$F^M([a_i^1], ..., [a_i^n]) = [F^{M_i}(a_i^1, ..., a)i^n)]$$
$$R^M([a_i^1], ..., [a_i^n]) = \int_I R^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n)\ d\wp.$$

于是， M 是 L中的一个（不完备的）度量结构。现在，我们在 M上定义一个博雷尔电荷。假设 $f_i : M_i \to \mathbb{R}$ 是 λ-利普希茨的，且对每个 $i \in I$有 $\|f_i\|_\infty \leqslant \mathsf{b}$。则函数

$$f([x_i]) = \int_I f_i(x_i)\ d\wp$$

是定义良好的 λ-利普希茨函数，定义在 M 且 $\|f\|_\infty \leqslant \mathsf{b}$ 上。将此函数记为 $[f_i]$。所有形如 $[f_i]$ （其中 λ 和 b 任取）的函数构成 $\mathsf{C}_b(M)$ 的一个主导线性子空间 G 。特别地，

$$r[f_i] + s[g_i] = [rf_i + sg_i].$$

定义泛函 Λ，令其对每个 $[f_i] \in G$ 都满足

$$\Lambda([f_i]) = \int_I \int f_i d\mu_i d\wp.$$

我们证明 Λ 是良定义的。等价地，若 $[f_i] = 0$，则 $\int_I \int f_i d\mu_i d\wp = 0$。为此，只需证明 Λ 是正的，即

$$\left[\forall(x_i) \quad 0 \leqslant \int_I f_i(x_i) d\wp\right] \quad \Longrightarrow \quad 0 \leqslant \int_I \int f_i d\mu_i d\wp.$$

假设 $r_i =$ 下确界$_x\, f_i(x)$。给定 $\epsilon > 0$，取 $x_i \in M_i$ 使得 $f_i(x_i) \leqslant r_i + \epsilon$。于是

$$0 \leqslant \int_I f_i(x_i) d\wp \leqslant \int_I r_i d\wp + \epsilon.$$

这表明 $0 \leqslant \int_I r_i d\wp$。现在，由于对任意 $x_i \in M_i$，均有 $r_i \leqslant f_i(x_i)$，我们得出，对每个 i，

$$r_i \leqslant \int f_i d\mu_i$$

从而

$$0 \leqslant \int_I \int f_i d\mu_i d\wp.$$

Λ 的线性显然成立。

根据推论2.5，我们得到一个正则博雷尔电荷 μ 定义在 $\mathcal{A}(M)$上，使得对每个 $f = [f_i]$

$$\int f \; d\mu = \Lambda(f) = \int_I \int f_i d\mu_i d\wp.$$

总之，写作 $x = [x_i]$，我们有

$$\int \int_I f_i(x_i) d\wp \; d\mu = \int_I \int f_i(x_i) d\mu_i d\wp. \qquad (\dagger)$$

定理 3.2。（超平均）对于每个 AL$\int$-公式 $\phi(x_1, ...x_n)$ 和 $[a_i^1], ..., [a_i^n]$，

$$\phi^M([a_i^1], ..., [a_i^n]) = \int_I \phi^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n) \; d\wp.$$

证明。我们通过对公式复杂度作归纳法来证明该断言。原子情形和联结词情形显然。假设该断言对 $\psi(\bar{x}, y)$ 和$\phi = \sup_y \psi(\bar{x}, y)$ 已得证明。我们假设 $|\bar{x}| = 0$。给定 $\epsilon > 0$，取 b_i 使得 $\phi^{M_i} - \epsilon \leqslant \psi^{M_i}(b_i)$。于是

$$\int_I \phi^{M_i} d\wp - \epsilon \leqslant \int_I \psi^{M_i}(b_i) d\wp = \psi^M(b) \leqslant \phi^M.$$

反过来，给定 $\epsilon > 0$，取 b 使得 $\phi^M - \epsilon \leqslant \psi^M(b)$。于是

$$\phi^M - \epsilon \leqslant \psi^M(b) = \int_I \psi^{M_i}(b_i) d\wp \leqslant \int_I \phi^{M_i} d\wp.$$

我们得出 $\phi^M = \int_I \phi^{M_i} d_\wp$。类似地，假设已证明 $\psi(y)$，我们证明关于 $\phi = \int \psi(y)dy$ 的结论。根据归纳假设，对于每个 $y = [y_i] \in M$

$$\psi^M(y) = \int_I \psi^{M_i}(y_i) d_\wp = [\psi^{M_i}]([y_i]).$$

因此，根据等式（†），

$$\phi^M = \int \psi^M(y)\ d\mu = \int \int_I \psi^{M_i}(y_i) d_\wp\ d\mu$$
$$= \int_I \int \psi^{M_i}(y_i) d\mu_i\ d_\wp = \int_I \phi^{M_i} d_\wp.$$

□

备注 3.3. 若 $\mathcal{F}$ 是超滤子，则可用类似的方法证明，对每个 CL∫-公式$\phi(\bar{x})$，都有

$$\phi^M([a_i^1], ..., [a_i^n]) = \lim_{i,\mathcal{F}} \phi^{M_i}(a_i^1, ..., a_i^n).$$

如果对每个 i 都有 $M_i = N$，则 $N^\wp = \prod_\wp M_i$ 是 N 的幂均值，记作 N^μ。

推论 3.4. 对角映射 $a \mapsto [a]$ 是从 N 到 $N^\wp$ 的初等嵌入。

与 AL 情形一样，有

定理 3.5.（仿射紧致性）每个仿射可满足理论 Σ 都是可满足的。

证明。我们不妨假设 Σ 是极大的。对每个 σ，令

$$q(\sigma) = \inf\{r : \sigma \leqslant r \in \Sigma\}.$$

于是， p 是全的且次线性的，即

$$q(\sigma + \eta) \leqslant q(\sigma) + p(\eta), \qquad q(r\sigma) = rq(\sigma) \quad (r \geqslant 0).$$

令 T_0 为 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{D}(L)$（公式的赋范向量空间）上的恒等映射。于是，$T_0 \leqslant q$ 在 $\mathbb{R}$ 上成立，并且根据 Hahn-Banach 延拓定理（[2], 定理 8.30）， T_0 可延拓为线性映射 $T\colon \mathbb{D}(L), \to \mathbb{R}$ 使得对每个 $T(\sigma)$, $\leqslant q(\sigma$。注意， σ是正的。 T

令 $\{M_i\}_{i\in I}$ 为一个集合，其中每个等价类都包含该关系$M \equiv N$的一个模型。我们在 I 上赋予离散拓扑。因此，若将 $\sigma \in \mathbb{D}(L)$ 与映射 $i \mapsto \sigma^{M_i}$ 等同，我们可以写作 $\mathbb{R} \subseteq \mathbb{D}(L) \subseteq \mathsf{C}_b(I)$。显然， $\mathbb{D}(L)$ 支配 $\mathsf{C}_b(I)$。因此，根据推论 KR，存在一个（极大）电荷 μ，定义在 I 上，使得对每个 σ

$$T(\sigma) = \int_I \sigma^{M_i} d\mu.$$

设 $N = \prod_\mu M_i$。那么，对于每个 σ

$$\sigma^N = \int_I \sigma^{M_i} d\mu = T(\sigma) \leqslant p(\sigma).$$

Fi最后，如果 $\sigma \leqslant \eta \in \Sigma$，那么 $\sigma^N - \eta^N \leqslant q(0) = 0$，因此 N 是 Σ 的模型 . □

如果存在一个理论 T 使得，那么一类 $\mathcal{K}$ 的 L-结构称为初等类

$$\mathcal{K} = \{M : M \vDash T\}.$$

以下命题的证明与仿射逻辑中的证明相同。

命题 3.6。（公理化）类 $\mathcal{K}$ 是初等的，当且仅当它在超均值构造和仿射等价下封闭。

命题 3.7。若 $|L| + \aleph_0 \leqslant \kappa$，则每个拥有基数至少为 2 的模型的理论，都有一个密度特征为 κ 的模型。

若 M 是一阶的，则对每个 a,

$$\mu(a) = \int (1 - \rho(x, a))dx.$$

因此，若 $\mathcal{F}$ 是超滤子，则 a 在 $M^{\mathcal{F}}$ 中的测度与在 M 中相同。然而，若将 $\mathcal{F}$ 替换为任意超电荷，结论便不成立。例如，令 $M = \{0, 1\}$，其中 $\mu(0) = \mu(1) = \frac{1}{2}$，并设 $N = \frac{1}{2}M + \frac{1}{2}M$。那么， M、 N 满足条件 $\int \rho(x, y)dy = \frac{1}{2}$。对每个 $a \in N$ 计算该积分，可得对每个 $a \in N$， $\mu(a) = \frac{1}{4}$。

Henkin 构造
Henkin 构造可以适用于积分逻辑。除了见证性质外，我们还需要平均值性质，它与仿射逻辑中的论证十分契合。

引理 3.8. 假设 $T, 0 \leqslant \sigma$ 和 $T, \sigma \leqslant 0$ 都是仿射可满足的。那么， $T, \sigma = 0$ 是仿射可满足的。

证明。我们不妨进一步假设 T 是仿射闭合的。假设结论不成立。那么，对于某个 $0 \leqslant \eta \in T$ 和 $r, s \geqslant 0$，条件 $r\sigma \leqslant s\sigma + \eta$ 是不可满足的。因此，存在某个 $\epsilon > 0$，使得每个模型都满足 $(s - r)\sigma + \eta \leqslant -\epsilon$。假设 $r \leqslant s$。那么，每个模型都满足 $(s - r)\sigma + \eta \leqslant -\epsilon$。这就产生了矛盾。情形 $s \leqslant r$ 类似地也会导致矛盾。 □

引理 3.9. 假设 $T, 0 \dot{-} \sup_x \phi(x)$ 和 $T, \inf_x \phi(x) \dot{-} 0$ 都是仿射可满足的。令 c 为一个新的常元符号。那么， $T, \phi(c) = 0$ 是仿射可满足的。

证明. 我们可以进一步假设 T 是仿射闭合的。假设结论不成立。那么，对于某个 $0 \leqslant \eta$ 属于 T 且 $r, s \geqslant 0$，条件 $r\phi(c) \leqslant s\phi(c) + \eta$ 是不可满足的。因此，对于某个 $\epsilon > 0$，每个模型都满足 $(s - r)\phi(c) + \eta \leqslant -\epsilon$。显然， $r \neq s$。假设 $r < s$。那么，每个模型都满足

$$(s - r) \sup_x \phi(x) + \eta \leqslant -\epsilon.$$

这是一个矛盾。 $s < r$ 的情形会导致类似的矛盾 ly. □

引理 3.10. 假设 T 是仿射可满足的，且 $\phi(x)$ 是公式。令 c 为一个新的常元符号。那么， $T, \int \phi(x)dx = \phi(c)$ 是仿射可满足的。

证明。令

$$\psi(x) = \phi(x) - \int \phi(x)dx.$$

于是，每个模型都满足下确界$_x\, \psi(x) \leqslant 0$ and $0 \leqslant$ 上确界$_x\, \psi(x)$。因此，它们都是仿射可满足的，且 T。现在，使用引理 3.9。 □

引理 3.11。假设 T 是仿射可满足的，且 $\phi(x)$ 是公式。令 c 为一个新的常元符号。那么，$T \cup \{\phi(c) \dot{-} \inf_x \phi(x)\}$ 是仿射可满足的。

证明。反设不然。我们可以假设 T 是仿射闭合的。那么，存在 $\sigma \leqslant \eta$ 属于 T，以及 r、$s > 0$，使得

$$r\phi(c) + s\sigma \leqslant r \inf_x \phi(x) + s\eta$$

不可满足。因此，对于某个 $\epsilon > 0$

$$\vDash r \inf_x \phi(x) + s\eta \leqslant r\phi(c) + s\sigma - \epsilon.$$

So,

$$\vDash r \inf_x \phi(x) + s\eta \leqslant r \inf_x \phi(x) + s\sigma - \epsilon$$

这意味着 $\vDash \eta \leqslant \sigma - \frac{\epsilon}{s}$。矛盾。 □

定义 3.12. 若一个 L-理论 T 对每个 $\phi(x)$都存在 c，使得 $\phi(c) \dot{-} \inf_x \phi(x)$ 属于 T，则称其具有见证性质。若对每个 $\phi(x)$都存在 c，使得 $\int \phi(x)dx = \phi(c)$ 属于 T，则称其具有平均值性质。

下面的引理可通过仿射可满足理论的无穷链轻松证明。

引理 3.13. 假设 T 是 L 中一个仿射可满足理论。那么存在一个语言 $_L \supseteq L$，以及一个仿射可满足的 L-理论 $T \supseteq T$，它具有见证性质和平均值性质，并且在具有这些性质的理论中是极大的。

命题 3.14. 设 T 是 L 中一个具有见证性质和平均值性质的极大仿射可满足理论。那么 T 有一个模型。

证明。由极大性可知，对于每个语句 ϕ，都存在唯一的 r 使得 $\phi = r \in T$。我们将这个 r 记为 ϕ^T。令 C 为 L 的常元符号集合，并在 M 上定义伪度量（记作 ρ）：令 $\rho(c, e) = (\rho(c, e))^T$。令 M 为所得的商度量空间，其度量仍记为 ρ。c 的等价类记为 $\hat{c}$。在 M 上定义度量结构如下：

- $c^M = \hat{c}$
- $R^M(\hat{a}_1, ..., \hat{a}_n) = (R(a_1, ..., a_n))^T$
- $F^M(\hat{a}_1, ..., \hat{a}_n) = \hat{b}$ if $\rho(F(a_1, ..., a_n), b) = 0 \in T$.

注意， R^M 和 F^M 定义良好。对于每个 L-公式 $\phi(x)$，考虑函数 $\phi^T\colon M \to \mathbb{R}$，定义为 $\hat{c} \mapsto (\phi(c))^T$。这类函数构成 $\mathsf{C}_b(M)$ 的一个主导子集。显然，该泛函

$$\Lambda : \phi^T(x) \mapsto \Big(\int \phi(x)dx \Big)^T$$

是线性的。另一方面，若将 $0 \leqslant \phi^T(x)$ 视为函数，则对于每个 c，都有 $0 \leqslant \phi(c) \in T$。因此，根据平均值性质，对于某个 c，条件

$$0 \leqslant \phi(c) = \int \phi(x)dx$$

属于 T。这表明 Λ 为正。现在，利用推论 2.5，我们得到一个带电荷的L-结构 (M, μ)，使得对于每个 $\phi(x)$

$$\int \phi^T(x)d\mu = \Big(\int \phi(x)dx \Big)^T.$$

最后，我们必须证明，对于每个 L-公式 $\phi(\bar{x})$ 以及 $a_1, ..., a_n \in C$，

$$\phi^M(\hat{a}_1, ..., \hat{a}_n) = (\phi(a_1, ..., a_n))^T.$$

我们考虑积分情形。假设关于 $\phi(x)$ 的断言已得到证明，因此对于每个$a \in C$， $\phi^M(\hat{a}) = (\phi(a))^T$。那么，根据 μ 的构造和归纳假设，

$$\Big(\int \phi(x)dx \Big)^T = \int \phi^T(x)d\mu = \int \phi^M(x)d\mu.$$

为了完成证明，利用命题 2.6 找到一个 T 的完备模型。 □

推论 3.15。每个仿射可满足理论都是可满足的。

仿射紧致性的一个简单推论是，如果 $\sigma \leqslant 0$ 和 $0 \leqslant \sigma$ 都有模型，那么 $\sigma = 0$ 有模型。还可以验证，如果 $T \vDash 0 \leqslant \phi$，那么对于每个 $\epsilon > 0$，都存在一个有限的 $\Delta \subseteq T$，使得 $\Delta \vDash -\epsilon \leqslant \phi$。更重要的一个推论如下。

推论 3.16. 如果 $M \equiv N$，那么存在 K，使得 $M \preccurlyeq K$ 和 $N \preccurlyeq K$。

初等 amalgamation 性质的证明方式类似。事实上，仿射逻辑中的许多基本结果在 AL$\int$ 的框架下也成立。证明通常类似，并依赖仿射紧致性定理以及上确界-下确界量词的性质。

4 完备性

$\phi = \psi$ 指的是 $\{\phi \leqslant \psi, \psi \leqslant \phi\}$。不过，我们也可以将其作为原始表达式使用。 $\phi[t/x]$ 指的是用项 t 替换 ϕ中x 的自由出现后所得的结果。 t 对 x 的可替换性定义与一阶逻辑中的定义相同。

线性公理:
（A1） $r \leqslant s$ 若 $\mathbb{R} \vDash r \leqslant s$（A2）
$\phi +$ （$\psi + \theta$） $=$ （$\phi + \psi$） $+ \theta$
（A3） $\phi + \psi = \psi + \phi$（A4）
$0 + \phi = \phi$（A5） r（$\phi + \psi$）
$= r\phi + r\psi$（A6） （$r + s$）
$\phi = r\phi + s\phi$（A7） r（$s\phi$） $=$
（rs）ϕ（A8） $1\phi = \phi$（A9）
$0\phi = 0$

量化公理:
(A10) $\phi[t/x] \leqslant$ (上确界$_x$ ϕ)（若 t 可代入 x）(A11) 上确界$_x$ ($\phi + \psi$) $=$ 上确界$_x$ ϕ(x) $+ \psi$ (x 在 ψ 中不自由出现) (A12) 上确界$_x$($\phi + \psi$) 6 上确界$_x$ $\phi +$ 上确界$_x$ ψ(A13) 上确界$_x$($r\phi$) $= r$ 上确界$_x$ ϕ 其中 $r \geqslant 0$(A14) 上确界$_x$ $\phi = -$下确界$_x$ $-\phi$(A15) $\int 1dx = 1$(A16) $\int(\phi + \psi)dx = \int \phi dx + \int \psi dx$(A17) $\int r\phi dx = r \int \phi dx$(A18) $\int \phi dx = \phi$ 若 x 在 ϕ 中不自由出现

伪度量公理:
(A19) $\rho(x, x) = 0$(A20) $\rho(x, y)$ $= \rho(y, x)$ (A21) $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y)$ $+ \rho(y, z)$
有界性与利普希茨公理:
(A22) $\rho(F(\bar{x})\ F(\bar{y})) \leqslant \lambda_F\ \rho(\bar{x}, \bar{y})$ ($F \in L$) (A23) $R(\bar{x}) - R$ ($\bar{y}$) $\leqslant \lambda_R\ \rho(\bar{x}, \bar{y})$ ($R \in L$) (A24) $0 \leqslant R(\bar{x})$ 6 1 ($R \in L$ 或 $R = \rho$)
演绎规则:
(R1) $\frac{\phi \leqslant \psi,\quad \psi \leqslant \theta}{}$
(R2) $\frac{\phi \leqslant \psi}{\phi + \theta \leqslant \psi + \theta}$
(R3) $\frac{0 \leqslant r,\quad \phi \leqslant \psi}{}$
(R4) $\frac{\phi \leqslant \psi}{\text{上确界}_x\ \phi \leqslant \text{上的确界}_x\ \psi}$(R5) $\frac{\phi \leqslant \psi}{\int \phi dx \leqslant \int \phi dx}$

下文中，$\mathcal{S}$、$\mathcal{S}_1$.....表示条件。我们常以 Γ、$\mathcal{S}$ 表示 $\Gamma \cup \{\mathcal{S}\}$。若 $\Gamma \vdash \mathcal{S}_1$ 且 $\Gamma \vdash \mathcal{S}_2$, 我们也写$\Gamma \vdash \mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$。我们定义关系 $\vdash_n$的一个长度为 ω 的递增链。

定义 4.1. 若 $\Gamma \vdash_0 \mathcal{S}$ 属于 Γ 或是一个逻辑公理，则记作 $\Gamma \vdash_0 \mathcal{S}$ $\mathcal{S}$。假设已为 $k < n$ 定义了 $\vdash_k$。那么，如果满足以下任一要求，我们记作 $\Gamma \vdash_n \mathcal{S}$：

- 存在 $k < n$ 使得 $\Gamma \vdash_k \mathcal{S}$- 存在 $k < n$ 以及逻辑规则（R1-R3）的实例 $\overset{\mathcal{S}_1}{\mathcal{S}}$, $\overset{\mathcal{S}_2}{\mathcal{S}}$，使得$\Gamma \vdash_k \mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$- $\mathcal{S}$是条件 $\sup_x \phi \leqslant \sup_x \psi$，$x$ 在 Γ 中不自由出现，并且对某个 $k < n$，$\Gamma \vdash_k \phi \leqslant \psi$- $\mathcal{S}$ 是条件 $\int \phi dx \leqslant \int \psi dx$，$x$ 在 Γ 中不自由出现，并且对某个 $k < n$，$\Gamma \vdash_k \phi \leqslant \psi$

定义 4.2. 若对某个 $n < \omega$，$\Gamma \vdash_n \mathcal{S}$ 成立，则称 $\mathcal{S}$ 可由 Γ证明，记作 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$。若条件集 Γ 满足 $\Gamma \vdash 1 \leqslant 0$，则称其不一致；否则，它是一致的。

通过对证明的长度进行归纳，可以证明：

定理 4.3.（可靠性）如果 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$，那么 $\Gamma \vDash \mathcal{S}$。如果 Γ 可满足，那么 Γ 一致。

通过对项和公式的复杂度进行归纳，很容易证明，对于每个项 $t(\bar{x})$ 和公式 $\phi(\bar{x})$，都有

$$\vdash \ -\mathsf{b}_\phi \leqslant \phi \leqslant \mathsf{b}_\phi$$

$$\vdash \ \rho(t(\bar{x}), t(\bar{y})) \leqslant \lambda_t \rho(\bar{x}, \bar{y})$$

$$\vdash \ \phi(\bar{x}) - \phi(\bar{y}) \leqslant \lambda_\phi \rho(\bar{x}, \bar{y}).$$

以下两个引理也很容易证明。

引理 4.4. 对于每个 Γ、ϕ、ψ 和 r、s，以下结论成立：
(i) $r = 0 \vdash r\phi = 0$(ii) $\phi = 0 \vdash r\phi = 0$(iii) $\{r = s,\ \phi = \psi\} \vdash r\phi = s\psi$(iv) 如果 $\Gamma \vdash 1 \leqslant 0$，那么对于每个条件 $\mathcal{S}$，都有 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$。

引理 4.5. (i) 若 $\Gamma \subseteq \Gamma'$ 且 $\Gamma \vdash_n \mathcal{S}$，则 $\Gamma' \vdash_n \mathcal{S}$。
(ii) 设 $\Gamma = \{\mathcal{S} : \Gamma \vdash \mathcal{S}\}$。那么，$\Gamma \vdash \mathcal{S}$ 蕴含 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$。(iii) 若 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$，则对于某个有限的 $\Gamma_0 \subseteq \Gamma$，有 $\Gamma_0 \vdash \mathcal{S}$。

证明。(i)：对 n 进行归纳法。在量词情形中，需要进行变量替换。

(ii)：通过对 n 进行归纳法可证，$\Gamma \vdash_n \mathcal{S}$ 蕴含 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$，对每个 Γ 和 $\mathcal{S}$ 都成立。(iii)：显然。 □

Le引理 4.6. $\Gamma, 0 \leqslant \theta \vdash \phi \leqslant \psi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash r\theta + \phi \leqslant \psi$ 对某个 $r \geqslant 0$.

证明。通过对 n 进行归纳法可证，若 Γ、$0 \leqslant \theta \vdash_n \phi \leqslant \psi$，则存在 $r \geqslant 0$ 使得 $\Gamma \vdash r\theta + \phi \leqslant \psi$。在 $n = 0$ 的情况下，若 $\phi \leqslant \psi$ 是逻辑公理或属于 Γ，则令 $r = 0$；若 $\phi \leqslant \psi$ 与条件 $0 \leqslant \theta$ 相同，则令 $r = 1$。假设

$$\Gamma, 0 \leqslant \theta \vdash_n \int \phi dx \leqslant \int \psi dx$$

并且对某个 $k < n$，有

$$\Gamma, 0 \leqslant \theta \vdash_k \phi \leqslant \psi \qquad (x \text{ is not free in } \Gamma, 0 \leqslant \theta).$$

于是，由归纳假设，对某个 $r \geqslant 0$，有

$$\Gamma \ \vdash \ r\theta + \phi \leqslant \psi.$$

因此，由于 $\int \theta dx = \theta$,

$$\Gamma \ \vdash \ r\theta + \int \phi dx \leqslant \int \psi dx.$$

类似地，假设 $\Gamma, 0 \leqslant \theta \ \vdash_n s\phi \leqslant s\psi$，且对某个 $k < n$，有

$$\Gamma, 0 \leqslant \theta \ \vdash_k \ 0 \leqslant s, \qquad \Gamma, 0 \leqslant \theta \ \vdash_k \ \phi \leqslant \psi.$$

那么，存在 $r \geqslant 0$ 使得 $\Gamma \vdash r\theta + \phi \leqslant \psi$。因此，如果 $s \geqslant 0$，那么 $\Gamma \vdash rs\theta + s\phi \leqslant s\psi$。此外，如果 $s < 0$，那么必有 $\Gamma \vdash \theta \leqslant 0$，此时 $\Gamma \vdash \theta + \phi \leqslant \psi$。其余情况的证明类似。逆方向显然。 □

引理 4.7. (i) 若 Γ 一致，则要么 $\Gamma, 0 \leqslant \phi$ 一致，要么存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\Gamma \vdash \phi \leqslant -\epsilon$（此时 Γ, $\phi \leqslant -\epsilon$ 一致）。

(ii) 若 $\Gamma \nvdash \phi \leqslant 0$，则 $\Gamma, 0 \leqslant \phi$ 一致。(iii) 若对每个 $n \geqslant 1$, $\Gamma, -\frac{1}{n} \leqslant \phi$ 一致，则 $\Gamma, 0 \leqslant \phi$ 一致。

证明. (i) 假设 $\Gamma, 0 \leqslant \phi \vdash 1 \leqslant 0$。那么，存在 $r \geqslant 0$ 使得 $\Gamma \vdash r\phi + 1 \leqslant 0$。显然，$r \neq 0$。因此，$\Gamma \vdash \phi \leqslant \frac{-1}{r}$。

(ii) 是 (i) 的推论。

(iii): 否则 ，必定存在 $\epsilon > 0$ 使得 $\Gamma \vdash \phi \leqslant -\epsilon$。这与假设矛盾 .

□

引理 4.8. 假设 Γ、$0 \leqslant \theta \ \vdash \phi \leqslant \psi$ 以及 Γ、$\theta \leqslant 0 \ \vdash \phi \leqslant \psi$。那么，$\Gamma \vdash \phi \leqslant \psi$。

证明。存在 r、$s \geqslant 0$ 使得

$$\Gamma \ \vdash \ r\theta + \phi \leqslant \psi, \quad \Gamma \vdash \ -s\theta + \phi \leqslant \psi.$$

如果 $r = 0$ 或 $s = 0$，则结论成立。否则，我们有

$$\Gamma \ \vdash \ (r + s)\phi \leqslant (r + s)\psi$$

这就意味着所要证明的结论成立。 □

引理 4.9. 假设 $\Gamma, 0 \leqslant \phi$ 和 $\Gamma, \phi \leqslant 0$ 都是一致的。那么，$\Gamma, \phi = 0$ 是一致的。

证明。假设

$$\Gamma, \phi \leqslant 0,\ 0 \leqslant \phi \ \vdash\ 1 \leqslant 0.$$

那么，存在 $r > 0$ 使得

$$\Gamma, \phi \leqslant 0 \ \vdash\ r\phi + 1 \leqslant 0 \ \vdash\ \phi \leqslant -\frac{1}{r}.$$

因此，存在 $s \geqslant 0$ 使得

$$\Gamma \ \vdash\ -s\phi + \phi \leqslant -\frac{1}{r}$$

显然，$s \neq 1$。此外，在 $s < 1$ 的情形下，我们有 $\Gamma \vdash \phi \leqslant \frac{-1}{r\ 1-s()}$；而在 $s > 1$ 的情形下，我们有 $\Gamma \vdash \frac{1}{r\ s-1()} \leqslant \phi$。~~这~~两个推论都与假设矛盾。

□

引理 4.10. 假设 y 不出现在 $\mathcal{S}$ 中，且它在 Γ中不是自由的。如果 c 不出现在 Γ 和 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$ 中，那么 $\Gamma \vdash \mathcal{S}[y/c]$。

证明。我们对 $\Gamma \vdash_n \mathcal{S}$使用归纳法证明该结论。$n = 0$ 的情形显然。假设该结论已对 $k < n$ 证明。分以下几种情形:

- 若 $\Gamma \vdash_k \mathcal{S}$ 对某个 $k < n$ 成立，则证毕。

- 存在 $\mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$，使得 $\Gamma \vdash_k \mathcal{S}_1$、$\mathcal{S}_2$ 对某个 $k < n$ 和 $\frac{\mathcal{S}_1,}{\mathcal{S}}\ ^{\mathcal{S}_2}$ ~~是规~~则 (R1-R3) 的一个实例。于是，根据归纳假设，

$$\Gamma \ \vdash\ \mathcal{S}_1[y/c], \mathcal{S}_2[y/c] \ \vdash\ \mathcal{S}[y/c].$$

因此，$\Gamma \vdash \mathcal{S}[y/c]$。

- $\mathcal{S}$ 的形式为 $\sup_x \phi \leqslant \sup_x \psi$，或形式为 $\int \phi dx \leqslant \psi dx$；$x$ 在 Γ 中不是自由的，并且存在 $k < n$ 使得

$$\Gamma \vdash_k \phi \leqslant \psi.$$

于是，由归纳法

$$\Gamma \vdash \phi[y/c] \leqslant \psi[y/c].$$

因此，由于 $y \neq x$，我们有 $\Gamma \vdash \mathcal{S}[y/c]$。 □

推论 4.11. 设 Γ 是一个闭条件集合，其中不出现 c。如果 y 不出现在 ϕ 和 $\Gamma \vdash \phi \leqslant r$ 中，那么

$$\Gamma \ \vdash\ \sup_y \phi[y/c] \leqslant r, \qquad \Gamma \ \vdash\ \int \phi[y/c]dy \leqslant r.$$

根据佐恩引理，每个一致理论都包含于某个极大相容理论中。每个极大相容理论 Γ 都是闭合的，即 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$ 蕴含 $\mathcal{S} \in \Gamma$。此外，对于任意语句 ϕ、ψ，$\phi \leqslant \psi \in \Gamma$ 与 $\psi \leqslant \phi \in \Gamma$必居其一。

引理 4.12。设 Γ 是一个极大一致理论，ϕ 是一个语句。那么存在唯一的 r 使得 $\phi = r \in \Gamma$。

证明。设

$$r = \sup\{r' : r' \leqslant \phi \in \Gamma\}, \qquad s = \inf\{s' : \phi \leqslant s' \in \Gamma\}.$$

对于每个 $\epsilon > 0$，$r - \epsilon \leqslant \phi$ 和 $\phi \leqslant s + \epsilon$ 都属于 Γ。因此，$r \leqslant s$。此外，对于每个 $\epsilon > 0$，我们有 $(r + \epsilon) \leqslant \phi \notin \Gamma$。所以，$\phi \leqslant r + \epsilon \in \Gamma$，从而 $s \leqslant r + \epsilon$。我们得出 $r = s$。注意到 $r \leqslant \phi \in \Gamma$，因为 Γ，$r \leqslant \phi$ 是一致的。同样地，$\phi \leqslant r \in \Gamma$。 □

定义 4.13。若对于每个 $\phi(x)$，都存在 c，使得 $\sup_x \phi(x) \leqslant \phi(c)$ 属于 Γ，则 L-理论 Γ 具有见证性质。若对于每个 $\phi(x)$，都存在 c，使得 $\int \phi(x)dx = \phi(c)$ 属于 Γ，则它具有平均值性质。

推论 4.14。假设 Γ 一致，且 $\phi(x)$ 是一个公式。令 c 为一个新的常元符号。则，

(i) $\Gamma, \int \phi(x)dx = \phi(c)$ 是一致的 (ii)
Γ，上确界$_x \phi(x) \leqslant \phi(c)$ 是一致的。

证明。(i) 我们断言 $\Gamma, \phi(c) \leqslant \int \phi(x)dx$ 是一致的。假设并非如此。那么，对于某个 $\epsilon > 0$,

$$\Gamma \vdash \int \phi(x)dx \leqslant \phi(c) - \epsilon.$$

因此,

$$\Gamma \vdash \int \phi(x)dx \leqslant \int \phi(x)dx - \epsilon.$$

这是一个矛盾。类似地可以证明 Γ、$\int \phi(x)dx \leqslant \phi(c)$ 是一致的。根据4.9，我们得出 Γ、$\int \phi(x)dx = \phi(c)$ 是一致的。

(ii) 类似。 □

下述命题通过链论证得到证明。

¯命题 4.15. 设 Γ 是一个一致的 L-理论。那么，存在 $L \supseteq L$ 以及一个具有见证性质和平均值性质的极大¯ ¯一致 L-理论 $\Gamma \supseteq \Gamma$。

下面的命题可用与命题 3.14 类似的方法证明。

命题 4.16. 设 T 是 L 中具有见证性质和平均值性质的极大一致理论。那么，T 有一个模型。

T定理 4.17.（弱完全性）每个一致理论都是可满足的。

定理 4.18.（近似强完全性）$\Gamma \vDash 0 \leqslant \phi$ 当且仅当 $\Gamma \vdash -\frac{1}{k} \leqslant \phi$对所有 $k \geqslant 1$成立。

证明。假设对于某个 $k \geqslant 1$，$\Gamma \nvdash -\frac{1}{k} \leqslant \phi$成立。那么，$\Gamma, \phi \leqslant -\frac{1}{k}$是一致的。设 M是该理论的一个模型。那么，我们必有 $0 \leqslant \phi^M \leqslant -\frac{1}{k}$。 □

上文给出的证明系统不够强，无法得到强完备性定理的精确形式，即无法从 $\Gamma \vdash \mathcal{S}$ 推导出 $\Gamma \vDash \mathcal{S}$。要得到这样的结果，我们需要一个无穷证明系统，也就是说，对于每个 $\alpha < \omega_1$，都有 $\vdash_\alpha$。

5 类型

设 T 是一个（仿射）完备的 L 理论。对于 $|\bar{x}| = n \geqslant 1$, $D_n(T)$ 表示自由变量为 $\bar{x}$ 的公式模 T 等价所构成的向量空间。它是一个偏序赋范向量空间，其定义如下：

$$\|\phi\| = \sup_{\bar{a}\in M} |\phi^M(\bar{a})|$$

$$0 \leqslant \phi \quad \text{if} \quad T \vDash 0 \leqslant \phi(\bar{x}).$$

一个 n-类型是一个正线性映射 $p\colon D_n(T) \to \mathbb{R}$，满足 $p(1) = 1$。请注意，p 可唯一延拓为 $D_n(T)$ 的完备化上的正线性映射。T 的 n-类型集合记作 $K_n(T)$。来自 $A \subseteq M \vDash T$ 的参数上的类型定义类似。$K_n(A)$ 表示 A 上的 n-类型集合。根据巴拿赫–阿劳格鲁定理，$K_n(T)$ 是 $(D_n(T))^*$ 的单位球中的一个紧凸子集（$K_n(A)$ 也类似）。$K_n(T)$ 的逻辑拓扑由形如 $\{p\colon 0 < p(\phi)\}$ 的集合生成，其中 $\phi(\bar{x})$ 是一个公式。若对每个 ϕ 都有 $p(\phi) = \phi^M(\bar{a})$，则类型 $p(\bar{x})$ 由 $\bar{a} \in M$ 实现。积分本身是 M 上的一个类型。

引理 5.1. 设 $A \subseteq M$ and $p(\bar{x})$ 是 $A \subseteq M$ 上的一个类型。则 p, 在某个$M \preccurlyeq N$ 中实现。

利用引理 5.1 和命题 2.10，可以证明许多关于饱和模型和齐性模型的结果。这里只提及一些例子，其证明与经典情形类似（另见 [3]）。

定义 5.2. 设 κ 是一个无限基数，且 $M \vDash T$。

(i) 若对每个满足 $|A| < \kappa$ 的 $A \subseteq M$，每个类型 $p \in K_1(A)$（因此也包括每个 $p \in K_n(A)$）都在 M 中实现，则称 M 为 κ-饱和的。

(ii) 若对每个 $\bar{a}$, 每个 $\bar{b}, c \in M$ 满足 $|\bar{a}e| < |\bar{b}e|$ 使得 $\bar{a}c \equiv \bar{b}e$。若对上述的 $\bar{a}$、b，存在一个自同构 f，使得 $f(\bar{a}) = b$，则称其为强 κ-齐次的。

(iii) 若每个满足 $\mathrm{dc}(N) < \kappa$ 的 $N \equiv M$ 都初等嵌入于 M，则称 M 是 κ-通用的。

命题 5.3. 若 $M \equiv N$ 是 κ-饱和的，其中 $\kappa = \mathrm{dc}(M) = \mathrm{dc}(N)$，则 $M \simeq N$。

命题 5.4. M 是 κ-饱和的，当且仅当它是 κ-齐次的且 κ^+-通用的。

命题 5.5. 假设 $M \vDash T$ 且 $\mathrm{dc}(M) \leqslant 2^\kappa$。那么，存在一个 κ-饱和且强κ-齐次的 $M \preccurlyeq N$，使得 $|N| \leqslant 2^\kappa$。

命题 5.6. 设 M、$N \vDash T$ 可分且 $\aleph_0$-齐次。那么当且仅当它们在每个 $K_n(T)$ 中实现相同的类型时，$M \simeq N$。

设 $M \vDash T$ 是 $\aleph_0$-饱和的。则

$$\varrho(p, q) = \inf\{\rho(\bar{a}, \bar{b})\colon \bar{a} \vDash p,\ \bar{b} \vDash q\}$$

在 $K_n(T)$ 上定义了一个度量。与 CL 中一样，可以证明 $(K_n(T)\ \tau, \varrho)$ 是一个拓扑度量空间。我们还可以在 M^n 上定义一个概率测度，然后将其转移到 $K_n(T)$ 上。为此，令 $\bar{x} = x_1 \cdots x_n$，并通过如下方式定义映射 Λ：

$$\phi(\bar{x}, \bar{a}) \mapsto \int \cdots \int \phi^M(\bar{x}, \bar{a})\ dx_1 \cdots dx_n$$

其中 $\phi(\bar{x},\ \bar{z})$ 是任意一个 L-公式，且 $\bar{a} \in M$。根据推论 2.5，存在一个正则博雷尔电荷 μ_n 定义在 M^n 上，使得对每个 $\phi(\bar{x},\ \bar{a})$,

$$\Lambda(\phi) = \int \phi^M\ d\mu_n.$$

若对每个 $\phi(x, y, \bar{z})$ 都有如下结论，则 T 是富比尼理论：

$$\iint \phi dx dy \equiv_T \iint \phi dy dx.$$

例如，若 M 是紧的，则其仿射理论是富比尼理论。若 T 是富比尼理论，则上文定义的 μ_n 与变量的次序无关。现在可以在 $K_n(T)$ 上定义一个博雷尔电荷。进一步假设 M 是 $\aleph_0$-饱和的。那么映射

$$tp : M^n \to K_n(T), \qquad \bar{a} \mapsto tp(\bar{a})$$

是满射且逻辑连续的（相对于 $K_n(T)$ 的度量拓扑，它也是 1-利普希茨的）。对于每个公式 $\phi(\bar{x})$，令 $\phi : K_n(T) \to \mathbb{R}$，定义为 $\phi(p) = p(\phi)$。另定义

$$\bar{\Lambda}(\hat{\phi}) = \Lambda(\phi) = \int \phi\ d\mu_n.$$

再次，由推论 2.5，存在一个博雷尔电荷 $\hat{}\mu_n$ 定义在 $K_n(T)$ 上，使得对于每个 ϕ

$$\bar{\Lambda}(\phi) = \int \phi\ d\hat{\mu}_n.$$

简言之，对于每个 $M \vDash T$，我们都有定义在 M^n 上的博雷尔电荷 μ_n；并且（如果它是 $\aleph_0$-饱和的）还有一个定义在 $K_n(T)$ 上的博雷尔电荷 $\hat{}\mu_n$，使得对于每个公式 $\phi(x_1, ..., x_n)$

$$\int \phi^M\ d\mu_n = \int \cdots \int \phi^M\ dx_1 \cdots dx_n = \int \hat{\phi}\ d\hat{\mu}_n.$$

注意，$\hat{}\mu_n$ 不依赖于 M 的选择。最后，由于 $K_n(T)$ 关于逻辑拓扑是紧致的，μ_n 唯一延拓为 σ-可加的概率测度，定义在 $K_n(T)$ 上。

我们还可以用一种自然的方式将 $D_n(K)$ 嵌入 $D_{n+1}(T)$。对于每个 n，积分算子定义了一个正线性映射

$$D_{n+1}(T) \to D_n(T), \qquad \phi(\bar{x}, y) \mapsto \int \phi(\bar{x}, y) dy.$$

由此可通过以下方式得到一个仿射映射 $+\colon K_n(T) \to K_{n+1}(T)$

$$p^+(\phi(\bar{x}, y)) = p(\int \phi(\bar{x}, y)dy).$$

这是一个单射的逻辑连续映射。再次回想，根据仿射紧致性，如果 $\inf_x \phi^M(x) \leqslant r \leqslant \sup_x \phi^M(x)$，那么 $\phi(x) = r$ 在 M 的某个初等扩张中可满足。这是 $\phi(x)$ 的平均值性质。

引理 5.7. 每个映射 $p \mapsto p^+$ 都保持度量。

证明。假设 $\bar{a}c \vDash p^+$ 和 $be \vDash q^+$，其中 $|\bar{a}| = |b| = n$。那么，$\bar{a} \vDash p$ 和 $b \vDash q$。因此，

$$\varrho(p, q) \leqslant \varrho(p^+, q^+).$$

对于反向不等式，假设 $\bar{a} \vDash p$ 和 $b \vDash q$，使得 $\varrho(p, q) = \rho(\bar{a}, b)$。我们只需证明存在 $c \in M$，使得对于每个 $\phi(\bar{x}, y)$

$$p^+(\phi) = \phi^M(\bar{a}, c), \qquad q^+(\phi) = \phi^M(\bar{b}, c).$$

这意味着，对于每个 $\phi(\bar{x}, y)$

$$\phi^M(\bar{a}, c) = \int \phi^M(\bar{a}, y)dy, \qquad \phi^M(\bar{b}, c) = \int \phi^M(\bar{b}, y)dy.$$

为此，根据仿射紧致性，我们必须证明，对于每个 $\phi(\bar{x}, y)$ $\psi(\bar{x}, y)$，都存在满足该条件的 c

$$\phi^M(\bar{a}, y) + \psi^M(\bar{b}, y) = \int \phi^M(\bar{a}, y)dy + \int \psi^M(\bar{b}, y)dy.$$

令 $\theta(y) = \phi(\bar{a}, y) + \psi(\bar{b}, y)$。因此，我们需要找到 c，使得 $\theta(c) = \int \theta(y)dy$。这由 θ 的平均值性质保证。 □

另一方面，将 $p^+(\bar{x}, y)$ 限制到 $\bar{x}$ 上，得到的类型是 $p(\bar{x})$。因此，我们可以将 $p \mapsto p^+$ 视为包含映射，并写作

$$K_1(T) \subseteq K_2(T) \subseteq \cdots$$

其中这些包含映射保持度量且逻辑连续。

6 同构定理

与 AL 中一样，为了证明同构定理，我们需要推广幂均值构造。设 L 是一种度量语言（不含电荷符号），M 是 L 中的一个结构。设 $(I, \mathcal{A}, \wp)$ 是一个电荷空间。若映射 $a\colon I \to M$ 满足

对每个博雷尔 $B \subseteq M$，都有 $a^{-1}(B) \in \mathcal{A}$。若函数 $u: I \to \mathbb{R}$ 满足对每个 $X \in \mathcal{H}(\mathbb{R})$ 都有 $u^{-1}(X) \in \mathcal{A}$，则称其为可测函数。$M$ 的拓扑权定义为

$$w(M) = \min\{|\mathcal{O}| : \mathcal{O} \text{ is a basis for } M\} + \aleph_0.$$

一个 L-结构 M 是 $\mathcal{A}$-可均值的，如果 M 有限，或者 $\mathcal{A}$ 是 $w(M)^+$-完备的。假设 M 是$\mathcal{A}$-可均值的。那么，对每一个有界连续 $f: M^n \to \mathbb{R}$ 以及可测映射a^1，……，$a^n: I \to M$，函数 $u(i) = f(a_i^1, \ldots\ldots, a_i^n)$ 是可测的（因而可积）。类似地，对每一个连续 $g: M^n \to M$，$a(i) = g(a_i^1, \ldots\ldots, a_i^n)$ 是可测的。现在我们可以定义幂均值 $M^{\wp}$。

对于可测的 a，$b: I \to M$令 $a \sim b$如果 $\int d(a_i, b_i)\, d\wp = 0$。的等价类$a = (a_i)$记为 $[a_i]$。令 $M^{\wp}$ 为可测映射的等价类所成的集合$a: I \to M$。于是我们可以在 $M^{\wp}$上定义一个度量结构，其方式与第 3 节完全相同。于是我们有如下结果（见 [3], [4]）。

定理6.1.（幂均值）设（I，$\mathcal{A}$，$\wp$）为一个电荷空间，且 M为一个 $\mathcal{A}$-可均值结构。则对每个 L-公式 $\phi(\bar{x})$ 以及 $[a_i^1]$，……，$[a_i^n] \in M^{\wp}$，

$$\phi^{M^{\wp}}([a_i^1], ..., [a_i^n]) = \int_I \phi^M(a_i^1, ..., a_i^n) d\wp.$$

定理6.2. 假设 $M \equiv N$。则存在一个电荷空间（I，$\mathcal{A}$，$\wp$），使得 M与 N均为 $\mathcal{A}$-可均值的，且 $M^{\wp} \simeq N^{\wp}$。

现在，将电荷符号加入 L，并将其记为 L_μ。然后我们可以把同构定理推广到概率结构。

Theorem 6.3. 对于 L_μ-结构 M，N，若 $M \equiv N$，则对某个 $\wp$有 $M^{\wp} \simeq N^{\wp}$.

证明。对每个具有 $|\bar{x}| = n \geqslant 1$的 L_μ-公式 $\phi(\bar{x})$，取一个 n元关系符号 R_ϕ 并令

$$\bar{L} = L \cup \{R_\phi : \phi \text{ is a } L_\mu\text{-formula}\}.$$

令 M 为 M 到语言 L 的（无测度）扩张，其定义为：对每个 ϕ，$R_\phi^M(\bar{x}) = \phi^M(\bar{x})$。以类似方式定义 $\bar{N}$。此外，令 $\mathbf{M} = (\bar{M}, \mu_M)$，并令 $\mathbf{N} = (N, \mu_N)$。那么，$\mathbf{M} \equiv \mathbf{N}$ 在语言 L_μ 中。因此，$M \equiv N$ 在语言 L 中。根据定理6.2，存在某个指标集 I 上的电荷空间 $\wp$，使得 $M^{\wp} \simeq N^{\wp}$。现在，我们只需证明 $M^{\wp} \simeq N^{\wp}$ 在语言 L_μ 中。为此，任取 L_μ 和 $\bar{a} \in M^{\wp}$ 中的一个公式 $\phi(\bar{x})$。注意，在 $\mathbf{M}^{\wp}$ 和 $\mathbf{N}^{\wp}$ 中，$R_\phi(\bar{x}) = \phi(\bar{x})$ 均成立。因此，我们有

$$\phi^{M^{\wp}}(\bar{a}) = \phi^{\mathbf{M}^{\wp}}(\bar{a}) = R_\phi^{\mathbf{M}^{\wp}}(\bar{a}) = R_\phi^{\bar{M}^{\wp}}(\bar{a})$$
$$= R_\phi^{\bar{N}^{\wp}}(f(\bar{a})) = R_\phi^{\mathbf{N}^{\wp}}(f(\bar{a})) = \phi^{\mathbf{N}^{\wp}}(f(\bar{a})) = \phi^{N^{\wp}}(f(\bar{a})).$$

□

利用定理 6.3，证明了 AL$\int$ 版本的 Robinson 一致性定理。

命题 6.4. 设 T_i 是 L_i 中关于 $i = 1$、2 的可满足理论，且 $T = T_1 \cap T_2$ 在 $L = L_1 \cap L_2$中完备。那么， $T_1 \cup T_1$ 是可满足的。

因此，可以像 AL 中那样，根据上述结果推导出一个恰当的插值定理（参见 [3]）。

命题 6.3 有助于我们用 AL$\int$-嵌入来刻画 AL 中类型的非分叉扩张这一概念（定义见 [8] ）。设 T 是度量语言 L （不含电荷符号）中的一个完备稳定仿射理论，且 $M \vDash T$。关系 $R\colon M^n \to \mathbb{R}$ 是 M-可定义的，当且仅当它是公式序列 $\theta_k^M(\bar{y})$ 的一致极限，其中参数取自 M。 $p(x) \in K_1(M)$ 的定义方案是一个映射，它为每个公式 $\phi(x, \bar{y})$（参数取自 M）指定一个 M-可定义关系$\mathfrak{d}\phi(\bar{y})$，使得

$$\mathfrak{d}\phi(\bar{a}) = p(\phi(x, \bar{a})) \qquad \forall \bar{a} \in M.$$

如前所述， p 以连续方式延拓到 $D_1(T)$ 的完备化。相应地， $\mathfrak{d}$ 延拓到所有 M-可定义关系组成的族；也就是说，对于每个 $R(x, \bar{y})$，都存在一个M-可定义的 $\mathfrak{d}R(\bar{y})$，使得

$$\mathfrak{d}R(\bar{a}) = p(R(x, \bar{a})) \qquad \bar{a} \in M.$$

根据稳定性，每一个这样的类型都有一个定义方案。根据命题 2.5，存在 M上的博雷尔电荷 μ_p，使得对每一个参数在 M中的 $\phi(x)$，都有 $p(\phi(x)) = \int \phi^M(x) d\mu_p$。设 L_μ 为用电荷符号 μ扩充后的语言 L 。于是，(M, μ_p)是 L_μ 中的一个结构，并且对每一个 $\phi(x, \bar{y})$

$$\mathfrak{d}\phi(\bar{a}) = p(\phi(x, \bar{a})) = \int \phi(x, \bar{a}) d\mu_p \qquad \forall \bar{a} \in M.$$

注意， p 的不同扩张 μ_p 在同构意义下给出同一个概率结构。设$(I, \mathcal{A}, \wp)$为一个电荷空间，使得 M是 $\mathcal{A}$-可求均值的。定义类型$p^\wp \in K_1(M^\wp)$如下

$$p^\wp(\phi(x, \bar{a})) = \int_I p(\phi(x, \bar{a}_i)) d\wp \qquad (\bar{a} \in M^\wp).$$

因此我们有

$$p^\wp(\phi(x, \bar{a})) = \int_I \mathfrak{d}\phi(\bar{a}_i) d\wp = (\mathfrak{d}\phi)^{M^\wp}(\bar{a}).$$

因此， $p^\wp$ 再次在 M 上可定义，从而在 p上非分叉。

命题 6.5. 设 T 为一个稳定 AL 理论， $M \vDash T$ 以及 $p(x) \in K_1(M \qquad)$.
(i) 在 (M, μ_p) 中，每个 L_μ-公式都等价于一个 $L(M)$-可定义关系。(ii) 若 $M \preccurlyeq N$，则 $q \in K_1(N)$ 是 p 的非分叉扩张，当且仅当 (M, μ_p) 4 (N, μ_q)。

证明。（i）设 $\mathfrak{d}$ 是 p 的定义方案。我们通过归纳法证明，每个 L_μ-公式 $\phi(\bar{y})$ 都等价于一个可由 $L(M)$ 定义的关系。关键步骤是证明以下命题：

$\int \phi(x,\bar{y})$，假设该命题对 $\phi(x,\bar{y})$ 成立。设 (M,μ_p) 满足 $\phi(x,\bar{y}) = R(x,\bar{y})$，其中 R 是一个可由 $L(M)$ 定义的关系。那么，对每个 $\bar{a} \in M$

$$\int \phi^M(x,\bar{a})dx = \int R^M(x,\bar{a})dx = p(R(x,\bar{a})) = (\mathfrak{d}R)(\bar{a}).$$

因此，在 (M,μ_p) 中，$\int \phi(x,\bar{y})dx$ 等价于关系 $\mathfrak{d}R(\bar{y})$。

(ii) 假设 q 在 p 上非分叉。那么，上述 $\mathfrak{d}$ 是适用于 p 和 q 的定义方案。因此，消去积分公式的过程在 M 和 N 中相同。换句话说，在 (N,μ_p) 中，每个 L_μ-公式都等价于一个 $L(M)$-可定义关系。特别地，$(M,\mu_p) \equiv (N,\mu_q)$。反过来，假设 $(M,\mu_p) \equiv (N,\mu_q)$。那么，对于某个 $\wp$，存在一个同构 $f : (M,\mu_p)^\wp \to (N,\mu_q)^\wp$，其中 f 逐点固定 M。由于 $p^\wp$ 在 p 上非分叉，且 $q^\wp = f(p^\wp)$ 在 q 上非分叉，我们得出 q 在 p 上非分叉。

□

命题 6.5表明 $p(x)$ 及其非分叉扩张在 L_μ中刻画了一个完备仿射理论。将其扩展到语言 $L_\mu(M)$ 后，我们得到一个消去积分量词的理论，即每个公式都等价于一个无积分公式。

积分逻辑的变体：
积分逻辑的核心部分，包括紧致性定理及其推论，可以用各种方式加以推广。我们提出一些设想，但不作进一步详述。积分算子可以替换为任意线性算子。设 L 是如前所述的带测度语言。我们不再为度量结构 M 赋予概率测度，而是赋予它一个范数为 1 的连续线性算子 $\Lambda : \mathbf{C}_b(M) \to \mathbb{R}$，满足 $\Lambda(1) = 1$。公式的定义与之前相同，并且

$$\Big(\int \phi(\bar{a},y)dy\Big)^M = \Lambda(\phi^M(\bar{a},y)).$$

超均值构造的论证与此类似；仿射紧致性定理则通过使用 Hahn-Banach 延拓定理而非推论 2.5 得以证明。此前解释的逻辑 AL$\int$ 随后在这一广义框架中通过以下公理模式公理化

$$\inf_y \phi(\bar{x},y) \leqslant \int \phi(\bar{x},y)dy.$$

也可以用 n元算子替换一元算子，即形如 Λ 的算子：$\mathbf{C}_b(M^n) \to \mathbb{R}$。特别地，一元电荷可以替换为 n维电荷，而命题 6.5 则推广为 n维类型。要想在一阶理论中的类型上得到类似结果，需要像[10]那样用超滤子扩展一阶逻辑。

参考文献

[1] C.D. Aliprantis、O. Burkinshaw，《正算子》，Springer（2006）。

[2] C.D. Aliprantis、K.C. Border，《无穷维分析》，Springer，2006。[3] S.M. Bagheri，《仿射模型论基础》，arXiv:2408.03555v2。[4]S.M. Bagheri，连续逻辑线性片段的同构定理，《数学逻辑季刊》67，第2期，193-205（2021）。[5] S.M. Bagheri、M. Pourmahdian，《连续积分逻辑》，arXiv:1910.00191。[6] S.M. Bagheri、M. Pourmahdian，《积分逻辑》，《数学逻辑档案》48（5），465-492（2009）。[7] I. Ben-Yaacov、T. Ibarluc´ıa、T. Tsankov，仿射逻辑中的极端模型与直积分，预印本 arXiv:2407.13344（2024）。[8]I. Ben-Yaacov、T. Ibarluc´ıa，仿射逻辑中的稳定性，预印本 arXiv:2503.10506v2（2026）。[9] K.P.S. Bhaskara Rao、M. Bhaskara Rao，《电荷理论》，Academic Press（1983）。[10] Carnielli, W. A. 与 P. A. S. Veloso，《超滤子逻辑与一般推理》，Gottlob, G.、Leitsch, A. 与 Mundici, D.（编）《计算逻辑与证明论》（LNCS 1289）：34-53，Springer-Verlag，柏林（1997）。[11] D.N. Hoover，《概率逻辑》，《数学逻辑年刊》14（1978）287-313。[12] H.J. Keisler，概率量词，载于 J. Barwise、S. Feferman，《模型论逻辑》，Springer-Verlag（1985）。