arXiv:2602.19176v1 [math.GT] 22 Feb 2026

模群中惰性类与模糊类的组合结构

Debattam Das、Krishnendu Gongopadhyay 和 Khushi Mishra

Abstract. 我们从纯组合视角研究模群 PSL(2，$\mathbb{Z}$) 中的惰性共轭类和模糊共轭类。利用模群的自由积表示 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ 中的字长，我们得到了惰性类和模糊类的精确计数公式及渐近增长率。我们的结果首次独立于 Sarnak 基于解析迹的方法，给出了惰性类的计数公式，同时也为模糊类建立了组合框架。

1. Introduction

回顾一下，模群 Γ 由以下变换生成：

$$T : z \mapsto z + 1 \quad \text{and} \quad S : z \mapsto -\frac{1}{z}.$$

群 Γ 在几何上也可与 PSL(2，$\mathbb{Z}$) 以及自由积$\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$等同。本文受到 Sarnak 的工作 [16], 启发；该工作讨论了互反类、模糊类和惰性类的计数问题。

令 $\{\gamma\}_\Gamma$ 表示元素 $\gamma \in \Gamma$的共轭类。群 Γ作用于双曲平面 $\mathbb{H}^2$，其元素根据不动点的位置分类为椭圆型、抛物型或双曲型；等价地，也可根据迹$t(\gamma)$的绝对值分类；参见 [8]。 Γ 中的本原双曲共轭类与模曲面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$上的本原闭测地线自然对应。

在一篇开创性论文中，Sarnak [16] 运用源自塞尔伯格迹公式和高斯二次互反律的解析方法，研究了 Γ 中的特殊共轭类。他引入了作用于 Γ上的三个对合，即 ϕ_R、ϕ_w和 ϕ_{Amb}；它们与恒等式 Id 共同生成克莱因四元群

$$K = \langle Id, \phi_R, \phi_w, \phi_{Amb} \rangle.$$

这些对合定义如下

$$\phi_R(\gamma) = \gamma^{-1}, \quad \phi_w(\gamma) = w^{-1}\gamma w, \quad \phi_{Amb} = \phi_R \circ \phi_w = \phi_w \circ \phi_R,$$

其中

$$w = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{PGL}(2, \mathbb{Z}) \text{ is an reflection.}$$

日期：2026年2月24日。2020年数学学科分类。主要分类 11F06；次要分类 20H05、20H10、20E45。关键词与短语。计数问题、组合结构、约化字、模群、共轭类、本原元素、惰性类、歧义类、互反类。

令 P 表示所有本原双曲型元素的集合，并令 Π 表示它们对应的共轭类集合。从几何上看，每个 $p \in P$ 都对应于商曲面 $\Gamma\backslash\mathbb{H}^2$ 上的一条定向本原闭测地线，其长度为

$$\ell(p) = \log N(p), \quad \text{where } N(p) = \left(\frac{t(p) + \sqrt{t(p)^2 - 4}}{2}\right)^2.$$

对于任意子群 $H \subset K$，定义

$$\Pi_H = \{\{p\} \in \Pi : \phi(\{p\}) = \{p\} \text{ for all } \phi \in H\}.$$

特别地，$\Pi_{\langle e\rangle} = \Pi$。Sarnak 得到了关于这些对称类的双曲长度渐近计数公式。Π_H 的元素根据 H 是由 ϕ_R、ϕ_w 还是 ϕ_{Amb} 生成，分别称为互反、惰性或模糊。

本文旨在从纯粹的组合和符号视角研究这些类。我们不采用双曲长度，而是用表示 $\Gamma \cong \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ 中的字长来度量大小。这种方法能够用约化字明确描述惰性共轭类和模糊共轭类，并由此得到按字长计数的精确公式。关于本原类和互反类，Bas majian 和 Suzzi Valli 在 [2] 中给出了基于字长的计数公式。本文研究模群中的惰性类和模糊类，从而补全组合图景。

通过用循环约化的（AB）字表示双曲型共轭类，我们证明，对 K 中元素的不变性会转化为相关指数序列上的反周期性或回文对称约束。这些约束根据字长所含因数 2 的最高幂对可接受的字长进行分层，反映了这种对称性所具有的对合式符号反转性质。该符号框架给出了给定字长下惰性共轭类和模糊共轭类的精确计数公式，区分了本原类与非本原类，并提供了精确的渐近增长估计。我们在定理 1.1 和定理 1.2 中概述这些结构性结果。

关于这一方向的相关研究，参见 [13] 和 [14], ；其中基于发散测地线和公垂线的几何方法，通过测地线长度（等价地说，即迹）得出了 Sarnak 对模糊类和互反类的计数。关于 Sarnak 对互反类和本原类的计数的进一步研究，参见 [3], [4], [7], 另见 [1], [5], [6]。

尽管已有大量研究从群论视角探讨组合群中特殊类的计数，例如参见 [9], [12], [15], , 但据我们所知，除Sarnak的方法外，尚无以其他方法得到的惰性类结果。本文首次利用群论中的基本组合方法给出此类结果（例如参见 [10]）。我们的方法不仅补充了模群中惰性类与歧义类的现有解析方法，也为该问题提供了新的组合视角。

1.1. 符号约定与主要结果。 现在我们引入符号约定并陈述主要结果。

定义 $\langle P\rangle$ 为所有本原元素的幂的乘积所构成的集合，

$$\langle P\rangle := \left\{ \prod_{i=1}^{n} p_i^{k_i} : n \geq 1,\ p_i \in P,\ k_i \in \mathbb{Z} \right\},$$

并令

$$\Pi'_H := \{\{p\} \in \langle \Pi\rangle : \phi(\{p\}) = \{p\}\ \forall\, \phi \in H\},$$

其中，$\langle \Pi\rangle$ 表示 $\langle P\rangle$中的共轭类集合。记

$$\mathscr{I} := \Pi'_{\langle \phi_w\rangle}, \qquad \mathscr{A} := \Pi'_{\langle \phi_{\mathrm{Amb}}\rangle}$$

并分别称 $\mathscr{I}$ 和 $\mathscr{A}$ 为惰性类集和模糊类集。

利用识别 $\Gamma \simeq \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$，我们通过组合方法为 $\mathscr{I}$和 $\mathscr{A}$ 中的共轭类定义标准形，并通过系统计数代表元来研究其增长率。

设 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ 的生成元为 A 和 B，其中 A 对应于 S： $z \mapsto -1/z$，而B 对应于 ST： $z \mapsto -1/(z+1)$。下文记 $S = A$ 和 $ST = B$。对于 $\gamma \in \Gamma$，令 $\|\gamma\|$ 表示其关于对称生成集$\{A, B, B^{-1}\}$的字长，并令 W为这些生成元所构成的约化字集合。令 W_{2t}为长度为 $2t$的约化字集合，并令 W_{2t}（AB）为 W中长度为 $2t$ 的（AB）字集合。

γ 的共轭类记为 $[\gamma]$，长度为

$$\|[\gamma]\| = \min\{\|h\| : h \in [\gamma]\}.$$

一个词是循环约化的，如果每个循环置换仍保持约化；这样的代表在其共轭类中实现最小长度，并且仅相差循环置换。一个(AB)–词是以 A 开头、以 B 或B^{-1}结尾的约化词。如 [2], 所示，每个不与生成元共轭的 $\gamma \in W$ 都与某个(AB)–词共轭。若一个(AB)–词具有偶数长度 $2t$，则循环移位 k 个位置后仍为(AB)–词当且仅当 k 为偶数，而为(BA)–词当且仅当 k 为奇数。

现在，对于实值函数 f， g： $[0,\infty) \to \mathbb{R}$。我们记 $f \sim g$，当

$$\frac{f(t)}{g(t)} \to 1 \qquad \text{as } t \to \infty.$$

我们称 $f \simeq g$，如果存在正常数 C_1， C_2， C_3， C_4 和 t_0 使得

$$C_1 g(t) + C_3 \leq f(t) \leq C_2 g(t) + C_4, \text{ for all } t \geq t_0.$$

此外，只要 $f \simeq g$，我们也可以将其等价地记为 $f(t) = \Theta(g(t))$。

现在我们给出以下定理。

定理 1.1. (1) 设 $\mathscr{I}_{\leq 2t}$ 为所有长度不超过$2t$的惰性共轭类的集合。那么，当 $t \to \infty$ 时，我们有

$$|\,\mathscr{I}_{\leq 2t}\,| \sim \frac{2^{\lfloor \frac{t}{2}\rfloor}}{\lfloor \frac{t}{2}\rfloor + 1},$$

其中，$\lfloor \frac{t}{2}\rfloor$是小于或等于 $\frac{t}{2}$的最大整数。 –

(2) 长度不超过 $2t$ 的所有本原惰性类的集合，与长度不超过 $2t$的所有惰性共轭类的集合渐近相等。

定理 1.2。 (1) 设 $\mathscr{A}_{\leq 2t}$ 为长度不超过 $2t$ 的所有模糊类的集合。那么我们有

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \simeq 2^{\frac{t}{2}}.$$

(2) 所有长度不超过 $2t$ 的本原模糊类的集合，与所有长度不超过 $2t$ 的模糊类的集合渐近相等。

结合惰性类和模糊类的渐近计数，以及 [2] 中关于互反类的结果（另见 [6]），我们将计数汇总在下表中。

共轭类集合	**基数的共轭类**
长度不超过 $2t$ 的互反类。	$\sim 2^{\lfloor t/2 \rfloor}$
长度为惰性的共轭类 at 至多 $2t$。	$\sim \dfrac{2^{\lfloor t/2 \rfloor}}{\lfloor t/2 \rfloor + 1}$
长度不超过 $2t$ 的模糊共轭类。	$\simeq 2^{t/2}$

表1. 各类共轭类的增长

在**第2节**中，我们研究了模群中惰性元素的共轭类结构，并推导出这些类的渐近增长。类似地，我们在**第3节**中研究了歧义类及其渐近增长。相关章节还讨论了惰性类和歧义类中本原类的渐近增长。

致谢。 作者感谢 Fr´ed´eric Paulin 就本研究提出的意见。

本研究的部分工作是在 Das 访问印度统计研究所´加尔各答期间完成的；当时 Gongopadhyay 正在访问巴黎-萨克雷的高等科学研究所。作者感谢相关机构在研究期间提供的接待与支持。

Mishra衷心感谢印度政府科学技术部通过FIST资助（编号SR/FST/MS- I/2019/46）为计算设施提供的部分支持。

2. Combinatorial Structure of Inert Classes

W 中任意长度为 $2t$的字具有如下形式

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_t}, \qquad \alpha_i \in \{\pm 1\},$$

其中每个块 AB^{α_i} 恰好包含两个字母。

如果共轭类 $\{p\}$ 被 φ_w固定，那么序列 $(\alpha_1, \ldots\ldots, \alpha_t)$ 满足反周期关系。特别地，存在一个整数 $m \mid t$ ，使得经过适当的循环旋转后，单词 p 变为块

$$(\alpha_1, \ldots, \alpha_m, -\alpha_1, \ldots, -\alpha_m, \ldots)$$

重复 t/m 次。等价地，

$$\alpha_{m+i} = -\alpha_i \qquad \text{for all } i \text{ (indices modulo } 2t),$$

这个关系将在下一个引理中得到证明。

因此， t元组（α_1，……， α_t）由一个长度为 $2m$的基本块构造而成，这使得 $2t$ 必须能被 4 整除。因此，我们将分析范围限定为代表元长度为 $4t$的惰性类，记作 $\mathscr{I}_{4t}$。

现在我们陈述一个引理来确立这种对称性。

引理 2.1. 设 $\{p\}$ 是 $\mathscr{I}_{4t}$中的一个惰性类，并假设 $\{p\}$包含一个形如以下形式的循环约化字

$$p \;=\; AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{2t}}, \qquad \alpha_i \in \{\pm 1\}.$$

若 $\{p\}$ 被 ϕ_w 固定，则存在整数 m ，使得 $1 \le m \le t$ 且 $m \mid t$ ，并且在对 p 进行循环旋转后，有

$$p \;=\; \big(AB^{\alpha_1}\cdots AB^{\alpha_m}\big)\big(AB^{-\alpha_1}\cdots AB^{-\alpha_m}\big)\big(AB^{\alpha_1}\cdots AB^{\alpha_m}\big)\big(AB^{-\alpha_1}\cdots AB^{-\alpha_m}\big)\cdots\cdots,$$

也就是说，

$$\alpha_{m+i} = -\alpha_i \qquad \textit{for all } i \textit{ (indices modulo } 2t\textit{)}.$$

等价地， $2t$ 元组$(\alpha_1, \ldots, \alpha_{2t})$ 的周期为 $2m$ ，而单词 p 是一个长度为 $2m$的单词的(t/m)重重复。

证明。设 $\{p\} \in \mathscr{I}_{4t}$ ，并令

$$p \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \qquad ad - bc = 1, \quad |a + d| > 2.$$

Then

$$\phi_w(p) = w^{-1}pw \;\longleftrightarrow\; \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}.$$

此外，

$$\phi_w(A) \;\longleftrightarrow\; \phi_w\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \;\longleftrightarrow\; A,$$

and

$$\phi_w(B) \;\longleftrightarrow\; \phi_w\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \;\longleftrightarrow\; AB^{-1}A.$$

因此，

$$\phi_w(A) = A \qquad \text{and} \qquad \phi_w(B) = AB^{-1}A.$$

这里 $p \in \langle\, P \,\rangle$，由于 A 和 B 都不是双曲型，p 不可能与其中任何一个共轭。此外，任何不与生成元共轭的 $\gamma \in W$ 都与一个

(AB)-字共轭。因此， $\mathscr{I}_{4t}$ 的每个共轭类都包含一个 AB-字。令 p 本身为一个长度为 4t 的 (AB)-字，即 $p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}....AB^{\alpha_{2t}}$，其中 α_i 是± 1。 ϕ_w 是一个内自同构，因此

$$\phi_w(AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\dots AB^{\alpha_{2t}}) = B^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}\dots AB^{-\alpha_{2t}}A.$$

由于 $\{p\} \in \mathscr{I}_{4t}$，共轭类 $\{p\}$ 在自同构 ϕ_w下保持不变。这意味着字 p 和 $\varphi_w(p)$ 在群中必须共轭。字 p 具有如下标准形式

$$p = AB^{\alpha_1}\, AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{2t}},$$

而应用 ϕ_w 会将每个块 AB^{α_i} 映射为 $B^{-\alpha_i}A$。因此， $\phi_w(p)$ 以 B 开头，以A 结尾，具有 (BA)-字的结构；而 p以 A 开头，以 B 结尾，是一个 (AB)-字。(BA)-字只有经过奇数次循环旋转才能与 (AB)-字共轭：偶数次旋转会保留首项 B，而奇数次旋转会将前导BA 变为 AB。因此，任何共轭元素都必须对$\varphi_w(p)$ 实施奇数次循环移位。

考虑 $L_m = B^{\alpha_m}A\, B^{\alpha_{m-1}}A\cdots B^{\alpha_1}A$。通过 L_m进行共轭，恰好执行所需的奇数次循环置换，将 $\varphi_w(p)$ 的 (BA)-模式转换回 p 的 (AB)-模式，从而得到恒等式

$$L_m\, \varphi_w(p)\, L_m^{-1} = p,$$

这表明 $\varphi_w(p)$与 p 表示同一个共轭类。

此外，将等式 $L_m\, \varphi_w(p)\, L_m^{-1} = p$ 逐块展开，可得到关于指数 α_i的一个约束，即

$$(B^{\alpha_m}A....B^{\alpha_2}AB^{\alpha_1})(B^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}....AB^{-\alpha_{2t}}A)(B^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}....AB^{-\alpha_m}) = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}....AB^{\alpha_{2t}}.$$

于是，

$$\alpha_{m+1} = -\alpha_1,\ \alpha_{m+2} = -\alpha_2, \dots,\ \alpha_{m+m} = -\alpha_m,\ \alpha_{m+(m+1)} = -\alpha_{m+1},\ \dots, \alpha_m = -\alpha_t.$$

将两边对应的(AB)块进行匹配，迫使第$(m+i)$个位置上的符号为第 i个位置上符号的相反数。因此

$$\alpha_{m+i} = -\alpha_i \qquad \text{for all } i \text{ (indices taken modulo } 2t).$$

特别地，序列$(\alpha_1$，.....， $\alpha_{2t})$成为长度为 $2m$的块的重复，因此总长度 $2t$ 必须是 $2m$的整数倍。因此， $m \mid t$。□

推论 2.2。 如果上面的引理中，共轭类 $\{p\}$ 是本原的（也就是说， p 不是一个真幂），那么必然有 $m = t$。

现在，我们的目标是计算群 $\mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_3$ 中的字。为此，我们用二进制序列对 (AB)–字进行编码。长度为 $4t$ 的 (AB)–字，

$$AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{2t}}, \qquad \alpha_i \in \{\pm 1\},$$

可表示为二进制序列 $(\alpha_1$，. . . ， $\alpha_{2t})$。令 X_t 表示所有长度为 t 的二进制序列的集合。

定义:

$$\mathcal{T}_{4t}=\bigcup_{m|t}\{AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}....AB^{\alpha_{2t}} \mid \alpha_{m+i}=-\alpha_i,\ \alpha_i\in\{\pm 1\} \text{ for all } i \text{ (indices modulo } 2t)\ \}.$$

将 $\mathcal{T}_{4t}$ 与

$$T_{2t}=\bigcup\{(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t}) \mid \alpha_{m+i}=-\alpha_i,\alpha_i\in\{\pm 1\} \text{ for all } i \text{ (indices modulo } 2t)\ \}\subset X_{2t}.$$

写作 $T_{2t}^{m|t}=\bigcup_{m|t}T_{2t,m}$，其中

$$T_{2t,m}=\{(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t}) \mid \alpha_{m+i}=-\alpha_i,\alpha_i\in\{\pm 1\} \text{ for all } i \text{ (indices modulo } 2t)\ \}.$$

一个（AB）字的共轭字，在表示为相同的（AB）形式时，对应于偶数阶的循环置换。牢记这一点，并利用已建立的双射，我们如下定义 X_{2t} 上的循环作用:

$$\delta^k(\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{2t})=(\alpha'_1,\alpha'_2,\ldots,\alpha'_{2t}),$$

其中，对所有 $i\in\{1,\ldots,2t\}$，$\alpha'_i=\alpha_{i-k}$。这里，指标按模 $2t$ 取值 .

引理 2.3. 对于固定的 k 以及任意的 $(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t})\in X_{2t}$，我们注意到

$$\delta^k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t})\in T_{2t} \textit{ if and only if}$$

存在 m，其中 m 整除 t，使得对所有 i （指标模 $2t$）均有 $\alpha_{i-k}=-\alpha_{m+i-k}$。

证明。取

$$\delta^k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t})=(\alpha'_1,\alpha'_2,....,\alpha'_{2t})$$

$(\alpha'_1,\ \alpha'_2,\ ....,\ \alpha'_{2t})\in T_{2t}$ 当且仅当存在 m，其中 m 整除 t，使得 $\alpha'_i=-\alpha'_{m+i}$。现在，利用此处循环作用的定义，可得 $\alpha_{i-k}=-\alpha_{m+i-k}$，其中 $m\mid t$。□

引理 2.4。若 $(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t})\in T_{2t}$，则对所有 k，均有 $\delta^k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t})\in T_{2t}$.

证明。由于 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ ....,\ \alpha_{2t})\in T_{2t}$，因此存在 m 使得 $\alpha_{m+i}=-\alpha_i$，其中 m 整除 t。现在，

$$\delta^k(\alpha_1,\alpha_2,....,\alpha_{2t})=(\alpha'_1,\alpha'_2,....,\alpha'_{2t}),\text{ where }\alpha'_i=\alpha_{i-k}.$$

这意味着，

$$\alpha'_i=\alpha_{i-k}=-\alpha_{m+i-k}=-\alpha'_{m+i}.$$

因此，$\alpha'_i=-\alpha'_{m+i}$，其中 $m\mid t$. □

我们可以看出，$\mathcal{T}_{4t}$ 与 T_{2t} 之间存在一个双射，由下式给出

$$\underbrace{AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}...AB^{\alpha_m}AB^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}...AB^{-\alpha_m}.....AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}...AB^{\alpha_m}AB^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}...AB^{-\alpha_m}}_{4t \text{ length}}$$

$$\mapsto \underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_m,.....,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_m)}_{2t \text{ length}}.$$

我们考虑循环置换 δ，将其限制在 T_{2t} 上，即 $\delta:\ T_{2t}\to T_{2t}$，由 $(\alpha_1,\ \alpha_2,\ .....,\ \alpha_{2t})\mapsto(\alpha_{2t},\ \alpha_1,\ .....,\ \alpha_{2t-1})$。因此，由 δ 生成的群是一个阶为 $2t$ 的循环群。首先，我们将计算 T_{2t} 的基数，也就是 $\mid T_{2t}\mid$。有了这个结果后，我们

可以 便可立即得到 $\mathcal{T}_{4t}$ 的基数，因为它们之间存在双射 .

我们的目标是分析 Γ 中惰性类的增长率，其中 Γ 中的惰性类与商群 $T_{2t}/\langle\delta\rangle$ 相对应。对 t 作素因数分解。假设 t 的素因数分解为

$$t = 2^a p_1^{s_1} p_2^{s_2} .....p_n^{s_n},$$

其中 p_j 是互不相同的奇素数，且 a，$s_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}\ \forall\, j$，那么 t 的每个因子 m 都可以写成如下形式

$$m = 2^l p_1^{k_1} p_2^{k_2} .....p_n^{k_n},$$

其中 $0 \le l \le a$ 和 $0 \le k_j \le s_j$，$k_j \in \mathbb{Z}\ \ \forall\ j \in \{1, ..., n\}$.。假设 x =(α_1，α_2，……，α_{2t}) $\in T_{2t,\ m}$，那么对所有 i，都有 $\alpha_{m+i} = -\alpha_i$。因此，

$$\alpha_{2m+i} = \alpha_{m+m+i} = -\alpha_{m+i} = \alpha_i,\ \alpha_{3m+i} = \alpha_{m+m+m+i} = -\alpha_{m+m+i} = \alpha_{m+i} = -\alpha_i.$$

因此，我们看到

$$\alpha_{bm+i} = (-1)^b \alpha_i \quad \forall\, i, b \in \mathbb{Z}.$$

引理 2.5。

(1) 对于任意 l_1、l_2，若满足 $l_1 \neq l_2$ 和 $0 \le l_1$，则有 $l_2 \le a$，

$$T_{2t,2^{l_1}} \cap T_{2t,2^{l_2}} = \emptyset.$$

(2) F 对于任意 l 和 j，若 $0 \le l \le a$ 和 $k_j \in \{1, \ldots, s_j\}$ 对所有 $j \in \{1, \ldots, n\}$ 均成立，则有 e

$$T_{2t,2^l} \cap T_{2t,(p_j^{k_j})} = \emptyset.$$

(3) 对于任意 j_1、$j_2 \in \{1, 2, \ldots, n\}$，若满足 $j_1 \neq j_2$，则有

$$T_{2t,(p_{j_1}^{k_{j_1}})} \cap T_{2t,(p_{j_2}^{k_{j_2}})} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{2t}) \mid \alpha_{i+1} = -\alpha_i,\ \alpha_i \in \{-1, 1\}\}.$$

(4) 对于每个 $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ 及所有满足 $k_j \le k'_j$ 的 k_j、$k'_j \in \{0, 1, \ldots, s_j\}$，均有

$$T_{2t,(p_j^{k_j})} \subseteq T_{2t,(p_j^{k'_j})}.$$

证明。

(1) 假设存在 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,2^{l_1}} \cap T_{2t,2^{l_2}}$，则 $\alpha_{2^{l_!}+i} = -\alpha_i$ 且 $\alpha_{2^{l_2}+i} = -\alpha_i$ 对所有 i 成立。取 $l_1 > l_2$，因此我们可以写成 $l_1 = l_2 + h$，对某个 $h \in \mathbb{Z}^+$。现在 $\alpha_{bm+i} = (-1)^b \alpha_i$，其中 $b \in \mathbb{Z}^+$ 对所有 i 成立，因此 $\alpha_{2^h 2^{l_2}+i}$ =$(-1)^{2^h} \alpha_i = \alpha_i$，这意味着 $\alpha_{2^{l_1}+i} = \alpha_i$，矛盾。

(2) 固定 l, j，并假设存在 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,2^l} \cap T_{2t,(p_j^{k_j})}$，那么$\alpha_{2^l+i} = -\alpha_i$ 且 $\alpha_{(p_j{}^{k_j})+i} = -\alpha_i$ 对所有 i都成立。由于 $\alpha_{bm+i} = (-1)^b \alpha_i$ 对所有 i 成立意味着 $\alpha_{(p_j{}^{k_j})\cdot 2^l+i} = (-1)_{(p_j{}^{k_j})} \alpha_i = -\alpha_i$ 且 $\alpha_{2^l\cdot(p_j{}^{k_j})+i} = (-1)^{2^l} \alpha_i = \alpha_i$，从而得到$\alpha_i = -\alpha_i$ 对所有 i都成立，矛盾。

(3) 取 $p_{j_1}{}^{k_{j_1}} = p$ 和 $p_{j_2}{}^{k_{j_2}} = q$，它们都是奇数，且 gcd$(p, q) = 1$，因此存在一些整数 c, d 使得 $cp + dq = 1$。假设 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,p} \cap T_{2t,q}$，那么 $\alpha_{p+i} = -\alpha_i$ 且 $\alpha_{q+i} = -\alpha_i$ 对所有 i都成立。利用 $\alpha_{bm+i} = (-1)^b\alpha_i$，得到

$$\alpha_{cp+i} = (-1)^c\alpha_i \Rightarrow \alpha_{cp+dq+i} = (-1)^c\alpha_{dq+i} = (-1)^{c+d}\alpha_i \Rightarrow \alpha_{1+i} = (-1)^{c+d}\alpha_i$$

对所有 i。现在，我们知道，对于任意奇数 y， $y \equiv 1$ （模 2）。由于 p 和 q 都是奇数，我们有

$$p \equiv 1 \pmod 2 \quad \text{and} \quad q \equiv 1 \pmod 2.$$

这意味着， $cp + dq \equiv c + d$ （模 2） $\Rightarrow 1 \equiv c + d$ （模 2）。

因此， $c + d$ 是奇整数。于是，对于所有 i，我们有 $\alpha_{i+1} = -\alpha_i$。

（4）首先固定 j，现在令 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,\ (p_j^{k_j})}$，则对于所有 i，$\alpha_{(p_j^{k_j})+i} = -\alpha_i$。由于 $k_j \in \mathbb{Z}$ 和 $0 \le k_j \le k'_j \le s_j$，存在一些 $h \in \mathbb{Z}$ 使得 $k_j + h = k'_j$。我们知道，对于所有 i 和 $b \in \mathbb{Z}$， $\alpha_{bm+i} = (-1)^b\alpha_i$，因此

$$\alpha_{(p_j^h)(p_j^{k_j})+i} = (-1)^{p_j^h}\alpha_i = -\alpha_i, \text{ that is, } \alpha_{(p_j^{k'_j})+i} = -\alpha_i \text{ for all } i\ .$$

这意味着 $x \in T_{2t\ ,(p_j^{k'_j})}$. □

引理 2.6. 设

$$M = \{ \prod_{j=1}^{n} p_j^{k_j} \mid k_j \in \{0, 1, ..., s_j\} \ \forall\ j \ \}.$$

那么，对于每个 $y \in M$和 $l_1, l_2 \in \{0, 1, 2, ..., a\}$,

(1) $T_{2t,y} \subseteq T_{2t,p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}}$·(2) $T_{2t,2^{l_1}y} \subseteq T_{2t,2^{l_1}(}$ $p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})$·(3) 对于任意 $l_1 \ne l_2 \in \{1, 2, ..., a\}$ 以及任意 $y, z \in M$,

$$T_{2t,(2^{l_1})y} \cap T_{2t,(2^{l_2})z} = \emptyset.$$

证明。

(1) 假设 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,y}$对于某个固定的 $y \in M$，这意味着对所有 i, $\alpha_{y+i} = -\alpha_i$成立；取某个固定的 k_j，令 $y = p_1^{k_1}p_2^{k_2}....p_n^{k_n}$。由于对所有 j, $k_j \in \{0, 1, ..., s_j\}$ 成立，因此存在 $h_j \in \mathbb{Z}$，使得对所有 j， $k_j + h_j = s_j$ 成立。现在，在此处使用 $\alpha_{bm+i} = -\alpha_i$，得到

$\alpha_{(p_1^{h_1}p_2^{h_2}....p_n^{h_n})\cdot y+i} = (-1)^{(p_1^{h_1}p_2^{h_2}....p_n^{h_n})}\alpha_i = -\alpha_i \Rightarrow \alpha_{(p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})+i} = -\alpha_i$ 对所有 i.因此， $x \in T_{2t,p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}}$.

(2) 固定 l_1，并令 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,\ 2^{l_1}y}$，其中 $y \in M$ 固定。由此可得，对所有 i， $\alpha_{2^{l_1}y+i} = -\alpha_i$ 成立。取 $y = p_1^{k_1}p_2^{k_2}....p_n^{k_n}$，其中整数 k'_js 固定。由于对每个 j， $k_j \in \{0, 1, ..., s_j\}$，我们可以找到满足条件 $k_j + h_j = s_j$ 的 $h_j \in \mathbb{Z}$，使得对所有 j 均成立。现在，

$$\alpha_{(p_1^{h_1}p_2^{h_2}....p_n^{h_n})\cdot 2^{l_1}y+i} = (-1)^{(p_1^{h_1}p_2^{h_2}....p_n^{h_n})}\alpha_i = -\alpha_i \Rightarrow \alpha_{2^{l_1}(p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})} = -\alpha_i \ \forall\ i.$$

Hence, $x \in T_{2t,2^{l_1}p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}}$.

(3) 取 $l_1 > l_2$，于是存在某个 $q \in \mathbb{Z}$ 使得 $l_1 = l_2 + q$。假设 $x = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{2t}) \in T_{2t,\ (2^{l_1})y} \cap T_{2t,\ (2^{l_2})z}$，则对所有 i，$\alpha_{(2^{l_1})y+i} = -\alpha_i$ 且 $\alpha_{(2^{l_2})z+i} = -\alpha_{i_\circ}$ 取 $y = p_1^{k_1}p_2^{k_2}....p_n^{k_n}$ 和 $z = p_1^{k'_1}p_2^{k'_2}....p_n^{k'_n}$，其中每个 k_j，$k'_j \in \{0, 1, .., s_j\}$ 对所有 j 均成立，因此我们可以找到满足 $k_j + h_j = s_j$ 且对每个 j 满足 $k'_j + h'_j = s_j$ 的 h_j，$h'_j \in \mathbb{Z}$。因此，

$$\alpha_{(p_1^{h_1}p_2^{h_2}....p_n^{h_n})\cdot(2^{l_1})y+i} = (-1)^{(p_1^{h_1}p_2^{h_2}....p_n^{h_n})}\alpha_i$$
$$\Rightarrow \alpha_{(2^{l_1})(p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})} = -\alpha_i \ \ \forall\, i.$$

此外，

$$\alpha_{(p_1^{h'_1}p_2^{h'_2}....p_n^{h'_n})\cdot(2_2^l)z+i} = (-1)^{(p_1^{h'_1}p_2^{h'_2}....p_n^{h'_n})}\alpha_i$$
$$\Rightarrow \ \alpha_{(2^{l_2})(p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})} = -\alpha_i$$
$$\Rightarrow \ \alpha_{2^q.2^{l_2}(p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})} = (-)^{2^q}\alpha_i = \alpha_i \ \ \forall\, i.$$
$$\Rightarrow \ \alpha_{(2^{l_1})(p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n})} = \alpha_i \ \ \forall\, i, \text{ which gives a contradiction.}$$

因此，$T_{2t,\ (2^{l_1})y} \cap T_{2t,\ (2^{l_2})z} = \emptyset.$

□

定理 *2.7*。*</style}*设 t 的素因数分解为 $t = 2^a p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}$，其中 $p'_j s$ 是互不相同的奇素数，并且 a、$s_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ $\forall\, j.$。则

$$|\, \mathcal{T}_{4t}\, | = \sum_{l=0}^{a} 2^{2^l p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}}.$$

证明。令 $x \in T_{2t\circ}$ 这里

$$x = \underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,..,\alpha_m,-\alpha_1,-\alpha_2,..,-\alpha_m,.....,\alpha_1,\alpha_2..,\alpha_m,-\alpha_1,-\alpha_2...,-\alpha_m)}_{2t \text{ length}},$$

其中，对于所有 i，m 整除 t，且 $\alpha_i \in \{-1, 1\}$。对于每个 α_i，有两种可能的选择，因此这种形式的字恰好有 2^m 个。然而，这一计数包含了重复项。利用引理 2.5 和引理 2.6，我们看到，若 $k \mid m$，则 $T_{2t,\ k}$ 中的每个元素也属于 $T_{2t,\ m}$，前提是 m 和 k 具有相同的 $2-$ 次幂分量。因此，$T_{2t,\ k} \subseteq T_{2t,\ m}\cdot$ 此外，具有不同 2– 次幂分量的最大因子产生互不相交的集合 $T_{2t,\ m}$。因此，每个因子仅通过其最大扩展产生贡献，而对最大因子求和可确保每个贡献恰好被计算一次。因此，我们有

$$|\, T_{2t}\, | = \sum_{l=0}^{a} 2^{2^l p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}}.$$

由于 $\mathcal{T}_{4t}$ 与 T_{2t} 之间存在如下双射：

$$\underbrace{AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}...AB^{\alpha_m}AB^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}...AB^{-\alpha_m}.....AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}...AB^{\alpha_m}AB^{-\alpha_1}AB^{-\alpha_2}...AB^{-\alpha_m}}_{4t \text{ length}}$$
$$\mapsto \underbrace{(\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_m,.....,\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_m,-\alpha_1,-\alpha_2,...,-\alpha_m)}_{2t \text{ length}}$$

因此，$|\, \mathcal{T}_{4t}\, | = \sum_{l=0}^{a} 2^{2^l p_1^{s_1}p_2^{s_2}....p_n^{s_n}}$。

□

注2.8。为了在计数集合 $T_{2t,m}$ 时避免重复计数，有必要了解这些集合可能如何重叠。由于对于某些因子 $m \mid t$ ，相应的序列会相交，我们首先找出包含所有更小重叠因子的那些因子。记 $t = 2^a p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$，关系式 $\alpha_{m+i} = -\alpha_i$给出迭代恒等式$\alpha_{bm+i} = (-1)^b \alpha_i$，这是描述这些交集的关键。引理 2.5 和引理 2.6 表明，一旦选定一个最大因子 $m = 2^\ell p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$，每个满足 $k \mid m$ 的 $T_{2t,k}$ 都包含在 $T_{2t,m}$ 中，而对应于不同 2-幂分量的最大因子彼此不相交。例如，T_{2t,p_1} 包含在T_{2t,p_1p_2} 中，依此类推，便得到唯一的最大奇因数 $p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$。因此，每个因子$m = 2^\ell p_1^{j_1} \cdots p_n^{j_n}$只通过其最大扩展产生贡献，而不同 ℓ 对应的集合 $T_{2t,m}$ 互不重叠。这解释了为什么定理 2.12 中的求和仅涉及最大因子 $2^\ell p_1^{s_1} \cdots p_n^{s_n}$，从而确保每项贡献都恰好计数一次。

考虑映射

$$\beta : \mathcal{T}_{4t} \longrightarrow \mathcal{T}_{4t}, \qquad \beta(AB^{\alpha_1} AB^{\alpha_2} \cdots AB^{\alpha_{2t}}) = AB^{\alpha_{2t}} AB^{\alpha_1} \cdots AB^{\alpha_{2t-1}},$$

它对 $2t$ 个连续的 AB块进行循环移位。回忆一下，

$$\mathcal{T}_{4t} = \bigcup_{m|t} \{AB^{\alpha_1} AB^{\alpha_2} .... AB^{\alpha_{2t}} \mid \alpha_{m+i} = -\alpha_i \text{ for all i where } \alpha_i \in \{-1, 1\}\}.$$

在此结构下，β的作用使符号模式（α_1，.....，α_{2t}）旋转，同时保持定义关系 $\alpha_{m+i} = -\alpha_i$不变。因此，循环群 $\langle\beta\rangle$ 作用于 $\mathcal{T}_{4t}$，而商

$$\mathcal{T}_{4t}/\langle\beta\rangle = \mathscr{I}_{4t}$$

是惰性类的集合。由于 β 诱导了对 $2t$ 块的循环置换，群 $\langle\beta\rangle$是一个阶为 $2t$的循环群。

定理 2.9。设 t 的素因数分解为 $t = 2^a p_1^{s_1} p_2^{s_2} .... p_n^{s_n}$，其中 $p_j' s$ 是互不相同的奇素数，且 $a, s_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ $\forall\ j$. 定义

$$W_t' = \{\ m = 2^l p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_n^{j_n} \mid 0 \le j_i \le s_i,\ 0 \le l \le a\ \forall\ \ i\},$$

并且，对每个 $m \in W$，定义

$$W_t^{'m} = \{\ k = 2^l p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} \mid 0 \le k_i \le j_i\ \ \forall\, i\}.$$

Then

$$\mid \mathscr{I}_{4t} \mid = \sum_{m \in W_t'} \left(\frac{\mid T_{2t,m} \mid - \mid \cup_{k \in W_t^{'m},\, k \neq m} T_{2t,k} \mid}{2m} \right).$$

证明。设 $\{p'\} \in T_{2t}/\langle\delta\rangle$。令 $p' \in T_{2t}$ 为一个代表元。假设 p' 具有如下形式

$$p' = \underbrace{(\alpha_1, \alpha_2, .., \alpha_m, -\alpha_1, -\alpha_2, .., -\alpha_m, ..., \alpha_1, \alpha_2 .., \alpha_m, -\alpha_1, -\alpha_2 ..., -\alpha_m)}_{2t \text{ length}},$$

其中 m 整除 t 且 $\alpha_i \in \{-1, 1\}$. 对于每个 m，以及 T_{2t} 中的每个元素，m中至多有 $2m$ 个共轭元$T_{2t,\ m}$，且有 2^m 个此类型的元素。共轭

对应于不同因子 m 的元素可能重合。因此，为了枚举 $T_{2t}/\langle\delta\rangle$中的不同共轭类，我们首先找出由 t的不同因子 m 所导致的所有此类重合，然后排除重复元素。

定义 $W_t' = \{\, m = 2^l p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_n^{j_n} \mid 0 \le j_i \le s_i,\ 0 \le l \le a\ \forall\ i\}$，并对每个 $m \in W$ 定义 $W_t'^m = \{\, k = 2^l p_1^{k_1} p_2^{k_2} \cdots p_n^{k_n} \mid 0 \le k_i \le j_i\ \ \forall\, i\}$.。利用引理 2.5 和引理 2.6，我们可以看到，对于每个

$$m = 2^l p_1^{j_1} p_2^{j_2} \cdots p_n^{j_n}, \qquad 0 \le j_i \le s_i,\ 0 \le l \le a,$$

每个 $k \in W_t'^m$其中 $k \neq m$ 会在其共轭元中产生重复，我们有

$$T_{2t,k} \subset T_{2t,m},$$

因此，移除所有

$$T_{2t,k} \text{ where } k \neq m$$

从 $T_{2t,\ m}$ 中，我们恰好得到 $2m$ 个共轭元，对其中的每个元素而言

$$T_{2t,m} \setminus \cup_{k \in W_t'^m, k \neq m} T_{2t,k}.$$

因此，对于每个元素 $p \in T_{2t,\ m} \setminus \cup_{k \in W_t'^m,\ k \neq m} T_{2t,\ k}$，$T_{2t,\ m} \setminus \cup_{k \in W_t'^m,\ k \neq m} T_{2t,\ k}$中的共轭类为

$$\left(\frac{|\, T_{2t,m} \,| - |\, \cup_{k \in W_t'^m,\, k \neq m} T_{2t,k} \,|}{2m} \right).$$

T_{2t} 中的共轭类数为

$$|\, T_{2t} \,/\langle\delta\rangle\,| = \sum_{m \in W_t'} \left(\frac{|\, T_{2t,m} \,| - |\, \cup_{k \in W_t'^m,\, k \neq m} T_{2t,k} \,|}{2m} \right).$$

由于 $\mathcal{T}_{4t}$ 与 T_{2t} 之间存在双射，因此 $\mathscr{I}_{4t} = \mathcal{T}_{4t}\,/\langle\beta\rangle$ 与 $T_{2t}\,/\langle\delta\rangle$ 之间也存在双射。因此，

$$|\, \mathscr{I}_{4t} \,| = \sum_{m \in W_t'} \left(\frac{|\, T_{2t,m} \,| - |\, \cup_{k \in W_t'^m,\, k \neq m} T_{2t,k} \,|}{2m} \right).$$

证明完毕。 □

我们用 $\mathscr{I}_{4t}^{p}$ 表示 $\mathscr{I}_{4t}$ 中所有本原惰性类的集合，用 $\mathscr{I}_{4t}^{np}$ 表示 $\mathscr{I}_{4t}$ 中所有非本原惰性类的集合。由推论 2.2 可知，若一个共轭类是本原的，则必有 $m = t$。因此，应用定理 2.9，我们可以确定 $\mathscr{I}_{4t}$ 中本原惰性类的数量。现在陈述相应的推论。

推论 2.10. 在 $m = t$ 的情况下将定理 *2.9* 专门化，可得以下结果 *lt,*

(1) 如果 p_i 中存在非平凡的奇素数，则 $|\, \mathscr{I}_{4t}^{p} \,| = \left(\frac{|\, T_{2t} \,| - |\, \cup_{k \in W_t'^t,\ k \neq t} T_{2t\ k} \,|}{2t} \right)$. (2)

如果 t 的形式为 $t = 2^l$，则 $|\, \mathscr{I}_{4t}^{p} \,| = \frac{2^t}{2t} = \left(\frac{|\, T_{2t,t} \,|}{2t} \right)$。

例 2.11。 我们用 $t = 3$ 的情形来说明上述讨论。 t 的素因数分解为

$$t = 3 = 2^0 \cdot 3^1,$$

所以 $a = 0$ ，且唯一的最大奇因子是 3。 t 的因子为 $m = 1$,3。根据引理 2.5 和引理 2.6，我们有

$$T_{6,1} \subset T_{6,3},$$

从而只有最大因子 $m = 3$ 贡献新的元素。$T_{6,3}$ 的定义关系为

$$\alpha_{3+i} = -\alpha_i \quad (i = 1, 2, 3),$$

这意味着$T_{6,3}$ 的每个元素都由其前三项唯一确定，并且具有如下形式

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, -\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3), \qquad \alpha_i \in \{\pm 1\}.$$

因此总共有 $2^3 = 8$ 个元素，即

$$(1,1,1,-1,-1,-1), \quad (1,1,-1,-1,-1,1), \quad (1,-1,1,-1,1,-1), \quad (1,-1,-1,-1,1,1),$$
$$(-1,1,1,1,-1,-1), \quad (-1,1,-1,1,-1,1), \quad (-1,-1,1,1,1,-1), \quad (-1,-1,-1,1,1,1).$$

对于 $m = 1$，关系 $\alpha_{i+1} = -\alpha_i$ 蕴含严格交替，从而得到

$$T_{6,1} = \{(1,-1,1,-1,1,-1),\, (-1,1,-1,1,-1,1)\}.$$

这两个序列都出现在上面的列表中，明确证实了 $T_{6,\,1} \subset T_{6,\,3}$。根据定理 2.7，我们得到 $|\,T_6\,| = 8$ ，这与明确计数的结果一致。在定理 2.9 中，关于 $m = 3$ 的第一项求和给出 $(|\,T_{6,\,3}\,| - |\,T_{6,\,1}\,|)/(2 \cdot 3) = (8-2)/6 = 1$，关于 $m = 1$ 的第二项求和给出 $|\,T_{6,\,1}\,|/(2 \cdot 1) = 2/2 = 1$。因此，

$$|\,\mathscr{I}_{12}\,| = 1 + 1 = 2,$$

这表明在循环置换下恰有两个共轭类。

具体而言，集合 $T_6 = T_{6,\,3} = \{(\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ -\alpha_1,\ -\alpha_2,\ -\alpha_3)\}$ 分解如下：交替序列 $T_{6,\,1} = \{(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1),\ (-1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1)\}$ 在循环移位下构成一个共轭类，而其余六个序列

$$(1,1,1,-1,-1,-1), \quad (1,1,-1,-1,-1,1), \quad (1,-1,1,-1,1,-1),$$
$$(1,-1,-1,-1,1,1), \quad (-1,1,1,1,-1,-1), \quad (-1,-1,1,1,1,-1)$$

构成另一个共轭类。因此，在循环置换下， T_6 恰好分裂为两个共轭类：一个由交替词 $(1,\ -1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1)$ 表示，另一个由 $(1,\ 1,\ 1,\ -1,\ -1,\ -1)$ 表示。这证实了公式所得的计数，并说明减项如何避免重复计数。

现在，我们研究当 t 趋于无穷大时， Γ 中惰性类数量的渐近行为。

定理 2.12。当 $t \to \infty,\ |\,\mathcal{T}_{4t}\,| \sim 2^t$。

证明。 由定理 2.7，我们有

$$| \mathcal{T}_{4t} | = \sum_{l=0}^{a} 2^{2^l p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots . p_n^{s_n}}$$

对于 $t = 2^a p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots . p_n^{s_n}$ 的素因数分解，其中 $a_j, \quad s_j \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$。因此，我们可以在上面的表达式中写出 $\frac{t}{2^a} = p_1^{s_1} p_2^{s_2} \ldots . p_n^{s_n}$，

$$| \mathcal{T}_{4t} | = \sum_{l=0}^{a} 2^{2^l \cdot \frac{t}{2^a}} = \sum_{l=0}^{a} 2^{\frac{t}{2^{a-l}}}$$

$$| \mathcal{T}_{4t} | = \sum_{j=0}^{a} 2^{\frac{t}{2^j}}$$

设 $\nu(t)$ 表示整除 t 的最大 2 的幂（即 t 的 2 进赋值），也就是说， $\nu(t) = a$. 那么

$$| \mathcal{T}_{4t} | = \sum_{j=0}^{\nu(t)} 2^{(\frac{t}{2^j})} = 2^t + \sum_{j=1}^{\nu(t)} 2^t \cdot 2^{(\frac{t}{2^j} - t)} = 2^t(1 + R)$$

其中

$$R = \sum_{j=1}^{\nu(t)} 2^{\frac{t}{2^j} - t} = \sum_{j=1}^{\nu(t)} 2^{-(t - \frac{t}{2^j})} = \sum_{j=1}^{\nu(t)} \frac{1}{2^{(t - \frac{t}{2^j})}}$$

$$R \leq \nu(t) \frac{1}{2^{(t - \frac{t}{2})}} = \nu(t) 2^{-\frac{t}{2}}$$

由于 $\nu(t) < \log_2(t) \ll 2^{t/2}$，我们得到

$$0 \leq R \leq \frac{\log_2(t)}{2^{t/2}}.$$

当 $t \to \infty$ 时，右端趋于 0，因此 $R \to 0$。所以，

$$\frac{| \mathcal{T}_{4t} |}{2^t} \to 1 \quad \text{as } t \to \infty,$$

因此， $| \mathcal{T}_{4t} | \sim 2^t$. □

定理 2.13。由于 $t \to \infty$,

(1) $| \mathscr{I}_{4t} | \sim \frac{2^{t-1}}{t}$,

(2) $| \mathscr{I}_{\leq 4t} | \sim \frac{2^t}{t+1}$。

证明。

(1) 根据定理 2.9，我们有

$$| \mathscr{I}_{4t} | = \sum_{m \in W_t'} \left(\frac{| T_{2t,m} | - | \cup_{k \in W_t'^m, k \neq m} T_{2t,k} |}{2m} \right) \leq \sum_{m \in W_t'} \left(\frac{| T_{2t,m} |}{2m} \right) = \sum_{m|t} \frac{2^m}{2m}.$$

现在，观察

$$\left(\frac{2^t - \sum_{k|t, k \neq t} 2^k}{2t} \right) \leq | \mathscr{I}_{4t} | \leq \frac{2^t}{2t} + \sum_{m|t, m \neq t} \frac{2^m}{2m}.$$

$$\frac{2^t}{2t} - E' \leq |\mathscr{I}_{4t}| \leq \frac{2^t}{2t} + E \tag{2.1}$$

其中 $E = \sum_{m|t,\ m\neq t} \frac{2^m}{2m}$ 且 $E' = \sum_{k|t,\ k\neq t} \frac{2^k}{2t}$。

现在，由于 t 的最大真因子是 $t/2$,

$$E = \sum_{m|t,\, m\neq t} \frac{2^m}{2m} \leq \sum_{m|t,\, m\neq t} \frac{2^m}{2} \leq \sum_{m|t,\, m\neq t} \frac{2^{t/2}}{2} < \varphi(t)\frac{2^{t/2}}{2}$$

$$E < \frac{t\,2^{t/2}}{2} \quad (\varphi(t) \leq t)$$

将上述不等式除以 $\frac{2^t}{2t}$，，得到 $-$

$$\frac{E}{\frac{2^t}{2t}} \leq \frac{\frac{t\,2^{t/2}}{2}}{\frac{2^t}{2t}} = \frac{t^2}{2^{t/2}},\ \text{as } t\to\infty \quad \frac{E}{\frac{2^t}{2t}} \to 0$$

因为指数函数 $2^{t/2}$ 的增长速度远快于任何多项式，例如 t^2.，并且

$$E' = \sum_{\substack{k|t\\ k\neq t}} \frac{2^k}{2t} \leq \sum_{\substack{k|t\\ k\neq t}} \frac{2^k}{2} < \varphi(t)\frac{2^{t/2}}{2}$$

$$E' < t\frac{2^{t/2}}{2}$$

将上述不等式除以 $\frac{2^t}{2t}$，，得到 $-$

$$\frac{E'}{\frac{2^t}{2t}} < \frac{t\frac{2^{t/2}}{2}}{\frac{2^t}{2t}} = \frac{t^2}{2^{t/2}} \text{ as } t\to\infty \quad \frac{E'}{\frac{2^t}{2t}} \to 0$$

由等式 (2.1),

$$1 - \frac{E'}{\frac{2^t}{2t}} \leq \frac{|\mathscr{I}_{4t}|}{\frac{2^t}{2t}} \leq 1 + \frac{E}{\frac{2^t}{2t}}$$

当 $t\to\infty$、$\frac{E}{\frac{2^t}{2t}}$ 和 $\frac{E'}{\frac{2^t}{2t}}$ 均趋于 0 时。因此,

$$\frac{|\mathscr{I}_{4t}|}{\frac{2^t}{2t}} \to 1.$$

因此，$|\mathscr{I}_{4t}| \sim \frac{2^{t-1}}{t}$.

（2）注意到

$$|\mathscr{I}_{\leq 4t}| = \sum_{n=1}^{t} |\mathscr{I}_{4n}| = \sum_{n=1}^{t}\sum_{m\in W'_n} \left(\frac{|T_{2n,m}| - |\cup_{k\in W'^{m}_{n},\, k\neq m} T_{2n,k}|}{2m}\right) \leq \sum_{n=1}^{t}\sum_{m|n} \frac{2^m}{2m}.$$

由此可得

$$\sum_{n=1}^{t}\left(\frac{2^n - \sum_{k|n,k\neq n} 2^k}{2n}\right) \leq |\mathscr{I}_{\leq 4t}| \leq \sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n} + \sum_{n=1}^{t}\sum_{\substack{m|n\\ m\neq n}} \frac{2^m}{2m}.$$

由（1）可得

$$\sum_{m|t,\, m\neq t} \frac{2^m}{2m} < \frac{t\, 2^{t/2}}{2} \quad \text{and} \quad \sum_{\substack{k|t \\ k\neq t}} \frac{2^k}{2t} < t\frac{2^{t/2}}{2}$$

因此,

$$\sum_{n=1}^{t} \sum_{m|n,\, m\neq n} \frac{2^m}{2m} < \sum_{n=1}^{t} \frac{n\, 2^{n/2}}{2} < \frac{t^2\, 2^{t/2}}{2}$$

类似地,

$$\sum_{n=1}^{t} \sum_{\substack{k|n \\ k\neq n}} \frac{2^k}{2n} < \sum_{n=1}^{t} n\frac{2^{n/2}}{2} < \frac{t^2\, 2^{t/2}}{2}$$

代入这些不等式，得到

$$\sum_{n=1}^{t} \frac{2^n}{2n} - t^2\frac{2^{t/2}}{4} \leq |\, \mathscr{I}_{\leq 4t}\, | \leq \sum_{n=1}^{t} \frac{2^n}{2n} + t^2\frac{2^{t/2}}{4}$$

$$1 - \frac{t^2\frac{2^{t/2}}{4}}{\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}} \leq \frac{|\, \mathscr{I}_{\leq 4t}\, |}{\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}} \leq 1 + \frac{t^2\frac{2^{t/2}}{4}}{\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}}$$

由于 $\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n} \geq \frac{2^t}{t}$，我们得到

$$1 - \frac{t^2\frac{2^{t/2}}{4}}{\frac{2^t}{2t}} \leq \frac{|\, \mathscr{I}_{\leq 4t}\, |}{\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}} \leq 1 + \frac{t^2\frac{2^{t/2}}{4}}{\frac{2^t}{2t}},$$

$$1 - \frac{t^3}{2\cdot 2^{t/2}} \leq \frac{|\, \mathscr{I}_{\leq 4t}\, |}{\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}} \leq 1 + \frac{t^3}{2\cdot 2^{t/2}},$$

因为 $t \to \infty$, $\frac{t^3}{2\cdot 2^{t/2}} \to 0$，因此,

$$\frac{|\, \mathscr{I}_{\leq 4t}\, |}{\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}} \to 1 \quad \text{as} \quad t \to \infty.$$

因此, $|\, \mathscr{I}_{\leq 4t}\, | \sim \sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n}$. 利用 Stolz-Cesàro 定理 [11], 我们可以看出 $\sum_{n=1}^{t}\frac{2^n}{2n} \sim \frac{2^t}{t+1}$.

由此得到所需结果。 □

引理 2.14.

(1) $|\, \mathscr{I}_{4t}^{np}\, | \leq \frac{t}{4}2^{t/2}$,

(2) $|\, \mathscr{I}_{\leq 4t}^{np}\, | \leq \frac{t^2}{4}2^{t/2}$。

证明.

(1) 根据 [2] 引理 2.4，我们有

$$|\, \mathscr{I}_{4t}^{np}\, | = \sum_{s|t} |\, \mathscr{I}_{4s}^{p}\, |$$

其中 s 是 t的真因数。现在，将 $Corollary\ 2.10$ 代入上述表达式，

$$|\mathscr{I}_{4t}^{np}| = \sum_{s|t}\left(\frac{|T_{2s,s}| - |\cup_{k\in W_s'^s, k\neq s} T_{2s,k}|}{2s}\right) \Longrightarrow |\mathscr{I}_{4t}^{np}| \leq \sum_{s|t}\frac{2^s}{2}.$$

由于 t 的最大真因子是 $t/2$，且真因子最多有 $t/2$ 个，因此

$$|\mathscr{I}_{4t}^{np}| \leq \frac{t}{2}\frac{2^{t/2}}{2} \Longrightarrow |\mathscr{I}_{4t}^{np}| \leq \frac{t}{4}2^{t/2}.$$

因此，$|\mathscr{I}_{4t}^{np}| \leq \frac{t}{4}2^{t/2}$.

由上式 (2) 可得，

$$|\mathscr{I}_{\leq 4t}^{np}| = \sum_{n=1}^{t}|\mathscr{I}_{4n}^{np}| \leq \sum_{n=1}^{t}\frac{n}{4}2^{n/2} \leq \sum_{n=1}^{t}\frac{t}{4}2^{t/2} \leq \frac{t^2}{4}2^{t/2}$$

因此，$|\mathscr{I}_{\leq 4t}^{np}| \leq \frac{t^2}{4}2^{t/2}$. □

定理 2.15。由于 $t\to\infty$,

(1) $|\mathscr{I}_{4t}^{p}| \sim |\mathscr{I}_{4t}| \sim \frac{2^{t-1}}{t}$,

(2) $|\mathscr{I}_{\leq 4t}^{p}| \sim |\mathscr{I}_{\leq 4t}| \sim \frac{2^t}{t+1}$。

证明。

(1) 根据引理 2.14，我们有

$$|\mathscr{I}_{4t}| - \frac{t}{4}2^{t/2} \leq |\mathscr{I}_{4t}^{p}| \leq |\mathscr{I}_{4t}|$$

两边除以 $|\mathscr{I}_{4t}|$，并注意到 $|\mathscr{I}_{4t}| \geq \left(2^t - \sum_{k|t, k\neq t} 2^k\right) \geq 2^t - \frac{t}{2}2^{\frac{t}{2}}$，可得

$$1 - \frac{\frac{t}{4}2^{t/2}}{2^t - \frac{t}{2}2^{\frac{t}{2}}} \leq \frac{|\mathscr{I}_{4t}^{p}|}{|\mathscr{I}_{4t}|} \leq 1$$

$$1 - \frac{t^2}{2\cdot(2^{\frac{t}{2}} - \frac{t}{2})} \leq \frac{|\mathscr{I}_{4t}^{p}|}{|\mathscr{I}_{4t}|} \leq 1$$

由于 $2\cdot\frac{t^2}{(2^{\frac{t}{2}} - \frac{t}{2})} \to 0$，当 $t\to\infty$

因此，$|\mathscr{I}_{4t}^{p}| \sim |\mathscr{I}_{4t}| \sim \frac{2^{t-1}}{t}$.

（2）对于这部分，我们使用与上文相同的论证。由引理 2.14 可得，

$$|\mathscr{I}_{\leq 4t}| - \frac{t^2}{4}2^{t/2} \leq |\mathscr{I}_{\leq 4t}^{p}| \leq |\mathscr{I}_{\leq 4t}|$$

两边除以 $|\mathscr{I}_{\leq 4t}|$，并注意到 $|\mathscr{I}_{\leq 4t}| \geq \sum_{n=1}^{t} 2^{n-\frac{n}{2}}2^{\frac{n}{2}} \geq 2^t - \frac{t}{2}2^{\frac{t}{2}}$，可得

$$1 - \frac{\frac{t^2}{4}2^{t/2}}{2^t - \frac{t}{2}2^{\frac{t}{2}}} \leq \frac{|\mathscr{I}_{\leq 4t}^{p}|}{|\mathscr{I}_{\leq 4t}|} \leq 1$$

$$1 - \frac{t^3}{2\cdot(2^{t/2} - \frac{t}{2})} \leq \frac{|\mathscr{I}_{4t}^{p}|}{|\mathscr{I}_{4t}|} \leq 1$$

由于 $2\cdot\frac{t^3}{(2^{t/2}-\frac{t}{2})}\to 0$ 当 $t\to\infty$

因此，$|\mathscr{I}^p_{\leq 4t}| \sim |\mathscr{I}_{\leq 4t}| \sim \frac{2^t}{t+1}$. □

现在我们可以证明定理 1.1。

2.1. **定理 1.1 的证明**。

(1) 根据定理 2.13，我们有

$$|\mathscr{I}_{\leq 4t}| \sim \frac{2^t}{t+1}$$

因为 $t\to\infty$。由于 $\mathscr{I}_{\leq 2t}$对应于在上述表达式中用 $\lfloor\frac{t}{2}\rfloor$ 替换 t，因此可得

$$|\mathscr{I}_{\leq 2t}| \sim \frac{2^{\lfloor\frac{t}{2}\rfloor}}{\lfloor\frac{t}{2}\rfloor+1}.$$

(2) 由定理 2.15 可知，

$$|\mathscr{I}^p_{\leq 4t}| \sim |\mathscr{I}_{\leq 4t}|$$

将此渐近公式中的 $4t$ 替换为 $2t$，因此可得

$$|\mathscr{I}^p_{\leq 2t}| \sim |\mathscr{I}_{\leq 2t}|$$

这表明，长度至多为 $2t$ 的本原惰性类的数量渐近等于长度至多为 $2t$的惰性共轭类的数量。□

3. Combinatorial Structure of Ambiguous Classes

本节研究 Γ.中模糊类的渐近增长

引理 3.1. 设 $\{p\}$ 是 $\mathscr{A}_{2t}$中的一个模糊类，并假设 $\{p\}$包含一个形式如下的循环约化字

$$p \;=\; AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_t}, \qquad \alpha_i\in\{\pm 1\}.$$

若 $\{p\}$ 被 ϕ_{Amb}固定，则

$$\alpha_i = \alpha_{t+1-i} \; for \; all \; i \; \in\{1,\ldots,t\}.$$

也就是说，若 t 为偶数，

$$p \;=\; AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1},$$

若 t 为奇数，

$$p \;=\; AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\lceil\frac{t}{2}\rceil}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1},$$

其中 $\lceil\frac{t}{2}\rceil$ 表示大于或等于给定数 $\frac{t}{2}$的最小整数。 –

证明。设 $\{p\}\in\mathscr{A}_{2t}$，并令

$$p \longleftrightarrow \begin{pmatrix} a & b\\ c & d\end{pmatrix}, \qquad ad-bc=1, \quad |a+d|>2.$$

Then

$$\phi_{Amb}(p) = w^{-1}p^{-1}w \longleftrightarrow \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}.$$

此外,

$$\phi_{Amb}(A) \longleftrightarrow \phi_{Amb}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow A,$$

and

$$\phi_{Amb}(B) \longleftrightarrow \phi_{Amb}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftrightarrow ABA.$$

因此,

$$\phi_{Amb}(A) = A \qquad \text{and} \qquad \phi_{Amb}(B) = ABA.$$

每个非椭圆型元素 $\gamma \in W$ 都与一个 (AB)-字共轭。因此， $\mathscr{A}_{2t}$ 中的每个共轭类都包含一个形如

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_t}, \qquad \alpha_i \in \{\pm 1\}.$$

由于 ϕ_{Amb} 是反同态，因此

$$\phi_{Amb}(p) = \phi_{Amb}(B^{\alpha_t})\phi_{Amb}(A)\cdots\phi_{Amb}(B^{\alpha_2})\phi_{Amb}(A)\phi_{Amb}(B^{\alpha_1})\phi_{Amb}(A)$$

$$\Rightarrow \phi_{Amb}(p) = AB^{\alpha_t}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}.$$

由于 $\{p\} \in \mathscr{A}_{2t}$，共轭类 $\{p\}$ 在 ϕ_{Amb} 下保持不变。这两个字都是循环约化字。在两个循环群的自由积中，两个循环约化字共轭，当且仅当其中一个是另一个的循环置换。因此，若 p 与 $\phi_{Amb}(p)$ 共轭，则 $\phi_{Amb}(p)$ 必须由 p 经过循环置换得到。任何能使 p 与 $\phi_{Amb}(p)$ 对应的循环置换，都必须将 $\phi_{Amb}(p)$ 的初始 A 放在 p 中某个块的开头。由于 $\phi_{Amb}(p)$ 中的所有指数恰好与 p 中的指数顺序相反，唯一可能的循环移位是恰好移动 $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 个块，其中 $\lceil \frac{t}{2} \rceil$ 表示大于或等于给定数 $\frac{t}{2}$ 的最小整数。这意味着指数序列是对称的，

$$\alpha_i = \alpha_{t+1-i} \quad \text{for all } i \in \{1, \ldots, t\}.$$

因此，若 p 与 $\phi_{Amb}(p)$共轭，则指数必须满足这一对称性条件。因此，我们得到

$$\alpha_i = \alpha_{t+1-i} \quad \text{for all } \ i \in \{1, 2, \ldots, t\}.$$

这意味着，如果 t 是偶数,

$$p \ = \ AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1},$$

如果 t 是奇数,

$$p \ = \ AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\lceil \frac{t}{2} \rceil}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}.$$

证明至此完成。 □

现在 w e 对所有 i 定义集合 $\mathcal{U}_{2t} = \{AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}....AB^{\alpha_t} \mid \alpha_i = \alpha_{t+1-i}$ ，以及 $\alpha_i = \pm 1 \quad \}$.

引理 3.2. 对于 $\mathcal{U}_{2t}$ 中任意一个模糊元素，

(1) 如果 t 为偶数，则每个歧义类恰由两个元素组成，它们分别由以下字表示

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}$$

and

$$p' = AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}.$$

(2) 如果 t 为奇数，则每个歧义类恰由一个元素组成，该元素由以下字表示

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\lceil\frac{t}{2}\rceil}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}.$$

证明。 将 $p \in \mathcal{U}_{2t}$ 视为一个模糊元素（即， p 与其逆序词共轭）。对于循环约化的 (AB)-字，共轭等价于对该字进行循环移位。

令 t 为偶数。考虑字

$$AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}.$$

我们可以用有限序列（α_1， α_2，**.....**， $\alpha_{\frac{t}{2}}$， $\alpha_{\frac{t}{2}}$，**.....**，α_2，α_1）表示它，该序列是回文的，因为正向和反向读取时相同。这个字的共轭类包含它的所有循环移位。然而，为了保持在 α_i的歧义置换中，我们只考虑那些保持回文结构的循环置换。因此，只有两个能生成回文字的循环置换作为元素包含在歧义类中。

现在考虑该有限序列的所有循环置换。在 t个可能的循环移位中，只有移位 $\frac{t}{2}$ 个位置和移位 $\frac{t}{2}$ 个位置能生成回文字。所有其他循环移位都会破坏对称性,- 生成非回文字。因此，在歧义类中，恰好有两个回文代表，即原字

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}$$

and

$$p' = AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}.$$

没有其他循环移位能产生新的回文代表元。

当 t 为奇数时，同上所述的论证表明，每个歧义类恰好由一个回文元素组成，该元素由以下词表示

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\lceil\frac{t}{2}\rceil}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}.$$

这就证明了该引理。 □

引理 3.3。

(1) $|\mathscr{A}_{2t}| = \begin{cases} 2^{\frac{t}{2}-1} & \text{，若 } t \text{ 为偶数} \\ 2^{\lceil\frac{t}{2}\rceil} \quad t \quad \text{.，若为奇数} \end{cases}$

(2) $|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \simeq 2^{t/2}$。

证明。

(1) 首先考虑 t 为偶数的情况。那么，存在 $2^{\frac{t}{2}}$ 个形如以下形式的字

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}AB^{\alpha_{\frac{t}{2}}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}$$

在 $\mathcal{U}_{2t}$ 中，我们有 $|\mathcal{U}_{2t}| = 2^{\frac{t}{2}}$。由上述引理 3.2 可知，每个这样的字恰有两个共轭元。因此，不同共轭类的数量为

$$|\mathcal{U}_{2t}/\langle\delta\rangle| = \frac{2^{\frac{t}{2}}}{2}.$$

由于 $\mathcal{U}_{2t}/\langle\delta\rangle = \mathscr{A}_{2t}$，这意味着 $|\mathscr{A}_{4t}| = 2^{t-1}$.

若 t 为奇数，则有 $2^{\lceil\frac{t}{2}\rceil}$ 个形如

$$p = AB^{\alpha_1}AB^{\alpha_2}\cdots AB^{\alpha_{\lceil\frac{t}{2}\rceil}}\cdots AB^{\alpha_2}AB^{\alpha_1}$$

在 $\mathcal{U}_{2t}$ 中。由上述引理 3.2 可知，每个这样的字在其共轭类中恰有一个元素。因此，不同共轭类的数量为

$$|\mathcal{U}_{2t}/\langle\delta\rangle| = |\mathscr{A}_{2t}| = 2^{\lceil\frac{t}{2}\rceil}.$$

(2) 第二个结论如下：我们有

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| = \sum_{n=1}^{t} |\mathscr{A}_{2n}|.$$

对于每个 n,

$$|\mathscr{A}_{2n}| \leq 2^{\lceil n/2\rceil} \leq 2^{(n+1)/2}.$$

Hence

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \leq \sum_{n=1}^{t} 2^{(n+1)/2} = \sum_{n=1}^{t} (\sqrt{2})^{n+1}$$

$$\sum_{n=1}^{t}(\sqrt{2})^{n+1} = 2\sum_{n=1}^{t}(\sqrt{2})^{n-1} = 2\,\frac{(\sqrt{2})^t - 1}{\sqrt{2}-1} = 2(\sqrt{2}+1)\big(2^{t/2}-1\big).$$

这意味着

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \leq 2(\sqrt{2}+1)\big(2^{t/2}-1\big).$$

另一方面,

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \geq \sum_{\substack{1\leq n\leq t\\ n \text{ odd}}} |\mathscr{A}_{2n}| = \sum_{\substack{1\leq n\leq t\\ n \text{ odd}}} 2^{\lceil n/2\rceil} \geq 2^{\lceil t/2\rceil} \geq 2^{t/2}.$$

因此，由上述不等式可得

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \simeq 2^{\frac{t}{2}}.$$

证明至此完成。 □

引理 3.4.

(1) $|\mathscr{A}_{2t}^{np}| \leq \frac{t}{2}2^{\frac{t+2}{4}}$

(2) $|\mathscr{A}_{\leq 2t}^{np}| \leq \frac{t^2}{2}2^{\frac{t+2}{4}}$

证明。

(1) 根据 [2,引理 2.4],我们有

$$|\mathscr{A}_{2t}^{np}| = \sum_{s|t} |\mathscr{A}_{2s}^{p}|$$

其中求和遍及 t 的所有真因数。

$$|\mathscr{A}_{2t}^{np}| = \sum_{s|t} |\mathscr{A}_{2s}^{p}| \leq \sum_{s|t} |\mathscr{A}_{2s}|.$$

由引理 3.3,

$$|\mathscr{A}_{2t}^{np}| \leq \sum_{s|t} 2^{\lceil s/2 \rceil} \leq \sum_{s|t} 2^{\frac{s+1}{2}}.$$

由于 t 的最大真因数是 $t/2$，且真因数至多有 $t/2$ 个，因此

$$|\mathscr{J}_{2t}^{np}| \leq \frac{t}{2} 2^{\frac{t/2+1}{2}} = \frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}} \Rightarrow |\mathscr{J}_{2t}^{np}| \leq \frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}.$$

因此，$|\mathscr{A}_{2t}^{np}| \leq \frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}$.

(2) 由上文可知,

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}^{np}| = \sum_{n=1}^{t} |\mathscr{A}_{2n}^{np}| \leq \sum_{n=1}^{t} \frac{n}{2} 2^{\frac{n+2}{4}} \leq \sum_{n=1}^{t} \frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}} \leq \frac{t^2}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}.$$

因此，我们有 $|\mathscr{A}_{\leq 2t}^{np}| \leq \frac{t^2}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}$. — □

引理 3.5. 如 $t \to \infty$,

(1) $|\mathscr{A}_{2t}^{p}| \sim |\mathscr{A}_{2t}|$.

(2) $|\mathscr{A}_{\leq 2t}^{p}| \sim |\mathscr{A}_{\leq 2t}|$.

证明。

(1) 根据引理 3.4，我们有

$$|\mathscr{A}_{2t}| - \frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}} \leq |\mathscr{A}_{2t}^{p}| \leq |\mathscr{A}_{2t}|$$

两边除以 $|\mathscr{A}_{2t}|$

$$1 - \frac{\frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq \frac{|\mathscr{A}_{2t}^{p}|}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq 1$$

由引理 3.3 可知，当 t 为奇数时，$|\mathscr{A}_{2t}| \geq 2^{t/2}$；当 t 为偶数时，$|\mathscr{A}_{2t}| = 2^{\frac{t}{2}-1}$，因此

$$1 - \frac{\frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}}{2^{t/2}} \leq \frac{|\mathscr{A}_{2t}^{p}|}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq 1 \text{ and } 1 - \frac{\frac{t}{2} 2^{\frac{t+2}{4}}}{2^{\frac{t}{2}-1}} \leq \frac{|\mathscr{A}_{2t}^{p}|}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq 1$$

$$1 - \frac{t}{2 \cdot 2^{\frac{t-2}{4}}} \leq \frac{|\mathscr{A}_{2t}^{p}|}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq 1 \text{ and } 1 - \frac{t}{2 \cdot 2^{\frac{t-6}{4}}} \leq \frac{|\mathscr{A}_{2t}^{p}|}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq 1$$

由于当 $t \to \infty$时，$\frac{t}{2^{\frac{t-2}{4}+1}}$ 和 $\frac{t}{2^{\frac{t-6}{4}+1}}$ 趋于 0

因此，$|\mathscr{A}_{2t}^{p}| \sim |\mathscr{A}_{2t}|$.

(2) 在这一部分，我们使用与上文相同的论证。由引理 3 可得 .4,

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| - \frac{t^2}{2}2^{\frac{t+2}{4}} \leq |\mathscr{A}^p_{\leq 2t}| \leq |\mathscr{A}_{\leq 2t}|$$

两边除以 $|\mathscr{A}_{\leq 2t}|$ 并注意到 $|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \geq 2^{t/2}$，可得

$$1 - \frac{\frac{t^2}{2}2^{\frac{t+2}{4}}}{2^{t/2}} \leq \frac{|\mathscr{A}^p_{\leq 2t}|}{|\mathscr{A}_{\leq 2t}|} \leq 1$$

$$\Rightarrow 1 - \frac{t^2}{2^{\frac{t+2}{4}}} \leq \frac{|\mathscr{A}^p_{2t}|}{|\mathscr{A}_{2t}|} \leq 1.$$

我们知道 $\frac{t^2}{2^{\frac{t+2}{4}}} \xrightarrow{\quad} 0$，因为 $t \to \infty$.。因此，$|\mathscr{A}^p_{\leq 2t}| \sim |\mathscr{A}_{\leq 2t}|$.

这就给出了一个证明。 □

根据 上面证明的结果，我们现在可以精确计算歧义类的数量 .

3.1. **定理 1.2 的证明**。

(1) 根据引理 3.3，我们有

$$|\mathscr{A}_{\leq 2t}| \simeq 2^{t/2}.$$

简单来说，随着 t 增大，长度至多为 $2t$ 的模糊类数量呈指数增长，增长率与 $2^{t/2}$ 相当。换言之，在相差一个乘法常数的意义下，$|\mathscr{A}_{\leq 2t}|$ 的增长率与 $2^{t/2}$ 相同。

(2) 根据引理 3.5，当 $t \to \infty$ 时，我们有 $|\mathscr{A}^p_{\leq 2t}| \sim |\mathscr{A}_{\leq 2t}|$。这表明，长度至多为 $2t$ 的本原模糊类数量渐近等于长度至多为 $2t$ 的模糊类总数。□

References

[1] Ara Basmajian、Blanca Marmolejo 和 Robert Suzzi Valli。海克群中互反双曲元素的计数，2025。 1[2] Ara Basmajian 和 Robert Suzzi Valli。模群中的组合增长。*Groups Geom.Dyn.*，16(2):683–703，2022。 1, 1.1, 1.1, 1, 1[3] Ara Basmajian 和 Robert Suzzi Valli。互反测地线尖点游荡的计数。载于几何、群与数学哲学，第811卷*Contemp. Math.*，第21–30页。美国数学会， [罗得岛州普罗维登斯], 罗得岛州， [2025]©2025。 1[4] Jean Bourgain 和 Alex Kontorovich。超越扩张，III：互反测地线。*Duke Math. J.*，168(18):3413–3435，2019。 1[5] Debattam Das 和 Krishnendu Gongopadhyay。海克群中互反类的球面增长。*arXiv* 预印本 *arXiv:2411.00739*，2024。 1[6] Debattam Das 和 Krishnendu Gongopadhyay。海克群中互反类数量的渐近增长。预印本，arXiv:2506.08449 [math.GR] (2025)，2025。 1, 1.1[7] Viveka Erlandsson 和 Juan Souto。互反测地线与二面体群的计数及等分布。*Int. Math. Res. Not. IMRN*，(13):10298–10318，2024。 1[8] Svetlana Katok。福克斯群。芝加哥数学讲座丛书。芝加哥大学出版社，芝加哥，伊利诺伊州，1992。 1[9] George Kenison 和 Richard Sharp。自由群中共轭类的统计。*Geom. Dedicata*，198:57–70，2019。 1

[10] Wilhelm Magnus、Abraham Karrass 和 Donald Solitar。组合群论。Dover Publications, Inc.，纽约，修订版，1976。以生成元和关系表示群。 1[11] Marian Mure¸san。经典分析的具体方法。CMS 数学丛书／加拿大数学会数学著作。施普林格，纽约，2009。 2[12] Peter S. Park。交换子的共轭增长。《代数杂志》，526:423–458，2019。 1[13] Jouni Parkkonen 和 Fr´ed´eric Paulin。发散测地线、歧义闭测地线与二元加性除数问题。预印本，arXiv:2409.18251 [math.DG](2024)，2024。 1[14] Jouni Parkkonen 和 Fr´ed´eric Paulin。负曲率下强可逆闭测地线的计数及等分布。预印本，arXiv:2505.07738 [math.DS] (2025)，2025。 1[15] Igor Rivin。自由群中的增长（以及其他故事）——十二年后。《伊利诺伊数学杂志》，54(1):327–370，2010。 1[16] Peter Sarnak。互反测地线。载于解析数论，第7卷克莱数学会议录，第217–237页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2007。 1

Indian Institute of Technology Kanpur, Kanpur 208016, Uttar Pradesh, India
电子邮箱地址: debattam123@gmail.com

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali, Knowledge City, Sector 81, S.A.S. Nagar 140306, Punjab, India电子邮箱地址: krishnendu@iisermohali.ac.in

Indian Institute of Science Education and Research (IISER) Mohali, Knowledge City,Sector 81, S.A.S. Nagar 140306, Punjab, India电子邮箱地址: mp22005@iisermohali.ac.in