融合范畴中的代数：种与遗传代数

EDMUND HENG 与 MATEUSZ STROIŃSKI

摘要。我们通过建立$\mathscr{C}$-物种的框架，开启对融合范畴中非半单代数的研究——该框架类似于研究 Artin 代数时所用的物种与箭图框架。在融合范畴可分这一（必要）假设下，我们证明任意代数都 Morita 等价于某个$\mathscr{C}$-物种的路径代数的容许商。此外，我们证明一个代数是遗传的，当且仅当无需再作进一步的商。这些结果推广了 Gabriel 关于有限维代数的结果。

arXiv:2602.19144v1 [math.RT] 22 Feb 2026

目录

1. 引言 1
2. 预备知识 3
2.1. 阿贝尔范畴 3
2.2. 张量范畴与融合范畴 5
2.3. 模范畴 5
2.4. 模范畴即模范畴 6
2.5. 双模、理想与代数的$\mathscr{C}$-根 7
2.6. 张量代数 10
2.7. 除代数 12
2.8. Artin–Wedderburn 定理 13
3. 物种、箭图与路径代数 14
4. 融合范畴情形 17
4.1. 融合范畴中的代数的根与半单性 18
4.2. 基本半单代数与投射生成元 19
4.3. 内部 Ext 与模范畴的有向图 21
5. 主要定理 23
5.1. 融合范畴中的代数的 Gabriel 定理 23
5.2. 遗传性当且仅当理想消失 26
参考文献 28

1. 引言

本文中，k 始终表示一个代数闭域。

研究动机与结果。融合范畴中的代数对于研究融合范畴上的有限模范畴至关重要，因为每个$\mathscr{C}$上的有限模范畴，都等价于某个代数 $A \in \mathscr{C}$ [Os 上的模范畴 EGNO]。过去几十年来，该领域主要关注半单代数，即其所有模都是半单的代数。对于半单代数之外的情形，我们的了解出奇地有限。事实上，直到第二作者及其合作者最近的工作 [CSZ]（作为融合范畴情形中的一个推论），我们才得以通过以下判据区分半单代数与非半单代数：代数是半单的，当且仅当它作为自身上的模是半单的

（参见 推论 4.8）——这一结论对于有限维代数而言是众所周知的。

尽管如此，融合范畴在有限阿贝尔范畴上的作用仍有许多有趣的例子，而这些范畴未必是半单的。例如，有限阿贝尔范畴 $\mathcal{M}$ 若配备有限群 G 的（强）范畴作用，就等同于 $\mathcal{M}$ 是范畴 vect_G（有限维 G-分次向量空间范畴）上的模范畴。因此，$\mathcal{M}$ 等价于某个 G-分次代数上的 G-分次模范畴；该代数是半单的，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是半单的。另一方面，论文 [Heng, EH] 表明，箭图表示范畴带有有趣的融合范畴作用，其中包括斐波那契融合范畴Fib 作用于 $\mathrm{rep}(A_4)$（二部） [Heng，例 3.2] ——与此相反，Fib作用的唯一不可分解半单范畴就是它自身。

本文旨在通过建立类似于有限维代数基础结果的理论，开启对融合范畴中所有代数的研究（事实上，我们将有限维代数视为 vect中的代数，从而使本文结果涵盖经典结果）。我们证明 Gabriel 定理的如下推广 [Ga1, Ga2]；关于$\mathscr{C}$-物种及其路径代数的定义，请参见 定义 3.1 和 3.3。回顾一下，若一个融合范畴的 Drinfeld 中心是半单的（例如，当 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$ 时），就称该融合范畴是可分。

定理 A （= 推论 5.12 和定理 5.23）。设 $A \in \mathscr{C}$ 是可分融合范畴$\mathscr{C}$ 中的一个代数。存在一个$\mathscr{C}$-物种 Q 及其路径代数中的一个双边理想 I T_Q，使得 A 与代数 T_Q/I*Morita* 等价。此外，I是平凡的，当且仅当 A是遗传的，即 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$的全局投射维数至多为 *1*。

注意，对$\mathscr{C}$的可分性假设是必要的；参见注 5.13。此外，取$\mathscr{C} = \mathsf{vect}$即可恢复 Gabriel 的结果；此时其 Drinfeld 中心$\mathfrak{Z}(\mathsf{vect}) \simeq \mathsf{vect}$ 总是半单的（无论 k 的特征如何）。

注 1.1。熟悉有限维代数的读者可能会疑惑：当底域是代数闭域时，为何仍需要物种这一概念？原因在于，即便如此，$\mathscr{C}$中的半单代数仍可能有多个 Morita 类。例如，vect_G 中的半单代数的 Morita 类由子群 $H \subseteq G$ 以及 2-上同调类确定，其系数取自 H；参见例 2.70。

当 T_Q 的半单部分是平凡代数的乘积时，根据定义，$\mathscr{C}$-物种 Q 是一个$\mathscr{C}$-箭图（见定义 3.1）。我们还给出一个判据，用以确定 A 何时 Morita 等价于$\mathscr{C}$-箭图的路径代数的商。以下内容中，请回忆格罗滕迪克群$[\![\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)]\!]$ 是融合环 $[\![\mathscr{C}]\!]$ 上的一个 $\mathbb{Z}_+$-模。

定理 B (推论 5.17 和 5.24)。 设 A 是可分融合范畴$\mathscr{C}$ 中的一个代数。那么，代数 A *Morita* 等价于 T_Q/I，且 Q 是一个$\mathscr{C}$-箭图，当且仅当 $[\![\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)]\!]$ 作为$\mathbb{Z}_+$-模等价于$[\![\mathscr{C}]\!]^{\oplus n}$。特别地，若 A 还是遗传的，则 A *Morita* 等价于 T_Q，其中 Q 是一个$\mathscr{C}$-箭图。

因此，由 [EH] 中的主定理可知，对于T_Q 任意 Q 一个$\mathscr{C}$-箭图，若一个遗传代数与之 Morita 等价，则它有有限多个不可分解模（在同构意义下），当且仅当 Q 它对应的考克斯特图是考克斯特–迪因金图的不交并（这些图表对有限考克斯特群进行分类）。事实上，本研究的一个主要动机，是通过融合范畴中的代数，将韦伊群与有限维代数之间丰富的联系拓展到所有考克斯特群；这将在未来的工作中探讨。另一个有趣的问题是，为所有遗传代数（即$\mathscr{C}$-物种，而非$\mathscr{C}$-箭图）给出有限表示型条件。我们预计，这将类似于 Dlab–Ringel 对 Gabriel 分类到物种的推广 [DR]。

有限张量范畴中的代数。 尽管 [CSZ] 中引入的代数对象 Jacobson 根理论适用于有限张量范畴的一般情形，但上述 Gabriel 定理的推广（定理 A）不能在如此一般的层面上成立；例 5.14表明，它在非可分融合范畴中就已经失效。尽管如此，我们仍尽可能在有限张量范畴中发展$\mathscr{C}$物种理论——这最终导向

有限张量范畴中代数对象的 Gabriel 定理的一个较弱变体，我们在定理 3.16中证明了这一结果。特别是，在这一推广中，我们需要求给定代数 A/J A 的半单商 Morita 等价于一个可分代数——在可分融合范畴中，这一条件总是成立；而在例 5.14中则不成立。此外，正如注 5.2所述，有限张量范畴中的可分性在 Morita 等价下并不保持。除此之外，我们还需要投影 $J \twoheadrightarrow J/J^2$的一个分裂，这与经典情形（[Ben，命题 4.1。10]）类似——参见定义 3.12。

我们强调，尽管这意味着非半单有限张量范畴背景下的代数结构性结果可能只能以较弱的形式呈现，但$\mathscr{C}$-箭图和$\mathscr{C}$-物种仍为系统地构造性质良好的非正合模范畴提供了一种方法。

相关研究。 通过一个$\mathscr{C}$-物种实现一个模范畴，可以理解为将它描述为一组由扩张“粘合”在一起的正合模范畴。这一想法与 MM] 的 Jordan–Hölder 理论有些相似。然而，两者并不相同——有限张量范畴（的投射对象范畴）上的简单传递2-表示，就是正合模范畴（的投射对象范畴）；而有限张量范畴上的有限模范畴的作用预序（依照 [MM] 的定义）是对称的，因此相应的 Jordan–Hölder 过滤是分裂的。或许最能说明这一差异的是，MM] 的 Jordan–Hölder 理论是在格罗滕迪克群层面定义的，而按我们的含义，路径代数中的箭头根本无法由格罗滕迪克群检测到：我们发现 $[\![\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)]\!] \simeq [\![\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A/J)]\!]$。

尽管名称相似，我们所说的$\mathscr{C}$-箭图与 [Sch], 中的融合箭图概念并不相同；后者从箭图描述的是幺半范畴，而非模范畴。另一方面， [Bet] 中研究的作用可以用我们所讨论的$\mathscr{C}$-箭图和$\mathscr{C}$-物种来编码，确定以这种方式得到的箭图将会很有意思。

内容提要。本文的简要结构如下。在第 2 节中，我们汇集有限张量范畴$\mathscr{C}$的预备知识，包括其模范畴，以及$\mathscr{C}$中的代数、张量代数和除代数等概念。在第 3 节中，我们引入$\mathscr{C}$-物种的概念，并将 Gabriel 定理的弱变体证明为定理 3.16。从第 4 节 起，我们聚焦于融合范畴$\mathscr{D}$。在这一情形下，我们证明了关于根和半单代数的更强结果，并定义了内部 Ext 的概念，以及与有限$\mathscr{D}$-模范畴相关联的有向图。我们的主定理在第 5 节中证明；在该节中，我们假设$\mathscr{D}$是可分融合范畴。

致谢。作者衷心感谢 P. Etingof 让我们结识，从而促成了这项工作的诞生。我们也感谢 K. Coulembier 的重要讨论，以及他提供的例 5.14 ，该例说明了半单 Drinfeld 中心的必要性。我们感谢 J. Külshammer 在术语方面给予的帮助，也感谢 C. Lomp 指引我们关注相关研究 [AMS]。我们还感谢 C. Schweigert、R. Kinser 和 B. Şenol 的有益讨论。E.H. 获澳大利亚研究理事会项目 DP230100654 资助。M.S. 获克努特与爱丽丝·瓦伦堡基金会资助（资助编号：2024.0339）。本工作的很大一部分是在 M.S. 获 Lundström-Åmans stipendiestiftelse 资助期间完成的。

2. 预备知识

2.1. **阿贝尔范畴**。设 k 为代数闭域。除非另有说明，本文始终假设所讨论的所有范畴和函子均为 k-线性的。

备注 2.1。 该文档中的结果似乎很可能在$\Bbbk$ 是完美但不一定代数闭的域时同样成立。然而，这将需要处理额外的困难，例如在命题 4.27中所考察的同构的自然性证明中，以及在小节5.2中，我们需要按照 [Sa，第 3] 节。

定义 2.2. 给定范畴 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，我们用 $\mathscr{A} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{B}$ 表示它们的 k-线性张量积。其对象是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 中对象的对，而态射空间是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 中相应态射空间的张量积。因此，从 $\mathscr{A} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{B}$ 出发的 k-线性函子等价于从 $\mathscr{A} \times \mathscr{B}$ 出发的 k-双线性函子。

定义 2.3. 给定加性范畴 $\mathscr{A}$、$\mathscr{B}$，我们用 $\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$ 表示积范畴，其对象是对 $(X,Y)_{X\in\mathscr{A},Y\in\mathscr{B}}$，而态射空间是 $\mathscr{A}$ 与 $\mathscr{B}$ 中相应态射空间的直和。经由典范投影，$\mathscr{A}\oplus\mathscr{B}$ 是加性范畴的 2-范畴中的双范畴积，并经由单射 $X\longmapsto(X,0)$ 与 $Y\longmapsto(0,Y)$ 同时成为该 2-范畴中的双范畴余积，从而说明我们使用直和符号是合理的。

定义 2.4. 给定一个范畴 $\mathscr{A}$，理想 $\mathfrak{I}$ 在 $\mathscr{A}$ 由子空间 $\mathfrak{I}(X,Y)\subseteq\mathscr{A}(X,Y)$（对所有$X,Y\in\mathscr{A}$）组成，并满足：对于所有 $g\in\mathfrak{I}$ 以及$\mathscr{A}$ 中的态射 h,f，只要 $h\circ g\circ f$有定义，复合态射$h\circ g\circ f$就属于 $\mathfrak{I}$。

商范畴 $\mathscr{A}/\mathfrak{I}$ 是这样一个范畴：其对象由 $\mathrm{Ob}(\mathscr{A}/\mathfrak{I})=\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$给出，态射空间由 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}/\mathfrak{I}}(X,Y)=\mathrm{Hom}_{\mathscr{A}}(X,Y)/\mathfrak{I}(X,Y)$给出，并具有显然的诱导复合。它满足如下泛性质：所有在 $\mathfrak{I}$ 上取值为零的、从 $\mathscr{A}$ 出发的函子，都可经由典范商函子 $\mathscr{A}\longrightarrow\mathscr{A}/\mathfrak{I}$分解。

给定理想 $\mathfrak{I}$和正整数 n，$\mathfrak{I}^n$ 是由 $\mathfrak{I}$ 中态射的 n 重复复合生成的理想。因此，对于一对正整数 m,n，若 $m>n$，则有包含关系$\mathfrak{I}^n(X,Y)\subseteq\mathfrak{I}^m(X,Y)$，对所有 X,Y均成立。换言之，$\mathfrak{I}^n$是 $\mathfrak{I}^m$ 的子理想。

在这种情况下，我们定义 $\mathfrak{I}^m/\mathfrak{I}^n(X,Y)\coloneqq\mathfrak{I}^m(X,Y)/\mathfrak{I}^n(X,Y)$。事实上，$\mathfrak{I}^m/\mathfrak{I}^n$ 是 A 上 预函子 范畴中的商对象，但我们不需要用到这一事实。

定义 2.5. 给定一个阿贝尔范畴 $\mathscr{A}$，记

- $\mathrm{L}(\mathscr{A})$ 为 $\mathscr{A}$ 的全子范畴，其对象是 $\mathscr{A}$ 中的半单对象；
- $\mathrm{proj}(\mathscr{A})$为其投射对象范畴；
- $\mathrm{Irr}(\mathscr{A})$ 为其简单对象同构类所选取的代表元集；
- $[\![\mathscr{A}]\!]$为 $\mathscr{A}$ 的格罗滕迪克群。

定义 2.6. 有限阿贝尔范畴 有限阿贝尔范畴 是一个阿贝尔（k-线性）范畴 $\mathscr{A}$，其中对象均具有有限长度， Hom-空间均为有限维，且 $\mathrm{Irr}(\mathscr{A})$ 是有限的。等价地，$\mathscr{A}\simeq\mathrm{mod}_{\Bbbk}(A)$，其中 A 是有限维（结合、有单位元）k-代数， $\mathrm{mod}_{\Bbbk}(A)$ 是其有限维模范畴。

定义2.7. 给定加性范畴$\mathscr{A}$，其（*Jacobson*）根 是$\mathscr{A}$中唯一的理想，使得对所有 $X\in\mathscr{A}$，空间 $\mathfrak{J}(\mathscr{A})(X,X)$是 $\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(X)$的Jacobson根 $J(\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(X))$。

定义2.8. 设$\mathscr{A}$为有限阿贝尔范畴，并设 $X\in\mathscr{A}$。 X 的投射覆盖 是满态射 $p_0:P\twoheadrightarrow X$，使得任何满足 $p_0\circ\alpha=p_0$的 $\alpha\in\mathrm{End}_{\mathscr{A}}(P)$都是 P的自同构。投射覆盖在相差唯一同构的意义下是唯一的，并且有限阿贝尔范畴的任一对象都具有投射覆盖。

定义2.9. 给定有限阿贝尔范畴$\mathscr{A}$，我们有一个伴随三元组

$$\mathbb{L}(\mathscr{A})\ \underset{\longleftarrow}{\overset{\longleftarrow}{\hookrightarrow}}\ \mathscr{A}\qquad(\text{top},\ \text{soc})$$

此外，复合态射$\mathrm{L}(\mathscr{A})\hookrightarrow\mathscr{A}\twoheadrightarrow\mathscr{A}/\mathfrak{J}(\mathscr{A})$ 是一个范畴等价，在此等价下我们将二者等同。

对象 $X\in$ 根 是伴随单位 $\eta_X:X\to\iota(\mathrm{top}(M))$的核。在等价 $\mathscr{A}\simeq\mathrm{mod}_{\Bbbk}A$下，我们得到 $\mathscr{A}/\mathfrak{J}(\mathscr{A})\simeq\mathrm{mod}_{\Bbbk}(A/J(A))$，而伴随 $\mathrm{top}\dashv\iota$ 是沿投影 $\pi:A\twoheadrightarrow A/J(A)$的归纳与限制之间的伴随。由于我们假设 k 是代数闭域，尤其是完美域，因此存在截面 $\sigma_0:A/J\to A$，以及与限制函子 $\mathrm{res}(\sigma_0)$相关的另一个伴随三元组，其中 P_0 和 I_0 分别对应于取投射覆盖和内投射包：

$$\mathscr{A}\ \underset{\longleftarrow}{\overset{P_0}{\longleftarrow}}\ \underset{I_0}{\overset{\mathrm{res}(\sigma_0)}{\longrightarrow}}\ \mathbb{L}(\mathscr{A})$$

由于复合态射 $\mathrm{res}(\sigma_0)\circ\mathrm{res}(\pi)$ 与恒等函子自然同构，通过取左伴随可得

$$\mathrm{top}(P_0(X))\simeq\mathrm{top}(X)\text{ for all }X,\text{ and }P_0(\mathrm{top}(P))\simeq P\text{ for all projective }P. \tag{2.1}$$

定义 2.10. 范畴$\mathscr{A}$的-完备化 $\mathrm{Ind}(\mathscr{A})$ 定义为$\mathscr{A}$ 上的预层范畴的全子范畴，其中包含所有可表对象的滤过余极限。因此，存在一个从$\mathscr{A}$到 $\mathrm{Ind}(\mathscr{A})$的满忠实嵌入，它是 Yoneda 嵌入的余限制。

有限阿贝尔范畴的 Ind-完备化是一个完备、余完备的阿贝尔范畴，并且$\mathscr{A}$在其中的嵌入是一个正合函子。

命题 2.11. 设$\mathscr{A}$为一个有限半单范畴，并设$\mathscr{B}$ 为一个加性范畴。则两个函子 $F, G : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$ 自然同构，当且仅当 $F(L) \simeq G(L)$，对任意 $L \in \mathrm{Irr}(\mathscr{A})$

证明. 显然，$\mathscr{A}$是 $\mathrm{Irr}(\mathscr{A})$ 在有限直和下的完备化 $\mathrm{Irr}(\mathscr{A})^{\oplus}$，其中我们将 $\mathrm{Irr}(\mathscr{A})$ 视为由$\mathscr{A}$中与 $\mathrm{Irr}(\mathscr{A})$具有相同对象的全子范畴得到的（k-线性）范畴。该结论由将同构 $\mathrm{Fun}_{\Bbbk}(\mathscr{C},\mathscr{B}) \simeq \mathrm{Fun}_{\Bbbk}(\mathscr{C}^{\oplus},\mathscr{B})$与显然的同构$\mathrm{Fun}_{\Bbbk}(\mathrm{Irr}(\mathscr{A}),\mathscr{B}) \simeq \mathscr{B}^{|\mathrm{Irr}(\mathscr{A})|}$相结合而得出。□

2.2. **张量范畴与融合范畴.** 我们遵循 [EGNO] 中的如下两个定义。

定义 2.12. 一个有限张量范畴 是一个有限阿贝尔刚性幺半群范畴 $(\mathscr{C}, \otimes, \mathbb{1}, \mathsf{a})$ 满足$\mathrm{End}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}) \simeq \Bbbk$。

定义 2.13. 一个融合范畴 是半单的有限张量范畴。

在本文档的其余部分，我们固定一个有限张量范畴$\mathscr{C}$（在需要时指明半单性或融合）。从第 4 节 起，我们还将使用一个融合范畴$\mathscr{D}$。

定义 2.14. 我们指出，虽然我们采用与 [EGNO] 相同的关于刚性幺半群范畴中左对偶与右对偶的术语约定，但我们采用相反的关于相关装饰的约定。具体而言，我们将用 $V^{\vee}$ 表示对象 $V \in \mathscr{C}$ 的右对偶，并配备态射 $\mathrm{coev}\colon \mathbb{1} \longrightarrow V^{\vee} \otimes V$ 与 $\mathrm{ev}\colon V \otimes V^{\vee} \longrightarrow \mathbb{1}$；反之亦然。

2.3. **模范畴。** 在本节余下部分中，$\mathscr{C}$表示一个有限张量范 y.

定义 2.15。 对于单式范畴$\mathscr{C}$，一个关于$\mathscr{C}$的左模范畴是一个范畴$\mathscr{M}$，配备作用函子 $\triangleright\colon \mathscr{C} \otimes_{\Bbbk} \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{M}$，将 (V, X)送到 $V \triangleright X$，并配备相干同构$(V \otimes W) \triangleright X \xrightarrow{\sim} V \triangleright (W \triangleright X)$和 $\mathbb{1} \triangleright X \xrightarrow{\sim} X$；详情见 [EGNO，定义 7.1。2]关于$\mathscr{C}$的右模范畴以类似方式定义。

定义 2.16。 给定$\mathscr{C}$-模范畴 $\mathscr{M}, \mathscr{N}$，一个$\mathscr{C}$-模函子，从 $\mathscr{M}$ 到 $\mathscr{N}$ 是一个函子$F\colon \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{N}$，并配备相干同构 $V \triangleright F(X) \xrightarrow{\sim} F(V \triangleright X)$；详情见 [EGNO，定义 7.1。2] 。

结合 [Os，注记 4] 与 [Kel，定理 1。2], 我们得到如下结论：

引理 2.17。 $\mathscr{C}$-模函子的伴随（左伴随或右伴随）本身也是一个$\mathscr{C}$-模函子。

定义 2.18。 给定一个对象 $X \in \mathscr{M}$，从 Hom 到 X的内 函子是函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(X, -)$的右伴随，其中 $- \triangleright X\colon \mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{M}$。对于 $Y \in \mathscr{M}$，从 Hom 到 X 的 Y内函子是对象$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(X, Y) \in \mathscr{C}$。我们也记作 $\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(X) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(X, X)$。

如果对于所有 $X \in \mathscr{M}$， $\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(X, -)$都存在，我们就称$\mathscr{C}$-模范畴$\mathscr{M}$ 是闭 的。

以下结论在对称情形下已于 [Ko，§1] 中得到证明，但这一结果以及 [Ko] 中的证明也可原样推广到非对称$\mathscr{C}$的情形；此时，$\mathscr{C}$ 中的富化是指在 [St], 的双范畴中的富化，并将其应用于由$\mathscr{C}$解环化得到的单对象双范畴 $\mathbf{B}\mathscr{C}$。

命题 2.19. 设$\mathscr{M}, \mathscr{N}$ 为闭$\mathscr{C}$-模范畴。赋值 $\mathrm{Ob}(\mathscr{M}) := \mathrm{Ob}(\mathscr{M})$ 和$\underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(X, Y) := \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(X, Y)$定义了一个$\mathscr{C}$-富集范畴$\mathscr{M}$。给定一个$\mathscr{C}$-模函子 $F\colon \mathscr{M} \longrightarrow \mathscr{N}$，其复合

(2.2)

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(X, Y)) & & & & \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(V, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{N}}(F(X), F(Y))) \\
\downarrow \simeq & & & & \simeq \uparrow \\
\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(V \triangleright X, Y) & \xrightarrow{F_{V \triangleright X, Y}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}}(F(V \triangleright X), F(Y)) & \xrightarrow{- \circ \varphi_{V, F(X)}} & \mathrm{Hom}_{\mathscr{N}}(V \triangleright F(X), F(Y))
\end{array}$$

由米田引理诱导出一个态射 $F_{X,Y}:\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{N}}(F(X),F(Y))$。赋值$\mathrm{Ob}(F)=\mathrm{Ob}(F)$和$F_{X,Y}:=F_{X,Y}$定义了一个$\mathcal{C}$-富集函子 $F:\mathcal{M}\longrightarrow\mathcal{N}$。

特别地，$F_{X,_X}$是$\mathcal{C}$ 中的代数对象态射（参见定义 2.27）。

引理 2.20。 设 $\mathcal{M}$、$\mathcal{N}$ 是闭的$\mathcal{C}$-模范畴。当且仅当对所有 X， Y， F 是忠实满函子且 $F_{X,\,Y}$ 可逆。

证明。 若 F是忠实满函子，则等式 2.2 中的态射均可逆，因此 $F_{X,\,Y}$也可逆，因为 Yoneda 嵌入反映同构。若 $F_{X,\,Y}$可逆，则等式 2.2中的态射也均可逆，因此 $F_{X,\,Y}$也可逆，因为它可通过在 $V=\mathbb{1}$ 中令等式 2.2得到。□

定义 2.21。 有限$\mathcal{C}$-模范畴 是$\mathcal{C}$ 上的模范畴，且其为有限阿贝尔范畴，并且对每个 $X\in\mathcal{M}$， 函子 $-\triangleright X$ 都是右正合的。

特别地，对所有 $X\in\mathcal{M}$， 作为 $-\triangleright X$ 的右伴随而定义的内部 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,-)$ 都存在。换言之，有限的$\mathcal{C}$-模范畴是闭的。

备注 2.22. 有限$\mathcal{C}$-模范畴的标准定义（参见 [EGNO，定义 7.3。1]）假设函子 $-\triangleright X$ 满足更强的正合条件。我们的较弱条件与此等价；见 推论 2.32。

注意，当$\mathcal{C}$ 是半单的（即融合的）时，内部 Hom 很容易计算。根据定义，它是 $-\triangleright X$的右伴随，因此有 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(L\triangleright X,Y)\simeq\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L,\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y))$。遍历$\mathcal{C}$中的所有简单对象可得，

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)\simeq\bigoplus_{L\in\mathrm{Irr}(\mathcal{C})}L^{\oplus d_L}\tag{2.3}$$

其中 $d_L:=\dim_{\Bbbk}\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(L\triangleright X,Y)=\dim_{\Bbbk}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(L,\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y))$。

定义 2.23。 若对象 $X\in\mathcal{M}$ 的内部 Hom 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,-)$是正合的，则称其为$\mathcal{C}$-投射的 。

若 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(X,Y)=0$ 蕴含 $Y=0$，则称一个$\mathcal{C}$-投射对象为$\mathcal{C}$-投射生成元。

Note 即若$\mathcal{C}$是融合范畴，则一个对象是$\mathcal{C}$-投射的当且仅当它是投射的 .

下述事实已见于 [EO，推论 3.15]；参见 [SZ，命题 4.3，命题 4.5]以了解在稍更一般情形下的详细证明。

命题 2.24. 有限$\mathcal{C}$-模范畴$\mathcal{M}$ 中的对象 X 是$\mathcal{C}$-投射的，当且仅当对任意投射对象 $P\in\mathcal{C}$，对象 $P\triangleright X$ 是投射的，并且它是$\mathcal{C}$-投射生成元当且仅当$\mathcal{M}$ 的任意投射对象都是某个形如 $P\triangleright X$ 的对象的直和项。

鉴于命题 2.24，下述内容是对 [EO，定义 3.1]的改述。

定义 2.25. 有限的$\mathcal{C}$-模范畴$\mathcal{M}$ 称为正合 的，如果它的所有对象都是$\mathcal{C}$-投射的 e.

下面的引理显然成立。

引理 2.26. 半单$\mathcal{C}$-模范畴自动是正合的，因为它的所有对象都是投射对象。若$\mathcal{C}$ 是融合范畴，则$\mathbb{1}$ 是投射对象，因此正合$\mathcal{C}$-模范畴中的任意对象都是投射对象，这表明融合范畴上的正合模范畴必然是半单的。

2.4. 模范畴就是模的范畴。

定义 2.27. $\mathcal{C}$中的一个代数对象 由一个对象 $A\in\mathcal{C}$ 以及一个乘法映射$\mu:A\otimes A\longrightarrow A$ 和一个单位映射 $\eta:\mathbb{1}\longrightarrow A$构成，并满足 [EGNO定义 7.8.1]中的结合律和幺元性公理。与 [EGNO], 类似，我们将$\mathcal{C}$ 中的代数对象简称为C 中的代数。

定义 2.28. 代数同态有一个显然的概念，我们将$\mathcal{C}$ 中的代数连同这些态射所构成的范畴记为$\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$。

定义 2.29. 给定$A \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$，一个右 A-模（在$\mathscr{C}$ 中）是一个对象 $M \in \mathscr{C}$，连同一个作用映射 $\triangledown_M \colon M \otimes A \longrightarrow M$，满足乘法性与幺元性公理，参见 [EGNO，定义 7.8。5]。类似地，可以定义左 A-模。

定义 2.30. 右 A-模的态射有一个显然的概念。我们将右 A-模的范畴简单记作 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$。

$\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$右 A-模的范畴在典范意义下是一个左$\mathscr{C}$-模范畴；在严格情形下，它简单地由 $V \triangleright (M, \triangledown_M) \coloneqq (V \otimes M, V \otimes \triangledown_M)$ 定义。

下面是对 [EGNO，定理 7.10。1]: 的略微改述

定理2.31([EGNO，定理 7.10。1])。若 P 是有限$\mathscr{C}$-模范畴$\mathscr{M}$ 的一个$\mathscr{C}$-投射生成元，则函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(P, -) \colon \mathscr{M} \longrightarrow \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\mathrm{End}_{\mathscr{M}}(P))$ 是$\mathscr{C}$-模范畴之间的一个等价。

此外，$\mathscr{M}$ 的投射生成元必然也是 $\mathscr{M}$ 的一个$\mathscr{C}$-投射生成元。因此，对任意有限$\mathscr{C}$-模范畴，都存在一个 $A \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$，使得 $\mathscr{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$。

推论 2.32. 对于有限的$\mathscr{C}$-模范畴$\mathscr{M}$，函子 $- \triangleright -$ 在两个变量上都是正合的 *les.*

例 2.33. 遗忘函子将 $\mathrm{vect}_G \longrightarrow$ 映到vect，使 vect 成为一个 vect_G-模范畴；等价地，vect 配备了一个（强）范畴 G-作用，其中对所有 $g \in G$ 和$V \in \mathrm{vect}$，都有 $g \triangleright V = V$。于是 $\mathrm{vect} \simeq \mathrm{mod}_{\mathrm{vect}_G}(\mathrm{End}_{\mathscr{M}}(\Bbbk))$；利用公式2.3 可证明 $\mathrm{End}_{\mathscr{M}}(\Bbbk) = \Bbbk[G]$；这里，$\Bbbk[G]$ 被视为一个 G-分次代数，其中每个 $g \in G$ 都位于 g次。此结果是 Hopf 模基本定理的一个特例，该定理应用于由群代数的对偶给出的 Hopf 代数。

2.5. **双模、理想与代数的$\mathscr{C}$-根。**

定义 2.34 ([EGNO，定义 7.8.25])。给定 $A, B \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$，一个 A-B-双模对象，属于$\mathscr{C}$，是一个对象 $M \in \mathscr{C}$，它既是右 B-模也是左 A-模，并且两个作用彼此交换。

双模态射是一个$\mathscr{C}$ 中的态射，同时也是 A-模和 B-模的态射。我们将 A-B-双模的范畴记为 $\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(A, B)$。

定义 2.35。给定一个 A-B-双模 M，$\mathscr{C}$-模函子 $- \otimes_A M \colon \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A) \longrightarrow \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(B)$在对象上的定义为 $N \otimes_A M = \mathrm{coeq}(N \otimes \triangledown_M, \triangledown_N \otimes M)$。右 B-作用继承自 M 上的作用，并且由 $\otimes$ 的结合律和（右）正合性保证其定义良好。它通过余极限的函子性延拓到态射上。由 $\otimes$ 的结合律可知，它是一个$\mathscr{C}$-模函子。

我们称 $A, B \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$为 *Morita* 等价，如果存在一个$\mathscr{C}$-模等价，将 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$与 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(B)$联系起来。由 [EGNO，命题 7.11.1], 可直接推出，等价地，存在双模${}_A M_B, {}_B N_A$，其间有双模同构 $A \simeq M \otimes_B N$和 $B \simeq N \otimes_A M$。

注意，如果我们改为考虑 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 中的代数，那么实现 Morita 等价的双模也必须是 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 中的双模，而不能仅仅是$\mathscr{C}$ 中的双模。

定义 2.36. $\varphi : A \to B$ 在 $\mathrm{Alg}(\mathscr{C})$ 中的一个态射赋予 B 上来自 A 的左作用和右作用，而这些作用与 B 在自身上的正则作用相交换。函子 $- \otimes_A B \colon \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A) \longrightarrow \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(B)$，记作 $\mathrm{ind}(\varphi)$，称为沿 归纳，它有一个正合右伴随 $\mathrm{res}(\varphi)$: 该伴随将一个 B-模 M 映射为一个 A-模，其 A-作用由 $M \otimes A \xrightarrow{M \otimes \varphi} M \otimes B \xrightarrow{\triangledown_M} M$ 给出。

定义 2.37. 对于 $A \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$， A 中的一个（双边）理想是 $\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(A, A)$ 中 A 的一个子对象。

定义 2.38. 给定 $M \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B, A)$ 以及 A中的一个理想 I，我们将态射的像记为 MI

$$M \otimes I \hookrightarrow M \otimes A \xrightarrow{\triangledown_M} M.$$

因此 由于 $\otimes$满足结合律和（右）正合性，对象 MI 是 M的一个 B-A-子双模 .

命题 2.39. 给定 A中的一个理想 I，商 A/I 仍是$\mathscr{C}$ 中的代数，而态射$\pi \colon A \longrightarrow A/I$ 是$\mathrm{Alg}(\mathscr{C})$中的态射。函子 $\mathrm{res}(\pi)$ 是满、忠实的，其本质像可刻画为由满足 $MI = 0$ 的 $M \in \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 组成。

定义 2.40. 代数范畴 $\mathrm{Alg}(\mathscr{C})$ 中的二元积（更一般地，有限积）由$\mathscr{C}$提升而来：给定 A_1，$A_2 \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$，积代数 $A_1 \times A_2 \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$ 由$\left(A_1 \oplus A_2, \begin{pmatrix} \mu_1 & 0 \\ 0 & \mu_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right)$给出。在$\mathscr{C}$中，余积$A_1 \oplus A_2$上的典范单射 $\iota_1 \colon A_1 \longrightarrow A_1 \oplus A_2$和 ι_2将 A_1和 A_2实现为 $A_1 \times A_2$中的理想，因此也是 $A_1 \times A_2$的非幺子代数。我们将幂等自同态 $\iota_1 \circ \pi_1$ 和 $\iota_2 \circ \pi_2$ 分别记为 e_1 和 e_2。

命题 2.41. 存在一个等价 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_1 \times A_2) \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_1) \oplus \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_2)$。

证明。 对于对象 $(M_1, M_2) \in \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_1) \oplus \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_2)$，因此 $M_i \in \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_i)$，我们将对象 $M_1 \oplus M_2$ 与之对应，它属于 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_1 \times A_2)$，并带有显然的 $A_1 \times A_2$-模结构。反过来，我们将$N \in \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A_1 \times A_2)$映到一对 $(\varepsilon_1(N), \varepsilon_2(N))$，其中 ε_i是端同态

$$N \xrightarrow{\sim} \mathbb{1} \otimes N \xrightarrow{\eta_{A_1 \times A_2}} (A_1 \times A_2) \otimes N \xrightarrow{e_i \otimes N} (A_1 \times A_2) \otimes N \xrightarrow{\nabla_N} N.$$

很容易将这些对应扩展为函子，并证明若 $i \neq j$，则 $\varepsilon_i(M_i) = M_i$ 和 $\varepsilon_i(M_j) = 0$。还需证明 $N \simeq \varepsilon_1(N) \oplus \varepsilon_2(N)$。

由于 ∇_N是满态射， $N = \mathrm{Im}(\varepsilon_1 N) + \mathrm{Im}(\varepsilon_2 N)$。为证明该和是直和，我们证明$\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1 = 0$；由对称性可知，我们将得到 $\varepsilon_1 \circ \varepsilon_2 = 0$。令 $A := A_1 \times A_2$。下图中除右下方的面外，其余各面的交换性均由交换律推出；右下方的面则由 N上的作用的乘法性推出：

$$\begin{array}{ccccccccc}
N & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{1} \otimes N & \xrightarrow{\eta_A \otimes N} & A \otimes N & \xrightarrow{e_2 \otimes N} & A \otimes N & \xrightarrow{\nabla_N} & N \\
\downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} & & \downarrow{\scriptstyle \simeq} \\
\mathbb{1} \otimes N & \xrightarrow{\simeq} & \mathbb{1} \otimes \mathbb{1} \otimes N & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \eta_A \otimes N} & \mathbb{1} \otimes A \otimes N & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes e_2 \otimes N} & \mathbb{1} \otimes A \otimes N & \xrightarrow{\mathbb{1} \otimes \nabla_N} & \mathbb{1} \otimes N \\
\downarrow{\scriptstyle \eta_A \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_A \otimes \mathbb{1} \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_A \otimes A \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_A \otimes A \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_A \otimes N} \\
A \otimes N & \xrightarrow{\simeq} & A \otimes \mathbb{1} \otimes N & \xrightarrow{A \otimes \eta_A \otimes N} & A \otimes A \otimes N & \xrightarrow{A \otimes e_2 \otimes N} & A \otimes A \otimes N & \xrightarrow{A \otimes \nabla_N} & A \otimes N \\
\downarrow{\scriptstyle e_1 \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle e_1 \otimes \mathbb{1} \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle e_1 \otimes A \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle e_1 \otimes A \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle e_1 \otimes N} \\
A \otimes N & \xrightarrow{\simeq} & A \otimes \mathbb{1} \otimes N & \xrightarrow{A \otimes \eta_A \otimes N} & A \otimes A \otimes N & \xrightarrow{A \otimes e_2 \otimes N} & A \otimes A \otimes N & \xrightarrow{A \otimes \nabla_N} & A \otimes N \\
 & & & & & & \downarrow{\scriptstyle \mu_A \otimes N} & & \downarrow{\scriptstyle \nabla_N} \\
 & & & & & & A \otimes N & \xrightarrow{\nabla_N} & N
\end{array}$$

这表明 $\varepsilon_2 \circ \varepsilon_1$ 等于复合态射 $\nabla_N \circ (\mu_A \otimes N) \circ (e_1 \otimes e_2 \otimes N) \circ (\eta_A \otimes \eta_A \otimes N)$。然而，根据 μ_A 的定义，我们有 $\mu_A \circ (e_1 \otimes e_2) = 0$，从而证明了该断言。□

记号 2.42. 在本文余下部分中， A 始终表示有限张量范畴中的一个代数。此外，给定一个代数 $A \in \mathscr{C}$，我们引入以下简写记号：

- $\mathrm{proj}_{\mathscr{C}}(A)$是 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 中投射对象构成的范畴。
- $\mathrm{Irr}(A)$ 是 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 中简单对象（同构类的代表元）的集合。
- $\mathrm{L}(A)$ 是 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 中半单对象构成的范畴。
- $\mathrm{Hom}_{-A}(M, N)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)}(M, N)$。

定义 2.43. 代数 $A \in \mathscr{C}$称为单，如果它没有真（既非零也不等于 A 本身的）双边理想。

定义 2.44. 代数 $A \in \mathscr{C}$称为半单，如果它同构于若干单代数的有限直积。

注记 2.45. 设$\mathscr{C}$此外还是一个融合范畴。半单代数的一个常见定义A 是： $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 是一个半单范畴；参见例如 [Os，定义 9]。这两种定义是等价的——参见定理 2.52与推论 4.8。

定义 2.46. 给定理想 I在 A中以及一个正整数 k，我们归纳地定义 I^k为 $I^{k-1}I$，依照定义 2.38。理想 I称为幂零，如果存在 m 使得 $I^m = 0$。

定义 2.47. $\mathscr{C}$-稳定理想 是 $\mathrm{proj}_{\mathscr{C}}(A)$ 中的一个理想 $\mathfrak{I}$，它属于加性范畴 $\mathrm{proj}_{\mathscr{C}}(A)$，并且对于 $f \in \mathfrak{I}$和 $P \in \mathscr{C}$ 投射，态射 $P \triangleright f$ 仍属于 $\mathfrak{I}$。

定义 2.48. 函子 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$: $\mathrm{proj}(\mathscr{C}) \longrightarrow \mathsf{vect}$的一个混合子函子是 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$ 的子对象 I，它位于此类函子的范畴中，并且对于 P、 $Q \in \mathrm{proj}(\mathscr{C})$ 以及态射 $g \in \mathrm{I}(P)$ 和 $f \in \mathrm{Hom}_{-A}(P \triangleright A, Q \triangleright A)$，态射

$$Q \xrightarrow{\sim} Q \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{Q\otimes\eta} Q \otimes A \xrightarrow{f} P \otimes A \xrightarrow{g\otimes A} A \otimes A \xrightarrow{\mu} A$$

属于 $\mathrm{I}(Q)$，并且左 A-模态射也满足类似条件。

定义 2.49。 $\mathscr{C}$ p-稳定理想 $\mathfrak{J}_{\mathscr{C}}(A)$（记作 $\mathrm{Rad}_A^{\mathscr{C}}$在 [CSZ]中）由 2.4 唯一确定

$$\mathfrak{J}_{\mathscr{C}}(A)(P \triangleright A, P' \triangleright A) = \left\{ f \in \mathrm{Hom}_{-A}(P \triangleright A, P' \triangleright A) \;\middle|\; \begin{array}{l} Q \triangleright f \in \mathfrak{J}(\mathrm{proj}_{\mathscr{C}}(A))(Q \otimes P \triangleright A, Q \otimes P' \triangleright A) \\ \text{for all } Q \in \mathrm{proj}(\mathscr{C}) \end{array} \right\}.$$

对于 $P, P' \in \mathrm{proj}(\mathscr{C})$。

定理 2.50。 固定一个满态射 $q : Q \twoheadrightarrow \mathbb{1}$，其中 Q 为投射对象。根据 [CSZ，第 5], 节，对于 $\mathrm{proj}_{\mathscr{C}}(A)$中的$\mathscr{C}$ p-稳定理想 $\mathfrak{I}$，可通过将 $\mathbb{S}(\mathfrak{I})$定义为如下形式的态射空间，得到 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$的一个混合子函子 $\mathbb{S}(\mathfrak{I})$:

$$P \xrightarrow{\sim} P \otimes \mathbb{1} \xrightarrow{P\otimes\eta} P \otimes A \xrightarrow{g} Q \otimes A \xrightarrow{q\otimes A} \mathbb{1} \otimes A \xrightarrow{\sim} A,$$

其中 $g \in \mathfrak{I}(P \otimes A, Q \otimes A)$。上文定义的混合子函子 $\mathbb{S}(\mathfrak{I})$ 与 Q和 $q : Q \twoheadrightarrow \mathbb{1}$的选取无关。

此外，表示混合子函子 I 在 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(-,A)$上的右正合扩张的对象 I是 A中的一个理想。此外，这些映射

$$\left\{\mathscr{C}\ p\text{稳定理想与}\mathrm{proj}_{\mathscr{C}}(A)\right\} \xrightarrow{\mathbb{S}} \{\text{双边理想的混合子函子}$$

是保持乘法的偏序集同构。

定义 2.51 ([CSZ，定义 6。9])。 Jacobson 根 $J(A)$ of A 被定义为 A中对应于 $\mathfrak{J}_{\mathscr{C}}(A)$ 的理想，该对应关系由 定理 2.50 中的双射给出。

定理 2.52 ([CSZ，定理 7。1])。 根 $J(A)$ 是 A中的最大幂零理想。以下条件等价:

(i) $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 是一个正合$\mathscr{C}$-模范畴。
(ii) A 是半单的。*(iii)* A 没有非平凡的幂零理想。*(iv)* $J(A) = 0$。

注意，以下陈述的证明并未使用$\mathscr{C}$ 中幺半结构的正合性。

引理 2.53。 设 $A \in \mathrm{Alg}(\mathrm{Ind}(\mathscr{C}))$，设 I 是 A 中的一个双边理想，且 $\pi : A \to A/I$ 是相应投影。则对于限制函子 $\mathrm{res}(\pi) : \mathrm{mod}_{\mathrm{Ind}(\mathscr{C})}(A/I) \longrightarrow \mathrm{mod}_{\mathrm{Ind}(\mathscr{C})}(A)$ 和 $L \in \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A/I))$，有 $\mathrm{res}(\pi)(L) \in \mathrm{Irr}(\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A))$。换言之，沿着 π 对一个简单A/I-模进行限制所得的是一个简单 A-模。

证明。 首先注意，在阿贝尔范畴中，对于一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{f} & M' \\ \downarrow h & & \downarrow h' \\ N & \xrightarrow[g]{} & N' \end{array}$$

~若 h' 是单态射，则映射 $h' : \mathrm{Im}(f) \longrightarrow \mathrm{Im}(g)$ 也是单态射。现在只需将这一观察应用于图表 $\mathrm{mod}_{\mathrm{Ind}(\mathscr{C})}(A)$ 中的单态射 f

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{\nabla_M}{\frown} & & \\ M\otimes I & \longrightarrow & MI & \rightrightarrows & M \\ {\scriptstyle f\otimes I}\downarrow & & {\scriptstyle \widetilde{f}} & & {\scriptstyle f}\downarrow \\ N\otimes I & \longrightarrow & NI & \rightrightarrows & N \\ & & \underset{\nabla_N}{\smile} & & \end{array}$$

~以找到满态射 $f : MI \hookrightarrow NI$。由此可知，若 $NI = 0$（等价地， N属于 $\mathrm{res}(\pi)$ 的本质像）且 M 是 M 的子对象，则 $MI = 0$。因此， $\mathrm{res}(\pi)$ 的本质像在取子对象下是闭的，从而该断言成立。□

定理 2.54 ([CSZ，定理 8.9，命题 8.13]). $A/J(A)$ 的根为零： $J(A/J(A)) = 0$。因此，$\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A/J(A))$ 是一个正合的 $\mathscr{C}$-模范畴。（完全忠实的 $\mathscr{C}$-模）限制函子 $\mathrm{res}(\pi)$ 沿投影 $\pi : A \twoheadrightarrow A/J(A)$ 的像由形如 $Q \triangleright L$ 的对象的子商组成，其中 $Q \in \mathrm{proj}(\mathscr{C})$ 且 $L \in \mathbb{L}(A)$。

引理 2.55. 设 I是 A 中的一个理想。若 A/I是半单的，则 $J(A) \subseteq I$。

证明。 设 $\pi : A \twoheadrightarrow A/I$ 为投影代数态射。因此，它赋予 A/I 一个 A-A-双模结构，使得 π 成为一个 A-A-双模态射。

像 $\pi(J(A)) := \mathrm{Im}(J(A) \hookrightarrow A \twoheadrightarrow A/I)$ 是此类双模态射的像，因此是 A/I 的一个 A-A-子双模。容易验证， I 对其左右两侧的作用均为零，因此它是 A/I 中的一个双边理想。此外，由于 $\pi(J(A)^2)$ 是以下复合态射的像

$$J(A)\otimes J(A) \xrightarrow{\iota\otimes\iota} A\otimes A \xrightarrow{\mu_A} A \xrightarrow{\pi} A/I$$

且 $\pi(J(A))^2$ 是以下复合态射的像

$$J(A)\otimes J(A) \xrightarrow{\iota\otimes\iota} A\otimes A \xrightarrow{\pi\otimes\pi} A/I\otimes A/I \xrightarrow{\mu_{A/I}} A/I,$$

我们得到 $\pi(J(A)^2) = \pi(J(A))^2$，因为 π 是代数态射。归纳可得 $\pi(J(A)^m) = \pi(J(A))^m$，这说明 $\pi(J(A))$ 是幂零的。因此 $\pi(J(A)) \subseteq J(A/I) = 0$，这说明 $\pi(J(A)) = 0$，进而说明 $J(A) \subseteq I$。□

引理 2.56. 设 $A, B \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$。假设 A 是单代数。那么对于任意 A-B-双模 M，函子 $-\otimes_A M : \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A) \to \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(B)$反映零对象：若 $N \in \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$满足 $N\otimes_A M = 0$，则 $N = 0$。

证明. 由于 A 是单代数， $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 是不可分解的正合 $\mathscr{C}$-模范畴。因此，对于任意 $M \in \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$，存在一个投射对象 $P \in \mathscr{C}$ ，使得 $P \triangleright M$是$\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$的投射生成元。若 $M\otimes_A N = 0$，则 $0 = P \triangleright (M\otimes_A N) \simeq (P \triangleright M)\otimes_A N$。因此，右正合函子 $-\otimes_A N$将一个投射生成元映为零，进而将 $\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)$ 的每个对象都映为零。特别地，$0 = A\otimes_A N \simeq N$。□

2.6. **张量代数**。

定义 2.57 ([EKW，定义 3.2])。 对于 $A \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$ 以及 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 中的一个 A-A-双模 E，张量代数 $T_A(E)$ 是 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$ 中由 $T_A(E) := \bigoplus_{m=0}^{\infty} E^{\otimes_A m}$ 给出的代数，其乘法由映射 $E^{\otimes_A m}\otimes E^{\otimes_A n} \twoheadrightarrow E^{\otimes_A m}\otimes_A E^{\otimes_A n}$ 给出。

张量代数 $T_A(E)$ 自然带有 $\mathbb{Z}_{\geq 0}$-分次：对于 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，通过 $T_A(E)_m = E^{\otimes_A m}$。我们也将 $T_A(E)_{\geq r} := \bigoplus_{m=r}^{\infty} T_A(E)_m$记作

命题 2.58。 代数态射 $\varphi : T_A(E) \to B$ 由 $\varphi_0 : A \to B$ 和$\varphi_1 : E \to B$唯一确定。映射 φ_0 定义了一个从 A 到 B 的代数态射，而 φ_1 定义了一个 A-A-双模态射，其中 B 继承自 φ_0 的 A-A-双模结构。

反过来，任意一对 (φ_0, φ_1)，其中 $\varphi_0 \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})(A, B)$和 $\varphi_1 \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(A, A)(E, B)$，都定义了代数态射 $(\varphi_0, \varphi_1, \varphi_1^{\otimes_{A^2}}, \cdots) : T_A(E) \to B$，从而建立起双射对应。

命题 2.59。 由于右 A-模结构在 M 等价于一个代数对象的态射 $A \to \mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(M,M)$，命题 2.58 给出的对应关系产生了 [EKW，命题 3。5], 中右 $T_A(E)$-模结构在 M 与由一个右 A-模结构在 M 和一个 A-模态射 $M \otimes_A E \to M$组成的数对之间的对应关系。

引理 2.60. 设 I 是 $T_A(E)$ 的一个理想，满足 $T_A(E)/I \in \mathrm{Alg}(\mathscr{C})$；换言之， $T_A(E)/I$是 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$的紧对象。那么存在 $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，使得 $\langle E^{\otimes_A m}\rangle := T_A(E)_{\geq m}$ 包含于 I。

证明。 给定 $T_A(E)$的理想 I、I'，我们用 $I + I'$表示 $\left\{I, I'\right\}$ 在 $T_A(E)$ 的双边理想偏序集中的上确界。这个上确界存在，因为 $T_A(E)$-$T_A(E)$-双模范畴是阿贝尔范畴——注意，这一运算并未用到$\mathscr{C}$ 的幺半结构。类似地，论证的其余部分也不使用幺半结构。

我们有一个无限的包含关系下降链

$$I + \left\langle E^{\otimes_A 2}\right\rangle \supseteq I + \left\langle E^{\otimes_A 3}\right\rangle \supseteq \cdots$$

它产生一个无限的包含关系链

$$\left(I + \left\langle E^{\otimes_A 2}\right\rangle\right)/I \supseteq \left(I + \left\langle E^{\otimes_A 3}\right\rangle\right)/I \supseteq \cdots$$

$T_A(E)/I$-$T_A(E)/I$-双模。由于 $\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_A(E)/I, T_A(E)/I)$是一个有限阿贝尔范畴，其中所有对象都是阿廷的，因此后一个链必定终止，从而证明了这一断言。□

定义 2.61. $T_A(E)$ 的理想 I称为容许的，如果 I 包含于 $T_A(E)_{\geq 2}$，且存在 $m \in \mathbf{Z}_{\geq 0}$，使得 $\langle E^{\otimes_A m}\rangle := T_A(E)_{\geq m}$ 包含于 I。

我们称商 $T_A(E)/I$ 为容许商，如果 I 是容许的。

注记2.62。根据定义 2.61， $T_A(E)$ 的容许商是$\mathscr{C}$ 中的代数对象，而非 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$中的对象。换言之，它是 $\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$中的紧对象。

引理 2.63. 设 I 是 $T_A(E)$ 的容许理想， $\pi : T_A(E) \to T_A(E)/I$ 是相应投影。设 $M \in \mathrm{Irr}(T_A(E)/I)$。则 $\mathrm{res}(\pi)(M)E = 0$。

证明。 根据引理 2.53，我们有 $\mathrm{res}(\pi)(M)$ 是简单对象。因此，我们有 $\mathrm{res}(\pi)(M)E = 0$ 或$\mathrm{res}(\pi)(M)E = M$。假设后一种情况成立。那么

$$M \otimes (E \otimes_A E) \twoheadrightarrow M \otimes_A (E \otimes_A E) \xrightarrow{\simeq} (M \otimes_A E) \otimes_A E \xrightarrow[\simeq]{\nabla^1_M \otimes_A E} M \otimes_A E \xrightarrow[\simeq]{\nabla^1_M} M$$

这表明 $MT_A(E)_{\geq 2} = M$，并且通过归纳可得 $MT_A(E)_{\geq k} = M$ 对所有 k。然而，由 $MI = 0$，这与 引理 2.60矛盾。因此，我们必须有 $\mathrm{res}(\pi)(M)E = 0$。 □

推论2.64。 设 I 是 $T_A(E)$的一个容许理想。令

$$\varphi : (T_A(E)/I)/(\langle E\rangle/I) \xrightarrow{\sim} A$$

为显然诱导的代数对象同构。则全忠实函子

$$\mathbb{L}(\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(A)) \to \mathbb{L}(\mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(T_A(E)/I))$$

r从 $\mathrm{res}(\varphi)$ 限制到半单对象构成的子范畴后，是一个范畴等价。

利用 推论2.64，可以推出下面的结论；我们选择另行给出证明 f.

命题 2.65. 设 B 是$\mathscr{C}$ 中的半单代数，设 $E \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B,B)$，并设 I 是 $T_B(E)$ 的容许理想。那么 $J(T_B(E)/I) = \langle E\rangle/I$。

证明。 根据引理 2.56，对任意 $n \geq 0$，我们有 $\langle E\rangle^n = \langle E^{\otimes_B n}\rangle$ 中理想的等式 $T_B(E)$。由 引理 2.60，我们可以选取 m 使得 $\langle E\rangle^m \subseteq I$。根据交换性

$$\begin{array}{ccccc} I^{\otimes n} & \hookrightarrow & T_B(E)^{\otimes n} & \xrightarrow{\mu_n} & T_B(E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \langle E\rangle^{\otimes n} & \hookrightarrow & T_B(E)^{\otimes n} & \xrightarrow{\mu_n} & T_B(E) \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ (\langle E\rangle/I)^{\otimes n} & \hookrightarrow & (T_B(E)/I)^{\otimes n} & \xrightarrow{\mu_n} & T_B(E)/I \end{array}$$

我们得到熟悉的等式 $(\langle E\rangle/I)^n = (\langle E\rangle^n + I)/I$，对任意 n。这表明 $(\langle E\rangle/I)^m = 0$ 对于先前选取的 m，因此 $\langle E\rangle/I$ 根据 定理 2.52是幂零的。因此 $\langle E\rangle/I \subseteq J(T_B(E))$ 另一方面，存在一个显然的同构 $(T_B(E)/I)/(\langle E\rangle/I) \simeq B$，因此商 $(T_B(E)/I)/(\langle E\rangle/I)$ 是半单的。根据 引理 2.55 这表明 $J(T_B(E)) \subseteq \langle E\rangle/I$，从而证明了该结论。 □

2.7. **除代数**。

定义 2.66. 有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 中的代数 A 是除代数，若 A 作为右A-模是简单对象。

关于幺半范畴中除代数性质的综述，参见 [KW]。我们将考虑 [KW命题 36]的一个略微推广：

命题 2.67。设 A 是有限张量范畴中的一个代数。以下各项等价：

(i) A 是一个除代数。*(ii)* $A \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$ 对于某个正合$\mathcal{C}$-模范畴$\mathcal{M}$ 中的简单对象 L。*(iii)* $A \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$对于某个$\mathcal{C}$-模范畴$\mathcal{M}$ 中的简单对象 L。

证明。假设 A 是一个除代数。我们有 $A \simeq \mathrm{End}_A(A)$，这证明了 （i）项 蕴含 （iii）项。由于除代数是简单对象（因而也是半单的），由 $\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A)$ 是一个正合$\mathcal{C}$-模范畴，根据 定理 2.50，因此 （i）项 也蕴含 （ii）项。

设$\mathcal{M}$ 是一个正合$\mathcal{C}$-模范畴。设 L是$\mathcal{M}$中的一个简单对象，并设$\mathcal{M}_L$是$\mathcal{M}$中包含 L的不可分解直和项。于是我们得到一个$\mathcal{C}$-模范畴之间的等价

$$\mathcal{M}_L \xrightarrow[\sim]{\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(L,-)} \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}\,\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$$

其映射 L 到 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$。由于 L 是 $\mathcal{M}_L$中的一个简单对象，因此 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$ 是一个简单$\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$-模。于是，条件 (ii) 推出 条件 (i)。

现在设 $\mathcal{M}$ 是一个不一定正合的$\mathcal{C}$-模范畴，并设 L 是 $\mathcal{M}$ 中的一个简单对象。与上文类似，我们可以假设 $\mathcal{M}$ 是不可分解的。设 $A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 满足 $\mathcal{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A)$。由于范畴 $\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A/J(A))$ 是$\mathcal{C}$- 模子范畴 $\mathcal{M}$ (参见 定理 2.54)，由 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L) \simeq \mathrm{End}_{A/J(A)}(L)$，根据 引理 2.20，我们得到一个同构；根据 命题 2.19，该同构是代数对象的同构。

由于我们已经证明 $\mathrm{End}_{A/J(A)}(L)$ 是一个除代数，因此 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L)$ 也是，从而得证。□

请注意，一旦我们获得了其正合$\mathcal{C}$-模范畴的分类，就可以利用上述命题计算$\mathcal{C}$的所有除代数，直到同构——而不仅仅是 Morita 等价。

例 2.68。 令$\mathcal{C} = \mathsf{vect}$ 为有限维向量空间范畴。显然，唯一的不可分解半单模范畴是$\mathcal{C}$ 自身上的模范畴。因此我们得到众所周知的结论：$\mathcal{C}$ 中唯一的除代数是平凡代数（回忆一下，我们始终假设底域是代数闭域）。

例 2.69. 设$\mathcal{C} = \mathsf{Fib}$ 为斐波那契融合范畴，由 $\mathrm{Irr}(\mathcal{C}) = \{\mathbb{1}, \Phi\}$ 及融合规则定义：

$$\Phi \otimes \Phi \simeq \mathbb{1} \oplus \Phi.$$

严格来说，具有此融合规则的融合范畴有两个，它们的区别在于 Φ 量子维数 $\mathrm{qdim}(\Phi) = \frac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ 不同；当 q 取为本原 10 次单位根时，二者都可以由与 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ 相关的融合子范畴实现。接下来的讨论可以任选其中之一，不过Fib 通常表示 $\mathrm{qdim}(\Phi) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ 的那个。

众所周知，$\mathcal{C}$ 恰有一个不可分解正合模范畴，即$\mathcal{C}$ 作用于自身（证明方法之一是仿照 [EK]，证明$\mathbb{Z}_+$在$\mathcal{C}$ 的融合环上除了融合环自身之外，没有其他不可约模，再应用引理 5.15）。

我们得出结论：$\mathcal{C}$ 中恰有两个不同构（但 Morita 等价）的除代数：平凡代数$\mathbb{1}$ 和代数 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(\Phi) \simeq \Phi \otimes \Phi$（其代数结构的具体定义见[EGNO，例 7.8。4]）。

例2.70。设vect_G 为有限维 G-分次向量空间的范畴。其不可分解半单模范畴由子群 $L \subseteq G$ 和 2-余循环的一个类 $\psi \in H^2(L, \Bbbk^*)$ [EGNO，例 7.4。10]。设 $\mathrm{char}(\Bbbk) = 0$。对于 $G = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$，我们得到三个不可分解半单模范畴：

- 当 $L = \{0\}$ 时，2-余循环只有一个等价类 $\psi = 1$。这对应于正则模范畴 vect_G。
- 当 $L = G$ 时，我们有两种选择 $\psi = \pm 1$。它们对应于 vect 上的 vect_G，其中一种由遗忘函子$\mathsf{vect}_G \longrightarrow \mathsf{vect}$ 诱导，另一种的作用则被 $\psi = -1$ 扭曲。

由此可知，除同构外恰有三种除代数：

- 虽然 $\mathcal{M} = \mathsf{vect}_G$ 有两个简单对象 $\Bbbk_0$ 和 $\Bbbk_1$, 但我们只得到一个除代数（参见例 2.69），因为：
- 另一方面，对于 ψ 的不同选择，我们得到两个不同构的除代数：标准分次群代数 $\Bbbk[G] := \Bbbk[x]/\langle x^2 - 1\rangle$ 和扭曲分次群代数$\Bbbk^\psi[G] := \Bbbk[x]/\langle x^2 + 1\rangle$（两种情况下，$x$ 都处于次数 1，而 1 处于次数 0）。

$\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(\Bbbk_0) \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(\Bbbk_1) \simeq \Bbbk_0$.

2.8. **Artin–Wedderburn 定理**。本节证明，有限张量范畴中的任意半单代数都 Morita 等价于有限个除代数的直积。

定义 2.71. 设 $\mathcal{M}$ 是一个正合$\mathcal{C}$-模范畴。考虑 $\mathcal{M}$ 中简单对象的代表元集合 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})$（同构类的代表元）上的以下等价关系：

- $L \sim_H L'$ 当且仅当存在 $V \in \mathcal{C}$ 使得 L 是 $V \triangleright L'$的子商。
- $L \sim_F L'$ 当且仅当存在 $P \in \mathrm{proj}(\mathcal{C})$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P \triangleright L, L') \neq 0$。

下述命题表明，这两个等价关系相同，今后将统一记作 $\sim$。

命题 2.72. 上述两个等价关系一致：$\sim_F = \sim_H$。

证明。显然，若 $L \sim_F L'$，则 L' 是 $P \triangleright L$的一个商，因此尤其是其子商，其中某个$P \in \mathcal{C}$ 满足条件，从而得到 $L \sim_H L'$。

若 $L \sim_H L'$，取 V使得合成重数 $[V \triangleright L' : L]$ 非零。取 $Q_{\mathbb{1}} \in \mathrm{proj}(\mathcal{C})$，使得存在一个满态射 $q : Q_{\mathbb{1}} \twoheadrightarrow \mathbb{1}$。

那么 $Q_{\mathbb{1}} \triangleright L$ 是一个投射对象，且存在一个满态射 $q \triangleright L$ 到 L，因此 L 是 $\mathrm{top}(Q_{\mathbb{1}} \triangleright L)$的一个直和项。利用等式 $[M : \mathrm{top}\, P] = \dim \mathrm{Hom}(P, M)$和 $[V \triangleright L' : L] \neq 0$，我们得到$\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(Q_{\mathbb{1}} \triangleright L, V \triangleright L') \neq 0$，从而得到 $\dim \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}({}^\vee V \otimes Q_{\mathbb{1}} \triangleright L, L') \neq 0$，这表明 $L \sim_F L'$。□

命题 2.73. 设 L, L' 满足 $L \nsim L'$。则 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(L, L') = 0$。因此，我们在 $\mathrm{Alg}(\mathcal{C})$ 中得到一个同构 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L \oplus L') \simeq \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L) \times \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L')$。

证明。对于 $P \in \mathrm{proj}(\mathcal{C})$，我们得到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(L, L')) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(P \triangleright L, L') = 0$。 □

命题 2.74. 设$\mathcal{M}$ 是一个正合$\mathcal{C}$-模范畴。为$\mathcal{M})/\sim$的等价类选取代表元 $L_1, \ldots, L_r$。那么 $\bigoplus_{i=1}^r L_i$ 是$\mathcal{M}$ 的一个$\mathcal{C}$-投射生成元。

证明. 由于$\mathscr{M}$是正合的，它的所有对象都是$\mathscr{C}$-投射的。因此，只需证明函子$\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\bigoplus_{i=1}^{r} L_i, -)$反映零对象。设$P$是$\mathscr{C}$的一个投射生成元。那么对任意$L \in \mathrm{Irr}(\mathscr{M})$，根据$\bigoplus_{i=1}^{r} L_i$的定义，我们有$\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(P \triangleright \bigoplus_{i=1}^{r} L_i, L) \neq 0$。因此，$P \triangleright \bigoplus_{i=1}^{r} L_i$是$\mathscr{M}$的一个投射生成元。故

$$\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P, \underline{\mathrm{Hom}}_{\mathscr{M}}(\bigoplus_{i=1}^{r} L_i, -)) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(P \triangleright \bigoplus_{i=1}^{r} L_i, -)$$

反映零对象，因此$\mathrm{Hom}_{\mathscr{M}}(\bigoplus_{i=1}^{r} L_i, -)$亦然。 □

命题 2.75. 任何半单代数都 *Morita* 等价于除代数的有限直积。

证明。设B为半单代数，并设$\mathscr{M} = \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(B)$。选取代表元$L_1$、…、$L_r$作为$\mathrm{Irr}(\mathscr{M})/\sim$的等价类的代表元。于是由 命题 2.74，我们有$\mathscr{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{C}}(\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(\bigoplus_{i=1}^{r} L_i))$，从而表明$B$ Morita 等价于$\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(\bigoplus_{i=1}^{r} L_i)$。

由 命题 2.73，我们得到$\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(\bigoplus_{i=1}^{r} L_i) \simeq \prod_{i=1}^{r} \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(L_i)$，并且$\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(L_i)$对每个$i$均为除代数，据 命题 2.67。 □

3. 物种、箭图与路径代数

定义 n 3.1. C中的一个拟物种，或称$\mathscr{C}$-拟物种，由三元组$(I, (B_i)_{i\in I}(E_{ij})_{i,j\in I})$构成，其中 e:

- I是一个有限集；
- 对于每个$i \in I$，B_i是$\mathscr{C}$中的一个单代数；
- 对于每个i，$j \in I$，E_{ij}是$\mathscr{C}$中的一个（可能为零的）B_i-B_j-双模。

一个$\mathscr{C}$-物种是满足以下条件的$\mathscr{C}$-拟物种：对于所有$i \in I$，B_i都是除代数。一个$\mathscr{C}$-箭图是满足以下条件的$\mathscr{C}$-物种：对于所有$i \in I$，$B_i = \mathbb{1}$。

给定一个物种$(I, (B_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I})$，我们用$B$表示积代数$\prod_{i\in I} B_i$，并用$E$表示$B$-$B$-双模$\bigoplus_{i,j\in I} E_{ij}$其双模结构由命题 2.41给出。我们称这对$(B, E)$为类型：$(I, (B_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I})$。

备注 3.2。我们所说的$\mathscr{C}$-拟物种，在 [QZ] 中称为B_i-物种（事实上，它们甚至允许B_i是半单的）。鉴于命题 2.75，我们更愿意将其称为$\mathscr{C}$-拟物种，这样$\mathscr{C}$-物种的概念就与经典情形相契合（例如，箭图通常由$B_i = \mathbf{k}$给出，而不是矩阵代数）。

定义 3.3. 给定一个类型为(B, E)的拟物种$(I, (B_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I})$，我们将其路径代数定义为$\mathrm{Ind}(\mathscr{C})$中的张量代数$T_B(E)$。

以下内容解释了定义 3.3中的术语：

命题 3.4. 设$B = \prod_{i=1}^{n} D_i$是$\mathscr{C}$中单代数的有限直积，并且$E \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B, B)$。利用命题 *2.41*，我们可以将$E$分解为$\bigoplus_{i,j} E_{ij}$，其中$E_{ij} \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(D_i, D_j)$是$B$-$B$-双模。

对于张量代数$T_B(E) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} T_B(E)_k$的标准分次，其中$T_B(E)_k = E^{\otimes_B k}$，我们得到$T_B(E)_k = \bigoplus_{(i_1,\dots,i_k)\in\{1,\dots,n\}^k} E_{(i_1,\dots,i_m)}$，其中令$E_{(i_1,\dots,i_m)} := E_{i_{n-1}i_n} \otimes_{D_{i_{n-1}}} E_{i_{n-2}i_{n-1}} \otimes_{D_{i_{n-2}}} \cdots \otimes_{D_{i_2}} E_{i_1 i_2}$。

注 3.5。注意，对于$\mathscr{C} = \mathsf{vect}$中的一个箭图，空间$E_{(i_1,\dots,i_m)}$由箭图中沿顶点序列$(i_1, \dots, i_m)$行进的路径的线性组合构成。

下面的命题告诉我们，在 Morita 等价意义下，我们只需关注$\mathscr{C}$-物种。

命题 3.6。 设$\left(I, (B_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I}\right)$是$\mathscr{C}$中的一个拟物种。存在一个物种$\left(I, (B'_i)_{i\in I}, (E'_{ij})_{i,j\in I}\right)$，使得$(I, (B_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I})$和$\left(I, (B'_i)_{i\in I}, (E'_{ij})_{i,j\in I}\right)$的路径代数 *Morita* 等价。

证明。根据 命题 2.75，我们可以设B'_i是一个与B_iMorita 等价的除代数。因此，根据命题 2.41，B'与B Morita 等价。设$M \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B, B')$和$N \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B', B)$是实现该 Morita 等价的双模。设$E'_{ij} = N \otimes_B E_{ij} \otimes_B M$。于是根据 [EKW，命题 3。5],

路径代数 $T_B(E)$ 和 $T_{B'}(E')$ Morita 等价。但由于 B_i' 是一个除代数，拟物种 $\left(I,(B_i')_{i\in I},(E_{ij}')_{i,j\in I}\right)$ 是一个物种。□

定义 3.7. 给定一个$\mathscr{C}$-物种 $\left(I,(B_i)_{i\in I},(E_{ij})_{i,j\in I}\right)$，我们将其底有向图 定义为顶点集为 I 的有向图，其中对于 i、$j\in I$，当且仅当 $E_{ij}\neq 0$ 时，存在一条箭 $i\longrightarrow j$。

当且仅当一个$\mathscr{C}$-物种的底有向图无圈（即不存在起点和终点为同一顶点的非平凡路径）时，我们称该物种是无圈 的。

借鉴有限维代数中的惯例，我们将仅通过底有向图及其顶点与箭标记来表示$\mathscr{C}$-物种 $(I,(B_i)_{i\in I},(E_{ij})_{i,j\in I})$。下面给出一些例子。

例 3.8. 设$\mathscr{C}=\mathsf{vect}$ 为有限维向量空间范畴。回忆一下，$\mathscr{C}$ 中唯一的除代数是平凡代数（我们始终假设底域为代数闭域）。因此，所有$\mathscr{C}$-物种都是$\mathscr{C}$-箭图。

考虑由 $I=\{1,2\}$, $B_1=\Bbbk=B_2$, $E_{12}=\Bbbk^2$ 和 $E_{21}=0$定义的$\mathscr{C}$-箭图。它的底有向图只是一个有两个顶点 1 和 2、且有一条从 1 指向 2 的箭的有向图。不过，细心的读者可能会发现，这个$\mathscr{C}$-箭图的路径代数与 Kronecker 箭图的路径代数（同构），而 Kronecker 箭图则是一个有两条从 1 指向 2 的箭的箭图。事实上，要编码$\mathscr{C}$-箭图的全部数据，必须按如下方式为顶点和箭都加上标记：

$$\Bbbk \xrightarrow{\Bbbk^2} \Bbbk\ .$$

在有限维向量空间的情形下，使用 n 条平行箭与使用一条由一个 n 维向量空间标记的箭，并不会造成信息损失，因为向量空间在同构意义下完全由其维数决定。我们将会看到，对于一般的有限张量范畴（甚至是融合范畴），并不总能用多条箭替代一条带标记的箭。

例 3.9。 回顾一下 例 2.69 中的融合范畴 Fib及其除代数。以下分别是一个$\mathscr{C}$-箭图和一个$\mathscr{C}$-物种（它们的路径代数 Morita 等价）：

$$\mathbb{1}\xrightarrow{\Phi}\mathbb{1}\ ;\qquad \underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(\Phi)\xrightarrow{\Phi\otimes\Phi}\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{C}}(\Phi)\ .$$

与前面的例子比较，左侧的$\mathscr{C}$-箭图用 Φ 标记其唯一的箭，这本来需要“黄金比例数量的箭”，即 $\mathrm{FPdim}(\Phi)=$ 黄金比例。

例 3.10。 设 $G:=\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$，并设$\mathscr{C}:=\mathsf{vect}_G$；参见 例 2.70。以下是一些$\mathscr{C}$-物种的例子，其中箭头标记上的双模结构都是“显然的”（任意两者的路径代数都不 Morita 等价）。为简化记号，我们将 $D:=\Bbbk[G]$ 和$D^{\psi}:=\Bbbk^{\psi}[G]$记作来自例 2.70的除代数。

(i)
$$\begin{array}{ccccc}\Bbbk_0 & \xrightarrow{\Bbbk_0} & \Bbbk_0 & \xrightarrow{\Bbbk_0} & \Bbbk_0\\ & & {\scriptstyle\Bbbk_0}\uparrow & & \\ & & \Bbbk_{\emptyset} & & \end{array}\qquad (\text{a }\mathscr{C}\text{-quiver});$$

(ii) $\Bbbk_0\xrightarrow{D}D\xrightarrow{D}D$ (not a $\mathscr{C}$-quiver);

(iii) $\Bbbk_0\xrightarrow{D^{\psi}}D^{\psi}\xrightarrow{D^{\psi}}D^{\psi}$ (not a $\mathscr{C}$-quiver).

命题 3.11. 设 $\left(I,(B_i)_{i\in I},(E_{ij})_{i,j\in I}\right)$ 是$\mathscr{C}$ 中的一个拟物种。其路径代数是$\mathscr{C}\mathbf{Ind}($ 的紧对象)——等价地说，是$\mathscr{C}$ 中的一个对象——当且仅当 $\left(I,(B_i)_{i\in I},(E_{ij})_{i,j\in I}\right)$ 无圈。

证明。 如 命题 3.4 中所示，我们有 $T_B(E)\simeq\bigoplus_{m=0}^{\infty}T_B(E)_m$，其中 $T_B(E)_m\simeq\bigoplus_{(i_1,\dots,i_m)\in I^m}E_{(i_1,\dots,i_m)}$，并令 $E_{(i_1,\dots,i_m)}:=E_{i_{n-1}i_n}\otimes_{B_{i_{n-1}}}E_{i_{n-2}i_{n-1}}\otimes_{B_{i_{n-2}}}\cdots\otimes_{B_{i_2}}E_{i_1i_2}$。

根据引理 2.56，对于$(i_1,\dots,i_m)\in I^m$，我们有 $E_{(i_1,\dots,i_m)}=0$ 当且仅当存在 $k\in\{1,\dots,m\}$ 使得 $E_{i_{k-1}i_k}=0$。对于 $n>|I|$，I^n中的每个序列都包含重复项，因此 $T_B(E)_n=0$对于所有 $n>|I|$当且仅当 $\left(I,(B_i)_{i\in I},(E_{ij})_{i,j\in I}\right)$ 是无圈的。另一方面，前一个条件等价于 $T_B(E)$的紧性。□

现在固定一个代数 A，并将 $J(A)$ 的根 A（按照定义 2.51的含义）简记为J。下面的条件类似于 [Ben，命题 4.1。10], [Ber]:

定义 3.12. 我们称 A 是根基分裂的，如果满足以下两个条件：

(i) 代数的投影 $\pi_0 : A \to A/J$ 在 $\mathrm{Alg}(\mathscr{C})$中存在一个截面 σ_0。(ii) A/J-A/J-双模的投影 $\pi_1 : J \to J/J^2$ 在 $\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(A/J, A/J)$中存在一个截面 σ_1。

我们称这对 (σ_0, σ_1) 构成了 A的一个根基分裂。

根据 命题 2.58，的根基分裂 A 诱导出一个从 $T_{A/J}(J/J^2)$ 到A的代数同态 $\Phi(\sigma_0, \sigma_1)$。

注 3.13. 给定一个半单代数 B，以及 $E \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B, B)$ 和 $T_B(E)$的一个容许理想 I，代数 $T_B(E)/I$ 是根基分裂的。

分裂 $(T_B(E)/I)/J(T_B(E)/I) \to T_B(E)/I$由下式给出

$$(T_B(E)/I)/J(T_B(E)/I) = (T_B(E)/I)/(\langle E\rangle/I) \simeq B \hookrightarrow T_B(E) \twoheadrightarrow T_B(E)/I.$$

上面的第一个等式由 命题 2.65得出。

分裂 $J(T_B(E)/I)/J^2(T_B(E)/I) \to J(T_B(E)/I)$，由下式给出

$$(\langle E\rangle/I)/(\langle E^{\otimes 2}\rangle/I) \simeq \langle E\rangle/\langle E^{\otimes 2}\rangle \hookrightarrow \langle E\rangle \twoheadrightarrow \langle E\rangle/I.$$

这里我们利用显然的同构 $\langle E\rangle/\langle E^{\otimes 2}\rangle \simeq T_B(E)_1 \simeq E$，从嵌入 $E \hookrightarrow \langle E\rangle$得到一个诱导的 B-B-双模 $\langle E\rangle/\langle E^{\otimes 2}\rangle \hookrightarrow \langle E\rangle$ 的嵌入。

引理 3.14. 设$\mathscr{C}$是一个环范畴，且 $f : U \to V$和 $g : W \to Y$是$\mathscr{C}$中的态射，则有

$$\mathrm{Ker}(f \otimes g) = \mathrm{Ker}(f) \otimes W + U \otimes \mathrm{Ker}(g).$$

引理 3.15. 考虑如下形式的图表

$$\begin{array}{ccccccccc} & & M' & & M'' & & & & \\ & & \downarrow{\scriptstyle p'} & & \downarrow{\scriptstyle p''} & & & & \\ 0 & \longrightarrow & N' & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{g} & N'' & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

在一个阿贝尔范畴中，且各行正合。若 $g\circ p''$是满射，则 $M'\oplus M'' \xrightarrow{(f\circ p'\ p'')} N$是满态射.

定理 3.16（有限张量范畴的弱 Gabriel 定理）。设 A 是有限张量范畴$\mathscr{C}$中的一个代数，并令 J表示其根。若 (σ_0, σ_1)是 A的根基分裂，则态射$\Phi(\sigma_0, \sigma_1) : T_{A/J}(J/J^2) \to A$是代数的满射态射。此外， $\mathrm{Ker}(\Phi(\sigma_0, \sigma_1))$是 $T_{A/J}(J/J^2)$的容许理想，定义见 定义 2.61。

因此，$\mathscr{C}$中的任意根分裂代数，都是$\mathscr{C}$ 中某个拟物种的路径代数的容许商，类型为 $(A/J, J/J^2)$。

证明。 反复应用 引理 3.14，我们对每个整数 $n > 0$ 得到正合列

$$0 \longrightarrow \sum_{k=1}^{n} J^{\otimes_{A/J} k-1} \otimes_{A/J} J^2 \otimes_{A/J} J^{\otimes_{A/J} n-k} \longrightarrow J^{\otimes_{A/J} n} \xrightarrow{\pi_1^{\otimes_{A/J} n}} (J/J^2)^{\otimes_{A/J} n} \longrightarrow 0$$

在下图中，实线竖直箭头表示的满态射是通过 n重次乘法得到的，竖直虚线箭头是余核上的诱导满态射，而 γ 是将分裂引理应用于顶行中由 $\sigma_1^{\otimes_{A/J} n}$ 给出的正合列的分裂后得到的分裂满态射。

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \sum_{k=1}^{n} J^{\otimes_{A/J} k-1} \otimes_{A/J} J^2 \otimes_{A/J} J^{\otimes_{A/J} n-k} & \underset{\gamma}{\overset{\kappa}{\rightleftarrows}} & J^{\otimes_{A/J} n} & \underset{\sigma_1^{\otimes_{A/J} n}}{\overset{\pi^{\otimes_{A/J} n}}{\rightleftarrows}} & (J/J^2)^{\otimes_{A/J} n} & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow & & \vdots & & \\ 0 & \longrightarrow & J^{n+1} & \longrightarrow & J^n & \longrightarrow & J^n/J^{n+1} & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

由左侧实线方块的交换性可知，将图中实线箭头复合所得的映射 $\psi : J^{\otimes n} \twoheadrightarrow J^n/J^{n+1}$ 与幂等元 $\kappa \circ \gamma$ 复合后为零。因此，由于 $\mathrm{id}_{J^{\otimes n}} = \kappa \circ \gamma + \sigma_1^{\otimes_{A/J} n} \circ \pi_1^{\otimes_{A/J} n}$，我们发现 ψ 使 $\mathrm{id}_{J^{\otimes_{A/J} n}}$ 和 $\sigma_1^{\otimes_{A/J} n} \circ \pi_1^{\otimes_{A/J} n}$ 相等化，所以 $\psi \circ \sigma_1^{\otimes_{A/J} n}$ 与竖直虚线箭头重合，因而它是一个满态射。

根据 $\Phi(\sigma_0, \sigma_1)$ 的定义，下图交换：

$$\begin{array}{ccccc}
(J/J^2)^{\otimes_{A/J} n} & \xrightarrow{\sigma_1^{\otimes_{A/J} n}} & J^{\otimes_{A/J} n} & \twoheadrightarrow & J^n \\
\Big\| & & & & \Big\downarrow \\
T_{A/J}(J/J^2)_n & \hookrightarrow & T_{A/J}(J/J^2) & \xrightarrow[\Phi(\sigma_0,\sigma_1)]{} & A
\end{array}$$

根据 [CSZ，引理 8，8], 存在一个极大 m 使得 $J^m \neq 0$。结合对 引理 3.15的归纳应用，可知映射 $T_{A/J}(J/J^2)_n \twoheadrightarrow J^n/J^{n+1}$ 的满射性蕴含 Φ的满射性。

由交换性

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A/J \oplus J/J^2 & & \\
 & \overset{\binom{0}{1}}{\nearrow} & \Big\downarrow = & \overset{(1\ 0)}{\searrow} & \\
J/J^2 & & T_{A/J}(J/J^2)_{\leq 1} & & A/J \\
\Big\downarrow \sigma_1 & & \Big\downarrow \Phi(\sigma_0,\sigma_1)_{\leq 1} & & \Big\downarrow = \\
J & \longrightarrow & A & \underset{\sigma_0}{\dashleftarrow} & A/J
\end{array}$$

以及 σ_0、σ_1 是单态射，可得 $\mathrm{Ker}(\Phi(\sigma_0, \sigma_1)) \subseteq T_{A/J}(J/J^2)_{\geq 2}$。 □

推论 3.17。$\mathscr{C}$ 中的根分裂代数 A 与某个物种的路径代数的容许商 *Morita* 等价。

证明。由定理 3.16可知，对于 $T_{A/J}(J/J^2)$ 中的容许理想 I，有 $A \simeq (T_{A/J}(J/J^2))/I$。令 $B := A/J$ 和 $E = J/J^2$。根据命题 3.6，可取一个物种 (B', E')，使得 $T_B(E)$ 与 $T_{B'}(E')$ Morita 等价。该 Morita 等价扩张为幺半等价 $F : \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_B(E), T_B(E)) \simeq \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_{B'}(E'), T_{B'}(E'))$，从而在 $T_B(E)$ 中的理想与 $T_{B'}(E')$ 中的理想之间给出一个双射，将 I 映至 $F(I)$。等价 F 进一步诱导出双等价 $\mathrm{bimod}(\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_B(E), T_B(E))) \simeq \mathrm{bimod}(\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_{B'}(E'), T_{B'}(E')))$，将 $T_B(E)/I$ 映至 $T_{B'}(E')/F(I)$，并由此得到等价 $\mathrm{mod}_{\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_B(E),T_B(E))} T_B(E)/I \simeq \mathrm{mod}_{\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_{B'}(E'),T_{B'}(E'))} T_{B'}(E')/F(I)$。由以下众所周知的等价可得结论

$$\mathrm{mod}_{\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_{B'}(E'),T_{B'}(E'))} T_{B'}(E')/F(I) \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{C}} T_{B'}(E')/F(I)$$

和 $\mathrm{mod}_{\mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(T_B(E),T_B(E))} T_B(E)/I \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{C}} T_B(E)/I$。

由于命题 3.6 F的 Morita 等价 由 $N \otimes_B - \otimes_B M$给出，对于 $M \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B, B')$和$N \in \mathrm{bimod}_{\mathscr{C}}(B', B)$，我们发现不仅 $F(T_B(E)) = T_{B'}(E')$成立，而且对于任意 $F(T_B(E)_m) = T_{B'}(E')_m$ $m \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$也成立，这表明，由于 I 是一个容许理想，因此 $F(I)$ 也是容许理想，从而证明 $T_{B'}(E')/F(I)$ 是 $T_{B'}(E')$ 的一个容许商。 □

4. 融合范畴的情形

在本文余下部分中，$\mathscr{D}$ 表示一个融合范畴（半单有限张量范畴）。本节中，我们证明融合范畴背景下关于根和半单代数的结果，包括证明半单对象在$\mathscr{D}$作用下封闭，并厘清与一个代数相关的“半单”的不同概念。此外，我们为每个有限$\mathscr{D}$-模范畴关联一个有向图，该图是$\mathscr{D}$-模范畴的不变量。最后一节将利用这个有向图证明我们的主要定理。

4.1. **融合范畴中代数的根与半单性。**

命题 4.1. 定理 *2.50* 中的双射在融合情形下有所简化：对于 $A \in \mathrm{Alg}(\mathcal{D})$，它将一个$\mathcal{D}$-稳定理想 $\mathcal{I}$ 映射到 $\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A)$ 中的预层 $\mathcal{I}(-, A)$。

证明。 由于对于一个融合范畴， $\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$ 是到 $\mathbb{1}$ 的满态射，且其来源是一个投射对象，因此我们可以将其选作 q，见定理 2.50 （请注意，该构造与 q的选取无关），由此立即得到所述结论。□

命题 4.2。 根 $J(A)$ 表示预层 $\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}(-, A)$。

证明。 将命题 4.1 与等式 2.4结合即可立即得到。 □

推论 4.3。 对于任意 m， $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$，若满足 $m \leq n$ 和 $V \in \mathcal{C}$，则有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, J^m/J^n) \simeq (\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^m/\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^n)_{\mathrm{mod}_{\mathcal{C}}(A)}(V \otimes A, A)$$

证明。 结合命题 4.2 与 [CSZ，引理 8.2] 中得到的乘积MI的刻画（例如定义 2.38中的刻画），我们可归纳得到 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, J^m) \simeq \mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^m(V \otimes A, A)$。注意到，由于 V 具有投射性，故有

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V, J^m/J^n) \simeq \mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^m(V \otimes A, A)/\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^n(V \otimes A, A) = \mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^m/\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}^n(V \otimes A, A).$$

□

命题 4.4. $\mathcal{D}$-根 $\mathfrak{J}_{\mathcal{D}}$与 $\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A)$ 的通常根 $\mathfrak{J}$ 相同。

证明。 设 $V, W \in \mathcal{D}$。由于$\mathcal{D}$ 是半单的，$\mathcal{D}$ 中的所有对象都是投射的，因此我们有一个短正合列

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, W \triangleright J) \hookrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, W \triangleright A) \twoheadrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, W \triangleright A/J)$$

由于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, W \triangleright A/J)$决定 $\mathrm{Hom}_{A/J}(V \triangleright A/J, W \triangleright A/J)$，且自由 A/J-模的范畴决定了投射 A/J-模的范畴，上述正合列连同 命题 4.2 建立了一个等价 $\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A)/\mathfrak{J}_{\mathcal{D}} \simeq \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A/J)$。

根据 [CSZ，引理 6.11]，，我们有 $\mathfrak{J}_{\mathcal{D}} \subseteq \mathfrak{J}$。但由于 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A/J)$ 是一个正合的$\mathcal{D}$-模范畴（由定理 2.52），且$\mathcal{D}$ 是融合范畴，我们知道 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A/J) = \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A/J)$ 是半单的。因此，由等价 $\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A)/\mathfrak{J}_{\mathcal{D}} \simeq \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A/J)$ 可得 $\mathfrak{J} \subseteq \mathfrak{J}_{\mathcal{D}}$。 □

注记 4.5. 在特征零的情形下，若$\mathcal{D}$是半单 Hopf 代数的模范畴，则上述命题见 [LMS，定理 3。6]

下面的结果表明，模范畴中的半单对象在融合范畴作用下封闭。

命题 4.6. 给定一个有限的$\mathcal{D}$-模范畴$\mathcal{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$，其半单对象构成的全子范畴$\mathbb{L}(\mathcal{M})$ 是 $\mathcal{M}$ 的一个$\mathcal{D}$-模子范畴，且等价于 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A/J)$。特别地，以下条件等价：

(i) $L \in \mathcal{M}$ 是半单的。*(ii)* 对所有 $V \in \mathcal{D}$，
$V \triangleright L \in \mathcal{M}$ 都是半单的。*(iii)* 对某个 $V \in \mathcal{D}$，
$V \triangleright L \in \mathcal{M}$ 是半单的。

证明。 根据 定理 2.54， $\mathrm{res}(\pi)$ 的嵌入将 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A/J)$ 嵌入为形如 $V \triangleright L$的对象的子商，其中 $V \in \mathcal{C}$ 且 $L \in \mathrm{L}(\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A))$。由于该嵌入保持并反映正合列， $V \triangleright L$ 在 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$ 中的约当–霍尔德滤过给出 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A/J)$中的一个滤过，而该滤过由 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A/J)$的半单性分裂。由此，借助$\mathrm{res}(\pi)$的 k-线性，得到 $V \triangleright L$的半单性。

我们现在证明这三个等价关系。条件 (i) $\Longrightarrow$ 条件 (ii) 由上一段可得，而条件 (ii) $\Longrightarrow$ 条件 (iii) 则显而易见。现在假设对于某个 $V \in \mathcal{D}$， $V \triangleright L \in \mathcal{M}$ 是半单的。于是可得 $V^{\vee} \triangleright (V \triangleright L)$ 也是半单的。由于 $\mathbb{1}$ 是 $V^{\vee} \otimes V$ 的一个直和项， L 作为半单对象 $V^{\vee} \triangleright (V \triangleright L) \simeq (V^{\vee} \otimes V) \triangleright L$ 的一个直和项出现，因此 L 也是半单的。□

注记 4.7。 也可以利用命题 4.4 给出另一种证明命题 4.6：等价关系$\mathrm{proj}_{\mathscr{D}}(A)/\mathfrak{J}_{\mathscr{D}} \simeq \mathbb{L}(\mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A))$ 立即蕴含 $\mathfrak{J}_{\mathscr{D}} = \mathfrak{J}$。

下面的推论协调了与代数相关的“半单”这一概念的不同性质。

推论 4.8. 设$\mathscr{D}$是一个融合范畴， A 是$\mathscr{D}$ 中的一个代数。以下各项等价 .

(i) $\mathscr{D}$-模范畴 $\mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$是半单的。*(ii)* A 是半单代数（依照定义 *2.44*的含义）。*(iii)* $A \in \mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$ 是自身上的半单模。

证明。 前两个等价关系正是定理 2.52的结论，因为在融合范畴中，正合模范畴是半单模范畴；见引理 2.26。从第 (i) 项 $\Longrightarrow$ 第 (iii) 项 的蕴含显然成立。为证明第 (iii) 项 $\Longrightarrow$ 第 (i) 项，回忆一下，半单范畴是指其中所有射影对象都是半单对象的阿贝尔范畴。由于中的所有射影对象都是某个 $X \triangleright A$ 的直和项，其中某个 $X \in \mathscr{D}$，并且命题 4.6 表明 $X \triangleright A$ 是半单的，因此所需结论得证。 □

推论 4.9. 设 $X \in \mathscr{M}$ 是有限$\mathscr{D}$-模范畴$\mathscr{M}$ 中的一个对象。设 $P_1 \xrightarrow{p_1} P_0$ 是 X的极小投射表示。

那么对任意 $V \in \mathscr{D}$， $V \triangleright p_1$ 是 $V \triangleright X$的极小投射表示。特别地，$P_0(V \triangleright X) = V \triangleright P_0(X)$。

证明。 只需验证 $V \triangleright p_1$ 是根。这由 p_1 是根，以及根$\mathscr{D}$-稳定性$\mathfrak{J}(\mathrm{proj}(\mathscr{M}))$即可得到，而后者又是命题 4.4的推论。 □

Pro命题 4.10. 对有限$\mathscr{D}$-模范畴$\mathscr{M}$ 中的对象取顶，是一个$\mathscr{D}$-模函 *or:*

$$\mathrm{top}(V \triangleright X) \simeq V \triangleright \mathrm{top}(X),$$

对所有 $V \in \mathscr{D}$和 $X \in \mathscr{M}$均成立。

证明。 由于包含函子 $L : \mathbb{L}(\mathscr{M}) \to \mathscr{M}$根据$\mathscr{D}$-模函子 命题 4.6，由 引理 2.17 可知，其左伴随 top如定义2.9所述，也具有同样性质。 □

4.2. **基本半单代数与投射生成元**。 回顾定义 2.71 ： 对于有限$\mathscr{D}$-模范畴$\mathscr{M}$，等价关系 $\sim := \sim_H = \sim_F$定义在 $\mathrm{Irr}(\mathscr{M})$ 上。在融合范畴的情形下，我们还有另一个等价定义。

命题 4.11. 设$\mathscr{M}$ 为有限$\mathscr{D}$-模范畴。由命题 *4.6*，等价关系 $\sim$ 在$\mathrm{Irr}(\mathscr{M})$ 上、来自定义 *2.71* 者简化为如下：

$$L \sim L' \textit{ if there is } V \in \mathscr{D} \textit{ such that } L' \textit{ is a direct summand of } V \triangleright L.$$

注记4.12。 注意，若$\mathscr{M}$ 是vect_G-模范畴；等价地，$\mathscr{M}$ 具有 G的（强）范畴作用，则 $L \sim L'$ 当且仅当 L 与 L' 处于同一 G-轨道。特别地， $\mathrm{Irr}(\mathscr{M})/\sim$ 恰为简单对象的 G-轨道之集。

定义 4.13. 我们称半单对象 $L \in \mathrm{L}(\mathscr{M})$为$\mathscr{D}$-基本，若对 L的任意两个不同单直和项 L_1、 L_2，有 $L_1 \not\sim L_2$。我们称投射对象$P \in \mathrm{proj}(\mathscr{M})$ 为$\mathscr{D}$-基本，若 $\mathrm{top}(P)$在$\mathrm{L}(\mathscr{M})$中是$\mathscr{D}$-基本的。相应地，代数 A 在$\mathscr{D}$中是$\mathscr{D}$-基本的，若 A 作为 $\mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$中的投射模是$\mathscr{D}$-基本的。

注记 4.14. 设 $\mathrm{indproj}(\mathscr{M})$表示 $\mathscr{M}$ 中不可分解投射对象的代表元集。众所周知，$P \in \mathrm{indproj}(\mathscr{M}) \longmapsto \mathrm{top}(A) \in \mathrm{Irr}(\mathscr{M})$是一个双射。若我们在 $\mathrm{indproj}(\mathscr{M})$ 上定义如下类似的等价关系： $P \sim_p P'$ 当且仅当对某个 $V \in \mathscr{D}$， P是 $V \triangleright P$的直和项，则上述双射下降为 $\mathrm{indproj}(\mathscr{M})/\sim_p$ 与 $\mathrm{Irr}(\mathscr{M})/\sim$之间的一个双射。此外，一个（不必不可分解的）投射 P是$\mathscr{D}$-基本的，当且仅当对 P的任意两个不同的不可分解直和项 P_1、 P_2，我们有 $P_1 \not\sim_p P_2$。

命题4.15。 若 $L \in \mathbb{L}(\mathscr{M})$ 是$\mathscr{D}$-基本的，则 $\mathrm{End}_{\mathscr{M}}(L)$ 是除代数的有限直积$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_{\mathscr{M}}(L_i)$，其中有 L_i 个简单对象，且 $L = \bigoplus_{i=1}^{r} L_i$。因此，若 $P \in \mathrm{proj}(\mathscr{M})$ 是$\mathscr{D}$-基本的，则$\mathrm{End}_{\mathscr{M}}(\mathrm{top}(P))$ 是除代数的有限直积。

证明。 这两个结论都可由命题 2.73立即推出。 □

引理4.16。 存在右 A-模同构 $A/J \simeq \mathrm{top}(A)$。

证明。 设 L 是一个 A/J-模，因此也自然地通过商代数态射 $A \twoheadrightarrow A/J$成为一个 A-模。我们有一串关于 L的自然同构：

$$\mathrm{Hom}_{A/J}(A/J, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(\mathbb{1}, L) \simeq \mathrm{Hom}_A(A, L) \simeq \mathrm{Hom}_{\mathbb{L}(A)}(\mathrm{top}(A), L) \simeq \mathrm{Hom}_{A/J}(\mathrm{top}(A), L),$$

第一个同构来自 A/J的自由-遗忘伴随，第二个来自 A的自由-遗忘伴随，第三个来自 定义2.9 中的伴随，最后一个来自 命题 4.6。由米田引理可得 $A/J \simeq \mathrm{top}(A)$ 在 $\mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A/J)$中成立，因此经由包含映射 $\mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A/J) \hookrightarrow \mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$后也有一个同构。 □

命题 4.17。 如果 A 是一个$\mathscr{D}$-基本代数，那么 A/J 是除代数 $\prod_{i=1}^{r} \mathrm{End}_A(L_i)$的乘积，其中 L_i 是简单的 A-模，且满足 $A/J \simeq \bigoplus_{i=1}^{r} L_i \in \mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$。

证明。 由于 $A/J \simeq \mathrm{top}(A)$作为 A-模，由引理4.16可得以下代数同构链

$$A/J \simeq \underline{\mathrm{End}}_{A/J}(A/J) \simeq \underline{\mathrm{End}}_A(A/J) \simeq \underline{\mathrm{End}}_A(\mathrm{top}(A)),$$

其中，中间的同构由命题 4.6 和引理 2.20得出。现在 A 是$\mathscr{D}$-基本的意味着 $\mathrm{top}(A) \in \mathbb{L}(\mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A))$ 是$\mathscr{D}$-基本的，因此 A/J 是除代数的乘积这一事实直接由命题4.15可得。□

命题 4.18。 设$\mathscr{M}$ 是一个有限$\mathscr{D}$-模范畴。那么存在一个$\mathscr{D}$-基本代数 A，使得$\mathscr{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$ 作为$\mathscr{D}$-模范畴。

证明。 选取$\mathscr{M}$)的一个代表元集 $\{L_1, \dots, L_r\}$。根据构造， $L := \bigoplus_{i=1}^{r} L_i$ 是$\mathscr{D}$-基本的，因此其投射覆盖 $P_0 \twoheadrightarrow \mathrm{top}(P_0) \simeq L$ 根据定义也是$\mathscr{D}$-基本的。由于 $\{L_1, \dots, L_r\}$是$\mathscr{M}$)的一个代表元集，必存在某个$\mathscr{D}$ $X \in$，使得$\mathscr{M}$中的每个简单对象都是 $X \triangleright L$ 的一个直和项（注意 $X \triangleright L$ 由命题 4.11可知是半单的）。由于函子 $X \triangleright -$ 在$\mathscr{M}$上正合（推论 2.32），可知 $X \triangleright P_0 \twoheadrightarrow X \triangleright L$，因此 $X \triangleright P_0$ 满射到$\mathscr{M}$中所有简单对象的投射覆盖。这表明 P_0 也是一个$\mathscr{D}$-投射生成元。根据定理2.31，我们得到$\mathscr{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$，其中 $A := \mathrm{End}_{\mathscr{M}}(P_0)$ 是一个$\mathscr{D}$-基本代数，如所需。□

定义 4.19。 给定 $S, L \in \mathrm{L}(A)$ 及其分别对应的投射覆盖 $P_0(S), P_0(L)$，我们定义 $\mathscr{D}$ 中的对象 $(J/J^2)(S, L)$，使其表示将 $V \in \mathscr{D}$ 映射到 $(\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2)_A(V \triangleright P_0(S), P_0(L))$的预层。
In particular we have $J/J^2 = J(A)/J^2(A) = (J/J^2)(\mathrm{top}(A), \mathrm{top}(A))$.

显然，我们有以下结论：

引理 4.20。 对于半单对象 $S, S', L, L' \in \mathbb{L}(A)$，我们有

$$(J/J^2)(S \oplus S', L) \simeq (J/J^2)(S, L) \oplus (J/J^2)(S', L) \text{ and } (J/J^2)(S, L \oplus L') \simeq (J/J^2)(S, L) \oplus (J/J^2)(S, L').$$

因此，对于将 $\mathrm{top}(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$ 分解为简单右 A/J-模，我们得到一个直和分解

$$J/J^2 = J/J^2(\mathrm{top}(A), \mathrm{top}(A)) \simeq \bigoplus_{i,j=1}^{m} J/J^2(L_i, L_j). \tag{4.1}$$

设 A 是$\mathscr{D}$-基本代数，设 $\mathrm{top}(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$ 是将其分解为简单右 A/J-模。则 $A/J \simeq \prod_{i=1}^{m} D_i$ 是由命题 4.17得到的代数直积代数分解，其中$D_i := \mathrm{End}_{A/J}(L_i)$。由 命题 2.41 可知， A/J-A/J-双模 J/J^2具有由 $A/J \simeq \prod_{i=1}^{n} D_i$的积代数分解所诱导的典范分裂。现在我们证明，这与方程 4.1中的分解一致。

命题 4.21。 在上述设定下，假设代数对象的态射 $\pi_0 : A \twoheadrightarrow A/J$ 存在一个截面。那么， A/J-A/J-双模 J/J^2 满足

$$D_i(J/J^2)D_j \subseteq J/J^2(L_j, L_i).$$

证明。 回顾 [CSZ，第 2] 节中指出， A 在 $J(A)$ 上的作用可以用范畴 $\mathcal{D}$ 上有限维预层范畴中的Day卷积来描述。

由于$\mathcal{D}$ 是半单的，受限Yoneda嵌入 $\mathcal{D} \to [\mathcal{D}^{\mathrm{op}}, \mathbf{vec}]$ 实际上是一个幺半等价，而两个预层 P, Q 的Day卷积 $\mathsf{P} * \mathsf{Q}$ 可以描述为：将简单对象 $U \in \mathrm{Irr}(\mathcal{D})$映到 $\bigoplus_{V}$<style id=', $W \in \mathrm{Irr}(\mathcal{D})} \mathsf{P}(V) \otimes_{\Bbbk} \mathsf{Q}(W)$。

因此，与 [CSZ], 中一样，右 A-作用由以下映射族给出

$$\left(\mathfrak{J}(V \triangleright A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, A) \xrightarrow{\sim} \mathfrak{J}(V \triangleright A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{-A}(W \triangleright A, A) \to \mathfrak{J}(V \otimes W \triangleright A, A)\right)_{V,W \in \mathcal{D}}, \tag{4.2}$$

其中，前一个映射由典范同构 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, A) \simeq \mathrm{Hom}_{-A}(W \triangleright A, A)$诱导，后一个则将 $f \otimes g$ 映到 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$中的 $f \circ V \triangleright g$。左作用也可以类似地描述。

在 J^2和 J/J^2 上的作用也可以类似地描述，而 A/J在 J上的作用（进而也包括在 J^2和 J/J^2上的作用）通过沿态射 $A/J \xrightarrow{\sigma_0} A$限制得到，其定义是将方程4.2中的映射与以下映射复合

$$\mathfrak{J}(V \triangleright A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, A/J) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \sigma_0)} \mathfrak{J}(V \triangleright A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, A).$$

类似地，通过进一步与.....复合，可得到 $D_i \simeq \mathrm{End}_{-A}(L_i)$的作用。

$$\mathfrak{J}(V \triangleright A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, D_i) \xrightarrow{\mathrm{id} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, \iota)} \mathfrak{J}(V \triangleright A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, A).$$

同样，类似的考虑也适用于 J^2和 J/J^2。由此得到一个交换图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(V \otimes A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{-A}(W \triangleright A, A) & \longleftarrow & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(V \otimes A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{-A}(W \triangleright P_0(L_i), P_0(L_i)) \\
\downarrow & & \uparrow\downarrow \\
 & & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(V \otimes A, A) \otimes (\mathrm{Hom}/\mathfrak{J})_{-A}(W \triangleright P_0(L_i), P_0(L_i)) \\
 & & \uparrow \simeq \\
\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(V \otimes W \triangleright A, A) & \longleftarrow & \mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(V \otimes A, A) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(W, L_i)
\end{array}$$

相邻的一对竖直箭头由 $\pi_0 : A \twoheadrightarrow A/J$ 及其一个分裂给出。下方的水平箭头描述了 D_i对 J/J^2的右作用，其像描述了对象 $(J/J^2)D_i$。由于最左侧的竖直映射只是复合，这个像显然包含于 $\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(V \otimes W \triangleright P_0(L_i), A)$中，由此可得 $(J/J^2)D_i \subseteq J/J^2(L_i, \mathrm{top}(A))$。左作用的结论类似可证。□

推论 4.22。 设 A 是一个$\mathcal{D}$-基本代数，且 $\mathrm{top}(A) \simeq \bigoplus_{i=1}^{m} L_i$ 是一个分解为简单A/J-模的分解。 A/J-A/J-双模 J/J^2 的直和分解为

$$J/J^2 \simeq \bigoplus_{i,j=1}^{m} J/J^2(L_i, L_j),$$

具有 A/J-A/J-双模结构，该结构由 $J/J^2(L_i, L_j)$ 给出，见 命题 *4.21*。特别地，相应的D_i-D_j-双模为 $J/J^2(L_j, L_i)$

注 4.23。与经典情形非常相似，从 i 到 j 的箭头双模由对象$J/J^2(L_j, L_i)$给出，它是经典 $(\mathrm{Rad}\,/\,\mathrm{Rad}^2)(P(j), P(i))$的内部版本。

4.3. 模范畴的内部 Ext 与有向图。回忆一下，对于有限阿贝尔范畴，可以为其关联一个有向图（有时称为 Ext-箭图）。这里，我们将为$\mathcal{D}$-模范畴引入一种类似的变体。

先回顾一下经典情形。给定一个向量空间 V，我们将其对偶空间记作 $\mathrm{D}V$——这是为了将k-线性对偶与抽象刚性幺半群范畴 $\mathcal{D}$ 的对偶区分开来。对于预层 $P : \mathcal{A} \to$vect，我们将把 X 映到 $\mathrm{D}P(X)$ 的余预层记作 $\mathrm{D}P$，余预层和预函子也同理。下面这个众所周知的结果给出了计算有限阿贝尔范畴有向图的有效方法：

命题 4.24 （[Ben，命题 2.4。3], [ASS，引理 III.2。12]）。设$\mathscr{A}$是一个有限阿贝尔范畴，且 L， $L' \in \mathbb{L}(\mathscr{A})$ 是其中的半单对象。则存在一个同构

$$\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(P_0(L), P_0(L')) \simeq \mathbb{D}\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{A}}(L', L),$$

关于 L, L' 是自然的。

我们将把这一概念推广到一般的融合范畴情形。首先定义内部 Ext 的概念：

定义 4.25. 设$\mathcal{D}$ 为一个融合范畴，$\mathscr{M}$ 为一个有限$\mathcal{D}$-模范畴。对于 $X, Y \in \mathscr{M}$ 和$n \geq 0$，内部*Ext*记为 $\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{M}}(X, Y)$，定义为$\mathcal{D}$ 中表示预层$\operatorname{Ext}^n_{\mathscr{M}}(- \triangleright X, Y)$的对象。换言之，存在关于 V 自然的同构：

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(V, \underline{\operatorname{Ext}}^n_{\mathscr{M}}(X, Y)) \simeq \operatorname{Ext}^n_{\mathscr{M}}(V \triangleright X, Y).$$

在本文中，我们将一律用 $\operatorname{Ext}_{\mathscr{M}}(-,-)$ 表示 $\operatorname{Ext}^1_{\mathscr{M}}(-,-)$。 ___

如公式 2.3所示，内部 Ext 可按如下方式轻松计算：

$$\underline{\operatorname{Ext}}^i(X, Y) \simeq \bigoplus_{L \in \operatorname{Irr}(\mathcal{D})} L^{\oplus e_L} \tag{4.3}$$

其中 $e_L := \dim_{\Bbbk} \operatorname{Ext}^i(L \triangleright X, Y)$。

注记 4.26. 如将在续篇中所示，离散复形 $\operatorname{Ext}^{\bullet}_{\mathscr{M}}(X, Y)$ 实际上是导出 $\mathrm{D}(\mathcal{D})$-模范畴 $\mathrm{D}(\mathscr{M})$ 的内部 Hom，并且也等价地是 $\operatorname{Hom}_{\mathscr{M}}(-,-)$ 的导出函子。然而，对于非半单张量范畴$\mathscr{C}$ 而言，情况未必如此，其中 $\mathrm{D}(\mathscr{C})$ 中的内部Hom 可能具有非零微分。

命题 4.27. 设 $\mathcal{D}$ 为融合范畴。对于代数 $A \in \mathcal{D}$ 以及 $S, L \in \mathbb{L}(A)$，存在一个同构

$$J/J^2(S, L) \simeq {}^{\vee}\big(\underline{\operatorname{Ext}}^1_{-A}(L, S)\big).$$

证明. 我们通过证明这两个对象定义同一个（可表）预层来证明 $\operatorname{Ext}^1_{-A}(L, S) \simeq (J/J^2)^{\vee}$。我们有

$$\begin{aligned}
&\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(-, \underline{\operatorname{Ext}}^1_{-A}(L, S)) \simeq \operatorname{Ext}^1_{-A}(- \triangleright L, S) \\
&\simeq \mathbb{D}\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(P_0(S), P_0(- \triangleright L)) \\
&\simeq \mathbb{D}\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2(P_0(S), - \triangleright P_0(L)) \simeq \mathbb{D}\mathfrak{J}/\mathfrak{J}^2({}^{\vee}(-) \triangleright P_0(S), P_0(L)) \\
&\simeq \mathbb{D}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}({}^{\vee}(-), (J/J^2)(S, L)) \\
&\simeq \mathbb{D}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}((J/J^2)(S, L)^{\vee}, -) \simeq \operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(-, (J/J^2)(S, L)^{\vee}).
\end{aligned} \tag{4.4}$$

这里，第一个同构是定义 4.25。第二个是命题 4.24中的同构。第三个由 $P_0(- \triangleright L) \simeq - \triangleright P_0(L)$ 得出，它是推论 4.9的一个实例。第四个是伴随 ${}^{\vee}- \triangleright \dashv - \triangleright$ 所给出的 Hom-同构的一个实例，该同构保持根态射，因为根据命题 4.4， $\mathfrak{J}$ 是$\mathcal{D}$-稳定的。第五个依据推论 4.3，第六个依据$\mathcal{D}$的刚性。最后，第七个同构来自$\mathcal{D}$的中山函子 $\nu_{\mathcal{D}}$所对应的那个同构：

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(-, \nu(P)) \simeq \mathbb{D}\operatorname{Hom}_{\mathcal{D}}(P, -) \text{ for } P \in \operatorname{proj}(\mathcal{D}),$$

但由于$\mathcal{D}$是半单的，我们有 $\nu_{\mathcal{D}} \simeq \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}$。

所有这些同构的自然性都可由命题 2.11. □

我们强调，上述命题中的同构是$\mathcal{D}$的对象之间的同构，而非 $\operatorname{End}_{\mathscr{M}}(L)$-$\operatorname{End}_{\mathscr{M}}(S)$-双模。事实上，要赋予 ~~${}^{\vee}\operatorname{Ext}_{\mathscr{M}}(L, S)$~~ 这样的双模结构，就必须假设$\mathcal{D}$具有幺半范畴的对偶结构（$\operatorname{Ext}_{\mathscr{M}}(L, S)$ 自然是 $\operatorname{End}_{\mathscr{M}}(S)$-$\operatorname{End}_{\mathscr{M}}(L)$-双模）。每个融合范畴是否都能赋予幺半范畴的对偶结构，仍是一个悬而未决的问题；参见 [EGNO，问题 4.8。3]。尽管如此，请注意，命题 4.27 类似于常用的命题 4.24的变体，该变体仅确定空间的维数，而非End(L')-End(L)-双模。

现在，我们可以按如下方式为每个有限的$\mathcal{D}$-模范畴关联一个有向图。

定义 4.28. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限 $\mathcal{D}$-模范畴。 M的有向图定义为一个有向图，其顶点集为 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})/\sim$，并且对每个 $[L]$， $[L'] \in \mathrm{Irr}(\mathcal{M})/\sim$，都有一条箭 $[L] \longrightarrow [L']$ 当且仅当 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L, L') \neq 0$；无论选择什么代表元，这一定义都是良定的$L \in [L]$ 和 $L' \in [L']$，我们将在 引理 4.30中证明这一点。

注 4.29. 如果$\mathcal{D}$还是幺半范畴的对偶结构，则可对 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})/\sim$ 的每个代表元集$\{L_1, \dots, L_n\}$定义一个$\mathcal{D}$-物种；不妨称之为内部 *Ext*-种。其底有向图是$\mathcal{M}$ 的有向图，其中每个顶点标记为 $D_i := \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L_i)$，每条箭标记为 $E_{ij} := {}^{\vee}\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_i, L_j)$； E_{ij} 上的 $(\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L_i), \mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L_j))$-双模结构利用幺半范畴的对偶结构定义。

引理 4.30。 设 $[L_1], [L_2]$ 是 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})$中的两个等价类。那么，当且仅当$\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', L_2') \neq 0$ 时，$\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1, L_2) \neq 0$ 对任意代表元 $L_1' \in [L_1]$ 和 $L_2' \in [L_2]$均成立。

证明。 假设 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1, L_2) \neq 0$，则存在 $V \in \mathcal{D}$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1, L_2)) \neq 0$。由于$L_k \sim L_k'$ 对所有 k均成立，利用命题 4.11 ，我们得到对每个 k，都存在一个对象 $W_k \in \mathcal{D}$，使得 L_k 是 $W_k \triangleright L_k'$的直和项。于是

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(V, \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1, L_2)) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(V \triangleright L_1, L_2)$$

是 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}((V \otimes W_1) \triangleright L_1', W_2 \triangleright L_2')$的直和项。正合函子的伴随 ${}^{\vee}W_2 \triangleright - \dashv W_2 \triangleright -$给出一个同构

$$\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}((V \otimes W_1) \triangleright L_1', W_2 \triangleright L_2') \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(({}^{\vee}W_2 \otimes V \otimes W_1) \triangleright L_1', L_2'),$$

并且由定义 4.25，这同构于 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}({}^{\vee}W_2 \otimes V \otimes W_1, \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', L_2'))$，这表明$\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', L_2')$ 非零。另一个蕴含方向是显然的。□

当$\mathcal{M}$ 由一个$\mathcal{D}$-物种定义时，我们有如下结果。

定理 4.31. 设 A是$\mathcal{D}$-物种 $(I, (D_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I})$的路径代数的一个商，并设$\mathcal{M} := \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$。$\mathcal{M}$ 的有向图与该$\mathcal{D}$-物种的有向图一致。

证明。 这可由将命题 4.27 应用于 $S = L_i$与 $L = L_j$（针对 i、 $j = 1$、 …、 n，并给定 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})/\sim$的代表元集 $\{L_1, \dots, L_n\}$）立即得出。□

5. 主要定理

本节我们遵循 [DSS，定义 2.5.8 与推论 2.5。9] ，并称融合范畴$\mathcal{D}$ 是可分的，如果其 Drinfeld 中心$\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ ([EGNO，定义 7.13。1])$\mathcal{D}$ 是半单的，即$\mathcal{Z}(\mathcal{D})$ 也是一个融合范畴。我们指出，这是一个相当宽松的条件，例如当$\Bbbk$ 的特征为 0 [EGNO，定理 9.3。2]。更重要的是，这也将是我们的主定理的必要条件；参见注 5.13。其中一个要点是，在这一假设下，半单代数与可分代数相同，因此我们可以推得所有代数都是根基分裂的。通过有限$\mathcal{D}$-模范畴的有向图，我们还可以推得，任意遗传有限$\mathcal{D}$-模范畴都等价于一个无圈$\mathcal{D}$-物种的路径代数上的模范畴（反之总是成立）。

5.1. 融合范畴中代数的 Gabriel 定理。

定义 5.1. 若代数 A 属于$\mathcal{D}$，且乘法 $\mu : A \otimes A \to A$ 在 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$中有一个截面，则称其为可分的。

备注5.2。在有限张量范畴的一般情形下不考虑可分代数，原因在于：尽管可以在该情形下原样照搬定义，但可分性在有限张量范畴中并非 Morita 不变量。例如，有限张量范畴$\mathcal{C}$的单位对象 1 总是一个可分代数；但若$\mathcal{C}$ 不是半单的，那么对于任意 $P \in \mathrm{proj}(\mathcal{C})$，与 1 Morita 等价的代数 $\mathrm{Hom}(P, P)$都不是可分的。

命题　　见 5.3 ([AMS，定理 1.30])。 可分代数是半单的（按照 定义 *2.4*　　*4).*

注记 5. 4. 在 推论 4.8中的等价关系下，该结果也见于 [Os，命题 2] .

以下结论是 [AMS，定理 3.8]的推论：

命题 5.5。 设 A 是$\mathcal{D}$ 中的一个代数，且 I 是 A 中的一个幂零理想，使得 A/I 可分。则存在一个代数态射 $\sigma : A/I \to A$，使得 $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_{A/I}$，其中 π 是从 A 到 A/I 的投影。

证明。 由于 I 是幂零的，图表的极限

$$\cdots \longrightarrow A/I^{n+1} \longrightarrow A/I^n \longrightarrow A/I^{n-1} \longrightarrow \cdots \longrightarrow A/I$$

与其截断 $A \to A/I^{d-1} \cdots \to A/I$ 的极限同构，其中 $d = \min\{m \mid I^m = 0\}$。截断的极限为 A，因为截断是一个具有初始顶点的图表。由于$\mathcal{D}$ 是半单的，上述图表中的映射都是分裂的。因此，根据 [AMS，引理 3.4], ，图表中的映射定义了霍赫希尔德扩张。由于 A/I 是可分的，根据 [AMS，推论 3.10], ，它满足 [AMS，定理 3.8] 的等价条件。由 [AMS，定理 3.8(c)] 可直接得到结论。 □

下面的引理实质上与 [EGNO，推论 9.3 的证明相同。3]。

引理 5.6. 设$\mathcal{D}$ 是一个可分融合范畴。则对任意半单代数 A，其双模 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A, A)$ 构成一个多融合范畴（若 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$ 作为$\mathcal{D}$-模范畴不可分解，则它是融合范畴）。特别地， $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A, A)$ 是半单的。

证明。 回顾推论 4.8， A 是半单的，当且仅当 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$ 是半单的（即关于$\mathcal{D}$ 正合；参见 引理 2.26）。根据 [EGNO，§7.12]， $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A, A)$ 是一个有限多张量范畴——它是相对于$\mathcal{M}$ $= \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$的$\mathcal{D}$ 的对偶张量范畴$\mathcal{D}$ 的（单体反范畴）。我们只需说明它还是半单的。

注意，遗忘函子 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D}^{\otimes op}) \simeq \mathfrak{Z}(\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(\mathcal{A}, \mathcal{A})) \longrightarrow \mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A, A)$ 将幺半群单位对象映到幺半群单位对象，此外还将投射对象映到投射对象。若 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$ 是半单的（$\mathfrak{Z}(\mathcal{D}^{\otimes op})$也如此），那么 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D}^{\otimes op})$ 的幺半群单位对象是投射对象，这意味着 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A, A)$ 的幺半群单位对象也是投射对象。这表明 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A, A)$ 是半单的，正如所需。□

以下结果为专家所熟知；例如参见 [DSS，命题 2.5。10]以及 [KZ，推论 5。4]。为求完备，我们给出证明。

命题 5.7。 设$\mathcal{D}$ 是一个可分融合范畴，且 $A \in \mathcal{D}$ 是一个代数。那么以下条件等价：

(i) A是半单的；*(ii)*
A 是可分代数。

特别地，在可分融合范畴中，代数可分等价于推论 *4.8*中所述的任一条件。

证明。 方向 (ii) $\Longrightarrow$ (i) 由 命题 5.3 给出（且不要求 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$>具有半单性）。

另一方面，设 A是半单的。若中心 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$是半单的，则由 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{C}}(A, A)$引理 5.6可知它也是半单的。特别地，乘法映射 $\mu : A \otimes A \longrightarrow A$作为 (A, A)-双模的态射，必定可裂。 □

备注 5.8. 事实上，以下许多结果只要求半单代数与可分代数相同。尽管$\mathcal{D}$可分是充分条件（如上所示），但我们不知道半单代数是否有必要与可分代数 Morita 等价。参见例 5.14，其中给出了一个非可分半单代数的例子（该代数所在的融合范畴不可分）。

回顾一下，给定一个代数 A，我们用 J 表示它的 Jacobson 根。

推论 5.9 (Wedderburn–Malcev 定理)。 设 A 是可分融合范畴$\mathcal{D}$ 中的一个代数。则代数态射 $\pi_0 : A \twoheadrightarrow A/J$ 在 $\mathrm{Alg}(\mathcal{D})$中存在一个截面。

证明。 由 定理 2.52，代数 A/J 是半单的。由于我们假设 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$ 是半单的，根据命题 5.7 可知 A/J 是可分的。最后，由 定理 2.52 可知 J 是幂零的。

因此 J 是一个幂零理想，且 A/J 是可分的，故根据 命题 5.5，投影 π_0 存在一个截面。 □

命题 5.10. 可分融合范畴 $\mathcal{D}$ 中的任意代数都是根基分裂的。

证明. 根据上面的推论，只需证明 $J \twoheadrightarrow J/J^2$ 在 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A/J, A/J)$中存在一个截面。这由 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A/J, A/J)$的半单性可得，依据 引理 5.6 (另见 [AMS，定理 1.30])。 □

以下是我们的第一个主定理；参见 定理 3.16 和 推论 3.17。

定理 5.11. 设 $\mathcal{D}$ 为一个可分融合范畴，并设 A 为 $\mathcal{D}$ 中的一个 $\mathcal{D}$ -基本代数对象，且$A/J \simeq \bigoplus_{i\in I} L_i$ 属于 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$。

那么 A同构于一个$\mathcal{D}$-物种 $(I, (D_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I}$)的路径代数的容许商，其中 $D_i := \mathrm{End}_A L_i$且 $E_{ij} := J/J^2(L_j, L_i)$。

证明。 第一个陈述直接由命题 5.10 与定理 3.16得出，其中由命题 4.17 ，该$\mathcal{D}$-基本假设对 A 保证 A/J 是除代数的有限直积$\mathrm{End}_{\mathscr{M}}(L_i)$，从而我们得到一个$\mathcal{D}$-物种（而不仅仅是拟物种）。等式$E_{ij} = J/J^2(L_j, L_i)$直接由推论 4.22得出。 □

对于一般的有限$\mathcal{D}$-模范畴$\mathscr{M}$，我们有如下结果。

推论 5.12. 设$\mathcal{D}$ 为可分融合范畴，且$\mathscr{M}$ 为有限$\mathcal{D}$-模范畴。选取代表元集 $\{L_1, \dots, L_r\}$，其对应于 $\mathrm{Irr}(\mathscr{M})/\sim$。则$\mathscr{M}$ 等价于 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$，其中 A 是$\mathcal{D}$-物种的路径代数的一个容许商，该物种由 $(I, (D_i)_{1\le i\le r}, (E_{ij})_{1\le i,j\le r})$给出，且以 $D_i := \mathrm{End}_{\mathscr{M}}(L_i)$与$E_{ij} \simeq {}^{\vee}\mathrm{Ext}(L_i, L_j)$ 作为$\mathcal{D}$ 中的对象，对所有 $i,\ j \in \{1, \dots, r\}$。

证明。 令 $L := \bigoplus_{i=1}^{r} L_i$， P_0 为其投射覆盖，且 $A := \mathrm{End}_{\mathscr{M}}(P_0)$。如命题 4.18的证明中所述，我们有 $\mathscr{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$，其中 A 是一个$\mathcal{D}$-基本代数。由定理 5.11， A 同构于一个$\mathcal{D}$-物种的路径代数的容许商。这一点 $E_{ij} \simeq {}^{\vee}\mathrm{Ext}(L_i, L_j)$ 由命题 4.27推出。 □

注 5.13。 如下例所示，融合范畴$\mathcal{D}$可分这一假设对于上述定理和推论都是必要的。感谢 Kevin Coulembier 向我们指出这一点。

例 5.14（半单 Drinfeld 中心的必要性）。 令$\mathcal{D} := \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$，并考虑交换代数 $A := \Bbbk[x,t]/\langle t^2, x^2 - 1 - t\rangle \in \mathrm{vect}_{\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}}$，其中 t位于 0 次度， x位于 1 次度。 A 的 Jacobson 根为 $J = \langle t\rangle$，其中 $A/J \simeq \Bbbk[x]/\langle x^2 - 1\rangle$。注意，$\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ 在 A 和A/J 上的作用均为平凡的，因此 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$ 恰有一个单模 A/J （在同构意义下），并且只有一个不可分解射影模，即 A 自身（作为一个 A-模，A/J 也有无限射影维数）。

若 $\Bbbk$ 的特征为 2，则 Drinfeld 中心 $\mathfrak{Z}(\mathcal{D})$) 不是半单的。看出这一点的一种方法是利用 引理 5.6 并注意到 $\mathrm{bimod}_{\mathcal{D}}(A/J, A/J)^{\otimes op} \simeq \mathrm{rep}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$，它由于 $\Bbbk$ 的特征而不是半单的。重要的是，可以验证 $A \twoheadrightarrow A/J$ 不存在作为分次代数同态的截面。因此，$\Bbbk[x]/\langle x^2 - 1\rangle$ 也是一个不可分的半单代数；参见命题 5.5。

注意，$\mathcal{D}$-模范畴 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$ 只有一种选择，即其自身，作为$\mathcal{D}$-基本$\mathcal{D}$-投射生成元。对于$\mathcal{D}$-模范畴之间的等价 $\Phi : \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(B) \longrightarrow \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(A)$，其中$B$ 是$\mathcal{D}$-基本的，我们发现 $\Phi(B)$ 必定是一个$\mathcal{D}$-基本$\mathcal{D}$-投射生成元。因此，再结合命题 2.19 和引理 2.20，我们得到$\mathcal{D}$ 中代数对象的同构 $B \simeq \mathrm{End}_B(B) \simeq \mathrm{End}_A(\Phi(B))$ 。对于我们选取的代数 A， $\overline{\mathrm{mod}}_{\mathcal{D}}(A)$ 的$\overline{\mathcal{D}}$-投射$\mathcal{D}$-基本生成元的唯一性，由此意味着 A 不可能与任何作为$\mathcal{D}$-物种路径代数之商的代数 Morita 等价。

在陈述下一个推论之前，我们需要一个关于正则 $\mathbb{Z}_+$模的范畴刚性的结果（这很可能是众所周知的）。回顾一下，给定一个有限 D-模范畴，其格罗滕迪克群 $[\![\mathcal{D}]\!]$是 D 的融合环 $[\![\mathcal{D}]\!]$ 上的一个 $\mathbb{Z}_+$-模（相关定义见 [EGNO，第 3] 章）。我们采用如下约定：两个 $[\![\mathcal{D}]\!]$ 上的 $\mathbb{Z}_+$-模等价，是指它们之间存在一个$[\![\mathcal{D}]\!]$-模同构，并且该同构在简单对象的格罗滕迪克类上还是一个双射（例如参见 [Os，定义 1]）。

引理 5.15. 设$\mathcal{M}$是$\mathcal{D}$上的不可分解半单模范畴。假设$[\![\mathcal{M}]\!]$与$[\![\mathcal{D}]\!]$作为$[\![\mathcal{D}]\!]$上的$\mathbb{Z}_+$-模等价。那么 M与 $\mathcal{D}$ 作为$\mathcal{D}$上的模范畴等价。

证明. 设 $\mathrm{Irr}(D) = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}$满足 $X_1 = \mathbb{1}$且 $\mathrm{Irr}(M) = \{L_1, L_2, \dots, L_k\}$。根据假设$[\![D]\!]$ 与 $[\![M]\!]$ 作为 $\mathbb{Z}_+$-模在 $[\![D]\!]$上等价，我们知道 $n = k$，通过置换指标，我们可以假设该同构映射到 $[\![X_i]\!] \longmapsto [\![L_i]\!]$。特别地，$[\![X_i]\!] \cdot [\![L_1]\!] = [\![L_i]\!]$对所有 i均成立，这意味着 $X_i \triangleright L_1 \simeq L_i$对所有 i均成立。进而得到 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L_1) \simeq \mathbb{1}$，结论由以下一系列 D-模等价推出： $M \simeq \mathrm{mod}_{\mathbb{C}}(\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L_1)) \simeq \mathrm{mod}\,\mathbb{C}(\mathbb{1}) \simeq D$. □

注记 5.16. 上述关于 $\mathbb{Z}_+$-模的刚性结果仅适用于正则$\mathbb{Z}_+$-模。也就是说，两个模范畴 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 即使其格罗滕迪克群（作为$\mathbb{Z}_+$-模）等价，也不一定等价。参见例 2.70。

推论 5.17. 设 $\mathcal{D}$ 是一个可分融合范畴，$\mathcal{M}$ 是一个有限的 $\mathcal{D}$-模范畴。以下条件等价：

(i) M 等价于 D-箭图路径代数的某个容许商上的模范畴。*(ii)* $L(M)$等价于 $D^{\oplus n}$，作为 D-模范畴。*(iii)* $[\![M]\!] = [\![L(M)]\!]$ 等价于 $[\![D]\!]^{\oplus n}$，作为 $[\![D]\!]$ 上的 Z_+-模，其中 $n \geq 1$。*(iv)* 存在 $\{L_1, \dots, L_n\}$ $M)/\sim$ 的一个代表元，使得• 对于所有 $)D$ $X \triangleright L_i$，对所有 L_i都是简单对象；并且• 每个简单的 $)$ M $X \triangleright L_i$ 都由 $X \in \mathrm{Irr}(D)$ 和唯一的 L_i给出。

证明。 蕴含关系 (i) $\implies$ (ii) 是显然的，因为 $\mathbb{L}(\mathcal{M})$ 将等价于某个平凡代数乘积上的模范畴$\mathbb{1}$。(ii) 与 (iii) 之间的等价是 引理 5.15的直接推广。蕴含关系 (iii) $\implies$ (iv) 由等价 $\mathbb{Z}_+$- 模的定义可直接得到。最后， (iv) $\implies$ (i) 可由使用 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})/\sim$ 的给定代表元集并应用 推论 5.12得到，其中这些假设确保每个 $\mathrm{End}_{\mathcal{M}}(L_i) \simeq \mathbb{1}$。 □

5.2. 理想消失当且仅当遗传

定义 5.18。 称有限阿贝尔范畴 $\mathcal{A}$ 为遗传的，如果其任意投射对象的任意子对象本身都是投射的。换言之，$\mathcal{A}$ 的全局投射维数至多为一。因此，若$\mathcal{D}$ 中的代数的模范畴具有这一性质，我们就称该代数是遗传的 。

Pro命题 5.19。 设 $(I, (D_i)_{i\in I}, (E_{ij})_{i,j\in I})$ 是一个无圈的 $\mathcal{D}$-物种。其路径代数是遗传的 $y.$

证明。 该展开过程 [EH 定理 3.5] 可原封不动地从 $\mathcal{D}$-箭图推广到 $\mathcal{D}$-物种，表明其路径代数上的模范畴等价于一个普通（有限）无圈箭图的表示范畴，而后者是遗传的。细节留给读者。□

命题 5.20。 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限的 $\mathcal{D}$-模范畴。如果 $\mathcal{M}$ 是遗传的，那么根据定义 *4.28*定义的有向图是无圈的。

证明。 在此证明中，给定 $L \in \mathrm{Irr}(\mathcal{M})$，我们用 $[L]$ 表示 L 在等价关系 $\sim$下的等价类。设 $\{L_1, \dots, L_r\}$ 是 $\mathrm{Irr}(\mathcal{M})/\sim$的一个代表元集。

反设 $\mathcal{M}$ 的有向图中存在一个环。换言之，对于某个$n \leq r+1$，存在一个序列 $(i_1, \dots, i_n) \in \{1, \dots, r\}^n$，使得对于 $k = 1$、 …、 n 和$\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_{i_n}, L_{i_1}) \neq 0$，都有 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_{i_k}, L_{i_{k+1}}) \neq 0$。我们还可以进一步假设该环是极小的，即对于 $j \neq j'$，有 $L_{i_j} \neq L_{i_{j'}}$。此外，通过重新标记指标，我们甚至可以假设该环由 $(1, \dots, n)$ 给出。

我们首先选择 L_1' 作为一个（不一定唯一的）简单对象，使得 $L_1' \sim L_1$ 以及 L_1' 的投射覆盖，在 $[L_1]$ 的元素的投射覆盖中具有最小的 FPdim ——这里， FPdim 一个模的 FPdim 是指将其视为 $\mathcal{D}$ 中的一个对象；参见 [EGNO，§3.3 及命题 4.9。1]关于 FPdim的定义和性质。在下文中，我们将描述一种为每个 L_i' 选择简单对象 $2 \leq i \leq n$的过程，使其满足：

- $L_i' \sim L_i$; and
- $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_j', L_{j+1}') \neq 0$ for all $1 \leq j \leq n-1$.

最后，我们的 的过程还会选择另一个简单对象 L_1''，使得 $L_1'' \sim L_1'$ $(\sim L_1)$ 且 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_n', L_1'') \neq$ 0.

过程如下。由于 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1, L_2) \neq 0$，我们有 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', L_2) \neq 0$ 根据 引理 4.30。因此存在 $V \in \mathcal{D}$ 使得 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{M}}(V, \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', L_2)) \neq 0$，所以 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(V \triangleright L_1', L_2) \simeq \mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', V^\vee \triangleright L_2) \neq 0$。由于 $V^\vee \triangleright L_2$ 是半单的，它必定包含一个简单对象直和项 L_2'，使得 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_1', L_2') \neq 0$。注意，根据构造， $L_2' \sim L_2$。我们继续迭代地选择满足性质 $L_j' \sim L_j$ 和 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_j', L_{j+1}') \neq 0$ 的 L_j'，其中 $j = 1$、 …、 $n-1$。最后， $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_n, L_1) \neq 0$ 也蕴含 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_n', L_1') \neq 0$。因此，与之前一样，我们可以选择某个满足 $L_1'' \sim L_1'$ $(\sim L_1)$ 且 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(L_n', L_1'') \neq 0$ 的 L_1''。 ——

现在，我们可以利用以下关于遗传范畴的一般结果导出矛盾：若 M 是遗传的，且 S 和 S' 是 M 中满足性质 $\mathrm{Ext}_{\mathcal{M}}(S, S') \neq 0$的两个简单对象，则其投射覆盖之间存在一个严格单态射（即其余核非零）， $P' \hookrightarrow P$ （其中P'覆盖 S'，而 P覆盖 S）；例如参见 [Ben，引理 4.2。2]。对于 $i = 1$、 …、 n，设 P_i'是 L_i'的投射覆盖，设 P_1''是 L_1''的投射覆盖。因此，我们对 L_i'和 L_i''的选择给出了以下严格单态射链：

$$P_1'' \overset{\neq}{\hookrightarrow} P_n' \overset{\neq}{\hookrightarrow} P_{n-1}' \overset{\neq}{\hookrightarrow} \cdots \overset{\neq}{\hookrightarrow} P_2' \overset{\neq}{\hookrightarrow} P_1'. \tag{5.1}$$

然而，这意味着 P_1''的 FPdim严格小于 P_1'，这与我们最初选择P_1' 的初衷矛盾：它在 $[L_1]$中所有简单对象的投射覆盖里具有最小的 FPdim 。□

引理 5.21。 设 $T_B(E)$ 是一个无环物种。那么 $J(T_B(E))$ 是由 E生成的理想 $\langle E \rangle$， 由$E \oplus E \otimes_B E \oplus \cdots$给出。

证明。 这是 命题 2.65的直接推论。 □

注 5.22。 鉴于 引理 5.21， 注 3.13 中的根基分裂在无环物种的情形下特别简单：它由态射 $B \hookrightarrow T_B(E)$ 和 $E \hookrightarrow \langle E \rangle$给出。

定理 5.23。 设 $\mathcal{D}$ 是一个可分融合范畴。那么有限的 $\mathcal{D}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 是遗传的，当且仅当它等价于某个无环$\mathcal{D}$-物种的路径代数上的模范畴。

证明。 等价的一个方向由 命题 5.19给出。因此，只需证明：若 $\mathcal{M}$ 是遗传的，则它等价于 $\mathcal{D}$中某个无环物种的路径代数上的模范畴。由 推论 5.12可得 $\mathcal{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathcal{D}}\left(T_B(E)/I\right)$，其中 $T_B(E)$ 是一个 $\mathcal{D}$-物种的路径代数，其类型为 (B, E)， 且 $I \subseteq T_B(E)_{\geq 2}$。 此外，根据 $\mathcal{D}$-物种由 定理 4.31 和命题 5.20可知是无环的，因此我们只需证明 I 是平凡的。

利用引理 5.21，很容易验证 $J(T_B(E))^2 = T_B(E)_{\geq 2}$。 因此，由命题 4.4 可知，在 $\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(T_B(E))$ 中的理想 $\mathrm{R}(I)$ （根据定理 2.50， I 对应于该理想）包含于 $\mathfrak{J}^2(\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(A))$。与命题 4.4 的证明类似，我们有 $\mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(T_B(E)/I) \simeq \mathrm{proj}_{\mathcal{D}}(T_B(E))/\mathrm{R}(I)$。设 P 是 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(T_B(E))$ 的一个投射生成元——不仅仅是一个投射 D-生成元。于是存在阿贝尔范畴的等价 $\mathrm{mod}_{\mathcal{D}}(T_B(E)) \simeq \mathrm{mod}_{\Bbbk}(\mathrm{End}_{T_B(E)}(P))$， 且 $\mathrm{R}(I)(P, P)$ 是 $\mathrm{End}_{T_B(E)}(P)$ 中的一个理想，它包含于后者 Jacobson 根的二次幂中，并且其商是遗传的。这表明，根据 Ben 的引理 4.2， $\mathrm{R}(I)(P, P)$ 为零。1], 并进一步表明 $\mathrm{R}(I)$ 为零，因此 I 也为零。□

推论 5.24. 设 $\mathcal{D}$ 为一个可分融合范畴。一个有限的 $\mathcal{D}$-模范畴 $\mathcal{M}$ 等价于某个无圈 $\mathcal{D}$-箭图的路径代数上的模范畴，当且仅当 $\mathcal{M}$ 是遗传的，并且 推论 *5.17*中任一等价陈述成立。

证明。 这是一个直接的推论，依据是 推论 5.17 和 定理 5.23。 □

例 5.25. 为简单起见，我们在 $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ 上工作。考虑如下 D_4 箭图

$$Q := \quad \begin{array}{ccccc} 0 & & & & \\ & \searrow & & & \\ & & 2 & \longrightarrow & 3 \\ & \nearrow & & & \\ 1 & & & & \end{array}$$

我们可以定义一个 $G := \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \{0, 1\}$ 对 Q的作用，其中生成元 $1 \in G$ 通过交换顶点 0 和 1，并保持 2 和 3 不变。由此在 G 上诱导出一个（强）作用 $\mathscr{M} := \mathrm{rep}(Q)$；等价地，$\mathscr{M}$ 是一个关于 $\mathscr{D} := \mathsf{vect}_G$的模范畴。根据 定理 5.23，我们知道 $\mathscr{M} \simeq \mathrm{mod}_{\mathscr{D}}(A)$对应于一个 $\mathscr{D}$-物种的路径代数（无需再取商）。利用 推论 5.12，我们可以直接计算出该 $\mathscr{D}$-物种如下。

我们有 $\mathrm{Irr}(\mathscr{M}) = \{S_i \mid 0 \le i \le 3\}$，每个顶点 i对应一个。由于 S_0 和 S_1 属于同一个 G-轨道，并且我们选择 $\mathrm{Irr}(\mathscr{M})/\sim$ 由 $\{S_1, S_2, S_3\}$表示。直接计算可得（例如使用公式 2.3和公式 4.3）：

$$\underline{\mathrm{End}}_{\mathscr{M}}(S_i) \simeq \begin{cases} \mathbb{1}, & \text{if } i = 1 \\ D, & \text{if } i = 2, 3; \end{cases} \qquad \underline{\mathrm{Ext}}(S_i, S_j) \simeq \begin{cases} \Bbbk_0 \oplus \Bbbk_1, & \text{if } i = 1, j = 2; \\ \Bbbk_0 \oplus \Bbbk_1, & \text{if } i = 2, j = 3; \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases} \tag{5.2}$$

其中 $D := \mathbb{k}[G]$ 是 例 2.70 中由（未扭曲的） G-分次群代数给出的除代数。根据推论5.12，$\mathscr{D}$-物种为：

$$\Bbbk_0 \xrightarrow{D} D \xrightarrow{D} D.$$

严格来说，我们只确定了标记这些箭头的底层对象，而没有将其视为双模。但这里显然双模就是显而易见的那些（另请注意，vect_G 中的对象是自对偶的）。注意，这个$\mathscr{D}$-物种恰好就是 第 (ii) 项，见例 3.10。也可以在箭图（见 [RR]）的路径代数 $\mathbb{k}$ 上定义一个 -扭曲的 作用，从而得到一个 vect_G-模范畴，它等价于另一个由$\mathscr{D}$-物种的路径代数上的模范畴，后者见 第 (iii) 项 。注意，尽管这两个模范畴作为阿贝尔范畴等价（它们都是 $\mathrm{rep}(Q)$），但作为vect_G-模范畴却不等价。

我们还要指出，尽管$\mathscr{D}$-箭图出现在 （i）项中，但它与上文讨论的另外两个有很大不同。具体而言，作为阿贝尔范畴，这个$\mathscr{D}$-箭图的路径代数上的模范畴等价于两个 D_4 箭图的直和。

我们也鼓励读者通过从例 3.9中的$\mathscr{D}$-物种得到$\mathscr{D}$-箭图，证明$\mathscr{D}$-箭图和$\mathscr{D}$-物种的路径代数 Morita 等价。

参考文献

[AMS] A. Ardizzoni, C. Menini, D. Ştefan, 《幺半范畴中的 Hochschild 上同调与“光滑性”》，《纯粹与应用代数杂志》208 (2007), 297–330. [ASS] I. Assem, D. Simson, A. Skowroński。《结合代数表示论要义》第 1 卷：表示论技巧。伦敦数学学会学生教材，65。剑桥大学出版社，剑桥，2006。[Ben] D. J. Benson, 《表示与上同调》II：群与模的上同调。剑桥大学出版社，1991[ ] [ ] arXiv: 。Bet A. Betz.《融合范畴在路径代数上的作用》。arXiv: 。[ ] 1102 1100 Ber C. F. Berg.《基本代数的结构定理》。 2503 18630 CSZ K. Coulembier, M. Stroiński, T. Zorman.《单代数与正合模范畴》。arXiv: 2501 06629 。DR V. Dlab [ ] and C.M. Ringel.《图与代数的表示》，卡尔顿数学讲义，第 8 号，卡尔顿大学数学系，渥太华，安大略省，1974。iii+86 页。[DSS] C. L. Douglas, C. Schommer-Pries, Christopher, N. Snyder, Noah.《可对偶张量范畴》，Mem. Amer. Math. Soc. 268 (2020), no. 1308, vii+88 页。[EGNO] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik.《张量范畴》。《数学调查与专著》**205**。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2015。 [ ] 2404 09714 EH B. Elias, E. Heng.《有限型融合箭图 [ ] 的分类》。arXiv: 。EKW P. Etingof, R. Kinser, and C. Walton.《有限张量范畴中的张量代数》。《国际数学研究通知》2021 24, 18529 2021 18572 ( ), no. – 。

[EK] P. Etingof and M. Khovanov.《张量范畴的表示与 Dynkin 图》。《国际数学研究通知》1995 (1995), no. 5, 1073-7928,1687-0247.[EO] P. Etingof, V. Ostrik.《有限张量范畴》。《莫斯科数学杂志》4(2004), p.627–654。[Ga1] P. Gabriel.《不可分解表示 II》，《数学专题讨论会论文集》，第 XI 卷，学术出版社，(1973), 81-104。[Ga2] P. Gabriel.《不可分解表示 I》，《数学手稿》6 (1972), pp. 71–103。[Heng] E. Heng.《融合范畴中的 Coxeter 箭图表示与 Gabriel 定理》。《数学精选》(N.S.). 30, 67 (2024) [Kel] G. M. Kelly.《教义伴随》。《范畴研讨会》，会议录，悉尼 1972/1973，《数学讲义》420, 257-280 (1974). 1974. [Ko] A. Kock.《强函子与幺半范畴单子》。《巴塞尔数学档案》23 (1972), 113–120. [LMS] V. Linchenko, S. Montgomery, L. W. Small.《稳定 Jacobson 根与半素 Smash 积》，《伦敦数学会通报》(2005); 37(6):860-872。

[ ] 2502 02532 2 KW J. Kesten, C.

[ ] Walton.《幺半范畴中的除代数》。arXiv: 。v KZ L. Kong, H. Zheng.《多融合范畴中的半单代数与可分代数》。arXiv: 1706 06904 2 。

[ ] v MM V. Mazorchuk, V. Miemietz.《有限幺范畴的传递 2-表示》。《美国数学会汇刊》368 (2016), no. 11, 7623–7644. [Os] V. Ostrik.《模范畴、弱 Hopf 代数与模不变量》。《变换群》8 2, 177 2003 206 ( ), no. – 。[QZ] Y. Qiu, X. Zhang.《三角范畴上的融合稳定结构》。《数学精选》新系列。31, 50 (2025). https://doi.org/10 1007 00029 025 01037 6 。/s - - - RR I. Reiten, C. Riedtmann.《Artin 代

[ ] 数表示论中的斜群代数》。《代数杂志》92 (1985), no. 1, 224–282. [Sa] S. Sanford.《非代数闭域上的融合范畴》。《代数杂志》663 (2025), pp. 316–351. [Sch] G. Schaumann.《融合箭图》。发表于《当代数学通讯》在线版。https: //doi.org/10.1142/S021919972550066X [St] R. Street.《富化范畴与上同调》。《数学问题》, 6:265–283, 1983。再版于: 《范畴论及其应用重印集》, 14 (2005). [SZ] M. Stroiński, T. Zorman.《无限与非刚性情形下模范畴的重构》。arXiv:2409.00793