超序列演算具有阿克曼复杂度

A. R. BALASUBRAMANIAN,马克斯·普朗克软件系统研究所（MPI-SWS），德国VITOR GREATI 和 REVANTHA RAMANAYAKE，格罗宁根大学伯努利研究所，荷兰

对于带有收缩或弱化、且存在无切割序列演算的次结构逻辑，人们使用良拟序对证明搜索进行了分析 $\mathbb{N}^d$（Dickson引理），并通过受控坏序列论证得到了阿克曼上界。对于超序列演算，由于超序列是序列的一个（多重）集合，该论证将序关系提升到了幂集上。这使快速增长层级中的复杂度从阿克曼复杂度跃升至超阿克曼复杂度，从而似乎表明，带有收缩或弱化的交换完全兰贝克演算的扩展若具有无割超序列演算（**FLec/FLew**），就必然具有超阿克曼上界。我们证明，这种直觉并不成立：每个具有无割超序列演算的**FLec** 和**FLew** 扩展，其可证性都具有阿克曼上界。

为避免使用幂集，我们在反向证明搜索中利用任意超序列内各个序列之间的新型依赖关系。特别是，弱化情形引入了 Karp-Miller式加速，并改进了基本模糊逻辑**MTL**的上界。我们的阿克曼复杂度上界对于收缩情形是最优的（该情形由逻辑**FLec**实现）。

CCS概念： • **计算理论** → **证明论**； **复杂性理论与逻辑**； 线性逻辑。

附加 关键词和短语：超序列演算、次结构逻辑、阿克曼复杂度、良拟序 rs

arXiv:2602.19229v1 [cs.LO] 22 Feb 2026

1 引言

次结构逻辑源于从经典或直觉主义证明演算中省略或修改收缩、弱化、交换或结合律等结构规则。这产生了一个广泛的系统族——包括线性逻辑、相关逻辑、数学模糊逻辑和完全兰贝克演算 [24, 27, 13, 22]。这些系统能够在广义意义上合理地处理资源，因为假设不再能够被任意复制或丢弃。

基本的次结构逻辑是完全兰贝克演算 **FL**，再加入交换、弱化或收缩等结构规则，记作 $\mathbf{FL}_{\mathrm{S}}(\mathrm{S} \subseteq \{e、\ w、\ c\})$。这些逻辑具有无割序列演算，这显著限制了证明搜索空间，从而使得能够对逻辑的计算复杂度进行证明论研究。对于可证性——本文关注的主题——除**FLec** 外，所有基本次结构逻辑都是 PSPACE完全的。与此同时，Kripke [18] 于1959年著名地证明**FLec** 是可判定的，而 Urquhart [29] 确立了它的非原始递归复杂度；事实上，它是 Schmitz [28] 序数索引快速增长复杂度层级中$\mathbf{F}_\omega$ 类的完全问题。非正式地说，$\mathbf{F}_\omega$ 中的问题，其复杂度由一个阿克曼型函数与原始递归函数复合后界定。

要理解$\mathbf{F}_\omega$ 上界的来源，可以注意到，**FLec** 中的证明搜索 P 可以限制在这样的分支上：它们在本质上是关于 $\mathbb{N}^d$ 上乘积序的坏序列。Dickson引理 [10] 指出，这是一种良拟序（wqo）。也就是说， P中的每个分支都是一个序列 $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$，由满足如下性质的序列组成：不存在 $i < j$ 使得 $s_i \le s_j$（读作 s_j可收缩为 s_i）。良拟序的意义在于，相对于它的每个坏序列都是有限的。因此，我们可以在**FLec** 中进行证明搜索，并保证终止性；由此可得可判定性。坏序列中相继的跳跃受到控制，具体而言，存在一个原始递归函数 g（仅取决于证明演算）以及序列上的范数 $[\![\cdot]\!]$，使得 $[\![s_i]\!] < g^i([\![s_0]\!])$。每个这样的受控坏序列都有一个最大长度，由长度定理给出；对于 $\le$，这个长度是关于 $[\![s_0]\!]$ 的一个阿克曼型函数（Figueira等人 [12]）。所声称的上界由此得证。

FLec 的大多数扩展都不允许无割序列演算，但在无割超序列演算的广义情形下，无限多个扩展可以做到 [6, 8]；具体而言，次结构层级 [6, 16] 除最后一层 N_3 外，每一层的公理都可以做到。最后一层包含分配律等公理，这些公理在次结构情形下往往会导致不可判定性。超序列 [23, 25, 1]是序列的多重集，记作 $s_0 \mid \ldots \mid s_k$。超序列规则通过允许同时利用结论中的多个分量，对序列规则作了适当推广

作者联系方式：A. R. Balasubramanian，bayikudi@mpi-sws.org，马克斯·普朗克软件系统研究所（MPI-SWS），德国萨尔布吕肯；Vitor Greati，v.rodrigues.greati@rug.nl；Revantha Ramanayake，d.r.s.ramanayke@rug.nl，伯努利研究所，格罗宁根大学，格罗宁根，荷兰。

。Ciabattoni 等人 [6, 8] 提出了一套通用理论，用于为非经典逻辑和次结构逻辑（包括中间逻辑、多值逻辑和模糊逻辑）计算解析超序列演算。Balasubramanian 等人 [3] 通过将 $\mathbb{N}^d$ 上的良拟序提升为 $\mathrm{P}f(\mathbb{N}^d)$ 上的下界序，扩展了针对这些超序列演算的 **FLec** 复杂性分析。由于此类幂集序上的长度定理具有超阿克曼复杂度（即属于 $\mathbf{F}_{\omega^\omega}$）（Balasubramanian [2]），这表明每个具有无割超序列演算的 **FLec** 公理扩展都具有超阿克曼复杂度。在 [3] 中，**FLew** 的扩展也得到了相同的上界；这一次，上界良拟序与正向证明搜索相结合。这为基本模糊逻辑**MTL** [11]得出了首个上界——这是一个长期悬而未决的问题 [14]——该逻辑通过预线性公理在 **FLew** 上公理化（$p \to q$） $\vee$ （$q \to p$）。

上述推理思路表明，从序列到超序列的跃迁（由对无割证明演算的需求所必需）也意味着向 $\mathbf{F}_{\omega^\omega}$ 的跃迁。在本文中，我们证明这一直觉并不成立：我们证明，任何具有无割超序列演算的 **FLec** 和 **FLew** 的扩展，其可证性都有一个 Ackermann 上界。关键的技术洞见在于避免提升到幂集序。我们的解决方案是利用超序列中分量之间的新颖依赖关系，因此反向证明搜索中的每个超序列——现在将其视为一个序列，并按照序列分量被添加的顺序排列——本身就是一个受控坏序列（在序列序中）！ 对于收缩情形，我们的界是最优的，因为 **FLec** 已经达到了该界。

弱化情形要复杂得多。普通的反向证明搜索不会终止，因此我们使用 Karp–Miller 风格的加速 [17] 对其进行扩展。由于超序列中多个序列之间的相互作用，这里的精确定义比自动机理论中其他问题所使用的加速复杂得多，例如 Petri网覆盖性或计数器自动机中的加速 [17, 21, 5]。随后，我们将这一加速与一个证明论装置结合起来，以实现一种非常具体形式的收缩。一个直接推论是将**MTL** 的上界降为 Ackermann 级别。这同样适用于文献中的其他（标准完备）模糊逻辑，例如，**MTL** 的 n-收缩扩展 [7, 15] 以及其 wmn-扩展 [4] 。

通过证明演算系统为坏序列添加结构，对无限状态系统领域也具有独立意义，因为基于良拟序的复杂度可能通过对坏序列进行更精细的分析而得到改善（例如参见 Lazic 和 Schmitz [19, 20]）。具体而言，这些证明演算系统是交替分支带状态向量加法系统（BVASS）的变体，其中运行过程中的一个配置也可以与之前访问过的配置交互。

2 预备知识

2.1 基于超序列的次结构逻辑证明论

令 P 为一个可数无限集合的命题变元。集合 L 中的公式由以下文法定义 r.

$$\varphi := \mathrm{p} \in P \mid 1 \mid 0 \mid \varphi \wedge \varphi \mid \varphi \vee \varphi \mid \varphi \cdot \varphi \mid \varphi \to \varphi$$

逻辑（基于 L）是 L上的一个推论关系 $\vdash$。给定一个逻辑 $\vdash$，可证性问题是指判定：给定 $\varphi \in L$，是否有 $\varnothing \vdash \varphi$。序列是形如 $\Gamma \Rightarrow \Pi$ 的表达式，其中 Γ （前件）是公式的有限多重集，而 Π （后件）是一个列表，该列表可以为空，也可以仅包含一个公式（我们称之为后件列表或单式后件）。我们用 Γ、Δ、Θ、Π 表示公式的有限多重集。公式 φ 在 Γ 中的重数是 Γ中 φ 的副本数量。我们用 $[\varphi_1, \ldots, \varphi_k]$表示 Γ中元素（包括重复元素）的一种枚举。任意多重集的支撑是其重数非零的元素所构成的集合。

超序列是一个（可以为空的）序列的有限多重集。它显式地写作如下形式，对于 $k \geq 0$,

$$\Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mid \ldots \mid \Gamma_k \Rightarrow \Pi_k \tag{1}$$

每个序列 $\Gamma_i \Rightarrow \Pi_i$ 都称为超序列的一个分量。对于超序列 h 和序列 s，我们用 $s \in h$ 表示 s 是 h的一个分量。给定一个由公式构成的有限集合 S， S-（超）序列是指其公式全都属于 S 的（超）序列。不含重复项的超序列称为无冗余超序列。

一个超序列演算是由超序列规则构成的集合。每条规则都有一个结论超序列和若干个前提超序列。本文中的所有演算系统都具有这样一个性质：对于同一个结论，只有有限条规则。

通常，规则以规则模式的实例形式呈现（见例 2.1）。规则模式和规则通常采用分数记法呈现：前提列在分数线之上，结论列在分数线之下（见图 1）。没有前提的规则（模式）称为初始超序列或公理规则。我们经常将超序列演算视为规则模式的集合，这意味着其中的规则是这些模式所有可能的实例化，也称为规则实例。

为了恰当地定义规则模式，我们需要考虑不同类型的变量，具体取决于它们将由公式、公式多重集、序列还是超序列实例化。规则模式的结论和每个前提都具有 $S_1|\ldots|S_k$ 的形式，其中每个 S_i 要么是 (i) 超序列变量（记作 H），要么是 (ii) 序列变量（记作 s），要么是 (iii) $\vec{X} \Rightarrow \Pi$，要么是 (iv) $\vec{X} \Rightarrow$。这里，$\vec{X}$ 是一个有限的多重集变量列表（我们用 Γ, Δ, Θ 表示多重集变量）以及由公式变量 φ, ψ, ϕ 和命题变量 p, q, r 构成的公式；此外，Π 是一个后件列表变量。规则模式中的变量统称为模式变量。我们将 $S_1|\ldots|S_k$ 称为超序列，将每个 S_i 称为分量，尽管它们是由模式变量构成的，不同于 (1) 中由公式构成的情形；这种术语的延伸用法是标准的。

规则实例是通过将模式变量统一实例化为相应类型的具体对象，从规则模式中得到的：将超序列变量实例化为超序列，将序列变量实例化为序列，将列表变量实例化为公式列表，等等。后件列表变量由单式后件实例化（即，实例化为一个空列表或仅含一个公式的列表）。

规则模式的前提（分别地，结论）中不属于超序列变量的分量称为活动分量（分别地，主分量）。对于规则实例中对应的分量，我们也使用相同的术语。

例 2.1。我们考虑如下规则模式（∧R）：

$$\frac{H \mid \boxed{\Gamma \Rightarrow \varphi} \qquad H \mid \boxed{\Gamma \Rightarrow \psi}}{H \mid \boxed{\Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}}\ (\wedge\mathrm{R})$$

其中，前提中的活动分量和结论中的主分量均以方框标出。其前提为 $H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi$和 $H \mid \Gamma \Rightarrow \psi$，结论为 $H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi$。下面给出（∧R）的一些规则实例，并将其中的活动分量标出。

$$\frac{\boxed{\Rightarrow \mathrm{p}} \qquad \boxed{\Rightarrow \mathrm{q}}}{\boxed{\Rightarrow \mathrm{p} \wedge \mathrm{q}}} \qquad \frac{\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p} \mid \boxed{\mathrm{r}, \mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{p} \wedge \mathrm{q}} \qquad \mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p} \mid \boxed{\mathrm{r}, \mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{q}}}{\mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p} \mid \boxed{\mathrm{r}, \mathrm{r} \Rightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \wedge \mathrm{q}}}$$

$$\frac{\Rightarrow \mathrm{p} \cdot \mathrm{p} \mid \mathrm{q} \to \mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p} \mid \boxed{\mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{p} \wedge \mathrm{q}} \qquad \Rightarrow \mathrm{p} \cdot \mathrm{p} \mid \mathrm{q} \to \mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p} \mid \boxed{\mathrm{r} \Rightarrow \mathrm{q}}}{\Rightarrow \mathrm{p} \cdot \mathrm{p} \mid \mathrm{q} \to \mathrm{p} \Rightarrow \mathrm{p} \mid \boxed{\mathrm{r} \Rightarrow (\mathrm{p} \wedge \mathrm{q}) \wedge \mathrm{q}}}$$

本文中的基本超序列演算是**HFL**e （见图1）。由于该演算满足切消去，我们省略了（cut）规则。通过分别添加下列规则{（**c**）}和{（**i**）、（**o**）}，可得到**HFL**ec 和**HFL**ew。在此我们遵循标准约定，用（**w**）指代规则（**i**）和（**o**）。

$$\frac{H \mid \Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, \varphi, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (\mathbf{i}) \qquad \frac{H \mid \Gamma \Rightarrow}{H \mid \Gamma \Rightarrow 0}\ (\mathbf{o}) \qquad \frac{H \mid \Gamma, \varphi, \varphi, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, \varphi, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (\mathbf{c})$$

如果演算$\mathbf{H}_1$ 包含演算$\mathbf{H}_2$ 的所有规则，则称演算$\mathbf{H}_1$ 扩展（或称为的扩展）演算$\mathbf{H}_2$。如果**H** 是**HFL**e的扩展，那么由规则模式集合S对扩展**H** 所得的超序列演算为$\mathbf{H} \cup \mathcal{S}$；按照标准惯例，我们将其记作**H(S)**。

设**H** 是**HFL**e的扩展。在**H** 中的推导是一个有限的带标记有根树，其中非叶节点及其子节点的标记分别是演算中某条规则的结论和前提。**H** 中超序列 h 的证明，是指根标记为 h 且所有叶节点都是公理规则实例的**H** 中的推导。我们用 $\vdash_{\mathbf{H}} h$ 表示在**H** 中存在 h 的证明（我们称 h 在**H**中可证）。推导中的分支是从根到叶节点的一条路径。推导的高度是其分支上节点数的最大值。

初始超序列

$$\frac{}{H \mid p \Rightarrow p} \qquad \frac{}{H \mid 0 \Rightarrow} \qquad \frac{}{H \mid \Rightarrow 1}$$

结构规则

$$\frac{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \mid \Gamma \Rightarrow \varphi}{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\mathrm{EC}) \qquad \frac{H}{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi}\ (\mathrm{EW})$$

逻辑规则

$$\frac{H \mid \Gamma, \varphi_i, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (\wedge\mathrm{L}) \qquad \frac{H \mid \varphi, \Gamma \Rightarrow \psi}{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \to \psi}\ (\to\mathrm{R}) \qquad \frac{H \mid \Gamma \Rightarrow}{H \mid \Gamma \Rightarrow 0}\ (0\mathrm{R}) \qquad \frac{H \mid \Gamma, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, 1, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (1\mathrm{L})$$

$$\frac{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \qquad H \mid \Delta, \psi, \Theta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Delta, \Gamma, \varphi \to \psi, \Theta \Rightarrow \Pi}\ (\to\mathrm{L}) \qquad \frac{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \qquad H \mid \Delta \Rightarrow \psi}{H \mid \Gamma, \Delta \Rightarrow \varphi \cdot \psi}\ (\cdot\mathrm{R})$$

$$\frac{H \mid \Gamma, \varphi, \Delta \Rightarrow \Pi \qquad H \mid \Gamma, \psi, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, \varphi \vee \psi, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (\vee\mathrm{L}) \qquad \frac{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi_i}{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee\mathrm{R}) \qquad \frac{H \mid \Gamma, \varphi_i, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, \varphi_1 \wedge \varphi_2, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (\wedge\mathrm{L})$$

$$\frac{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \qquad H \mid \Gamma \Rightarrow \psi}{H \mid \Gamma \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\mathrm{R}) \qquad \frac{H \mid \Gamma, \varphi, \psi, \Delta \Rightarrow \Pi}{H \mid \Gamma, \varphi \cdot \psi, \Delta \Rightarrow \Pi}\ (\cdot\mathrm{L})$$

图 1. 用于**HFLe** 的超序列演算**FLe**。

分支。我们用 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{H}} h$（分别地，$\vdash^{\leq\alpha}_{\mathbf{H}} h$）表示在**H** 中存在高度为 α（分别地，$\leq \alpha$）的 h 证明。若 $\vdash \varphi$ 当且仅当 $\vdash_{\mathbf{H}} (\Rightarrow \varphi)$，则称**H** 是逻辑 $\vdash$的演算。在这种情况下，我们也称 $\vdash$ 由**H**确定；所谓**H**中的可证性，指的是$\vdash$的可证性问题。若**H** 能证明超序列 h，且对于它所证明的任意超序列 h，都存在一个**H** 中的 h 证明，且该证明只使用 h的子公式，则称**H** 是解析的。

Ciabattoni 等人 [6] 通过向**HFLe**添加解析结构超序列规则，为**FLe** 的无穷多个公理扩展提供了解析的超序列演算系统。在次结构层级中，这些逻辑对应于**FLec**扩展在 P'_3 层级中的无环公理，以及**FLew**扩展在 P_3 层级中的无环公理。对于指标集 $J := \{j_1, \ldots, j_k\}$，将超序列 $H \mid \Gamma_{j_1} \Rightarrow \Pi_{j_1} \mid \ldots \mid \Gamma_{j_k} \Rightarrow \Pi_{j_k}$记为 $H \mid \Gamma_j \Rightarrow \Pi_j (j \in J)$。

定义 *2.2.* 解析结构规则模式（下文简称解析规则）具有如下形式，其中前件中的所有符号都是多重集变量，$\vec{I}$，J和 L 是指标集，K_i 对每个 $i \in I$都是指标集，$\alpha_i \in \mathbb{N}$ 对每个 $i \in I$都是指标集，$\beta_j \in \mathbb{N}$ 对每个 $j \in J$都是指标集，并且每个 Γ_{ik}和 Δ_l 都是多重集变量列表：

$$\frac{\{H \mid Y_i, \vec{\Gamma}_{ik} \Rightarrow \Pi_i\}_{i \in I, k \in K_i} \qquad \{H \mid \vec{\Delta}_l \Rightarrow\}_{l \in L}}{H \mid Y_i, X_{i1}, \ldots, X_{i\alpha_i} \Rightarrow \Pi_i\ (i \in I) \mid Z_{j1}, \ldots, Z_{j\beta_j} \Rightarrow (j \in J)}$$

此外，它还满足以下性质（包括但不限于）：**(i)** 线性结论（结论中出现的多重集变量恰好出现一次）；**(ii)** 强子公式性质（前提中的每个多重集变量都出现在结论中）。

例 *2.3*（通信）。

$$\frac{H \mid \Delta_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \qquad H \mid \Delta_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2}{H \mid \Delta_2, \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mid \Delta_1, \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2}\ (com)$$

模糊逻辑 **MTL** 由演算系统 **HFLew**($\{com\}$) 确定。有关此类模式的更多示例，参见 [6]。

我们始终用 R 表示解析结构规则模式的有限集合。因此，由形式为**HFLec**(R) 和 **HFLew**(R) 的演算系统所确定的逻辑将是本文关注的重点。注意，在这类演算系统中，除 (EC) 和 (EW) 外，每个规则模式都具有以下形式，其中某些 $n, m \geq 1$，其中 $T_1, \ldots, T_m$, $S_1, \ldots, S_n$ 是分量，H 是一个超序列变量。

$$\frac{H \mid T_1 \qquad \cdots \qquad H \mid T_m}{H \mid S_1 \mid \cdots \mid S_n}$$

我们将设计以超序列为输入的算法。对于输入的大小，.我们采用以下范数；该范数与不可约超序列表示的长度 h 仅相差一个多项式因子。

定义 *2.4*（（超）序列范数）。对于任意序列 s，我们将 $[\![s]\!]$ 定义为 s前件中某个公式的最大重数。对于任意超序列 h，我们将 $[\![h]\!]$ 定义为：$= \max_{s \in h} [\![s]\!]$（即其各分量范数的最大值）。正如我们稍后将看到的，就我们的目的而言，将 h 视为一个不含重复项的序列列表会有所帮助。在这种语境下，$[\![h]\!]$ 记录了迄今为止见过的最大序列的大小。请注意，对于不含重复序列的超序列，这是一个真范数。

2.1.1 可逆演算系统。为了构建我们的证明搜索过程，我们对通常的超序列演算进行修改，允许规则结论中的分量向上延续。

固定一个由解析结构规则模式组成的有限集合 R，并令$\mathbf{H} \in \{\mathbf{HFL_{ec}(R)}, \mathbf{HFL_{ew}(R)}\}$。给定一个不属于 S :={(EC)，(EW)} 的规则模式 r，r 的可逆形式 inv(r) 通过将主分量加入每个前提而得到。inv(r) 的主分量和活动分量，分别是 r 中的主分量和活动分量。

例 *2.5*。 (*com*) 的可逆形式为

$$\frac{h_c \mid \Delta_1, \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \qquad h_c \mid \Delta_2, \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2}{h_c}\ \mathsf{inv}(com)$$

其中 $h_c = (H \mid \Delta_2,\ \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1 \mid \Delta_1,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2)$。inv(*com*) 的主分量为 $\Delta_2,\ \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1$ 和 $\Delta_1,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2$，活动分量为 $\Delta_1,\ \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1$ 和 $\Delta_2,\ \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2$。

定义 *2.6*（可逆演算）。 演算 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ec}}\mathbf{(R)}$（分别为 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}\mathbf{(R)}$）由 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}$（分别为 $\mathbf{HFL_{ew}(R)}$）中每个不属于 S 的规则模式 r 替换为 inv(r) 而得到。

以下结论显然可证；使用 (EC) 和 (EW)。

引理 2.7。 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ec}}(\mathcal{R})$ 与 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})$ 分别证明与 $\mathbf{HFL_{ec}}(\mathcal{R})$ 和 $\mathbf{HFL_{ew}}(\mathcal{R})$相同的超序列。

同样显然，$\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ec}}\mathbf{(R)}$ 和 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}\mathbf{(R)}$ 满足子公式性质，因为 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}$ 和 $\mathbf{HFL_{ew}(R)}$ 满足该性质。

2.2 良拟序

良拟序 （或称良拟序）是一个结构 $\mathbf{A} := A, \leq_{\mathbf{A}}$，其中 A 是一个集合， $\leq_{\mathbf{A}} \subseteq A \times A$ 是一个自反且传递的关系，使得对于 A 的任意无限元素序列 $a_0, a_1, \ldots,$，都存在 $i < j$ 使得 $a_i \leq_{\mathbf{A}} a_j$。集合 A 上的真范数 是一个函数 $[\![\cdot]\!]_{\mathbf{A}} \colon A \to \mathbb{N}$，满足对于每个 $n \in \mathbb{N}$，集合 $\{a \colon [\![a]\!]_{\mathbf{A}} \leq n\}$ 都是有限的。赋范良拟序 （或称非良拟序）是一个结构 $\mathbf{A} := A, \leq_{\mathbf{A}}, [\![\cdot]\!]_{\mathbf{A}}$，满足 $A, \leq_{\mathbf{A}}$ 是良拟序，且 $[\![\cdot]\!]_{\mathbf{A}}$ 是真范数。

容易看出，带有通常序且范数为恒等函数的自然数集 $\mathbb{N}$ 是一个非良拟序。事实证明，这一观察可以推广如下。对于任意 $d \geq 1$，令 $\mathbb{N}^d$ 表示所有 d元自然数元组的集合。给定 $\mathbb{N}^d$中的 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ 和 $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_d)$，若 $x_i \leq y_i$对每个 i都成立，我们就称 $\mathbf{x} \leq_{\mathbb{N}^d} \mathbf{y}$。最后，将元素 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_d)$ 的范数定义为 $[\![x]\!]_{\mathbb{N}^d} = \max_{1 \leq i \leq d} x_i$。根据 Dickson引理 [10]，已知对于每个 d，$\mathbf{N}^d := \mathbb{N}^d, \leq_{\mathbb{N}^d}, [\![\cdot]\!]_{\mathbb{N}^d}$ 都是一个非良拟序。这个非良拟序称为 $\mathbb{N}^d$上的积赋范良拟序。下文中，如果维数 d可由上下文确定，我们就省略 $\leq_{\mathbb{N}^d}$和 $[\![\cdot]\!]_{\mathbb{N}^d}$中的下标 $\mathbb{N}^d$。我们还将用到非良拟序的不交和，特别是形如 $k \cdot \mathbf{N}^d (k, d \in \mathbb{N})$ 的非良拟序，其中 $(i, \mathbf{x}) \leq_{k \cdot \mathbb{N}^d} (j, \mathbf{y})$ 当且仅当 $i = j$（即，x 和 y 属于 $\mathbb{N}^d$的同一个副本），且 $\mathbf{x} \leq_{\mathbb{N}^d} \mathbf{y}$；这里，范数定义为 $[\![(i, \mathbf{x})]\!]_{k \cdot \mathbb{N}^d} := [\![\mathbf{x}]\!]_{\mathbb{N}^d}$。

受控坏序列。 控制函数 是任意满足单调性且符合条件 $f(x) \geq x$ for all $x \in \mathbb{N}$ 的函数 $f \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$。现在，令 f为任意控制函数，令 $n \in \mathbb{N}$，并令 $\mathbf{A} := A, \leq_{\mathbf{A}}, [\![\cdot]\!]_{\mathbf{A}}$ 为任意非良拟序。若元素序列 $a_0, a_1, \ldots$取自 A，则称其为 (f, n)-受控坏序列 ，当且仅当

- 不存在满足 $a_i \leq_{\mathbf{A}} a_j$ 的 $i < j$。

对于每个 i，都有 $[\![a_i]\!]_A \leq f^i(n)$，其中 f^i表示 f 与自身复合 i 次。

根据良拟序的定义，以及（f, n）受控坏序列的第一条性质的定义，可知这类序列不可能是无限的。事实上，应用 König 引理可知，对于每个 f、每个 n 和每个非良拟序 $\mathbf{A}$，（f, n）受控坏序列的长度都有上界。因此，我们可以为 $\mathbf{A}$ 和 f 定义一个长度函数 $L_{\mathbf{A},f}$，它将数值 n 映射为 $\mathbf{A}$ 的（f, n）受控坏序列的最大长度。

· 的长度函数上界 k。 本文证明的复杂度上界最终将取决于非良拟序 $k \cdot \mathbf{N}^d$（对于某些 $d, k \in \mathbb{N}$）的长度函数。因此，我们回顾关于它们上界的已有结果。为陈述这些上界，我们首先需要介绍所谓的快速增长复杂性类，下面就来介绍。我们只陈述此处所需的概念和事实。

首先，我们定义如下函数层级 $\{F_i\}_{i \leq \omega}$。令 $F_1(n) = 2n$，并令 $F_{i+1}(n) = F_i^n(n)$。然后我们定义 $F_\omega(n) = F_n(n)$，其中我们可以将 ω 视为一个大于任意自然数的元素。利用这些函数，对于每个$i \in \mathbb{N} \cup \{\omega\}$，我们可以通过对 F_i 函数（以及后继函数等一系列其他简单函数）关于复合和受限原始递归进行闭包，来定义一个函数族 $\mathscr{F}_i$。我们用 $\mathbf{F}_i^\star$表示由 $\bigcup_{j<i} \bigcup_{p \in \mathscr{F}_j} \{F_i(p(n))\}$ 给出的函数类。就我们的目的而言，关于$\mathbf{F}_i^\star$ ，我们只需要以下事实。

定理 2.8（[28]）。如果 f是$\mathbf{F}_\omega^\star$ 中的一个函数，且 g_1、 g_2 是原始递归函数，那么函数 $g_1 \circ f \circ g_2$ 也属于$\mathbf{F}_\omega^\star$。

定理 2.9（狄克逊引理长度定理 [12]）。对于任意控制函数 f，存在 $U\colon\ \mathbb{N}^3 \to \mathbb{N}$ 属于 $\mathbf{F}_\omega^\star$，使得对于任意 $k, d \geq 0$,$U(k, d, x)$，都是长度函数 $L_{k \cdot \mathbb{N}^d,\ f}(x)$ 的上界。

令 $\mathbf{F}_i$ 为复杂度类，它定义为可由确定性图灵机在时间 $f \in \mathbf{F}_i^\star$内解决的判定问题集合。对于带有 $i > 2$的 $\mathbf{F}_i$，确定性与非确定性、时间与空间之间的区别变得无关紧要，因为这类问题在指数时间归约下封闭。我们主要关注的类是 $\mathbf{F}_\omega$，其成员被称为具有阿克曼复杂度。实际上，这个层级通常针对不超过 ϵ_0 [28]的序数来定义。特别地，$\mathbf{F}_{\omega^\omega}$ 是超阿克曼问题类。

3 FL$_{\mathbf{ec}}$的解析超序列扩展的阿克曼上界

3.1 精化演算及其关键性质

Ramanayake [26] 构造了**HFL$_{\mathbf{ec}}$(R)** 的一个精化版本，其中 **(EW)**、**(EC)** 和 **(c)** 都是保高度可容许的（简称超序列保持可容许），也就是说，只要这些规则之一的前提有一个高度为 $\alpha \in \mathbb{N}$的证明，其结论就有一个高度至多为α的证明。我们先回顾这一构造及其一个关键推论：柯里引理。

为了便于表述精化演算并证明它满足所需的 hp-可容许性结果，我们按以下方式定义超序列上的二元关系 $\rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k$, $\rightsquigarrow^k$**(EC)** 和 $\rightsquigarrow_l^k$（对每个 k， $l \geq 0$）。

- $h_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k h_2$ 当且仅当 h_2 可通过应用若干次**c** 规则实例从 h_1 得到，并且 h_2中某个分量里的每个公式，在该分量中的出现次数至多比 h_1中对应分量里的出现次数少 k 次。
- $h_1 \rightsquigarrow^l$**(EC)** h_2 当且仅当 h_2 可以通过对 h_1 应用若干次 **(EC)** 规则实例得到，并且 h_2 的每个分量在 h_2 中出现的次数都比在 h_1 中少至多 l次。
- $h_1 \rightsquigarrow_l^k h_2$ 当且仅当存在 h' 使得 $h_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k h'$ 且 $h' \rightsquigarrow^l$**(EC)** h_2。

下面这个事实可由这些定义直接得出。

命题 3.1 . 如果 $h_1 \rightsquigarrow_l^k h_2$，那么对于每个 $s_1 \in h_1$，都存在 $s_2 \in h_2$ 使得 $s_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k s_2$。我们称 s_2 为 s_1 的后代，位于 h_2.

精化演算的思路是为每个规则实例引入固定数量的收缩（内部收缩和外收缩）。该数量由演算的句法形式决定，使用下文定义的值 fm 和 acn。

定义 *3.2*（*[26]*）。规则模式的公式重数是主分量的所有前件中元素数量的最大值。规则模式的活动分量数是其结论中的分量数（包括超序列变量）。

演算 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}$ 的公式重数 fm 是其规则模式的公式重数的最大值。类似地，活动分量数 acn 是其规则模式的活动分量数的最大值。

定义 *3.3*（精化收缩演算）。设 **H** 为一个包含 (EC) 与 (c) 的超序列演算。将 $\mathbf{H}^{\rightsquigarrow}$ 定义为形如 $(h_1,\ldots,h_n)/g$ 的规则 $\mathbf{r}^{\rightsquigarrow}$的集合，其中 $(h_1,\ldots,h_n)/h_0$ 是 $\mathbf{r} \in \mathbf{H}$的一个规则实例，且 $h_0 \rightsquigarrow_{\mathbf{acn}}^{\mathbf{fm}-1} g$。以 h_0 为结论的实例称为 $\mathbf{r}^{\rightsquigarrow}$的基础实例 。

显然，非基实例的结论 g 是由基础实例的结论 h_0 先经受限次数地应用 (c)（经由 $\rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^{\mathbf{fm}-1}$），再经受限次数地应用 (EC)（经由 $\rightsquigarrow^{\mathbf{acn}}$ (EC)）而得到的。

引理 3.4（[26]）。设 $\mathcal{R}$ 为解析结构规则的一个有限集合。

(1) 演算系统$\mathbf{HFL_{ec}}(\mathcal{R})$ 与$\mathbf{HFL_{ec}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}$ 证明相同的超序列。*(2)* (EW)、(EC) 与 (c) 在 $\mathbf{HFL_{ec}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}$中是超序列保持可容许的。

现在我们得到超序列的所谓柯里引理 。

定义 *3.5*。G　给定超序列 g和 h，定义 $g \Leftarrow_{\mathrm{str}} h$，当且仅当 g可通过应用 {(EW),(EC), (c)}由 h得到。 .

引理 3.6（超序列柯里引理）。设 h'和 h是超序列，且满足 $h' \Leftarrow_{\mathrm{str}} h$。若 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{HFLec(R)}_{\rightsquigarrow}} h$，则 $\vdash^{\leq\alpha}_{\mathbf{HFLec(R)}^{\rightsquigarrow}} h'$.

由 [3], 可知，将 $\Leftarrow_{\mathrm{str}}$ 限制在具有相同支撑的超序列上时，它是良拟序。因此，柯里引理的核心是证明 $\Leftarrow_{\mathrm{str}}$-极小证明 在 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$中的存在性，也就是说，每个可证超序列都有一个证明作为见证，其中每个分支相对于 $\Leftarrow_{\mathrm{str}}$都是一个坏序列。于是，$\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$ 的证明搜索过程会根据这个良拟序寻找极小证明。我们的新算法不会遵循这一路径，因为 $\Leftarrow_{\mathrm{str}}$ 过于复杂，会导致上界为 $\mathbf{F}_{\omega^{\omega}}$，而不是 $\mathbf{F}_{\omega_0}$。为了设计该算法，我们需要将上文描述的超序列演算系统上的两种变换，即 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}\mathbf{(R)}$ 和$\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$，结合为一种变换。

3.2 收缩的可逆精化演算系统

从现在起，我们将关注形如 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}\mathbf{(R)}^{\rightsquigarrow}$ 的演算系统，即对 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}\mathbf{(R)}$ 应用 $(\cdot)^{\rightsquigarrow}$ 变换所得的结果。下面的结果表明，相对于 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$，这种变换保持可证性的高度。

引理 3.7。设 h 是一个超序列，且 $\alpha \in \mathbb{N}$。如果 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{HFLec}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，那么 $\vdash^{\leq\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，反之亦然。

于是，由引理 3.6 和引理 3.7 可得:

引理 3.8。设 h' 和 h 是满足 $h' \Leftarrow_{\mathrm{str}} h$ 的超序列。如果 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，那么 $\vdash^{\leq\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h'$。

3.3 证明搜索过程

在本节中，我们用 **H** 表示形如 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}\mathbf{(R)}^{\rightsquigarrow}$ 的演算，其中 R 是某个由解析结构规则构成的有限集合。核心思想是只关注那些本身就是序列良拟序中坏序列的超序列。

超序列的线性化 是其分量的任意序列（保留重数）。例如，若 $h = s_1 \mid s_2 \mid s_3$ 是一个超序列，则 h的一个线性化是任意序列 $(s_i,\ s_j,\ s_k)$，其中 $\{i,\ j,\ k\} = \{1,\ 2,\ 3\}$。

接下来，我们在 S-序列上定义一个非良拟序，其中 S是公式的有限集合。固定一个枚举 $S = \{\varphi_1,\ \ldots\ldots,\ \varphi_d\}$。此类公式的多重集 Γ 可视为 $v(\Gamma) \in \mathbb{N}^d$中的一个向量，其中第 i^{th}分量是 φ_i在 Γ中出现的次数。我们称 $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$ 当且仅当$v(\Gamma_1) \leq_{\mathbb{N}^d} v(\Gamma_2)$按照 $\mathbb{N}^d$上的乘积良拟序成立。因此，在公式多重集上所定义的序也是一个良拟序。

现在，对于两个 S-序列 s_1， s_2，我们称 $s_1 \leq_S s_2$ 当且仅当 s_1： $= \Gamma_1 \Rightarrow \Pi_1$、 $s_2 = \Gamma_2 \Rightarrow \Pi_2$、 $\Pi_1 = \Pi_2$ 以及 $\Gamma_1 \leq \Gamma_2$。容易看出， S-序列上的这一序也是一个良拟序。因此，若我们现在考虑定义2.4中为序列定义的范数，便得到 S-序列上的一个非良拟序，记为 $\mathbf{W}(S)$。

最终，我们只想考虑证明搜索中那些超序列：它们的线性化会得到一个序列的受控坏序列（对于某个合适的控制函数）。为此，我们称函数 f 为**H**-控制函数，若对于**H** 中每个以 h 为结论、以 h' 为前提的规则实例，都有 $[\![h']\!] \leq f([\![h]\!])$。（这里使用的是定义 2.4 中超序列的范数。）容易看出，对于这里考虑的每个超序列演算**H** ，都存在一个原始递归的**H**-控制函数——事实上，甚至存在一个线性函数。

引理 3.9. 函数 $f(x) = (\mathsf{fm}^2\mathsf{acn}^2 \cdot x) + 1$ 是一个**H**-控制函数。

现在，设 π 是**H**中的某个超序列 h_0 的推导，并设 $h_0, \ldots, h_n$ 是 π 中任意分支 B 上的超序列序列。设 $r_k (0 < k \leq n)$ 是 π 中相应的规则实例，其结论为 h_{k-1}、前提为 h_k，并设 s_k 是该前提中的活动分量。对于 h_0 的任意线性化 $\bar{h}_0$，序列 $\bar{h}_0, s_1, \ldots, s_k$ 称为 B 的 $\bar{h}_0$-序列。

令 $\bar{h}$ 为超序列 h 的任意一种线性化，并令 S 为 h 的子公式集合；令 $\bar{h}(0)$ 表示该序列中的第一个元素。给定控制函数 f， f-极小证明 $\bar{h}$ 在 **H** 中是 h 的一个证明，且其每个分支的 $\bar{h}$-序列都是关于 $\mathbf{W}(S)$ 的 $(f, [\![\bar{h}(0)]\!])$-受控坏序列。这一定义是良定的，因为 **H** 中的证明都是无切割的，因此 $\bar{h}$- 序列的所有元素都是 S- 序列。

引理3.10（极小证明的存在性）。令 f 为任意一个 **H**-控制。令 $\bar{h}$ 为超序列 h 的一种线性化，且它是关于 $\mathbf{W}(S)$ 的 $(f, [\![\bar{h}(0)]\!])$-受控坏序列，其中 S 为 h 的子公式集合。那么， h 在 **H** 中可证，当且仅当 $\bar{h}$ 在 **H** 中有一个 f-极小证明。

证明。从右向左的方向显然成立，因为 f-极小证明 $\bar{h}$ 就是 h 的一个证明。从左向右的方向，假设 π 是 **H** 中 h 的一个证明。对 π 的高度 α 进行归纳。

（基例）若 π 的高度为 1，则 h 必定是一个初始超序列。后者是一个包含单元素分支的证明。因此，该分支的 $\bar{h}$-序列就是 $\bar{h}$。根据假设，后者是一个（f， $[\![\bar{h}(0)]\!]$）-坏序列，因此结论成立。

（归纳步骤）假设 π 的高度为 $\alpha > 1$。考察在 π 中应用的最后一条规则 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$。设 π_i 为 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$ 的第 i 个前提的子证明，其高度为 $\alpha_i < \alpha$。注意， π_i 的根具有 $g \mid C \mid s_i$ 的形式，其中 s_i 是该规则的活动分量， C 是 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$ 的基础实例的主分量多重集。这里 $g \mid C \rightsquigarrow_{\mathsf{acn}}^{\mathsf{fm}-1} h$。

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_n \\ g \mid C \mid s_1 & \ldots & g \mid C \mid s_n\end{array}}{g \mid C}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$$

于是，对于每个 $1 \leq i \leq n$，都有 $h \mid s_i \Leftarrow_{\mathrm{str}} g \mid C \mid s_i$；因此，根据引理 3.8，每个 $h \mid s_i$ 都有高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$ 的证明 π_i'。现在我们根据序列 $\bar{h}$， s_i 分情形讨论：

(1) 对每个 i， $\bar{h}$， s_i 都是一个 $(f$， $[\![\bar{h}(0)]\!])$-受控坏序列：对 π_i' 应用归纳假设，我们得到一个 f-极小证明 π_i''，证明 $\bar{h}$， s_i，对每个 i 均成立。根据定义，每个分支的 $(\bar{h}$， $s_i)$-序列都是一个 $(f$， $[\![\bar{h}(0)]\!])$-受控坏序列。现在我们断言，以下是 **H** 中的一个证明，其中 $h \mid C \rightsquigarrow_{\mathsf{acn}}^{\mathsf{fm}-1} h$。

$$\dfrac{\begin{array}{ccc}\pi_1'' & & \pi_n'' \\ h \mid C \mid s_1 & \ldots & h \mid C \mid s_n\end{array}}{h \mid C}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$$

为此，只需证明 $h \mid C \rightsquigarrow_{\mathsf{acn}}^{\mathsf{fm}-1} h$。我们知道 $g \mid C \rightsquigarrow_{\mathsf{acn}}^{\mathsf{fm}-1} h$。因此，根据命题 3.1，对于每个 $s' \in C$，都存在 $s'' \in h$ 使得 $s' \rightsquigarrow_{\mathsf{c}}^{\mathsf{fm}-1} s''$。于是， $h \mid C \rightsquigarrow_{\mathsf{c}}^{\mathsf{fm}-1} h \mid C'$，其中 C' 中的每个分量都出现在 h 中。但 $|C| \leq \mathsf{acn}$，因为 C 是该基础实例的主分量多重集，所以 $h \mid C' \rightsquigarrow^{\mathsf{acn}} (\mathrm{EC})\, h$。因此， $h \mid C \rightsquigarrow_{\mathsf{acn}}^{\mathsf{fm}-1} h$，如所求。

只需说明上述证明（记作 π_0）是 $\bar{h}$ 的 f-极小证明。 π_0 中任意分支的 $\bar{h}$-序列都具有 $\bar{h}$， s_i，.....的形式，其中 i。显然，它是 π_i'' 中某个分支的（$\bar{h}$， s_i）-序列。我们已经注意到，后者是一个（f， $[\![\bar{h}(0)]\!]$）-受控坏序列。因此， π_0 是 $\bar{h}$ 的 f-极小证明。

（2）对于某个 i， $\bar{h}, s_i$ 不是（$f, [\![\bar{h}(0)]\!]$）-受控坏序列：注意，根据假设， $\bar{h}$ 是一个（$f, [\![\bar{h}(0)]\!]$）-受控坏序列。现在我们说明该序列必定是（$f, [\![\bar{h}(0)]\!]$）-受控的（因此它必定不是坏序列）。根据引理 3.9， $[\![g \mid C \mid s_i]\!] \leq f([\![h]\!])$，并且根据 $[\![\cdot]\!]$ 的定义，我们有 $[\![s_i]\!] \leq [\![g \mid C \mid s_i]\!]$，从而得到 $[\![s_i]\!] \leq f([\![h]\!])$。根据超序列范数的定义可得，对于某个 $0 \leq j < |h|$， $[\![h]\!] = [\![\bar{h}(j)]\!]$。由控制性质可知， $[\![\bar{h}(j)]\!] \leq f^j([\![\bar{h}(0)]\!]) \leq f^{|h|-1}([\![\bar{h}(0)]\!])$。因此，$[\![s_i]\!] \leq f(f^{|h|-1}([\![\bar{h}(0)]\!])) = f^{|h|}([\![\bar{h}(0)]\!])$，且 $\bar{h}, s_i$ 是受控的。所以该序列必定不是坏序列，因此存在 $t \in \bar{h}$，使得 t 可由 s_i 经过（零次或多次）收缩得到。无论哪种情形，都可推出 $h \Leftarrow_{\mathrm{str}} h|s_i$。由引理 3.8，我们得到一个高度为 $< \alpha$、证明 h 的证明 π_0。将归纳假设用于 π_0，可得到 $\bar{h}$ 的一个 f-极小证明。□

定义 *3.11*（证明搜索树）。序列 s 在**H** 中的极小证明搜索树定义为如下构造的极限树。

$T_0(s)$ 单个节点，标记为 s。$T_{n+1}(s)$ 对于 $T_n(s)$中的每个叶节点 ℓ（不妨设其标记为超序列 h），以及每个以 h为结论的规则实例，将诸前提添加为 ℓ的子节点，前提是如此得到的树是 f-极小的。

引理 3.12。给定序列 s，存在最小的 $N \in \mathbb{N}$，使得 $T_N(s) = T_{N+1}(s)$。此外，存在 $U \in \mathbf{F}^{\star}_{\omega}$，使得对任意序列 s， N以$U([\![s]\!])$ 为上界。

证明。设 S为 s的子公式集合。由构造， $T_n(s)$中的每个分支对应于$\mathbf{W}(S)$上的一个$(f, [\![s]\!])$-受控坏序列。假设不存在 $N \in \mathbb{N}$ 使得 $T_N(s) = T_{N+1}(s)$。于是考虑无穷极限树$\bigcup_{n\geq 0} T_n(s)$。该树必定是有限分支的，因为**H**的每个规则模式对每个超序列只能以有限多种方式实例化。由König 引理，将存在一条无穷分支，它诱导出$\mathbf{W}(S)$上的一条无穷坏序列，这是荒谬的。此外，该 N 被$\mathbf{F}^{\star}_{\omega}$ 中的某个函数一致地给出上界，因为构造中的每一步都向一个$(f, [\![s]\!])$-受控坏序列添加一个新元素，从而产生一个更长的$(f, [\![s]\!])$-受控坏序列，而由定理 2.9 可知，此类序列的长度以$\mathbf{F}^{\star}_{\omega}$中关于 $[\![s]\!]$的某个函数为上界。□

由上述内容可立即得出以下结论。

定理 3.13。 **H** 中的可证性属于$\mathbf{F}_{\omega}$。

证明。给定一个输入序列 s，由引理 3.12 可知， $T_N(s)$ 可以在关于 $U \in \mathbf{F}^{\star}_{\omega}$ 的原始递归空间内构造，因此根据定理 2.8，它也是一个$\mathbf{F}^{\star}_{\omega}$ 中的函数。此外，我们可以在其子树中搜索 s的一个极小证明；根据定理 2.8，这同样是一个原始递归过程。根据构造，任何 f-极小证明 s 都将是 $T_N(s)$的一棵子树。因此，由引理 3.10，存在这样一棵子树等价于 s可证。□

最后，由引理 2.7、引理 3.7 和定理 3.13，我们得到：

定理 3.14（主定理 I）。通过有限多个无环$\mathcal{P}'_3$-公理对$\mathbf{FL}_{\mathrm{ec}}$ 作出的任意扩展中的可证性（即$\mathbf{HFL}_{\mathrm{ec}}$的任意解析结构扩展中的可证性）具有阿克曼复杂度。

4 $\mathbf{FL}_{\mathrm{ew}}$: ω-演算系统的超序列扩展的阿克曼上界

受向量加法系统中计算可覆盖集的 Karp-Miller 算法启发，在 [17], 反向证明搜索中，如果某个前提的活动分量严格大于较早出现的分量，我们就通过将每个重数严格更大的公式 φ 替换为 φ^{ω}来记录这一增量。我们将其称为 ω-公式，它属于扩展语言 L_{ω}: $= L \cup \{\varphi^{\omega} \mid \varphi \in L\}$。注意，在这种语言中，我们允许例如 $(\varphi \wedge \psi)^{\omega}$，但不允许 $\varphi^{\omega} \wedge \psi^{\omega}$。一旦某个公式成为 ω-公式，证明规则就会确保它从此一直保持这种形式。

附录中的注释 B.1 给出了一个高层次的描述。

在本节及后续各节中，我们按照惯例用 R 表示任意的解析型超序列结构规则模式的有限集合。由于 $\mathbf{HFL}^{\rightleftharpoons}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})$ 满足子公式性质，因此输入超矢列的证明可以限制在其子公式的有限集合上，记作 $S := \{\varphi_1, \ldots, \varphi_d\}$。对于后者，我们使用 $\mathbb{N}_{\leq d} := \{0, 1, \ldots, d\}$，其中 0 表示空主位。也就是说，公式用其在 S 的固定枚举中的索引表示。我们还令 $\mathbb{N}^+_{\leq d} := \{1, \ldots, d\}$。此外，与上一节一样，我们将 S 上的多重集视为向量 $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$，使得 $\mathbf{x}(a)$ 是该多重集中公式（带索引） a 的重数。这引出了以下形式化定义。

定义 4.1（ω-(超)序列）。令 $d \geq 1$。元素 $(\Omega; \mathbf{x}) \in \mathrm{P}(\mathbb{N}^+_{\leq d}) \times \mathbb{N}^d$ 使得 $\Omega \cap \{i \in \mathbb{N}^+_{\leq d} \mid \mathbf{x}(i) > 0\} = \varnothing$ 称为一个 (ω, d)-前件。 Ω（分别为 $\mathbf{x}$）中的元素称为 ω-坐标。(ω, d)-序列是形如 $(\Omega; \mathbf{x}) \Rightarrow b$ 的表达式，其中 $(\Omega; \mathbf{x})$ 是一个 (ω, d)-前件，且 $b \in \mathbb{N}_{\leq d}$。我们称 Ω 为该 ω-序列的 ω-集。(ω, d)-超序列是由 (ω, d)-序列组成的多重集。当上下文可以推知时，记号中可以省略 d。若 ω-集为空，则称一个 ω-序列为 ω-自由的；若其所有分量均为 ω-自由的，则称一个 ω-超序列为 ω-自由的。

注意，一个 (ω, d)-前件 $(\Omega; \mathbf{x})$ 具有如下性质：每个公式 $a \in \mathbb{N}^+_{\leq d}$ 要么是一个 ω-公式（即 $a \in \Omega$ 且 $\mathbf{x}(i) = 0$），要么不是一个 ω-公式（$a \notin \Omega$）。

记号 4.2. 给定 $\kappa \subseteq \mathbb{N}^+_{\leq d}$、 $k \in \mathbb{N}$ 以及 $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$，令 $\mathbf{x}[\kappa \mapsto k]$ 表示将 $\mathbf{x}$ 在 κ 中的坐标设为 k、其余坐标保持不变而得到的向量。对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{N}^d$ 和 $1 \leq a \leq d$，我们用 $\mathbf{x}\ a$ 表示 $\mathbf{x} + \mathbf{e}a$，其中 $\mathbf{e}a$ 是第 a 个单位向量。

定义 *4.3*（向 $(\Omega; \mathbf{x})$添加公式）。 将通过把公式 a 添加到 $(\Omega; \mathbf{x})$ 而得到的 ω-前件 $((\Omega; \mathbf{x})\ a)$ 定义为：若 $a \in \Omega$，则为 $(\Omega; \mathbf{x})$，否则为 $(\Omega; \mathbf{x}\ a)$。对于公式的多重集 $I = [a_1, \ldots, a_k]$，将 $(\Omega; \mathbf{x})\ I$ 定义为 $(\ldots((\Omega; \mathbf{x})\ a_1)\ldots)\ a_k$。这不依赖于 I 的枚举次序，因此它是良定义的。

换言之，将公式 a 添加到 $(\Omega;\mathbf{x})$ 中，如果 a 已经是一个 ω-公式（即 $a \in \Omega$），则后者保持不变；否则，其有限重数增加 1（即 $\mathbf{x}$ 变为 $\mathbf{x}\ a$）。

4.1 演算 $\mathbf{HFL}^{\rightleftharpoons}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})\omega$

我们第一个处理 ω-公式的演算记作 $\mathbf{HFL}^{\rightleftharpoons}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})\omega$，其规则实例见图2。为了充分理解它，我们需要介绍 ω-结构规则的概念。

每个 $\mathrm{r} \in \mathrm{R}$ 都具有定义 2.2 中的形式，因此每个主分量都对应于 $I \cup J$ 中的一个指标，而每个活动分量则对应于满足 $i \in I$ 和 $k \in K_i$ 的指标 (i, k)，或对应于指标 $l \in L$。对于 $i \in I$ 和 $k \in K_i$，令 $C_{i,k}$ 为那些与活动分量 (i, k) 共有多重集元变量的主分量指标 $v \in I \cup J$ 的集合。对每个活动分量 $l \in L$，类似地定义 C_l。最后，对每个 (i, k)，定义 $\Omega[i, k]$ 为 $\bigcup_{v \in C_{i,k}} \Omega_v$；并对每个 $l \in L$，定义 $\Omega[l]$ 为 $\bigcup_{v \in C_l} \Omega_v$。

定义 *4.4*（ω-结构规则，$\mathrm{R}\omega$）。若 r 是一个解析结构超序列规则模式，则 $\mathrm{r}\omega$ 是下面的 ω 版本，其中 h_c 是结论元超序列。

$$\frac{\{h_c \mid (\Omega[i,k]; \varnothing), Y_i, \vec{\Gamma}_{ik} \Rightarrow \Pi_i\}_{i \in I, k \in K_i} \qquad \{h_c \mid (\Omega[l]; \varnothing), \vec{\Delta}_l \Rightarrow\}_{l \in L}}{H \mid (\Omega_i; Y_i, X_{i1}, \ldots, X_{i\alpha_i}) \Rightarrow \Pi_i\ (i \in I) \mid (\Omega_j; Z_{j1}, \ldots, Z_{j\beta_j}) \Rightarrow (j \in J)}\ \mathrm{r}_\omega$$

提醒读者， ω-超序列是由形如 $(\Omega;\mathbf{x}) \Rightarrow b$ 的 ω-序列组成的多重集。图2中的证明演算 $\mathbf{HFL}^{\rightleftharpoons}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})\omega$ 作用于 (ω, d)-超序列。例如，除了通常的逻辑规则——在当前设定下，这些规则作用于具有有限重数的公式（由向量 $\mathbf{x}$ 描述）——还有一些逻辑规则作用于 ω-坐标 Ω。具体来说，考虑以下规则模式

$$\frac{h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \to \psi\}; \Gamma) \Rightarrow \varphi \qquad h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \to \psi\}; \Delta), \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega \cup \{\varphi \to \psi\}; \Delta, \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\to\mathrm{L})$$

初始超序列

$$\frac{}{H \mid (\Omega; p) \Rightarrow p} \qquad \frac{}{H \mid (\Omega \cup \{p\}; \varnothing) \Rightarrow p} \qquad \frac{}{H \mid (\Omega; 0) \Rightarrow} \qquad \frac{}{H \mid (\Omega \cup \{0\}; \varnothing) \Rightarrow} \qquad \frac{}{H \mid (\Omega; \varnothing) \Rightarrow 1}$$

结构规则

$$\frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega;\ \Gamma,\ \varphi) \Rightarrow \Pi}\ \mathrm{w} \qquad \frac{H \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\mathrm{EC}) \qquad \frac{H}{H \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\mathrm{EW})$$

所有规则模式都在 $\mathcal{R}_\omega$ 中（见定义 4.4）。

作用于 ω-坐标的逻辑规则

$$\frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega \cup \{1\}; \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (1\mathrm{L}) \qquad \frac{h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \cdot \psi\};\ \Gamma)\ \varphi, \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega \cup \{\varphi \cdot \psi\};\ \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\cdot\mathrm{L}) \qquad \frac{h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi_1 \wedge \varphi_2\};\ \Gamma)\ \varphi_i \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega \cup \{\varphi_1 \wedge \varphi_2\}; \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\wedge\mathrm{L})$$

$$\frac{h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \vee \psi\};\ \Gamma)\ \varphi \Rightarrow \Pi \qquad h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \vee \psi\};\ \Gamma)\ \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega \cup \{\varphi \vee \psi\};\ \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\vee\mathrm{L}) \qquad \frac{h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \to \psi\};\ \Gamma) \Rightarrow \varphi \qquad h_c \mid (\Omega \cup \{\varphi \to \psi\}; \Delta)\ \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega \cup \{\varphi \to \psi\}; \Delta, \Gamma) \Rightarrow \Pi}\ (\to\mathrm{L})$$

作用于有限重数的逻辑规则

$$\frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega;\ \Gamma, 1) \Rightarrow \Pi}\ (1\mathrm{L})_2 \qquad \frac{h_c \mid (\Omega;\ \Gamma)\ \varphi,\ \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega;\ \Gamma, \varphi \cdot \psi) \Rightarrow \Pi}\ (\cdot\mathrm{L})_2 \qquad \frac{h_c \mid (\Omega;\ \Gamma)\ \varphi_i \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega;\ \Gamma,\ \varphi_1 \wedge \varphi_2) \Rightarrow \Pi}\ (\wedge\mathrm{L})_2$$

$$\frac{h_c \mid (\Omega;\ \Gamma)\ \varphi \Rightarrow \Pi \qquad h_c \mid (\Omega;\ \Gamma)\ \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega;\ \Gamma,\ \varphi \vee \psi) \Rightarrow \Pi}\ (\vee\mathrm{L})_2 \qquad \frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi \qquad h_c \mid (\Omega; \Delta)\ \psi \Rightarrow \Pi}{H \mid (\Omega;\ \Gamma,\ \Delta,\ \varphi \to \psi) \Rightarrow \Pi}\ (\to\mathrm{L})_2$$

逻辑规则（后件）

$$\frac{h_c \mid (\Omega, \Gamma) \Rightarrow}{H \mid (\Omega, \Gamma) \Rightarrow 0}\ (0\mathrm{R}) \qquad \frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi \qquad h_c \mid (\Omega; \Delta) \Rightarrow \psi}{H \mid (\Omega; \Gamma,\ \Delta) \Rightarrow \varphi \cdot \psi}\ (\cdot\mathrm{R}) \qquad \frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi_i}{H \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi_1 \vee \varphi_2}\ (\vee\mathrm{R})$$

$$\frac{h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi \qquad h_c \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \psi}{H \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi \wedge \psi}\ (\wedge\mathrm{R}) \qquad \frac{h_c \mid (\Omega;\ \Gamma)\ \varphi \Rightarrow \psi}{H \mid (\Omega; \Gamma) \Rightarrow \varphi \to \psi}\ (\to\mathrm{R})$$

图2。演算 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$。这里， h_c表示结论中的元超序列。

注意，这个规则模式作用于一个在其 ω-坐标中含有 $\varphi \to \psi$的分量；我们也称 $\varphi \to \psi$是该分量中的一个 ω-公式。在这个规则模式中，活动分量（前提中）的 ω-坐标与主分量（结论中）的ω-坐标相同。考虑上文的右前提。由于我们不知道 $\psi \in \Omega$是否成立，因此使用定义4.3确保公式被正确分类；这也确保我们保持如下性质：在任一分量中，ω-坐标都与具有正有限重数的公式不相交。一般而言， ω-坐标从主分量到活动分量逐渐增加，例如定义4.4中的$(\Omega[i,k];\ \varnothing)\ Y_i, \vec{\Gamma}_{ik}$项所示。

序列 $\mathbf{x} \Rightarrow b$ 与 ω-序列 $(\varnothing;\mathbf{x}) \Rightarrow b$之间显然存在双射对应。此双射可从 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})$ 中的规则实例扩展到 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 中仅作用于该 ω-超序列有限坐标的规则实例。由于后一演算不包含任何能将 ω-坐标从空集严格增大的规则（我们将在后文引入这种机制），以下结论显然成立。

Lemma 4.5. 设 h 是一个不含 ω 的 ω-超序列。那么， h 在 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})$ 中可证，当且仅当它在 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})$ 中可证。 ω.

4.2 精化的 ω-演算

接下来，我们修改 H $\mathbf{FL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$，使其像第3.1节那样具有 (EC) 和 (EW) 的保高度可容许性，并以 [26 为基础。].

定义*4.6*（精化 ω-演算）。$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$由以下每条规则 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$（下方左侧）组成：r（下方右侧）是$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$中的一条规则，且$g \overset{\mathrm{acn}}{\rightsquigarrow}$ (EC) h。称 r 为 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$的基础实例。

$$\frac{h \mid s_1 \qquad \cdots \qquad h \mid s_n}{h}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow} \qquad \frac{g \mid s_1 \qquad \cdots \qquad g \mid s_n}{g}\ \mathrm{r}$$

h中所有通过应用 (EC) 与 g 中的主分量相关联的分量，都称为 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$的主分量。$\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$ 中活动/主分量的模式 是 r 中对应的模式分量。

非正式地说，$\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$中的一个规则实例（从结论到前提来看），是先反向应用有限次（最多 acn 次，acn 的值仅取决于证明规则）(EC)，然后反向应用$\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_{\omega}$中的一个规则实例得到的；在基础实例的前提中用 h 替换 g。

引理 4.7。 演算系统 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})_{\omega}$ 和 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$证明了相同的超序列。

与 [26], 类似，我们有：外部结构规则在 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中超序列保持可容许。

引理 4.8。 外弱化 (EW) 和 外收缩 (EC) 在 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中超序列保持可容许。

引理 4.9。 如果 h 在 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中可证，那么无需使用 外弱化 (EW) 和 外收缩 (EC) 也可证。

因此，以下我们可以假设证明不使用这些规则。

作用于 ω坐标上的规则与作用于有限重数上的常见对应规则完全相同（但 ω坐标不会因使用而减少）。因此，将有限重数公式视为属于 ω-集是保全证明性的：

定义 *4.10*（ω-扩张）。给定一个（ω， d）-序列 $s = (\Omega,\ \mathbf{x}) \Rightarrow b$，若（$\omega$， d）-序列 $s' = (\Omega',\ \mathbf{x}') \Rightarrow b$满足 $\Omega \subseteq \Omega'$ 且 $\mathbf{x}' = \mathbf{x}[\Omega' \backslash \Omega \mapsto 0]$，则称其为 ω-扩张。通过将（ω， d）-超序列 h中的若干分量替换为其ω-扩张，可得到 h 的一个 ω-扩张。

引理 4.11。设 h 是一个在 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中可证的 ω-超序列，其高度为 α。那么，它的任意 ω-扩张都可在 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中以高度 $\leq \alpha$证明。

证明。设 h 是一个 ω-超序列，其在 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中有一个高度为 α 的证明 π。只需证明当 h' 是 h的一个 ω-扩展，且仅在一个分量（Ω'，$\mathbf{x}'$）上与 h不同，并且在该分量内仅在一个公式 a上不同时的情形即可。也就是说， $h = g\,|\,(\Omega,\ \mathbf{x}) \Rightarrow b$，其中 $a \notin \Omega$，且 $h' = g\,|\,(\Omega \cup \{a\},\ \mathbf{x}[a \mapsto 0]) \Rightarrow b$。一般结果可通过反复应用这一情形得到。现在，我们将对π 作结构归纳，证明 h' 有一个高度为 $\leq \alpha$ 的证明 π'。

（基例）这里， h是一个初始 ω-超序列。如果 h' 中发生变化的分量属于超序列变量 H 的实例化，只需相应地改变 H的实例化。否则，它必定是以下形式之一：$(\Omega; p) \Rightarrow p$ 或 $(\Omega; 0) \Rightarrow$。在这种情况下，分别改用主分量为 $(\Omega \cup \{p\}; 0) \Rightarrow p$ 或 $(\Omega \cup \{0\}; 0) \Rightarrow$ 的初始超序列。

(归纳步骤) 假设在 π 中应用的最后一条规则实例具有 $(h\,|\,t_i)_i/h$ 的形式，其中

$$(g|s_1|\cdots|s_m|t_1), \ldots, (g|s_1|\cdots|s_m|t_k)/(g|s_1|\cdots|s_m)$$

是其基础规则实 例，属于 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_{\omega}$，且 $(g|s_1|\cdots|s_m) \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}} (\mathrm{EC})\ h$。这里， g是超序列变量 H的实例化 .

根据归纳假设，对每个 i，我们都有 $h'|t_i$可证，且高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$。我们证明实例 $(h'|t_i)_i/h'$ 属于该演算。按情形 s:

(1) 从 h变为 h' 的分量属于 g：使用归纳假设，并实例化 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_{\omega}$ 的同一规则模式，但在超序列变量 H 的实例化中将 g 改为g'，从而得到 h'。也就是说，

$$(g'|s_1|\cdots|s_m|t_1), \ldots, (g'|s_1|\cdots|s_m|t_k)/(g'|s_1|\cdots|s_m)$$

是 $\mathbf{HFL}^{\rightleftarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_{\omega}$的一个规则实例。因此， $g'|s_1|\cdots|s_m \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}} (\mathrm{EC})\ h'$。

(2) 假设发生变化的分量是 s_i，对应某个 $1 \leq i \leq m$，且 s_i 不存在于 g 中（否则上一种情形就适用了）。如果应用的最后一条规则作用于第一分量或后件，注意到 $i = 1$ 必然成立（因为只有一个主分量），因此只需考虑现在在第一分量中含有公式 a 的分量 s'_1，并相应调整规则实例。对于作用于第一分量的规则，在新的实例化中，我们可能会得到一些前提，它们是先前前提的 ω-扩展，因此只需应用归纳假设，得到高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$ 的这些前提的证明。

如果这是作用于第二分量或 (w) 的逻辑规则，同样有 $i = 1$，现在我们需要考虑两种情形。首先，分量中发生变化的公式不是主公式。在这种情形下，只需使用归纳假设并调整实例化。如果它是该规则的主公式，则使用归纳假设，然后适当地实例化相应的、作用于第一分量的逻辑规则。

若它是来自 R_ω 的结构规则，则公式 a 必须属于某个多重集元变量的一个实例化。根据这些规则的线性结论性质，该变量只出现在 s_i 的模式中。根据 r_ω 的定义，所有共享同一变量的前提都会受到影响，其对应的 ω-集合也会相应改变。因此，只需改变该变量的实例化，使其不包含 a，并将 a 放入 Ω_i。然后使用归纳假设和这个新的实例化即可。

对上述论证反复应用，即可得到该引理。 □

5 $\mathrm{FL}_{\mathrm{ew}}$ 的扩展的证明搜索算法

现在，我们将基于上一节建立的精化 ω-演算，来描述一个证明搜索过程。

定义 *5.1.* 定义 $\prec$ 关于（ω，d）-序列，$s \prec t$ 当且仅当 $\Omega \subseteq \Omega'$、$\mathbf{x} < \mathbf{y}$ 且 $b_1 = b_2$ 时，对任意 $s = (\Omega, \mathbf{x}) \Rightarrow b_1$ 和 $t = (\Omega', \mathbf{y}) \Rightarrow b$ 2.

下面的函 数可识别有限重数中的严格增量，并将这些公式纳入其 ω-坐标 s.

定义 *5.2*（ω-函数）。设 $s = (\Omega, \mathbf{x}) \Rightarrow b$ 和 $t = (\Omega', \mathbf{y}) \Rightarrow b$ 是满足 $s \prec t$ 的 ω-序列。我们用 $\omega(s, t)$ 表示 ω-序列 $(\Omega'', \mathbf{y}') \Rightarrow b$，其中 $\Omega'' = \Omega' \cup \kappa$ 且 $\mathbf{y}' = \mathbf{y}[\kappa \mapsto 0]$，并且 $\kappa = \{l \in \mathbb{N}^+_{\leq d} \backslash \Omega' \mid \mathbf{x}[l] < \mathbf{y}[l]\}$。

例 *5.3.* 设 $s_1 = (1, 3; (0, 2, 0, 4)) \Rightarrow b$，$s_2 = (1, 3, 4; (0, 3, 0, 0)) \Rightarrow b$。则 $\omega(s_1, s_2) = (1, 2, 3, 4; (0, 0, 0, 0)) \Rightarrow b$.

证明搜索需要追踪的不仅仅是出现的超序列。因此，我们首先将超序列的每个分量 s 扩充为（i，s），其中 $i \in \mathbb{N}$ 作为唯一索引，用于记录各分量的创建顺序。

设 $d \geq 1$。一个带索引的 d-分量是一个有序对 $s = (i, s)$，其中 $i \in \mathbb{N}$，且 s 是一个（ω，d）-序列。我们用 $\mathrm{c}(s)$ 表示 s 的（ω，d）-序列。一个带索引的 d-超序列是带索引 d-分量构成的多重集，其中任意两个不同的带索引分量都具有不同的索引（此处也可以使用集合，但超序列通常用多重集表示）。在上下文清楚时，我们在记号中省略 d。带索引超序列的支撑是将每个分量的索引删除后得到的超序列。如果支撑中没有重复分量，则称 h 为无冗余的。

定义 *5.4*（关系型带索引超序列）。对于 $d \geq 1$，一个 *d-rin-超序列*是一个元组 $\mathbf{h} = h, R_{\mathrm{h}}$，其中 h 是一个带索引的 d-超序列，而 R_{h} 是 h 中带索引分量上的二元关系，并且 $R^*{}_{\mathrm{h}}$ 是一棵有根树。令 $\max h$ 表示 h 中的最大索引。当 h 无冗余时，我们称 $\mathbf{h}$ 是无冗余的。

设 $\mathrm{r} = (h \mid s_i)_i / h$ 是 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\sim^*}_{\omega}$ 的一条规则，且 $\mathbf{h} = h, R_{\mathrm{h}}$ 是一个支撑为 h 的无冗余 rin-超序列。我们将结构 $\mathrm{I} = \mathrm{r}, \mathbf{h}$ 称为一个实例化上下文。令 C 为 r 中 h 的主分量多重集。若 h 中的一个带索引分量，其 ω-序列属于 C，则称该分量在 r 中是主分量。该分量在 r 中的模式定义为 C 中对应主分量的模式。将 I 中 s_i 的关键祖先定义为 r 中 h 的主分量中索引最大的一个，且其模式与 s_i 的模式共享一个变量。

如果 t 是 I 中 s_i 的关键祖先，则定义 $s_i = (\max h + 1, s_i)$ 和 $R_i = R_{\mathrm{h}} \cup \{(t, s_i)\}$。I 中 s_i 的 ω-伙伴（若存在）是 h 中索引最大的索引分量 t'，满足 $(t', s_i) \in R_i^*$ 且 $\mathrm{c}(t') \preceq s_i$。于是，对于 $s'_i = \omega(t', s_i)$，索引 ω-序列 $s'_i = (\max h + 1, s'_i)$ 称为 I 中 s_i 的 ω-细化，而 s_i 称为 I 中 s'_i 的前分量。

定义 *5.5.* 一个合法 *rin-超序列* （简称 lrin-超序列）是一个不可约冗余 rin-超序列 $\mathbf{h} = h, R_{\mathrm{h}}$，使得若 $sR_{\mathrm{h}}t$，则存在一条规则 r，使得对于 $\mathrm{I} = \mathrm{r}, \mathbf{h}$，(a)：$\mathrm{c}(t)$ 是 r 的活动分量之一，且 s 是 I 中 $\mathrm{c}(t)$ 的关键祖先，并且 (b)：t 在 I 中要么没有 ω-伙伴，要么是 I 中的一个 ω-细化。

定义 *5.6*（ω-证明搜索树）。 对于一个 lrin-超序列 $\mathbf{h}_0$, , ω-证明搜索树 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 被定义为按如下方式递归构造的诸树的极限。

$T_0(\mathbf{h}_0)$：一个标记为 $\mathbf{h}_0$ 的单一节点。
$T_{n+1}(\mathbf{h}_0)$：选取 $T_n(\mathbf{h}_0)$ 的一个叶节点 ℓ，并假设其标记为 $\mathbf{h} = h, R_\mathbf{h}$。对于由以 $\mathbf{h}_0$, 的支撑的子公式进行实例化而得到的 $\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{=}$ $(\mathrm{R})_\omega^{\rightsquigarrow}$ 中的任意规则 $\mathrm{r} = (h|s_i)_{i\in I}/h$，其中 h 是 h 的支撑，我们执行以下操作。
(a)（细化前冗余）如果存在 $i \in I$ 且 t 属于 $h\mathrm{s}$ .t. $s_i = \mathrm{c}(t)$，则进入下一轮迭代；否则继续：
令 $\mathrm{I} := \mathrm{r}, \mathbf{h}$，并对每个 $i \in I$，设 $m := \max h + 1$, $s_i := (m, s_i)$ 以及 $R_i := R_\mathbf{h} \cup \{(t_i, s_i)\}$, 其中 t_i 是 I 中 s_i 的关键祖先。然后执行以下操作。
(b)（叶扩展）对于每个 $i \in I$，添加 $h|s_i, R_i$，作为 ℓ 的子节点。(c)（ω-细化）对于每个新叶 $h|(m, s_i)\ R_i$，令 s_i' 为 ω 的细化，s_i 属于 I（若存在），并将该叶的标签替换为 $h|s_i', R_\mathbf{h} \cup \{(t_i, s_i')\}$。如果至少一个前提进行了这种细化，我们就称所得结果为一条 ω-引入规则，其中 s_i' 称为 产出前提，而 r 称为 前规则。(d)（细化后冗余）如果任一新叶的 rin-超序列是冗余的，则删除本轮引入的所有新叶。

注意，由上述构造得到的树保证以合法 rin-超序列作为标签。考虑 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 中的一个 lrin-超序列 h, R。将带索引的超序列 h 视为按索引递增排列的带索引分量序列，我们便可以获知各分量的生成顺序。此外，$((i, t), (j, s)) \in R$ 告诉我们，t 是具有活动分量 s 的规则实例的主分量；根据关键祖先条件，导出 s 的实例化独立于索引为 $> i$ 的分量。

定义 *5.7*。 设 $\mathbf{h} := h, R_\mathbf{h}$ 是一个 lrin-超序列。我们定义 h 的树 $\mathbf{h}$，记为 $T_R(\mathbf{h})$：首先，将 $R_\mathbf{h}$ 的极小元素作为一个标记为 $\bullet$ 的特殊节点的子节点，然后扩展这棵树，使得当且仅当 $(s, s') \in R_\mathbf{h}$ 时，s' 是 s 的子节点。

注记 5.8。 设 $\mathbf{h} := \langle h, R_\mathbf{h}\rangle$ 是出现在 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 中的一个 *lrin*-超序列。首先请注意，$T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 是一棵以 *lrin*-超序列为标记的树，而 $T_R(\mathbf{h})$ 是一棵以分量为标记的树，另有一个标记根节点的特殊符号 $\bullet$。此外，$\bullet$ 的子节点是 h_0 的元素，因此这棵树在根节点处是有限分支的（因为 h_0 是有限的）。

现在我们定义一个更 比 $\prec$ (定义 5.1) 更具限制性的良拟序，其中带索引的 (ω, d)-序列若具有不同的 ω-集，则不可比 le.

定义 5.9. 给定 $s = (i, (\Omega; \mathrm{x}) \Rightarrow b_1)$ 和 $s' = (j, (\Omega'; \mathrm{y}) \Rightarrow b_2)$，令 $s \preceq_{\mathbf{W}(\omega,d)} s'$ 当且仅当 $\Omega = \Omega'$、$b_1 = b_2$ 且 $\mathrm{x} \leq_{\mathbb{N}^d} \mathrm{y}$。定义带有 $\preceq_{\mathbf{W}(\omega,d)}$ 作为关系、以 $[\![(l, s)]\!] := [\![\mathrm{c}(s)]\!]$ 作为范数的、定义在带索引的 (ω, d)-序列上的结构 $\mathbf{W}(\omega, d)$，其中一个 ω-序列 $(\Omega; \mathrm{x}) \Rightarrow b$ 的范数定义为 $[\![\mathrm{x}]\!]_{\mathbb{N}^d}$。

引理 5.10。 $\mathbf{W}(\omega, d)$ 是一个非良拟序，并且对于任意原始递归控制函数 f，其长度函数 $L_{\mathbf{W}(\omega,d),\ f}$ 在 $\mathbf{F}_\omega^\star$ 中有上界，且关于 d 一致。

证明。为了说明 $\mathbf{W}(\omega, d)$ 是良拟序，令 $\mathrm{Q} = (2^d \cdot (d+1)) \cdot \mathrm{N}^d$。现在，将数 $I(\Omega, b)$ 唯一地赋给 $\mathbb{N}_{\leq 2^d \cdot (d+1)}$ 中的各对 (Ω, b)，其中 Ω 是 $\mathbb{N}^+_{\leq d}$ 和 $b \in \mathbb{N}_{\leq d}$ 的子集。然后，我们将带索引的 (ω, d)-序列 $s = (i, (\Omega, \mathrm{x}) \Rightarrow b)$ 编码为 Q 中的元素 $s^\# := (I(\Omega, b), \mathrm{x})$（注意，索引被忽略）。显然，$t \preceq_{\mathbf{W}(\omega,d)} s$ 当且仅当 $t^\# \leq_\mathrm{Q} s^\#$。此外，$[\![t^\#]\!] = [\![t]\!]$。由此可知，任意一个以序列为对象的 (f, n)-受控坏序列 $t_0, t_1, \ldots$ 都可以转换为一个 (f, n)-受控坏序列 $t_0^\#, t_1^\#, \ldots$ 因此，$\mathbf{W}(\omega, d)$ 的长度函数以上界受 Q 的长度函数约束。应用定理 2.9 即得结论。□

引理 5.11。 设 $\mathbf{h}_0 := \langle h_0, R_{\mathbf{h}_0}\rangle$ 和 $\mathbf{h} := \langle h, R_\mathbf{h}\rangle$ 是 *lrin*-超序列，且 $\mathbf{h}_0$ 是有限的，并且 $\mathbf{h}$ 出现在 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 中。则：

(1) 沿着 $T_R(\mathbf{h})$的一条分支，分量的指标严格递增，且 ω-集递增。*(2)* $T_R(\mathbf{h})$ 的每条分支都是 f控制的、基于$\mathbf{W}(\omega, d)$的$(f, [\![h_0]\!])$-受控坏序列，其中 f是引理 *3.9* 中的函数。*(3)* $T_R(\mathbf{h})$ 是有限分支的。

因此， $T_R(\mathbf{h})$ （因此 $\mathbf{h}$ ）是有限的。存在一个属于$\mathbf{F}^\star_\omega$的函数，它能一致地以上界约束 $T_R(\mathbf{h})$ 的大小，该上界是 $[\![c(h_0)]\!]$的函数。

证明。回想一下， $T_R(\mathbf{h})$ 的一个分支，在经过 $\bullet$ 之后，是一列带索引的分量 $t_1 R_\mathbf{h} t_2 R_\mathbf{h} \ldots$，其中 t_{i+1} 是某条规则的一个前提中的活动分量；该规则属于此演算，且以 t_i 作为主分量（实际上，它是其关键祖先）。

条目 1。分量的索引严格递增，因为根据构造， $t_i R_\mathbf{h} t_{i+1}$ 意味着分量 t_{i+1} 的索引严格大于其任一祖先的索引。对于下一部分，根据规则的定义方式，对于任何非 ω 引入规则，活动分量的 ω 集都比其关键祖先的大。如果某个活动分量是由一条 ω 引入规则创建的，那么它的 ω 集严格大于其父分量（事实上，根据隐式归纳法，也大于其所有祖先）。

条目 2. 设 $\mathrm{B} := t_1 R_\mathbf{h} t_2 R_\mathbf{h} \ldots$是 $T_R(\mathrm{h})$ 的一个分支。若它不是一个坏序列，则 B 中存在链 $(\Omega_i, \mathrm{x}_i) \Rightarrow b_i = t_i R_\mathbf{h} \ldots R_\mathbf{h} t_j = (\Omega_j, \mathrm{x}_j) \Rightarrow b_j$，其中某个 $i < j$ 满足 $t_i \preceq_{\mathbf{W}(\omega,d)} t_j$，即 $\Omega_i = \Omega_j$ 、 $b_i = b_j$ 且 $\mathrm{x}_i < \mathrm{x}_j$ （由于 h 无冗余，故为严格不等式）。注意，t_j 必定是通过 ω-细化得到的；否则就意味着算法漏掉了一个合适的 ω-配对项（即 t_i）。将 t_j的前分量记为 $t'_j = (\Omega'_j, \mathrm{y}'_j) \Rightarrow b_$。于是 $\Omega'_j \subset \Omega_j$，因为如上所述，该前分量的 ω集严格小于取代它的产出前提的 ω集。由于 $j > i$，且由于 ω集递增（这是相关分量从结论到前提按 ω递增的性质所致），可得 $\Omega_i \subseteq \Omega'_j$。由于 $\Omega_i = \Omega_j$，我们便得到矛盾 $\Omega_i \subseteq \Omega'_j \subset \Omega_i$。

此外，由于 $(t_i, t_{i+1}) \in R_\mathbf{h}$ 表示 t_{i+1} 要么是某条规则的前提，要么是该前提的 ω-扩展，且 t_i 是其主分量之一，因此根据引理 3.9，我们有 $[\![t_{i+1}]\!] \leq f([\![t_i]\!])$，进而得到 $[\![t_j]\!] \leq f^j([\![t_1]\!])$，这意味着该序列是 $(f, [\![h_0]\!])$-受控的，因为$[\![t_1]\!] \leq [\![h_0]\!]$ t_1 位于 h_0中。

第 3 项。反设，选取一个标记为 t 的节点，它有无限多个子节点，即对所有 $i \geq 0$，都有 $t R_\mathbf{h} s_i$。因此， t 对每个 s_i 都充当关键祖先，这意味着它是正在展开的带索引的rin-超相继式 $\mathbf{h}_i := h_i, R_i$ 中最近的主分量，并且与s_i的模式共享一个多重集元变量。

注意，在整个 h 中，索引小于 t的分量集合 A 对所有这类$\mathbf{h}_i$都相同。这意味着每个s_i 都由 A确定。因此，对于某个 i, j，有 $s_i = s_j$，这与冗余检查矛盾。还要注意，第一个特殊节点 $\bullet$只有有限多个子节点，因为 h_0 是有限的。至此，条目（3）的证明完成。

因此， $T_R(\mathbf{h})$是有限分支的，且其所有分支都是有限的；于是根据 König 引理， $T_R(\mathbf{h})$是有限的。现在令 m表示这棵树中最长分支的长度。根据上述论证，在任何标记为 t的节点处，其子节点数至多为 $p([\![t]\!]) \leq p(f^m([\![h_0]\!]))$，其中 p 是一个仅取决于底层演算规则的原始递归函数。因此，整棵树的大小（至多为节点可能拥有的最大子节点数的最长分支长度次幂）至多为$(p(f^m([\![h_0]\!])))^m$。这是关于 m ([9, 定义 9],[28, 第 5.3 节1])的原始递归函数。由于根据条目（2）和引理5.10， m 被$\mathbf{F}^\star_\omega$中的一个函数所上界，因此由定理 2.8 可知，整棵树的大小被$\mathbf{F}^\star_\omega$中的一个函数所界定。□

定理5.12。 设$\mathbf{h}_0$ 是一个有限的 *lrin*-超序列。那么 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 是有限的，因此 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 的构造会终止。此外， $T_\omega(\mathbf{h}_0)$ 可在$\mathbf{F}^\star_\omega$时间内构造完成。

证明。假设 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$不是有限的。由于证明搜索树的分支因子有限（该演算是局部有穷的），根据König 引理， $T_\omega(\mathbf{h}_0)$必定有一条无穷分支，由此导出一个无穷 lrin-超序列$\mathbf{h} := h, R_\mathbf{h}$，这与引理5.11矛盾；引理5.11指出， $T_\omega(\mathbf{h}_0)$中不可能存在无穷 lrin-超序列。

由引理5.11给出了 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$中任意分支长度的统一$\mathbf{F}^\star_\omega$上界。分支因子也有$\mathbf{F}^\star_\omega$上界。因此，这棵树的大小有$\mathbf{F}^\star_\omega$上界。由于在构造 $T_\omega(\mathbf{h}_0)$时，执行实例化、展开节点以及完成所有必要检查，都是针对大小为$\mathbf{F}^\star_\omega$的对象所进行的原始递归运算，因此整棵树可在此时间内构建完成。□

定义*5.13*（ω-急切证明）。以$\mathbf{h}_0$为根的$T_\omega(\mathbf{h}_0)$的子树，若其叶子由公理规则的实例得到，则称为 ω- h_0的急切证明，其中 h_0 是 h_0的支撑。

对于任意无冗余的 ω-超序列 h_0，我们可以规范地关联一个 lrin-超序列 $\mathbf{h}_0^\circ = h_0,\ \varnothing, _$其中 h_0 通过为 h_0 中的元素选定一个顺序，并按照该顺序赋予索引 $\{0, \ldots, |h_0| - 1\}$ 而得到。

定义 *5.14*（ω-证明搜索算法）。给定一个有限的无冗余 ω-超序列 h_0 作为输入，算法 Wkn(h_0) 构造树$T_\omega(\mathbf{h}_0^\circ)$，然后查找一个作为 h_0的 ω-eager 证明的子树。若找到，则输出可证；否则输出不可证。

由引理5.11和引理5.12，我们得到终止性和复杂度。

定理 5.15（复杂度）。Wkn 在 $\mathbf{F}^\star_\omega$ 时间内终止。

6 $\mathbf{FL}_{\mathbf{ew}}$扩张的 ω-证明搜索算法的正确性

给定一个有限的不可约冗余超序列 h_0，如果 Wkn(h_0) 返回可证，我们就说 h_0 具有一个 ω-急切证明。
我们首先确立完备性。

引理 6.1（完备性）。设 h 为一个无冗余 ω-超序列。若 h 在$\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{\rightrightarrows}(\mathcal{R})_\omega^{\rightsquigarrow}$中有证明，则它有一个 ω-急切证明。

证明。我们证明如下更强的命题：如果 h 在$\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{\rightrightarrows}(\mathrm{R})_\omega^{\rightsquigarrow}$中可证，那么对任意 lrin-超序列$\mathbf{h} \coloneqq h,\ R_{\mathbf{h}},\ T_\omega(\mathbf{h})$都具有一个关于 h 的 ω-急切证明，其中 h 具有支撑 h。

对$\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{\rightrightarrows}(\mathrm{R})_\omega^{\rightsquigarrow}$中 h 的证明 π 的高度 α 作归纳。设$\mathbf{h} \coloneqq h,\ R_{\mathbf{h}}$为任意 lrin-超序列。

(基例) 这是显然的，因为 $T_\omega(\mathbf{h})$ 的根本身就是 ω-急切证明 h，因为 h 是 $\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{\rightrightarrows}(\mathrm{R})$ 中某个公理的实例 $\overset{\rightsquigarrow}{\omega}$.

(归纳步骤) 假设在 π 中应用的最后一条规则是 $\mathrm{r} = (h|t_i)_i/h$。因此，每个 $h_i = (h|t_i)$ 在 $\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{\rightrightarrows}(\mathrm{R})_\omega^{\rightsquigarrow}$中都有一个高度为$\alpha_i < \alpha$的证明。分情形讨论：

(1) t_i出现在某个 $1 \le i \le k$ 的 h 中：设为 $h = h'|t_i$，因此 $h_i = h'|t_i|t_i$。由于 h_i有一个高度为 $< \alpha$的证明，根据 (EC) 的 hp-可容许性，我们知道 h本身有一个高度为 $< \alpha$的证明。根据假设，h是无冗余的，因此由归纳假设，$T_\omega(\mathbf{h})$ 有一个 ω-急切证明 h。

我们知道每个 $(h \mid t_i)$ 都是无冗余的。因此，由归纳假设，任何基于 h_i 的 lrin-超序列 $\underline{\mathbf{h}}_i$ 都有一个 ω-急切证明 h_i。定义实例化上下文 $\mathrm{I} \coloneqq \mathrm{r}, \mathbf{h}$。现在考虑其他情形。

(2) 对于每个 $1 \le i \le k$，t_i在 I 中都没有 ω-搭档：因此，由于 t_i不会出现在 h中，在构造 $T_\omega(h)$ 的第一步中，一个 lrin-超序列 $\mathbf{h}_i$将被添加为 $T_\omega(\mathbf{h})$ 的根的子节点，并且不会进行 ω-细化。因此，根据构造，对于每个 $1 \le i \le k$，$T_\omega(\mathbf{h}_i)$ 都是 $T_\omega(h)$ 的子树。因此，选取由归纳假设得到的 h_i 的 ω-急切证明 π_i'，便可将 h 的一个 ω-急切证明作为 $T_\omega(h)$ 的有根子树得到。

(3) 现在，不失一般性地假设$t_1, \ldots, t_m$在 I 中有 ω-搭档。

这意味着，在构造$T_\omega(\mathbf{h})$时，它们经历了 ω-细化过程，并且对于所有 $1 \le i \le m$，支撑为 $h_i' = (h|t_i')$ 的 lrin-超序列 $\mathbf{h}_i'$都被添加为 $T_\omega(\mathbf{h})$ 的根的子节点，其中 h_i'显然是 h_i的一个 ω-扩展。由于 h_i在高度 $\alpha_i < \alpha$ 下可证，根据引理 4.11，我们有 $h|t_i'$ 存在一个高度为 $\le \alpha_i < \alpha$ 的证明。现在分两种情形讨论。

如果某个 t_i'出现在 h中，则 $h = h'|t_i'$且 $h|t_i' = h'|t_i'|t_i'$。根据(EC)的hp-可容许性，h有一个高度为 $< \alpha$的证明，因此根据归纳假设，它在 $T_\omega(\mathbf{h})$中有一个ω-急切证明。

如果没有t_i'出现在h中，则根据归纳假设，$T_\omega(\mathbf{h}_i)$是 $T_\omega(\mathbf{h})$的一个直接子树，并且归纳假设适用于其他前提，因此 $h|t_j$、$j \ge m$ 和 $T_\omega(\mathbf{h}_j)$ 也都是 $T_\omega(\mathbf{h})$ 的直接子树，因为它们没有经过ω-细化。至此，证明完成。□

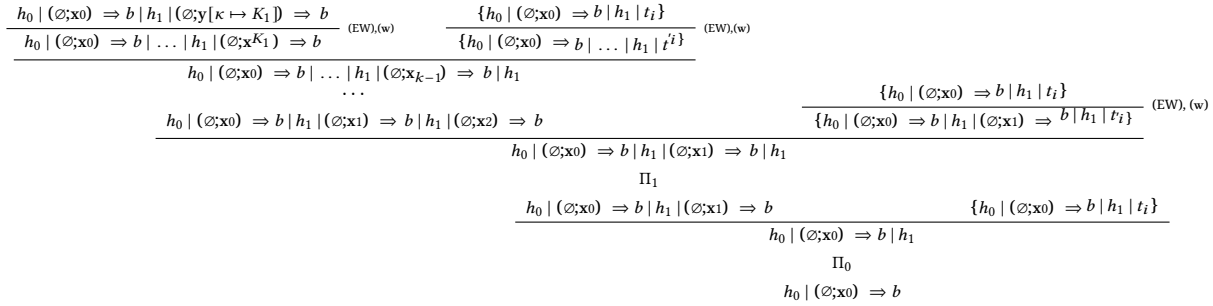


图 3. K_1 对式 (2) 中推导的迭代。开放叶节点（非公理叶节点）的集合保持不变。

给定一个 ω-超序列 $h = (\Omega_0,\ \mathbf{x}_0) \Rightarrow b_0 \mid \ldots \mid (\Omega_l,\ \mathbf{x}_l) \Rightarrow b_l$和 $K \in \mathbb{N}$，令 $h[K]$表示不含 ω 的 ω-超序列 $(\varnothing;\ \mathbf{x}_0[\Omega_0 \mapsto K]) \Rightarrow b_0 \mid \ldots \mid (\varnothing;\ \mathbf{x}_l[\Omega_l \mapsto K]) \Rightarrow b_l$。通俗地说，$\omega$-集合中的每个公式都被赋予了重数 K。

引理 6.2（可靠性）。如果一个无 ω、无冗余的 ω-超序列具有一个 ω-急切证明，那么 h 在$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$中可证。

证明。设 $h = (\varnothing;\ \mathbf{x}) \Rightarrow b$，并设 π是 h的一个高度为 α的 ω-急切证明，即以$\mathbf{h}^{\circ}$为根的 $T_{\omega}(\mathbf{h}^{\circ})$ 的一棵子树。通过删除 π 中所有分量出现的所有指标，得到树 π（即，π 是一棵由 ω-超序列构成的树）。我们必须将 π 变换为$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$中的一个证明（不含 ω-坐标）。为此，只需给出一个不含 ω-引入规则的 h 证明；请注意，这些规则是在构造 $T_{\omega}(\mathbf{h}^{\circ})$ 中通过 ω-细化引入的，作为其有效输出。我们的变换分为两个阶段。

（第一阶段）我们通过变换 π 来实现：在证明中出现的每个 ω-超序列的每个分量中，将其 ω-集的每个元素替换为指定的有限重数。该重数通过对 π 进行从叶到根的归纳法得到（等价地，也可以按照树中节点到叶子的距离进行归纳）。

（基例）该节点必须是以下情形之一。由于 $\mathbf{0}$ 和 $\mathbf{1}$ 有多种含义，我们用$\mathbf{f}$和$\mathbf{t}$表示逻辑常量：

$$g \mid (\Omega; \mathbf{e}_b) \Rightarrow b \quad g \mid (\Omega \cup \{b\}; \mathbf{0}) \Rightarrow b \quad g \mid (\Omega; \mathbf{e}_{\mathbf{f}}) \Rightarrow$$
$$g \mid (\Omega \cup \{\mathbf{f}\}; \mathbf{0}) \Rightarrow \quad g \mid (\Omega; \mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{t}$$

将每个 ω-集元素映射为重数 $\mathbf{1}$，并利用（$\mathbf{w}$）进行证明：

$$g[1] \mid (\varnothing; \mathbf{e}_b[\Omega \mapsto 1]) \Rightarrow b \quad g[1] \mid (\varnothing; \mathbf{0}[\Omega \cup \{b\} \mapsto 1]) \Rightarrow b$$
$$g[1] \mid (\varnothing; \mathbf{e}_{\mathbf{f}}[\Omega \mapsto 1]) \Rightarrow \quad g[1] \mid (\varnothing; \mathbf{0}[\Omega \cup \{\mathbf{f}\} \mapsto 1]) \Rightarrow$$
$$g[1] \mid (\varnothing; \mathbf{0}[\Omega \mapsto 1]) \Rightarrow \mathbf{t}$$

（归纳步骤）考虑一棵树中标签为 g 的内部节点，并假设在构造 T_{ω}（h）时，曾对 r 应用逆向操作。令 π_i 表示第 i 个前提处的子树，其根的标签为 h_i。根据归纳构造，每个 π_i 都变换为 π_i'，后者的根为 $h_i' = h_i[K_i]$，对应某个 $K_i \in \mathbb{N}$（即，将 h_i 中的每个 ω-集都替换为一个有限重数 K_i）。分情形讨论：

(1) r 是结论为 g的$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$的一个实例：我们找出$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$的一个推导，其中每个非公理叶节点都是某个$\pi_i'$的根，且其结论为 $g[K_0]$，这里 $K_0 \geq \max_i K_i$是适当的。具体而言，我们证明存在一个具有相同规则模式的实例 r'，其结论为 $g[K_0]$，且其前提可以通过向上弱化到达 π_i'的根。也就是说，

$$\dfrac{\dfrac{h_1[K_1]}{g_1[K_0]}\,(\mathbf{w})^* \quad \cdots \quad \dfrac{h_m[K_m]}{g_m[K_0]}\,(\mathbf{w})^*}{g[K_0]}\,r'$$

在 π_i' 的根处，对于每个分量，我们需要将原先位于其 ω-集中的每个公式复制 K_i 份。对于实例化 r 的规则模式中的超序列变量的分量，这很容易做到；使用相同的实例化即可。同时，每个活动分量 c_a

在规则模式中都有多重集元变量 M_1、……、$M_{l\,(a)}$，后者出现在主分量的某个子集 $\{p_1$、……、$p_{n(a)}\}$ 中。c_a 的 ω-集被定义为（定义 4.4）$\{p_1$、……、$p_{n(a)}\}$ 的 ω-集的并。因此，在每个 M_i 的实例化中，如果我们将其出现所在的主分量的 ω-集中的每个公式都复制 K 份（其中 $K \in \mathbb{N}$），那么原先位于 c_a 的 ω-集中的每个公式现在的重数都是 $\geq K$（若某个活动分量包含多个多重集元变量，可能会出现多余的副本；通过向上应用弱化即可将其移除，从而得到 K_i）。如果 r 是逻辑规则，那么主分量中还需要额外的一份副本，以便（可能）充当主公式。回顾 fm（定义 3.2），将 r 的结论的 ω-集中的每个元素替换为 $K_0 = (\mathrm{fm} \cdot \max_i K_i) + 1$。

(2) r 是一个 ω-引言规则 $\omega(r)$，它只有一个产出前提（通过归纳法，该论证可推广到具有多个产出前提的一般情形）。为节省空间，此处及下文中，我们可以将前提纵向排列。

$$\frac{\begin{array}{c} h_0 \mid (\Omega; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1 \mid (\Omega \cup \kappa; \mathbf{y}[\kappa \mapsto 0]) \Rightarrow b \\ \{h_0 \mid (\Omega; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1 \mid t_i\}_i \end{array}}{h_0 \mid (\Omega; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1}\, \omega(r)$$

令 $K_0 = \max_i K_i$，并将每个 π_i 替换为通过归纳构造得到的 π_i'，可得如下表达式。

$$\frac{\begin{array}{c} h_0[K_1] \mid (\varnothing; \mathbf{x}[\Omega \mapsto K_1]) \Rightarrow b \mid h_1[K_1] \mid (\varnothing; \mathbf{y}[\Omega \cup \kappa \mapsto K_1]) \Rightarrow b \\ \{(h_0 \mid (\Omega; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1 \mid t_i)[K_i]\}_i \end{array}}{h_0[K_0] \mid (\varnothing; \mathbf{x}[\Omega \mapsto K_0]) \Rightarrow b \mid h_1[K_0]}\, p\omega(r)$$

与之前不同，我们无法得到 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 的规则实例：坐标 κ 在 $(\varnothing;\mathbf{x}[\Omega \mapsto K])$（结论）中具有某些有限重数，但在 $\mathbf{y}[\Omega \cup \kappa \mapsto K_1]$（前提）中的重数为 K_1。将上述称为一个伪ω规则实例 $p\omega(r)$，并将 $\{K_i\}_{i\in I}$ 称为其关联值。在下一阶段，我们将用一个推导替换它们。暂且按此方式继续，最终得到一个证明 π'，其结论为 $(\varnothing,\mathbf{x}) \Rightarrow b$，且使用 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ + 的伪-ω-规则实例。特别地，π' 不包含 ω-引言规则。

（第二阶段）现在，让 我们取上面得到的 π'，并消除伪-ω-规则实例，从而得到 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})$ 中 h 的一个证明 $\overset{\rightsquigarrow}{\omega}$.

我们通过归纳法进行证明，并考虑一个稍微更一般的证明族。设 P 是 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})$ 中一个不含 ω 的超序列的证明，其中有 + 个伪-ω-规则实例，它们满足 ω-细化条件；其中 P 中的每个 ω-超序列都隐含地在其分量上具有一个（关键祖先，活动分量）关系，该关系的定义与定义 5.6 中 ω-证明搜索树中的定义相同。

将 P 中的一条分支与其上的伪-ω-规则实例结论的数量相关联。定义 最大嵌套 $\rho(P)$ 为所有分支上这些数量构成的多重集（即 P 的每条分支都贡献一个数）。对 ρ 上的标准多重集序进行归纳（将多重集中的一个数替换为有限个严格更小的数，视为得到一个严格更小的多重集）。

(基例)。如果 ρ 为空，那么 P 已经是 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中的一个证明。

(归纳步骤) 假设 $\rho(P)$ 非空，并考虑 P 中一个位置最低的伪-ω-规则实例。这样的规则实例如下图所示。这里，K_i 是该伪-ω-规则实例的第 i 个关联值。注意，根据对位置最低的 $p\omega(r)$ 的选择，以及“该式不含 ω”这一假设，从 P 的根到所选 $p\omega(r)$ 规则的结论的路径上，每个 ω-超序列中的每个分量的 ω-集都是空的。

$$\frac{\begin{array}{c} h_0 \mid (\varnothing; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1 \mid (\varnothing; \mathbf{y}[\kappa \mapsto K_1]) \Rightarrow b \\ \{h_0 \mid (\varnothing; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1 \mid t_i[\kappa \mapsto K_i]\}_i \end{array}}{\begin{array}{c} h_0 \mid (\varnothing; \mathbf{x}) \Rightarrow b \mid h_1 \\ \cdots \\ h_0 \mid (\varnothing; \mathbf{x}) \Rightarrow b \end{array}}\, p\omega(r) \tag{2}$$

将上文视为一个推导，其中唯一的开放叶节点是图中所示的那些，并用图 3 中的推导替换它在 P 中的出现。这里，$\mathbf{x}_0, \ldots, \mathbf{x}_{K_1}$ 是由 $\mathbf{x}_0 := \mathbf{x}$ 和 $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x} + (i+1)(\mathbf{y} - \mathbf{x})$ 定义的序列（回想一下，根据 ω-细化中的条件，$\mathbf{x} < \mathbf{y}$）。将这棵新树称为 P^*。

首先，让我们解释为何该推导具有与之前相同的开放叶节点集合。考虑 $p\omega(r)$ 的第一个前提。在分量上的（关键祖先，活动分量）依赖图中，我们所突出的 $(\varnothing;\mathbf{x}_0) \Rightarrow b$ 是活动分量

$(\varnothing;\mathbf{x}_1) \Rightarrow b$的祖先，这依据 ω-精化条件。此外，考察从 $(\varnothing;\mathbf{x}_0) \Rightarrow b$ 的引入到 $(\varnothing;\ \mathbf{x}_1) \Rightarrow b$的规则实例所基于的规则模式，每一对（关键祖先，活动分量）之间都存在一个共同的多重集元变量——确保这一性质是定义关键祖先的一个主要动机。现在，Π_i $(i > 1)$ 与 Π_0 类似，不同之处在于多余的 $\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_0$ 被包含为这些多重集元变量的实例化的一部分。尽管该多余部分现在会出现在 Π 内每一个包含此类多重集元变量的规则实例的每个活动分量中——即 ω-引入规则的非产出前提，或某个 Π_i 内部通向公理的分支规则的前提——所有不需要的副本都可以通过向上弱化删除。因此 Π_i 确实是一个推导。

接下来，我们声称，ρ^* 中 P^* 的嵌套深度在多重集序下严格小于 ρ。B 中的任意分支 P 要么经过我们选定的$p\omega$（r），要么不经过。令 ρ_1 为前一种分支的嵌套深度多重集，ρ_2 为后一种分支的嵌套深度多重集。因此，$\rho = \rho_1 \uplus \rho_2$，其中 $\uplus$ 表示多重集并。此外，P^* 中的任意分支要么具有 σB 的形式，其中 σ 是相对于该推导从根到开放叶节点的路径（B 是该路径的剩余部分），要么不具有这种形式。后一种情况意味着，该分支在某个 Π_i 内部发生分支，并朝着一个公理延伸。于是，$\rho^* = \rho_1^* \uplus \rho_2$，其中 ρ_1^* 是前一种分支的嵌套深度多重集，ρ_2 是后一种分支的嵌套深度多重集。由于 σ 不包含任何伪-ω-规则实例，$\rho_1 = 1 + \rho_1^*$（其中 + 是显然的逐点加法运算）。由此，所声称的结论得证。

为了证明归纳情形，现在只需将归纳假设应用于 P^*。最后，将这一结果应用于 π'，即可得到所需的证明。 □

定理 6.3（正确 性 Wkn）。对于任意不可约冗余超序列 h_0，$\mathtt{Wkn}(h_0)$ 当且仅当 h_0 在$\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}^{=}(\mathcal{R})$中可证时，输出是 $\overset{\rightsquigarrow}{\omega}$.

由引理 2.7、引理 4.5、引理 4.7、定理 6.3 和定理 5.15 可得:

定理 6.4（主定理 II）。在任意通过有限多个$\mathcal{P}_3$-公理扩展$\mathbf{FL}_{\mathbf{ew}}$ 所得的系统中（即在任意$\mathbf{HFL}_{\mathbf{ew}}$的解析结构扩展中），可证性具有阿克曼复杂度。

推论 6.5。MTL 具有阿克曼复杂度。

参考文献

[1] A. Avron. 1987年. RM的构造性分析. 符号逻辑杂志, 52, 4, 939–951.[2] A. R. Balasubramanian. 2020年. 有限集 $\mathbb{N}^d$上受控坏序列的复杂度. 载于 *ACM*国际会议论文集系列. 计算机协会, (2020年7月), 130–140. isbn: 9781450371049. doi:10.1145/3373718.3394753.[3] A. R. Balasubramanian、Timo Lang 与 Revantha Ramanayake. 2021年. 弱化与收缩超序列次结构逻辑中的可判定性与复杂度. 载于 第*36*届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会, *LICS 2021*, 罗马, 意大利, *2021*年*6*月*29*日至7月*2*日. IEEE, 1–13. doi:10.1109/LICS52264.2021.9470733.[4] P. Baldi、A. Ciabattoni 与 L. Spendier. 2012年. MTL扩展的标准完备性：一种自动化方法. 载于 *WOLLIC 2012* (计算机科学讲义). 第7456卷. 施普林格, 154–167.[5] Sébastien Bardin、Alain Finkel、Jérôme Leroux 与 Laure Petrucci. 2008年. FAST：从理论到实践的加速. 软件工具技术转移国际期刊, 10, 5, 401–424. doi:10.1007/S10009-008-0064-3.[6] A. Ciabattoni、N. Galatos 与 K. Terui. 2008年. 从公理到非经典逻辑中的解析规则. 载于 *LICS 2008*, 229–240.[7] Agata Ciabattoni、Francesc Esteva 与 Lluıs Godo. 2002年. 带n-收缩的基于三角范数的逻辑. 神经网络世界, 12, (2002年1月), 441–452.[8] Agata Ciabattoni、Nikolaos Galatos 与 Kazushige Terui. 2017年. 代数证明论：超序列与超完备化. 纯粹与应用逻辑年刊, 168, 3, 693–737. doi:10.1016/j.apal.2016.10.012.[9] Peter Clote. 1994年. 计算模型与函数代数. 载于逻辑与计算复杂性. 精选论文. 逻辑与计算复杂性, 国际研讨会 *LCC '94*, 美国印第安纳州印第安纳波利斯, *1994*年*10*月*13*日至*16*日 (计算机科学讲义). Daniel Leivant, (编)第960卷. 施普林格, 98–130. doi:10.1007/3-540-601 78-3_81.[10] Leonard Eugene Dickson. 1913年. 具有n个不同素因子的奇完全数与本原丰数的有限性. 美国数学杂志, 35, 4, 413–422.[11] Francesc Esteva 与 Lluıs Godo. 2001年. 基于幺半群三角范数的逻辑：迈向左连续三角范数的逻辑. 模糊集与系统, 124, 3, 271–288. 模糊逻辑. doi:10.1016/S0165-0114(01)00098-7.[12] Diego Figueira、Santiago Figueira、Sylvain Schmitz 与 Philippe Schnoebelen. 2011年. 借助Dickson引理的阿克曼界与原始递归界. 载于 会议录——计算机科学逻辑研讨会, 269–278. isbn: 9780769544120. doi:10.1109/LICS.2011.39.[13] N. Galatos、P. Jipsen、T. Kowalski 与 H. Ono. 2007年. 剩余格：次结构逻辑的代数一瞥. 逻辑与数学基础研究. 第151卷. 爱思唯尔, xxii+509.[14] Zuzana Haniková. 2017年. 模糊逻辑某些语言片段的复杂度. 软计算, 21, 1, 69–77. doi:10.1007/s00500-016-2346-0.[15] Rostislav Horcík、Carles Noguera 与 Milan Petrık. 2007年. 论n-收缩模糊逻辑. 数学逻辑季刊, 53, (2007年6月), 268–288. doi:10.1002/malq.200610044.[16] Emil Jerábek. 2016年. 关于次结构层级的注记. 数学逻辑季刊, 62, 1-2, 102–110.

[17] Richard M. Karp 与 Raymond E. Miller. 1969年. 并行程序图式.计算机与系统科学杂志, 3, 2, 147–195. doi:10.1016/S0022-0000(69)80011-5.[18] S. Kripke. 1959年. 蕴涵问题（摘要）. 符号逻辑杂志, 24, 324.[19] Ranko Lazic 与 Sylvain Schmitz. 2016年. *ν*-佩特里网中可覆盖性的复杂度. 载于 第*31*届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会会议录, *LICS '16*, 美国纽约州纽约, *2016*年*7*月*5*日至*8*日. Martin Grohe、Eric Koskinen 与 Natarajan Shankar, (编) ACM, 467–476. doi:10.1145/2933575.2933593.[20] Ranko Lazic 与 Sylvain Schmitz. 2021年. 关于Rackoff 可覆盖性技术的理想观点. 信息与计算, 277, 104582. doi:10.1016/J.IC.2020.104582.[21] Jérôme Leroux 与 Grégoire Sutre. 2005年. 平坦计数器自动机几乎无处不在！载于 自动化验证与分析技术, 第三届国际研讨会, *ATVA 2005*, 台湾台北, *2005*年*10*月*4*日至*7*日, 会议录 (计算机科学讲义). Doron A. Peled 与 Yih-Kuen Tsay, (编) 第3707卷. 施普林格, 489–503. doi:10.1007/11562948_36.[22] George Metcalfe、Francesco Paoli 与 Constantine Tsinakis. 2023年. 代数与逻辑中的剩余结构. 数学调查与专著. 第277卷. 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, xiii+265. isbn: 978-1-4704-6985-6.[23] G. E. Minc. 1968年. 模态逻辑的若干演算系统. 斯捷克洛夫数学研究所学报, 98, 88–111.[24] Francesco Paoli. 2002年. 次结构逻辑：入门. 逻辑趋势——*Studia Logica* 文库. 第13卷. 克卢维尔学术出版社, 多德雷赫特, xiv+304. isbn: 1-4020-0605-5. doi:10.1007/978-94-017-3179-9.[25] G. Pottinger. 1983年. T、S4 和 S5 的统一无切割表述（摘要）.符号逻辑杂志, 48, 3, 900.[26] Revantha Ramanayake. 2020年. 扩展克里普克引理与超序列次结构逻辑的可判定性. 载于 *LICS '20:* 第*35*届 *ACM/IEEE* 计算机科学逻辑年会, 德国萨尔布吕肯, *2020*年*7*月*8*日至*11*日. HolgerHermanns、Lijun Zhang、Naoki Kobayashi与 Dale Miller,(编) ACM,795–806. doi:10.1145/3373718.3394802.[27] Greg Restall. 2000年.次结构逻辑导论. 劳特利奇 . isbn: 9780415215343.[28] Sylvain Schmitz. 2016 年 . 超初等复杂度层级 . *ACM* 计算理论汇刊 , 8, 1, 第 3 篇 , (2016 年 2 月), 36 页 . doi:10.1145/2858784.[29] Alasdair Urquhart. 1999年. 相关逻辑中判定过程的复杂度II.符号逻辑杂志, 64, 4, 1774–1802. 检索于2022年11月16日，来自.

收稿日期：2026年2月22日

A P第 3 节的证明（FL 的分析性超相继式扩张的阿克曼上界 $_{\mathbf{ec}}$）

命题 3.1。*I* 若 $h_1 \rightsquigarrow_I^k h_2$，则对于每个 $s_1 \in h_1$，都存在 $s_2 \in h_2$ 使得 $s_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k s_2$。我们称 s_2 为 s_1 在 h_2 中的后代。

证明。根据定义，$h_1 \rightsquigarrow_I^k h_2$ 意味着存在 h'，使得 $h_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k h'$ 且 $h' \rightsquigarrow^I (\mathrm{EC})\, h_2$。我们固定一个 $s_1 \in h_1$，并注意到只需证明 s_1 在 h' 中有一个后代，因为 (EC) 不会在推导中使任何分量消失（它只会减少重数）。我们选取一个见证 $h_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k h'$ 的推导，其中只包含**c** 的应用。从上往下看，节点 i 处的一个分量在节点 $i+1$ 处有一个直接后代，它要么是同一个分量（若它是超序列变量实例化的一部分），要么是通过应用**c** 从该分量得到的分量（也就是说，该分量在规则应用中处于活动状态）。无论哪种情况，一个分量及其直接后代都满足 $\rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k$ 关系。因此，从 s_1 开始，我们可以得到一条后代链，终止于分量 $s' \in h_1$，而 $\rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k$ 的传递性保证了 $s_1 \rightsquigarrow_{\mathbf{c}}^k s'$。□

引理 3.7。设 h 是一个超序列，且 $\alpha \in \mathbb{N}$。若 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{HFL_{ec}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，则 $\vdash^{\leq\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，反之亦然。

证明。两个方向均通过对证明高度作归纳来证明。基例显然成立，因为实际上公理规则不受演算倒置的影响。

（从左到右）给定 π 在 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$ 中的一个证明 h，其高度为 α。设 $\mathbf{r}^{\rightsquigarrow}$ 是 π 中应用的最后一条规则，其前提为 h_1、……、h_n，规则形式为 $h_i = g \mid s_i$。因此，对于每个 $1 \leq i \leq n$，h_i 在 $\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$ 中都有一个高度为 $\alpha_i < \alpha$ 的证明。令 h_0 为 $\mathbf{r}^{\rightsquigarrow}$ 的基础实例的结论，其形式为 $h_0 = g \mid C$，其中 C 是 **r** 的主分量多重集（见下方左图）。定义 $h_i' := h_i \mid C = g \mid s_i \mid C$，并注意到，根据 (EW)，$h_i' \Leftarrow_{\mathrm{str}} h_i$。根据引理 3.6，对于每个 $1 \leq i \leq n$，h_i' 都有一个高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$ 的证明。由归纳假设，每个这样的 h_i' 在 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathbf{R})^{\rightsquigarrow}$ 中都有一个高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$ 的证明。现在，应用 $\mathbf{inv(r)}^{\rightsquigarrow}$ 的相应实例（如右图所示），即可得到 h 在 $\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathbf{R})^{\rightsquigarrow}$ 中的证明，其高度为 $\leq \alpha$。这里 $g \mid C \rightsquigarrow^{\mathsf{fm}-1}_{\mathsf{acn}} h$。

$$\frac{g \mid s_1 \quad \cdots \quad g \mid s_n}{g \mid C}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow} \qquad \frac{g \mid C \mid s_1 \quad \cdots \quad g \mid C \mid s_n}{g \mid C}\ \mathrm{inv(r)}^{\rightsquigarrow}$$

（从右到左）给定$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ec}}(\mathbf{R})^{\rightsquigarrow}$ 中 π 的一个证明 h，其高度为 α，令 $\mathbf{inv(r)}^{\rightsquigarrow}$ 表示在 π中应用的最后一个规则实例，设其前提为$h_1 = g \mid C \mid s_1$、……、$h_n = g \mid C \mid s_n$，其中 C是相应基本规则实例的结论 h_0的主分量多重集，即 $h_0 = g \mid C$，并回顾 $h_0 \rightsquigarrow^{\mathsf{fm}-1}_{\mathsf{acn}} h$。根据归纳假设，对于每个 $1 \leq i \leq n$，在$\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$ 中都有 h_i的证明，其高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$。我们知道，在$\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$ 中存在一个$\mathbf{r}^{\rightsquigarrow}$ 的基本规则实例，其前提和结论 $h_0' = g \mid C \mid C$相同（此时将超序列变量实例化为 $g \mid C$）。该 h_0'的证明高度为 $\leq \alpha$。但随后 $h \Leftarrow_{\mathrm{str}} h_0 \Leftarrow_{\mathrm{str}} h_0'$，因此根据引理3.6，$h$在$\mathbf{HFL_{ec}(R)}^{\rightsquigarrow}$ 中有一个高度为 $\leq \alpha$的证明。如果所应用的最后一条规则是(EC)或(EW)，则由归纳假设和引理3.6可直接得到结论。□

引理 3.8. 设 h'和 h是超序列，且 $h' \Leftarrow_{\mathrm{str}} h$。若 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{外收缩}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，则 $\vdash^{\leq\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{外收缩}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h'$。

证明。假设 $h' \Leftarrow_{\mathrm{str}} h$且 $\vdash^{\alpha}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{外收缩}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$。由引理 3.7，得到 $\vdash^{\beta}_{\mathbf{HFL外收缩}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h$，其中 $\beta \leq \alpha$；由引理 3.6，得到 $\vdash^{\gamma}_{\mathbf{HFL外收缩}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}} h'$，其中 $\gamma \leq \beta$；再次由引理 3.7，得到 $\vdash^{\leq\gamma}_{\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{外收缩}}(\mathcal{R})_{\rightsquigarrow}} h'$。由于 $\gamma \leq \alpha$，结论得证。□

引理 3.9. 函数 $f(x) = (\mathsf{fm}^2\mathsf{acn}^2 \cdot x) + 1$ 是一个**H**-控制。

证明。设 $\mathbf{inv(r)}^{\rightsquigarrow}$ 是**H** 的一个规则，其结论为 h。设 h' 是该规则的一个前提。因此，必定存在 g，使得 $h' = g|s$ 且 $g \rightsquigarrow^{\mathsf{fm}-1}_{\mathsf{acn}} h$。根据 $\rightsquigarrow^{\mathsf{fm}-1}_{\mathsf{acn}}$的定义，可得 $[\![g]\!] \leq (\mathsf{fm}-1)(\mathsf{acn})[\![h]\!]$。此外，根据**H**中各规则的定义，我们知道，在 $\mathbf{inv(r)}^{\rightsquigarrow}$ 中为序列 s 实例化的每个多重集变量，也必定出现在结论的主分量中。因此，这意味着 $[\![s]\!] \leq (\mathsf{acn}-1)[\![g]\!] + 1$（其中加 1 是因为逻辑规则可以使一个公式的重数增加 1）。结合 $[\![g]\!] \leq (\mathsf{fm}-1)(\mathsf{acn})[\![h]\!]$，即可证明 $[\![h']\!] \leq \mathsf{acn}^2\mathsf{fm}^2[\![h]\!] + 1$。□

B Proo第4节的fs（FL$_{ew}$超序列扩展的阿克曼上界： ω-演算系统)

注释 B.1（算法的高层描述）。受到向量加法系统中用于计算可覆盖集的 Karp-Miller 算法的启发 [17]，我们采用以下算法。下面给出一个非正式的高层描述。

给定一个输入超矢列，执行通常的反向证明搜索，穷尽地应用各规则，直到（在某个前提中）遇到一个大于某个已出现分量的活动分量。我们并不写下这个新的活动分量，而是写下其修订版本，即将其中每一个重数严格大于其对应项（位于已出现分量中）的 ψ^k 替换为 ψ^ω。因此，我们的证明搜索建立在 ω-超序列上，而后者本身由 ω-分量构成；其中前件由一个ω-集——即 ω-公式的集合——以及 $\mathbb{N}^d$ 中的一个向量组成，该向量保存关于具有有限重数的公式的信息。一个公式要么是ω-公式，要么具有有限重数（但不能两者兼有）。

我们需要证明三件事：可以从 ω-证明得到通常的证明（可靠性），证明搜索会终止，并且只要存在证明就一定能找到（完备性）。

为保证可靠性，思路是：从一个 ω-超序列出发，其中活动分量的 ω-集严格增大，沿路径向下到达其下方的ω-对应项；这条路径可以按需反复迭代，从而在我们正在构造的通常证明中，用 ψ^k 替换 ψ^ω，其中 k要足够大。我们可以通过对 ω-证明进行从叶到根的分析，先算出所需的取值（因为该证明是有限的）。更有帮助的理解方式是，沿着这条路径，从引入 ω-对应项的规则实例，走到 ω-集严格更大的修订后活动分量。要使这种迭代可行，我们必须能够传递所产生的公式 ψ 的额外副本，因此重数会在每次迭代后增长。为此，我们需要 ω-对应项与修订后的活动分量之间存在更强的关系：从证明论意义上说，这两个分量需要相关；非正式地讲，这一对分量应属于关系 R 的传递闭包，而该关系由规则模式中共享同一个多重集变量的分量实例构成（正是这个变量将用于传递额外公式）。

如果证明搜索不终止，那是因为证明搜索树是无穷的。我们可以轻松地从中提取一棵无穷 R树。为了导出矛盾，我们需要从这棵树中提取一个无穷分支，因此需要确保 R 是有限分支的。我们在上一段中描述 R 的方式并不能确保有限分支：毕竟，甚至输入超矢列也可能在证明搜索的某个分支上被无限次使用。解决办法是对 R 关系施加更严格的要求。它不仅应将一个主分量与一个活动分量关联起来，还必须关联“最佳”的主分量。何为最佳？答案是：在相关问题中，最后创建且有可能改变活动分量的那个主分量（我们称之为关键祖先）。现在，如果这个主分量在传递闭包下与无穷多个分量相关联，那么必定会出现重复，因为最佳主分量控制着在其保持最佳的同时能够创建多少个不同的分量。

为证明完备性，只需说明通常证明中的任何操作都能在 ω-证明中模拟。由于 ψ^ω 自然地表示为 ψ的无限多个副本，因此很容易推导出适用于 ω-公式的相应规则。特别是， ω-公式在向上推导时会持续保留。□

Lemma 4.5. 设 h 是一个不含 ω的 ω-超序列。那么， h 在$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})$ 中可证，当且仅当它在$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})$中可证。$_\omega$.

证明。从左到右的方向显然成立，因为$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 具有作用于第二分量的规则。从右到左的方向可由归纳法得出，该归纳法依赖于以下观察：在任何规则实例中，如果结论超序列不含 ω，那么所有前提也都不含 ω；因此，根据上述双射，$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})$中存在一个匹配的规则实例。□

引理 4.7. 演算系统$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})_\omega$ 和$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$可证相同的 ω-超序列。

证明。每个 ω-超序列若在$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 中可证，则在$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$中也可证，因为前者的每个规则实例都属于后者。反向：假设 h 在$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$中有一个证明 π。对 π进行结构归纳。（基例）直接：对基初始超序列应用(EC)。（归纳情形）假设 π 如下左所示结束。根据$\mathbf{HFL}^{=}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$中$\mathbf{r}^{\rightsquigarrow}$ 的定义，存在一个基础实例$\mathbf{r}$（如下右所示），使得$g \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}} (\mathrm{EC})\ h$。

$$\frac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_n\\ h \mid s_1 & \dots & h \mid s_n\end{array}}{h}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow} \qquad \frac{\begin{array}{ccc} g \mid s_1 & \cdots & g \mid s_n\end{array}}{g}\ \mathrm{r}$$

根据归纳假设，每个 $h|s_i$ 在$\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$中可证。根据(EW)， $g|s_i$ 在$\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 中也可证。应用基础实例r，我们得到 g。利用(EC)，我们得到 h 在$\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$中的一个证明。

最后一种情况：最后一条规则是 (EC) 或 (EW)。由于规则形式略有不同，上述情况并未涵盖它。不过，变换过程很直接（在 $\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 中应用相同的规则）。 □

引理 4.8. (EW) 和 (EC) 在 $\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathcal{R})^{\rightsquigarrow}_{\omega}$ 中是超序列保持可容许的。

证明。证明采用对一个 ω-超序列 h的证明 π 的高度 α 进行归纳。

(EW)：基例显然。归纳步骤：假设 π 具有如下形式，其中每个 π_i 的高度为 $\alpha_i < \alpha$。我们要证明 $h|t$。

$$\frac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_n\\ h \mid s_1 & \dots & h \mid s_n\end{array}}{h}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$$

根据归纳假设，超序列 $(h|t|s_1)$， $\ldots, (h|t|s_n)$ 具有高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$ 的证明 π_i'. 设 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$ 的基础实例 r 如下方左侧所示 .

于是我们有 $g \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}}$ (EC) h。经检查，下方右侧是 $\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 的一个规则实例。

$$\frac{\begin{array}{ccc} g \mid s_1 & \cdots & g \mid s_n\end{array}}{g}\ \mathrm{r} \qquad \frac{\begin{array}{ccc} g \mid t \mid s_1 & \cdots & g \mid t \mid s_n\end{array}}{g \mid t}\ \mathrm{r}$$

现在只需注意到 $g \mid t \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}}$ (EC) $h \mid t$。

最后需要考虑的情形是，若 h 由 (EC) 或 (EW) 得到，但这可由归纳假设轻易得出。

(EC)：基例显然。归纳步骤：假设 π 具有以下形式，其中每个 π_i 的高度为 $\alpha_i < \alpha$。我们要证明 $h \mid t$。

$$\frac{\begin{array}{ccc}\pi_1 & & \pi_n\\ h \mid t \mid t \mid s_1 & \dots & h \mid t \mid t \mid s_n\end{array}}{h \mid t \mid t}\ \mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$$

根据归纳假设，$(h \mid t \mid s_1)$……，$(h \mid t \mid s_n)$有高度为 $\leq \alpha_i < \alpha$的证明 π_i'。现在只需证明该演算包含规则实例 $(h \mid t \mid s_1)$……，$(h \mid t \mid s_n)/(h \mid t)$。注意，$\mathbf{HFL}^{\rightrightarrows}_{\mathbf{ew}}(\mathrm{R})_\omega$ 包含下面的基础规则实例 r，使得 $g \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}}$ (EC) $h \mid t \mid t$。

$$\frac{\begin{array}{ccc} g \mid s_1 & \cdots & g \mid s_n\end{array}}{g}\ \mathrm{r}$$

有两种可能。

(1) 如果 $|g|_t - |(h \mid t)|_t < \mathrm{acn}$，也就是说，我们尚未用尽允许使用的 (EC) 规则数量，因此可以再应用一次，即 $g \rightsquigarrow^{\mathrm{acn}}$ (EC) $h \mid t$。

(2) 否则 $|g|_t - |(h \mid t)|_t = \mathrm{acn}$。根据 acn 的选择， t至少有一个副本必定作为规则模式 r 中的超序列变量 H的一部分被实例化（鸽巢原理）。考虑 r 的变体 r'，其中从 H的实例化中省略了这个 t副本。用 $\mathrm{r}'^{\rightsquigarrow}$ 替代 $\mathrm{r}^{\rightsquigarrow}$，即可得到 $h \mid t$。

最后一 种情况是 (EC)，由归纳假设可得；另一种是 (EW)，由上文证明的 (EW) 的 hp-可容许性可得。 □

C 第 5 节的证明（$\mathbf{FL}_{\mathrm{ew}}$ 扩展的证明搜索算法）

定理 5.15（复杂度）。Wkn在 $\mathbf{F}^{\star}_{\omega}$ 时间内终止。

证明。由引理5.12可知，该算法显然会终止。回想一下，$\mathrm{Wkn}(h_0)$ 在第一步构造出 $T_\omega(\mathbf{h}^{\circ}_0)$；根据引理5.11，这棵树的大小有一个由 $\mathbf{F}^{\star}_{\omega}$ 函数给出的上界。

对 $T_\omega(\mathbf{h}_0^\circ)$ 的构造进行实例化、展开节点并完成所有必要的检查，以及检查ω-急切证明的子树，这些操作所需的时间都是对象大小的原始递归函数。因此，根据定理 2.8，该算法的运行时间是一个以 $\mathbf{F}^\star_\omega$ 函数为界的原始递归函数，即属于 $\mathbf{F}^\star_\omega$。□