arXiv:2602.19293v1 [math.AT] 22 Feb 2026

n-类型的离散同伦假设

Daniel Carranza Krzysztof Kapulkin

2026年2月24日

摘要

我们证明，对任意非负整数 n，在 n-等价处局部化之后，离散同伦理论与经典同伦理论是等价的。通过构造图的神经函子的一个显式同伦逆——该函子将图对应到一个 n-纤维化立方集合——我们还能够对若干此前未知的立方体边界与圈的悬挂的离散同伦群给出显式计算。

谨献给 *H´el`ene Barcelo*。

目录

1 预备知识.5 图与离散同伦论.5 立方集合.7 半立方集合.13 图的神经.14 2 双映射柱.18n-骨架推出.18 映射柱.23 与立方双映射柱的比较.29 3 逆构造.34 用 F-序列给出的显式描述.38 4 主要定理.46 5 计算显式离散同伦群.55 球面的离散模型.55 由单纯复形构造一个 n-等价图.58 A 非奇异立方集合.60 Reedy 范畴.61 Reedy 范畴上的预层.61 三角剖分与立方化.64

引言

离散同伦论是数学中一个新兴领域，它将连续情形中的直觉和构造应用于图等刚性离散对象。它为图赋予离散同伦群和同调群，这些群承载着关于图结构的重要组合信息 [BKLW01, BB- dLL06, BCW14]。因此，它在数学领域内外均得到了应用；数学领域内的应用包括拟阵理论 [Mau73,CCO15] 和超平面配置 [BL05], ，而数学领域外的应用则包括

网络分析 [Atk74,Atk76], 、组合时间序列 [BL05], , 以及最近的拓扑数据分析[KK25], , 简称 TDA。尤其是在 TDA 中，离散同调与持久性的结合已被证明比基于 Vietoris–Rips复形的“标准”技术更能抵抗噪声。

尽管取得了这些成功，但人们对图 [BGJW19] 的离散同伦群和同调群仍知之甚少。例如，*Greene*球面是一个具有 10 个顶点和 16 条边的图；目前我们只知道它的离散同调群直到度 3 的情形，而且即便如此，该结果也是借助大规模并行计算获得的 [KK24b]。它的离散同伦群也只知道度 0、1 和 2 的情形。谈到 Quillen 的代数 K-理论时，Friedlander 曾评论道：“Quillen 对我们使了个狠招，给了我们非常有趣的不变量，而我们却苦苦挣扎，只为完成最基本的计算。”这句话，除了其中使用了 Quillen 的名字之外，用来描述离散同伦群和同调群竟然再贴切不过。

前述的一些计算之所以能够实现，要归功于最近对 Babson、Barcelo、de Longueville 和 Laubenbacher 的猜想 [CK24] 的证明 [BBdLL06]：图的离散同伦群和同调群可以在拓扑上实现。更准确地说，该猜想断言，图的离散同伦群和同调群 G 与空间 $|\mathrm{N}_1 G|$ 的经典（或连续）同伦群和同调群相同，其中的空间 G可以与图关联起来。这里，$\mathrm{N}_1 G$表示 G的 1-神经，它是一个立方集合，其 n-立方体通过使用超立方体图 Q^n探测 G得到，即 $(\mathrm{N}_1 G)_n = \{\text{graph maps } Q^n \to G\}$。立方集合 X是空间 [的一个组合模型 Kan55、Cis06、Jar06、CK23]，由一族集合 X_0、 X_1、 X_2、.....形式立方体组成，这些形式立方体通过面映射和退化映射连接起来，用以指示哪些立方体是其他立方体的面或退化映射。给定一个立方集合 X，可以通过对 X作几何实现得到一个空间，即先取所有维数的立方体的不交并，然后根据面映射和退化映射将它们粘合起来。所得空间通常记作 $|X|$。因此，这个如今已经得到证明的猜想给出了一种从图构造空间的方法，使它们的经典同伦群和同调群与离散同伦群和同调群相同：非正式地说，对每个映射 $Q^n \to G$粘合一个 n-立方体。

证明该猜想时的关键观察在于，函子 N_1 只是一列函子中的第一个：

$$\mathrm{N}_1 \longrightarrow \mathrm{N}_2 \longrightarrow \mathrm{N}_3 \longrightarrow \cdots \longrightarrow \mathrm{N}_\infty ,$$

其中，N_m 用边长更大的超立方体图来探测一个图。 Q^n 是单条边与自身的 n重盒积，而$\mathrm{N}_m G$ 的 n-立方体则是通过取 I_m与自身的 n重盒积得到的； I_m是一个具有$m+1$ 个顶点、 m 条边且排成一条直线的图。于是，函子N_∞ 是该序列在从图到立方集合的函子范畴中的余极限。其要点在于，N_∞ 是一个Kan复形，即一种特别良好的立方集合，因而更易于分析。此外，该序列中的所有函子都是弱等价的，这意味着它们的同伦群与同调群同构。因此，不必使用N_1, , 也可以等价地使用N_∞，此时该猜想要容易证明得多。

遗憾的是，即使对于非常小的图，空间 $|\mathrm{N}_1 G|$ 也是一个无限维胞腔复形；换句话说，立方集合 $\mathrm{N}_1 G$ 在任意高维数上都有非退化立方体，因此几乎不可能通过传统的拓扑方法计算离散同伦群和同调群。不过，前述结果使得我们能够将（经典）同伦论中的一些常用计算工具引入离散同伦论；这些工具包括赫维茨定理和纤维化长正合序列。

此后，该领域的若干专家猜想，离散同伦论或许与经典同伦论等价。这一陈述可以用多种方式精确表述，包括利用 ∞-范畴理论及其呈现 [Joy02, Joy09, Lur09, Cis19]。具体而言，人们预期，从图到立方集合的图的神经函子 N_∞: Graph $\to$ cSet 会诱导同伦理论/∞-范畴的等价。这里，Graph 表示图范畴，其弱等价由在所有离散同伦群（从而同调群）上诱导同构的映射给出；cSet 表示立方集合范畴。这一通常称为离散同伦假设的猜想，其证明一直难以获得，但由此产生的后果将对这一领域产生深远影响。事实上，一旦该等价得以确立，人们便可以形式地把经典同伦论中的众多结果转移到离散同伦论，其中包括：Blakers–Massey 定理、Mayer–Vietoris序列，以及 Brown 的（上同调）可表性定理，仅举数例。

在最近的一篇预印本 [KM24]中，作者勾勒了证明这一猜想的一种可能途径——它建议首先把注意力限制在证明图与空间在n-等价处局部化后的同伦理论之间的等价。n-等价是在从 0 到 n的同伦群上诱导同构的映射。这些映射在离散情形中更容易控制，因此该证明似乎更为可行。粗略地说，将一个范畴在一类映射处局部化，意味着我们把这些映射视为同构，尽管是在适当的同伦论/高阶范畴意义下这样做。若能在所有有限局部化之间建立等价，人们便有望通过某种 Postnikov 塔收敛论证来证明一般情形。作为概念验证，该预印本的作者证明：在 1-等价处局部化时，离散同伦理论与经典同伦理论相一致；此时，经典同伦理论与离散同伦理论都恢复为群胚的同伦论。

在本文中，我们沿着这一研究计划迈出了自然的下一步：证明函子 N_∞: Graph $\to$ cSet 在两侧都对 n-等价进行局部化后是一个等价。由于已知立方集合范畴等价于空间，我们可以在该范畴中工作，而不必使用拓扑空间范畴。形式上，我们的主要定理可表述如下：

定理 (参见定理 4.5)。 对于任意非负整数 n，图的神经函子 N_∞: Graph $\to$ cSet 在两侧对 n-等价进行局部化后是一个等价。

这尤其表明，离散同伦论足以呈现所有同伦 n-型，并为离散同伦假设提供了有力证据。

解决这一问题的一种自然思路是构造 N_∞ 的一个同伦逆，即定义一种运算，将立方集合 X 转化为图，记作 G_X，使得 X 与 $\mathrm{N}_\infty G_X$ n-等价。构造这样的逆时，人们自然会想到在图这一领域重现立方集合与 CW 复形共有的细胞结构。每个立方集合（或 CW 复形）都可以通过逐个粘合立方体（或胞腔）来构造，也就是说，沿着边界 $\partial\square^n$，将 n 维组合立方体 $\square^n$ 与 X 作推出，从而得到 X'。对于图而言，与之对应的做法是将图 G 与图论版本的 n 维立方体（即 $I_m^{\square n}$）沿其自然边界作推出。和生活中常见的情况一样，这件事有好有坏。好消息是，使用恰当的 m-实现函子 $|-|_m$: cSet $\to$ Graph，可以轻松地以函子性的方式重现这一构造。 m-实现函子是 m-神经 N_m 的左伴随，因此保持推出，使我们能够以这种“逐胞腔构造”的方式构造一大类图。

坏消息是，尽管我们有理由相信这种构造可行，但要证明这一点似乎极其困难。关键难点在于，图的推出允许存在大量从 Q^n 到新粘合图的非平凡映射。不过，如果粘合的各个部分彼此相距足够远，我们就能更好地控制从 Q^n 到新图的映射集合。以下例子具体说明了这一点：如果X是两个导出子图 A 和 B 的并，且从补集 $X\setminus A$ 中的一个顶点到补集 $X\setminus B$ 中的一个顶点的最短路径长度至少为 $n+2$，那么每个映射 $Q^n \to X$都可经由 A 或 B分解。

因此，我们不采用推出，而是使用一种代数拓扑中熟悉的另一种构造，即双映射柱。跨的双映射柱

$$B \xleftarrow{f} A \xrightarrow{g} C$$

定义为 $B \sqcup A \times [0,1] \sqcup C$的商，其中将$(a,\ 0)$与 $f(a)$等同，并将$(a,\ 1)$与 $g(a)$等同。这种构造是给定跨的同伦推出的一个模型，因此它比刚性推出表现得更好也就不足为奇了。当然，在图的世界里，我们需要用图的盒积 $X \square I_m$替换拓扑柱 $X \times [0,1]$；不过，做出这一改变后，上述构造基本上就行得通了。它恰好提供了足够的“回旋余地”，从而可以用这种方式分析新粘合胞腔（即映射 $Q^n \to X$）。

为了说明双映射柱在应用 N_∞ 后按预期方式表现，我们引入 n-骨架推挤的概念。图的推出是 n-骨架的，如果在应用 1-神经 N_1 之后再应用 n-骨架 sk^n: cSet $\to$ cSet，它是一个推出。这里， n-骨架针对 $k > n$从立方集合中移除所有非退化的 k-立方体。本质上， n-骨架推挤（沿单态射）是如下范畴中的那些方块

图，它们在立方集合上关于同伦（$n-1$）-类型的模型结构中成为同伦推出，该模型结构在 [KM24]中引入。另一种说法是，我们最终感兴趣的是 n-骨架推挤，而双映射柱的构造只是实现它的一种方便方式。

n骨架推出的思想可以追溯到 Barcelo、Greene、Jarrah 和 Welker 的工作 [BGJW21]。具体而言， [BGJW21 定理 5.2] 的证明中就可以看到其中一种形式。他们还指出了上文讨论的一个关键示例，即 n骨架推出：将一个图 G 写成两个子图的并，使得每个映射 $Q^n \to G$ 的像都完全位于其中一个子图内。这个示例是他们证明部分梅耶–维耶托里斯序列的关键一步。通过从立方集合的角度分析他们的证明，我们得以明确指出所需条件，并在分析中运用抽象同伦理论的方法，尤其是针对同伦 n-型的模型结构，从而由此推导出更强的结论。

敏锐的读者现在或许会注意到一个关键难点：从推出改用双映射柱后，我们失去了必要的函子性，而此前通过应用 m实现函子，我们是具备这种函子性的。解决办法是不直接对 X 应用 m实现，而是设计一种运算 $F_!$，先扩展X，使得在 X 中粘合一个 n立方体，相当于将一个锥粘合到 $F_!X$上。由于粘合进去的胞腔都是可缩的，通过粘合胞腔得到的双映射柱实际上在同伦意义下是锥。综上，所需的图 G_X被构造为 $m \geq n+2$对应的 $F_!X$的 m实现 $|F_!X|_m$。

在构造 G_X时，我们还需要处理最后一个注意事项： $F_!$ 不能应用于任意立方集合，只能应用于通过自由添加退化映射、从半立方集合（即只有面映射而没有退化映射的立方集合）得到的立方集合。后者恰好可以刻画为具有*fondind* 性质的立方集合，也就是说，具有这样的性质：每个非退化立方体的**面都是非退化的**。这一概念由 Maehara 最近提出，但很难找到已发表的资料。事实上，每个立方集合都弱等价于一个 fondind 立方集合；我们将在 A节中沿用 Arakawa 和 Tsutaya 提出的思路证明这一点。我们确信，附录中的结果对专家而言都是众所周知的，并且不声称其中任何结果是原创的。

到目前为止，我们只讨论了等价的一部分，即 N_∞ 的同伦本质满射性。事实上，我们目前所描述的内容只能确保每个同伦 n-型都可以由一个 Graph 建模。因此，为了完成主要定理的证明，我们还需要讨论 N_∞ 的同伦意义下的满性和忠实性。为此，我们再次回到 [KM24], ，回顾 N_∞ 是同伦 n-型纤维化范畴结构之间的一个正合函子。因此，只需验证它满足 [Cis10], 的逼近性质；这些性质提供了一组相对精简的条件，用以证明正合函子是同伦理论之间的等价。这就是定理 4.5 证明的核心内容。

除上述定理 4.5 外，这些结果还有另外两个应用。首先，该证明给出了一种明确的构造方法，可构造一个图，使其截至指定度数 n 的离散同伦群和同调群与某个空间（例如以单纯复形形式呈现的空间）相同。我们将针对以单纯复形形式呈现 $\mathbb{R}P^2$ 的情况，讨论这一构造。其次，若干自然出现的图实际上是双映射柱的实例，这使我们能够计算这些图的一些新的同伦群。这些图包括圈的迭代悬挂以及 n-立方体的边界。总的来说，本文所呈现的结果从理论和计算两个角度极大地丰富了当前对离散同伦论的认识。

本文结构。 我们首先在第 1 节回顾离散同伦论、立方同伦理论及二者相互作用所需的背景知识。我们的方法和术语大体沿用 [CK24、KM24]。第 2 节讨论图的 n 骨架推挤及其通过双映射柱的实现。第 3 节介绍函子 $F_!$。具体而言，我们用 F-序列明确描述了同伦逆的顶点和边。第 4 节证明主要定理：在对 n-等价进行局部化之后，离散同伦理论与经典同伦理论等价。最后，第 5 节讨论前述结果的计算应用，包括如何显式构造由单纯复形呈示、具有指定离散同伦 n-型的图，以及计算先前未知的 n-立方体边界和圈的悬挂的离散同伦群。如上所述，第

A 节包含有关 fondind 和非奇异立方集合的内容，确保我们的构造可应用于任意同伦 n-型。

致谢。 本项目始于第二作者与 Mark Behrens 和 Samira Jamil 的一次讨论，讨论的问题是单位映射 $X \to \mathrm{N}_n|X|_n$ 在不超过 n 度时是否诱导同调群上的同构。我们深深感谢他们富有洞见的想法，这些想法促成了本文结果如今的形式。

我们也感谢 Kensuke Arakawa、Yuki Maehara 和 MitsunobuTsutaya 对 A节的贡献；特别感谢他们引入了 fondind预层的概念，并提出了一种证明技巧，使我们得以证明每个立方集合都与某个 fondind 立方集合弱等价。

我们谨以此文献给 H´el`ene Barcelo，她是离散同伦论领域的创始人；她开创性的思想至今仍在我们的工作和学术共同体中激荡。

1 预备知识

本节汇集了离散同伦论、立方同伦论及二者相互作用所需的背景材料。

图与离散同伦论

我们先简要概述本文所讨论的特定图范畴。

一个*Graph* 是一个带有自反对称关系的集合。我们用字母 G、H、.....表示图，并在记号中省略该关系。我们将集合中的元素称为图的顶点。对于一个图 G，记号$v \in G$表示 v是 G的一个顶点。当一对元素（v、 w） $\in G \times G$属于该关系时，我们写作 $v \sim w$，并称v与 w相连，或者说存在一条从 v到 w的边。我们将图 G的底层集合称为 G的顶点集，记作 $V(G)$。

对于图 G， G的一个子图 H由一个子集 $V(H) \subseteq V(G)$以及 $V(H)$上的一个自反对称关系构成，并满足：若 $v \sim w$属于 H，则 $v \sim w$属于 G。记号 $H \subseteq G$表示 H是 G的一个子图。一个导出子图是满足以下性质的子图 $H \subseteq G$： $v \sim w$属于 H当且仅当 $v \sim w$属于 G。

给定两个图 G和 H，从 G到 H的图映射是一个保持关系的集合函数 $f\colon G \to H$。我们用 Graph 表示图范畴，并指出该范畴是预层范畴 [的一个反射子范畴（CK24，定义 1.1]）。

我们考虑的一些基本图包括区间图和圈图。

定义 1.1。对于 $m \geq 0$,

1. m-区间 I_m 是具有以下性质的图：
   - 作为顶点，整数 $0 \leq i \leq m$;
   - 对所有 $i \in \{0, \ldots..., m-1\}$，在 i和 $i+1$之间有一条边。
2. m-循环 C_m 是具有以下特征的图：
   - 顶点为整数 $0 \leq i \leq m-1$;
   - 对于 $i \in \{0, \ldots, m-2\}$， i与 $i+1$之间有一条边；且 $m-1$与 0 之间有一条边。
3. 无限区间 I_∞ 是具有以下特征的图：
   - 顶点为整数 $i \in \mathbb{Z}$;
   - 在 i和 $i+1$ 之间的一条边，适用于所有 $i \in \mathbb{Z}$。



图1：分别为图 I_3 与 C_3。

为了在图的语境中定义同伦的概念，我们固定一种图的乘积：盒积。

定义1.2。给定两个图 G与 H，它们的盒积是图 $G \square H$，其顶点集由$V(G \square H) := V(G) \times V(H)$给出。两个顶点$(v, w) \sim (v', w')$在满足以下任一条件时相连：

- $v = v'$ and $w \sim w'$; or
- $v \sim v'$ and $w = w'$.

积投影函数给出图映射 π_G： $G \square H \to G$与 π_H： $G \square H \to H$。记号 $G^{\square n}$表示图 G与自身的 n重盒积。我们约定，若 $n = 0$ 则 $G^{\square 0} = I_0$。盒积在图范畴上定义了一个闭对称幺半积 [KK24a，命题2.5]。

有了区间与乘积的概念，我们现在定义图映射之间的同伦。

定义1.3。

1. 给定图映射 f, g： $G \to H$，从 f到 g的同伦是一个图映射 α： $G \square I_m \to H$，对某个 $m \geq 0$，使得对所有 $v \in G$有 $\alpha(v, 0) = f(v)$且 $\alpha(v, m) = g(v)$。
2. 若存在图映射 g: $H \to G$，以及同伦 $gf \sim \mathrm{id}_G$和 $fg \sim \mathrm{id}_H$，则图映射 f: $G \to H$是一个同伦等价。

我们注意到，同伦在图映射集合 $\{G \to H\}$ 上构成一个等价关系。

与拓扑情形中的类似概念相比，图的同伦等价往往表现得不太理想。例如，圈图 C_3 和 C_4 都与只有一个顶点的图I_0 同伦等价，而这些圈 C_5、C_6、C_7、.....中没有一个是同伦等价的。事实证明，研究弱同伦等价意义下的图要方便得多。弱同伦等价是指那些在离散同伦群上诱导同构的图映射，我们现在来定义这些群。

定义1.4。设 G 是一个图， $v \in G$ 是一个顶点。对于 $n \geq 0$，(G, v) 的第 n 个离散同伦群 是如下的商

$$A_n(G, v) := \{f \colon I_\infty^{\square n} \to G \mid f(\vec{i}) = v \text{ for all but finitely many } \vec{i} \in I_\infty^{\square n}\} \Big/ \sim,$$

其中，我们约定 $f \sim g$当且仅当存在一个同伦 α： $I_\infty^{\square n} \square I_m \to G$从 f到 g，使得 $\alpha(\vec{i}, t) = v$对除有限多个顶点 $(\vec{i}, t) \in I_\infty^{\square n} \square I_m$之外的所有顶点都成立。

对于 $n \geq 1$，集合 $A_n(G, v)$ 具有由拼接给出的群运算，参见 [KM25，定义 1.28 和 1.29]。当$n = 0$ 时，集合 $A_0(G, v)$ 恢复了图的连通分支这一通常概念。若 G 是连通的，则$A_n(G, v)$ 与顶点 $v \in G$ 的选择无关。在此情形下，我们使用记号 A_nG来表示同构群 $A_n(G, v)$ 中的任意一个，其中 $v \in G$。

现在我们定义本文将贯穿研究的图之间“等价”的关键概念 er.

定义 1.5. 令 f: $G \to H$ 为图映射。

1. 给定 $n \geq 0$，如果对于所有 $v \in G$和 $k \in \{0, \ldots, n\}$，映射 $A_k f$: $A_k(G, v) \to A_k(H, f(v))$ 都是同构，我们就称 f是一个 n-等价。

2. 如果对于所有 $n \in \mathbb{N}$， f都是一个 n-等价，我们就称它是一个弱同伦等价 。

与代数拓扑一样，离散同伦论的一项重要主题是对图进行分类，直到弱同伦 py eq等价。

离散同伦的另一个不变量是图的离散同调群 。对于任意图 G，我们可以构造一个链复形 $C_\bullet G$，其定义在 $\mathbb{Z}$ 上，并且其 n-链群由图映射 I 集合上的自由群构成 $I_1^{\square n} \to G$。

$$C_n G := \mathbb{Z}\langle\{f : I_1^{\square n} \to G\}\rangle.$$

链 映射 ∂_n： $C_n G \to C_{n-1} G$将基元素 f定义为其各个面的交错和 s.

$$\partial_n(f) := \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^i (f\partial_{i,1} - f\partial_{1,0})\right).$$

可以验证，$\operatorname{im}\ \partial_{n+1} \subseteq \ker\ \partial_n$。群 $C_n G$包含一个由映射 $f : I_1^{\square n} \to G$生成的子群 $D_n G$，这些映射可经由某个非恒等乘积投影 $\sigma : I_1^{\square n} \to I_1^{\square m}$分解。也就是说，

$$D_n G := \mathbb{Z}\langle\{f : I_1^{\square n} \to G \mid f \text{ factors through a product projection } \sigma : I_1^{\square n} \to I_1^{\square m} \text{ with } m < n\}\rangle.$$

可以验证，链映射 ∂_n 将 $D_n G$ 映至 $D_{n-1} G$，因此商 $C_\bullet G / D_\bullet G$ 仍是一个链复形。 G 的离散同调定义为这个商复形的同调群。

定义 1.6。 设 G是一个 Graph。对于 $n \geq 0$， n 阶离散同调群 $H_n G$（取系数于 $\mathbb{Z}$）是链复形（$C_\bullet G / D_\bullet G$， ∂）的 n 阶同调。也就是说，

$$H_n(G) := \frac{\ker\left(\partial_n : C_n G / D_n G \to C_{n-1} G / D_{n-1} G\right)}{\operatorname{im}\left(\partial_{n+1} : C_{n+1} G / D_{n+1} G \to C_n G / D_n G\right)}.$$

通过对链复形 $C_\bullet G / D_\bullet G$进行适当的张量运算，可以定义系数取自任意环或阿贝尔群的图的离散同调。类似地，通过对链复形 $C_\bullet G / D_\bullet G$取对偶，可以定义图的离散上同调群。话虽如此，我们将只使用 $\mathbb{Z}$ 系数来研究同调群。

立方集合

我们将图的同伦论与空间的同伦论联系起来的主要方式是借助立方集合，现在我们来定义它。

回顾一下，盒范畴 $\square$ 是这样一个范畴：其对象是形如 $[1]^n = \{0 \leq 1\}^n$的偏序集，而其态射是在偏序集范畴中由以下四个特殊类别的态射通过复合生成的：

- 面 $\partial^n_{i,\varepsilon}$： $[1]^{n-1} \to [1]^n$对于 $i = 1, \ldots, n$以及 $\varepsilon = 0, 1$，由下式给出：

$$\partial^n_{i,\varepsilon}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \varepsilon, x_i, \ldots, x_{n-1});$$

- 退化映射 σ^n_i： $[1]^n \to [1]^{n-1}$对于 $i = 1, 2, \ldots\ldots, n$由下式给出：

$$\sigma^n_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n);$$

- 负连接 $\gamma^n_{i,0}$： $[1]^n \to [1]^{n-1}$对于 $i = 1$、2、……、 $n-1$定义如下：

$$\gamma^n_{i,0}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \max\{x_i, x_{i+1}\}, x_{i+2}, \ldots, x_n).$$

• 正连接 $\gamma^n_{i,\ 1}$： $[1]^n \to [1]^{n-1}$ 对于 $i = 1$、2、……、 $n-1$ 定义如下：

$$\gamma^n_{i,1}(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_{i-1}, \min\{x_i, x_{i+1}\}, x_{i+2}, \ldots, x_n).$$

这些映射满足以下立方恒等式：

$$\partial_{j,\varepsilon'}\partial_{i,\varepsilon} = \partial_{i+1,\varepsilon}\partial_{j,\varepsilon'} \quad \text{for } j \le i; \qquad \sigma_j\partial_{i,\varepsilon} = \begin{cases} \partial_{i-1,\varepsilon}\sigma_j & \text{for } j < i; \\ \mathrm{id} & \text{for } j = i; \\ \partial_{i,\varepsilon}\sigma_{j-1} & \text{for } j > i; \end{cases}$$

$$\sigma_i\sigma_j = \sigma_j\sigma_{i+1} \quad \text{for } j \le i; \qquad \gamma_{j,\varepsilon'}\gamma_{i,\varepsilon} = \begin{cases} \gamma_{i,\varepsilon}\gamma_{j+1,\varepsilon'} & \text{for } j > i; \\ \gamma_{i,\varepsilon}\gamma_{i+1,\varepsilon} & \text{for } j = i, \varepsilon' = \varepsilon; \end{cases}$$

$$\gamma_{j,\varepsilon'}\partial_{i,\varepsilon} = \begin{cases} \partial_{i-1,\varepsilon}\gamma_{j,\varepsilon'} & \text{for } j < i-1; \\ \mathrm{id} & \text{for } j = i-1,\ i,\ \varepsilon = \varepsilon'; \\ \partial_{j,\varepsilon}\sigma_j & \text{for } j = i-1,\ i,\ \varepsilon = 1-\varepsilon'; \\ \partial_{i,\varepsilon}\gamma_{j-1,\varepsilon'} & \text{for } j > i; \end{cases} \qquad \sigma_j\gamma_{i,\varepsilon} = \begin{cases} \gamma_{i-1,\varepsilon}\sigma_j & \text{for } j < i; \\ \sigma_i\sigma_i & \text{for } j = i; \\ \gamma_{i,\varepsilon}\sigma_{j+1} & \text{for } j > i. \end{cases}$$

一个立方集合是一个函子 $\square^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$。立方集合范畴记作 cSet，我们用立方映射表示立方集合之间的态射。按照标准惯例，我们用 X_n 表示立方集合 X 在对象 $[1]^n$ 处的取值。此外，我们将立方算子写在右侧；例如，给定立方集合 X 的一个 n-立方体 $x \in X_n$，我们将其 x 的 $\partial_{1,}0$-面写作 $x\partial_{1,}0$。我们通常用大写字母 X, Y ……表示立方集合。

定义 1.7. 设 $n \ge 0$。

1. 组合 n-立方体 $\square^n$ 是可表函子 $\square(-, [1]^n)$： $\square^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$。

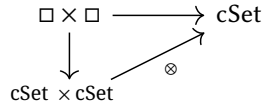
2. n-立方体 $\partial\square^n$ 的边界是由下式定义的 $\square^n$ 的子对象

$$\partial\square^n := \bigcup_{\substack{j=1,\ldots,n \\ \eta=0,1}} \mathrm{Im}\,\partial_{j,\eta}.$$

3. 给定 $i = 1$、……、 n 和 $\varepsilon = 0,\ 1$，$(i,\ \varepsilon)$-开盒 $\sqcap^n_{i,\ \varepsilon}$ 是 $\partial\square^n$ 的子对象，定义为

$$\sqcap^n_{i,\varepsilon} := \bigcup_{(j,\eta)\neq(i,\varepsilon)} \mathrm{Im}\,\partial_{j,\eta}.$$

立方集合范畴具有一个闭幺半积，称为立方集的几何积。此积是通过将函子 $\square \times \square \to \mathrm{cSet}$ 沿左 Kan 延拓构造得到的，该函子由 $([1]^m,\ [1]^n) \mapsto \square^{m+n}$ 给出。



注意，立方集的几何积并不对称；虽然存在一个由恒等映射给出的同构 $\square^m \otimes \square^n \cong \square^n \otimes \square^m$，但该同构对于立方体面包含并不自然。

每个立方集合都具有由其骨架给出的滤过。给定立方集合 X 与 $n \ge -1$，令 $\mathrm{sk}^n X \subseteq X$ 为 X 的子对象，它包含 X 的所有维数为 $\le n$ 的非退化立方体（特别地，$Sk^{-1}X = \varnothing$）。对于 $m \le n$，我们有包含映射 $\mathrm{sk}^m X \hookrightarrow \mathrm{sk}^n X$，它关于变量 $X \in \mathrm{cSet}$ 是自然的。

命题 1.8. 设 X 为立方集合。对于 $n \geq 0$，包含映射$\mathrm{sk}^{n-1} X \hookrightarrow \mathrm{sk}^n X$构成一个推出方块中的右向箭头

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in (X_n)_{\mathrm{nd}}} \partial\square^n & \xrightarrow{\partial x} & \mathrm{sk}^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in (X_n)_{\mathrm{nd}}} \square^n & \xrightarrow{x} & \mathrm{sk}^n X \end{array}$$

其中 $(X_n)_{\mathrm{nd}}$ 表示 X 中非退化的 n-立方体的集合。此外，图表

$$\mathrm{sk}^0 X \hookrightarrow \mathrm{sk}^1 X \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathrm{sk}^n X \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X$$

是一个余极限图。 □

对于每个 n，函子 $\mathrm{sk}^n \colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{cSet}$ 有一个右伴随，称为 n-余骨架 函子，记作 $\mathrm{cosk}^n \colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{cSet}$。明确地说，立方集合 X 的 n-余骨架的 k-立方体集合为

$$\mathrm{cosk}^n(X)_k := \mathrm{cSet}(\mathrm{sk}^n \square^k, X).$$

立方集合通过几何实现与拓扑空间相关联。更准确地说，几何实现函子 $|-| \colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{Top}$ 定义为函子 $\square \to \mathrm{Top}$ 的余极限延拓，该函子将 $[1]^n$ 映射到拓扑 n-立方体 $[0,1]^n$。

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{[1]^n \mapsto [0,1]^n} & \mathrm{Top} \\ \downarrow & \nearrow_{|-|} & \\ \mathrm{cSet} & & \end{array}$$

我们利用几何实现，在立方集合上构造 *Grothendieck* 模型结构，用以刻画拓扑空间的同伦论。

定义 1.9。

1. 若立方映射 $X \to Y$对开盒包含具有右提升性质，则称其为***Kan*** 纤维化。也就是说，对于任意交换方块，

$$\begin{array}{ccc} \sqcap^n_{i,\varepsilon} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & & \downarrow f \\ \square^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

存在一个映射 $\square^n \to X$，使得三角形

$$\begin{array}{ccc} \sqcap^n_{i,\varepsilon} & \longrightarrow & X \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow f \\ \square^n & \longrightarrow & Y \end{array}$$

交换。

2. 若立方集合 X 的唯一映射 $X \to \square^0$ 是 Kan 纤维化，则称其为***Kan***复形。

我们将由 Kan复形组成的 cSet 全子范畴记作 Kan。

定理 1.10 (Cisinski，参见 [DKLS24，定理 1.34])。 立方集合的范畴 cSet 具有一种模型结构，称为Grothendieck 模型结构，其：

- 余纤维化是单态射；
- 纤维化是 *Kan* 纤维化；并且
- 弱等价是这样的映射 $f\colon\ X \to Y$它们在几何实现 $|f|\colon\ |X| \to |Y|$下成为弱同伦等价。□

给定 $n \geq 0$，我们称拓扑空间之间的连续函数 $f\colon S \to T$为 n-等价，如果它在连通分支上诱导双射，并且对所有 $x \in X$，映射 $\pi_k f\colon \pi_k(X,x) \to \pi_k(Yy)$ 对所有 $k \in \{1, \ldots, n\}$ 都是同构。特别地， f是弱同伦等价，当且仅当它对所有n都是 n-等价。

对于立方集合之间的映射，我们有类似的定义。

定义 1.11。 给定 $n \geq 0$，立方映射 $f\colon X \to Y$是 n-等价，如果 $|f|\colon |X| \to |Y|$是拓扑空间的 n-等价。

n等价类参与 cSet 上两种不同的模型结构：用于 n-类型的 *Cisinski* 模型结构以及用于 n-类型的转移模型结构。我们先介绍 Cisinski 模型结构，为此需要以下定义。

定义 1.12. 令 $n \geq 0$。

1. 立方映射 $f\colon X \to Y$若对以下映射集中的映射具有右提升性质，则称为朴素 n-纤维化：

$$\{\sqcap^k_{i,\varepsilon} \hookrightarrow \square^k \mid k \geq 1,\ i = 1, \ldots, k,\ \varepsilon = 0, 1\} \cup \{\partial\square^k \hookrightarrow \square^k \mid k \geq n+2\}.$$

2. 立方集合 X若唯一映射 $X \to \square^0$ 是朴素 n-纤维化，则称其为 n-纤维化。

定理 1.13 ([KM24，定理 2。7])。 立方集合范畴cSet 具有一种称为用于 n-类型的 Cisinski 模型结构的模型结构，其：

- 余纤维化是单态射；
- 纤维对象是 n-纤维化的立方集合；并且
- 弱等价是 n-等价。 □

根据构造， n-类型的 Cisinski 模型结构是 Grothendieck 模型结构的左Bousfield局部化。我们还指出，每个朴素的 n-纤维化都是此模型结构中的纤维化，尽管反过来只有对于 n-纤维对象之间的映射才成立。

定理 1.14 (参见 [KM24，定理 2。15])。 立方集合范畴 cSet具有一种模型结构，称为转移得到的 n-类型模型结构，其：

- 余纤维化是单态射 $f\colon\ X \to Y$，使得方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^{n+1} X & \hookrightarrow & X \\ {\scriptstyle \mathrm{sk}^{n+1} f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{sk}^{n+1} Y & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

是一个推出方块；

• 纤维化是满足以下条件的立方映射 $f\colon\ X \to Y$ 使得 $\mathrm{cosk}^{n+1} f\colon \mathrm{cosk}^{n+1} X \to \mathrm{cosk}^{n+1} Y$ 是一个 *Kan* 纤维化；并且

• 弱等价是 n-等价。 □

证明。 模型结构的存在性见 [KM24，定理 2.15]。剩下的只是验证余纤维化的描述。为此，固定一个立方映射 $f\colon X \to Y$

若 f 是单态射，则 $\mathrm{sk}^{n+1} f$ 是余纤维化，因为 sk^{n+1} 是左 Quillen。这意味着，如果这个方 re

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^{n+1} X & \hookrightarrow & X \\ {\scriptstyle \mathrm{sk}^{n+1} f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ \mathrm{sk}^{n+1} Y & \hookrightarrow & Y \end{array}$$

是一个推出，那么 f 是余纤维化，因为它是余纤维化的推出。

若 f 是余纤维化，则考虑从这个推出导出的映射

$$\Phi\colon X \cup_{\mathrm{sk}^{n+1} X} \mathrm{sk}^{n+1} Y \to Y.$$

按构造，该映射对所有 $k \le n+1$ 在 k-立方体上是双射（且对所有 k 是单射）。由此可知，映射 $\mathrm{cosk}^{n+1}\Phi$ 是同构，这意味着 Φ 在转移模型结构中是无圈纤维化。据此，我们得到该方块的一个提升：

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & X \cup_{\mathrm{sk}^{n+1} X} \mathrm{sk}^{n+1} Y \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \Phi} \\ Y & = & Y \end{array}$$

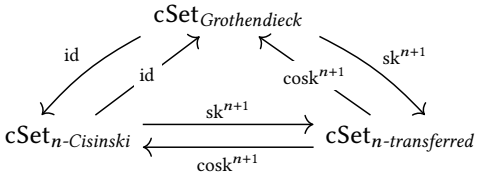
映射 Φ 既是单态射又是分裂满态射，因而是同构。 □

按构造，该模型结构是沿 $(n+1)$-余骨架函子 $\mathrm{cosk}^{n+1}\colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{cSet}$ 从 Grothendieck 模型结构右转移得到的。因此，它是余纤维生成的 [Hir03，定理 11.3.2]。

注记 1.15. 为定理 1.14 所给出的最后一个论证可用于给出 [KM24，命题 2.21] 的另一证明。

cSet 上的这三种模型结构通过以下 Quillen 伴随相互关联。

定理 1.16 （参见 [KM24，定理 2.15]）。 图表中的每个伴随



都是一个 *Quillen* 伴随。底部的伴随还是一个 *Quillen* 等价。 □

仿照单纯集合理论，我们可以将任意立方集合的同调群定义为适当链复形的同调。更准确地说，给定一个立方集合 X，我们定义一个链复形 $C_\bullet X$，其 n 链群由 n 立方体组成的集合生成

$$C_n X := \mathbb{Z}\langle X_n \rangle.$$

令 $DX_n \subseteq X_n$ 表示 n 立方体 $x \in X_n$ 的子集，这些立方体可写为 $x = y\sigma$，其中 $y \in X_m$，且存在某个由非恒等退化映射复合而成的态射 $\sigma\colon\ [1]^n \to [1]^m$。取自由阿贝尔群后，此子集 DX_n 成为一个子群

$$D_nX := \mathbb{Z}\langle DX_n\rangle.$$

在基元素上定义映射 $\partial_n\colon\ C_nX \to C_{n-1}X$

$$\partial_n(x) := \sum_{i=1}^{n}(-1)^n(x\partial_{i,1} - x\partial_{i,0}).$$

容易验证 $\operatorname{im}\ \partial_{n+1} \subseteq \ker\ \partial_n$，且 ∂_n 将 D_nX 映至 $D_{n-1}X$。因此，我们得到由商 $C_\bullet X/D_\bullet X$ 定义的链复形。

定义 1.17. 设 X 是一个立方集合。给定 $n \geq 0$，X 的 n 阶立方体同调群 是链复形 $C_\bullet X/D_\bullet X$ 的 n 阶同调群。也就是说，

$$H_n(X) := \frac{\ker\left(\partial_n\colon C_nX/D_nX \to C_{n-1}X/D_{n-1}X\right)}{\operatorname{im}\left(\partial_{n+1}\colon C_{n+1}X/D_{n+1}X \to C_nX/D_nX\right)}.$$

同调是立方集合的同伦不变量，也就是说，它将弱同伦等价映为等价。

命题 1.18. 设 $f\colon\ X \to Y$ 是一个立方映射。

1. 如果 f 是弱等价，那么对于所有 $n \geq 0$，H_nf 都是同构。
2. 给定 $n \geq 0$，如果 f是一个 n-等价，那么对于所有 $k \in \{0, \ldots, n\}$，$H_kf\colon\ H_kX \to H_kY$都是同构。

证明。 我们首先注意到，任意立方集合 X上的骨架滤过赋予其几何实现 $|X|$一个 CW复形的结构。每个维数中的粘接映射由命题 1.8 中的推出方块指定。

对于一个立方集合 X，令 $\overline{X}$表示这样一个立方集合：其 n-立方体集合由满足以下条件的对 (φ, x) 给出：$\varphi\colon\ [1]^n \to [1]^k$是 $\square$ 中任意一个定义域为 $\varphi = [1]^n$ 的满射，而 $x \in X_k$是 X 中任意一个 k-立方体。我们将这些对组成的集合按由关系 $(\varphi, x\sigma_i) = (\sigma_i \circ \varphi, x)$ 生成的等价关系取商，其中 $\sigma_i\colon\ [1]^k \to [1]^{k-1}$是任意一个乘积投影。此构造关于 X 是函子性的，并且有一个由 $(\varphi, x) \mapsto x\varphi$ 给出的自然映射 $X \to \overline{X}$。根据 [Doh23，命题 2.28]，，此映射是弱同伦等价。

可以构造链复形的一个自然同构

$$C_\bullet\overline{X}/D_\bullet\overline{X} \xrightarrow{\cong} C_\bullet^{\mathrm{CW}}(|X|)$$

从 X 的立方体链复形到几何实现 $|X|$的CW链复形。第(1)部分现在由如下事实推出：CW同调将CW复形之间的弱同伦等价逆转。

对于第(2)部分，设 $f\colon\ X \to Y$ 是一个 n-等价。由Grothendieck 模型结构中函子性分解的存在性，我们可以选取一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \tilde{f}} \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{Y} \end{array}$$

使得竖直箭头是 n-等价，水平箭头是弱同伦等价，并且$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$立方集合 X和 Y是 Kan。由于每个 Kan 复形在 n-转移模型结构中都是纤维化的，右侧

图表中的箭头

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{X} & \longrightarrow & \mathrm{cosk}^{n+1}\widetilde{X} \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{cosk}^{n+1}\widetilde{f}} \\ Y & \xrightarrow{\sim} & \widetilde{Y} & \longrightarrow & \mathrm{cosk}^{n+1}\widetilde{Y} \end{array}$$

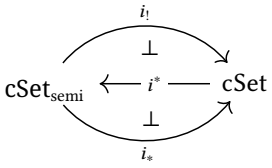
根据定理 1.16，这是一个弱同伦等价。映射 $\widetilde{X} \to \mathrm{cosk}^{n+1}\widetilde{X}$和 $\widetilde{Y} \to \mathrm{cosk}^{n+1}\widetilde{Y}$在维数不超过 $\leq n+1$的立方体集合上诱导双射，因此它们在维数不超过 n的同调上诱导同构。根据第 (1) 部分，映射 $X \to \widetilde{X}$和 $Y \to \widetilde{Y}$在同调上诱导同构。同样，映射 $\mathrm{cosk}^{n+1}\widetilde{f}$ 在同调上诱导同构，因此根据三取二， f在维数不超过 n 的同调上诱导同构。□

我们稍后将看到，立方同调如何推广图的离散同调。

半立方集合

令 $\square_{\mathrm{inj}}$ 表示盒范畴中由单态射构成的子范畴，即由面映射复合而成的态射。半立方集合是 $\square_{\mathrm{inj}}$上的预层，也就是一个函子 $\square^{\mathrm{op}}\,\mathrm{inj} \to \mathrm{Set}$。我们用 $\mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$表示半立方集合范畴。

包含函子 $i\colon\ \square_{\mathrm{inj}} \to \square$ 诱导一个伴随三元组：



就我们的目的而言，此图表中唯一相关的函子是 $i_!\colon\ \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}$，不过我们注意到， i^* 的存在蕴含 $i_!$ 保持余极限（作为左伴随）。

我们援引推论 A.14，将半立方集合的范畴 $\mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 等同于 cSet 中由*fondind* 立方集合 （见定义 A.10）以及保持非退化立方体的映射所给出的子范畴。

命题 1.19 （参见推论 A.14）. 函子 $i_!\colon\ \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}$ 限制为半立方集合范畴 $\mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 与cSet的如下子范畴之间的一个等价：

- 对象 是这样的立方集合：每个非退化立方体的每个面都是非退化的；并且其 e
- 态射是将非退化立方体映射为非退化立方体的立方映射。 □

我们注意到，每个单态射都会将非退化立方体映射为非退化立方体。

鉴于命题 1.19，我们借用立方集合的相应记号来表示半立方集合。特别地，

- 记号 $\square^n$ 既可以指 cSet 中的可表示函子，也可以指 cSetsemi 中的可表示函子。在任一情况下，我们指的都是由对象 $[1]^n$表示的函子。
- 记号 $\partial\square^n$ 可以指 cSet 或 cSetsemi 中的一个对象。在任一情况下，我们指的都是相应可表示对象 $\square^n$ 的子对象，它排除了非退化的 n-立方体 $\mathrm{id}_{\square^n}\colon\ \square^n \to \square^n$。
- 记号 $\sqcap^n_{i,\varepsilon}$ 可以指 cSet 或半立方集合范畴中的一个对象。无论哪种情况，我们指的都是 $\partial\square^n$（分别）中进一步省略非退化的（$n-1$）-立方体 $\partial_{i,\varepsilon}$ 的子对象： $\square^{n-1} \to \square^n$。

在这三者中 在这些情形下，函子 $i_!$ 将 $\mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 中的相应对象映射到 cSe 中对应的对象 t.

注 1.20. 为澄清一个可能引起困惑之处，函子 i^* **并不是** $i_!$的逆函子，因为 $i_!$ 不存在一个取值于整个立方集合范畴的逆函子。因此，我们**从不** 使用这个函子将立方集合转换为半立方集合；相反，我们使用推论 A.14 中描述的逆函子。

立方集合的骨架这一概念对半立方集合也同样有意义。对于 $n \geq -1$，半立方集合 X的 n-骨架是一个子对象，其 k-立方体的集合由下式给出

$$(\mathrm{sk}^n X)_k := \begin{cases} X_k & \text{if } k \leq n \\ \varnothing & \text{otherwise.} \end{cases}$$

和之前一样，如果 $m \leq n$，那么显然存在一个包含映射 $\mathrm{sk}^m X \subseteq \mathrm{sk}^n X$。我们还有命题 1.8 的一个类似结果。

命题 1.21。设 X是一个半立方集合。对于 $n \geq 0$，包含映射 $\mathrm{sk}^{n-1} X \hookrightarrow \mathrm{sk}^n X$构成推出方块中的右箭头：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{x \in X_n} \partial\square^n & \xrightarrow{\partial x} & \mathrm{sk}^{n-1} X \\ \downarrow & & \downarrow \\ \coprod_{x \in X_n} \square^n & \xrightarrow{x} & \mathrm{sk}^n X \end{array}$$

此外，图表

$$\mathrm{sk}^0 X \hookrightarrow \mathrm{sk}^1 X \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathrm{sk}^n X \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X$$

是一个余极限图。 □

图的神经

图与立方集合通过一系列“神经与实现”伴随相关联。更确切地说，对每个 $m \in \mathbb{N}$，我们定义一个余立方对象 $\square \to \mathrm{Graph}$，将 $[1]^n$ 送到 $I_m^{\square n}$，即长度为 m 的 n 维立方体。通过对余极限作延拓，我们得到一个伴随

$$\mathrm{cSet} \underset{\mathrm{N}_m}{\overset{|-|_m}{\rightleftarrows}} \mathrm{Graph} \qquad (\perp)$$

其左伴随是 m实现 函子 $|-|_m \colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{Graph}$，右伴随则是 m神经 函子 $\mathrm{N}_m \colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{cSet}$。 m-神经的一个显式公式如下：

$$(\mathrm{N}_m G)_n := \mathrm{Graph}(I_m^{\square n}, G).$$

每个 m-实现函子都是幺半的。

命题 1.22。 对于 $m \in \mathbb{N}$，函子 $|-|_m \colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{Graph}$ 相对于立方集的几何积和图的盒积是强幺半的。

这意味着它们的右伴随 N_m 是松幺半的，不过我们不会用到这一事实。

对于 $m \geq 1$，我们有两个区间图之间的映射 $\ell, r \colon I_{m+1} \to I_m$它们分别收缩第一条边和最后一条边。也就是说，

$$\ell(i) := \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ i-1 & \text{otherwise.} \end{cases} \qquad r(i) := \begin{cases} m & \text{if } i = m+1 \\ i & \text{otherwise.} \end{cases}$$

这些映射诱导出映射 $\ell^{\square n}, r^{\square n}\colon I_{m+1}^{\square n} \to I_m^{\square n}$，而这些映射又诱导出自然变换 $\ell_!, r_!\colon |-|_{m+1} \Rightarrow |-|_m$以及 ℓ^*, $r^*\colon \mathrm{N}_m \Rightarrow \mathrm{N}_{m+1}$。神经函子，或 ∞-神经函子，被定义为余极限

$$\mathrm{N}_\infty := \operatorname{colim}\left(\mathrm{N}_1 \xrightarrow{\ell^*} \mathrm{N}_2 \xrightarrow{r^*} \mathrm{N}_3 \xrightarrow{\ell^*} \dots\right)$$

在函子范畴 Fun(Graph,cSet) 中。

图神经的基本性质如下:

定理 1.23 ([CK24，定理 4.1])。对任意图 G,

1. 神经 $\mathrm{N}_\infty G$ 是一个 *Kan*复形；且

2. 对所有 $m \in \mathbb{N}$，映射 ℓ^*、$r^*\colon \mathrm{N}_m G \to \mathrm{N}_{m+1} G$在 cSet 上的 *Grothendieck* 模型结构中是无圈余纤维化。

推论 1.24(参见 [CK24，命题 5.12])。设 $f\colon G \to H$ 为一个图映射。

1. 以下条件等价:

- f是弱同伦等价;
- 对于所有 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，映射 $\mathrm{N}_m f$都是弱同伦等价;
- 存在 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，使得映射 $\mathrm{N}_m f$是弱同伦等价。

2. 对于 $n \geq 0$，以下条件等价:

- f是 n-等价;
- 对于所有 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，映射 $\mathrm{N}_m f$都是 n-等价;
- 存在 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ 使得映射 $\mathrm{N}_m f$是一个 n-等价。

证明。根据 [CK24，定理 4.6], 图的离散同伦群与其神经的立方同伦群一致。因此，由定理 1.23 可得结论。□

一个显而易见的观察是，立方集合 $\mathrm{N}_1 G$ 的同调恢复了图 G的离散同调。也就是说，$H_n(G) \cong H_n(\mathrm{N}_1 G)$。由此，推论 1.24 表明，离散同调将图的弱同伦等价映为等价。

推论 1.25。设 $f\colon G \to H$ 是一个图映射。

1. 若 f是弱等价，则对于所有 $n \geq 0$，$H_n f\colon H_k G \to H_k H$ 都是同构。

2. 给定 $n \geq 0$，若 f是一个 n-等价，则对所有 $k \in \{0, \dots, n\}$，$H_k f\colon H_k G \to H_k H$均为同构 .

证明。结合命题 1.18 与推论 1.24。□

目前，确定图范畴是否容许一个模型结构，使其弱等价恰为图的弱等价，仍是一个未决问题。然而，可以利用 ∞-神经函子在图范畴上建立一个纤维化范畴 结构。

定义 1.26。一个纤维化范畴是一个范畴 C，带有纤维化和弱等价这两个子范畴，并满足以下条件（下文中，无圈纤维化是同时为纤维化和弱等价的映射）:

1. 弱　等价满足二取三性质；也就是说，给定两个可复合的态射　　s:

$$X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} Z$$

若 f, g, gf中有两个是弱等价，则三者都是；

2. 所有同构都是无圈纤维化；

3. 沿纤维化的拉回存在；纤维化和无圈纤维化在拉回下稳定；

4. C 有一个终对象 1；对任意对象 $X \in \mathsf{C}$，典范映射 $X \to 1$ 是纤维化（即所有对象都是纤维化的）；

5. 每个映射都可以分解为一个弱等价，随后是一个纤维化。

例1.27. 由立方（或单纯）Kan复形构成的范畴 Kan 具有一种纤维化范畴结构，其纤维化是 Kan 纤维化，其弱等价是立方（或单纯）集的弱等价。

定义1.28. 纤维化范畴之间的函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 是正合的，如果它保持纤维化、无圈纤维化、沿纤维化的拉回以及终对象。

定理1.29. 图的范畴Graph 具有一种纤维化范畴结构，其中：

- 纤维化是映射 $f\colon G \to H$，它们在神经函子下被送到纤维化 $\mathrm{N}_\infty f\colon \mathrm{N}_\infty G \to \mathrm{N}_\infty H$；并且
- 弱等价是图的弱同伦等价。

此外，神经函子 $\mathrm{N}_\infty\colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{cSet}$ 是正合的。

图的无圈纤维化的一个例子是余单位映射 $|\mathrm{N}_m G|_m \to G$。

命题 1.30. 对于任意图 G和 $m \in \mathbb{N}$，余单位映射 $\varepsilon_G\colon |\mathrm{N}_m G|_m \to G$是一个无圈纤维化。

证明。 只需证明 $\mathrm{N}_m(\varepsilon_G) : \mathrm{N}_m\left(|\mathrm{N}_m G|_m\right) \to \mathrm{N}_m G$是一个无圈纤维化（参见 [CK24，第 5.25] 定理）。为此，固定一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} \partial\square^n & \longrightarrow & \mathrm{N}_m\left(|\mathrm{N}_m G|_m\right) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_m \varepsilon_G} \\ \square^n & \longrightarrow & \mathrm{N}_m G \end{array}$$

只需为转置方块找到一个提升

$$\begin{array}{ccc} |\partial\square^n|_m & \longrightarrow & |\mathrm{N}_m G|_m \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_G} \\ |\square^n|_m & \longrightarrow & G \end{array}$$

余单位 ε_G的泛性质给出了唯一映射 $\square^n \to \mathrm{N}_m G$，其 m-实现使得

$$\begin{array}{ccc} |\partial\square^n|_m & \longrightarrow & |\text{图的神经}_m G|_m \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \varepsilon_G} \\ |\square^n|_m & \longrightarrow & G \end{array}$$

交换。利用唯一性还可以推导出上方的三角形也交换。 □

推论 1.31。 对于任意 *Graph* G和 $m \in \mathbb{N}$，映射

$$\eta_{\mathrm{N}_m G} \colon \mathrm{N}_m G \to \mathrm{N}_m \left(|\mathrm{N}_m G|_m\right) \quad \textit{and} \quad |\eta_G|_m \colon |G|_m \to |\mathrm{N}_m |G|_m|_m$$

是弱等价。

证明。 根据命题 1.30，实现-神经伴随的余单位是弱等价。由三取二性质和三角恒等式即可得出结论。□

离散同伦论中的一个基本未解问题是离散同伦假设，该假设认为图与拓扑空间的同伦理论等价，且这种等价由神经函子给出。更准确地说，回忆一下，任意带有弱等价 $W \subseteq \mathrm{Mor}\ \mathsf{C}$ 的范畴 C 的同伦范畴 都是一个通用范畴 $\mathsf{C}[W^{-1}]$，配备函子 $\gamma\colon \mathsf{C} \to \mathsf{C}\ [W^{-1}]$，该函子将弱等价映为等价。特别地，纤维化范畴 C（[Bro73，§1.2]）的同伦范畴 指其在弱等价处的局部化，记作 $\mathrm{Ho}\ \mathsf{C}$。

定义 1.32。 纤维化范畴之间的正合函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 若诱导出同伦范畴的等价 $\mathrm{Ho}\ \mathsf{C} \to \mathrm{Ho}\ \mathsf{D}$，则称为纤维化范畴的弱等价 。

猜想 1.33 (离散同伦假设)。 神经函子 $\mathrm{N}_\infty\colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{cSet}$ 是纤维化范畴之间的弱等价。

注记 1.34。 对于熟悉 $(\infty,1)$-范畴理论的读者，我们指出，若纤维化范畴之间的正合函子$F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 按照定义 1.32 的意义是弱等价，那么它就是具有弱等价的范畴之间的 Dwyer– Kan 等价 [Cis19, Cor. 7.6.11]。

也就是说，如果神经猜想成立，那么函子 $\mathrm{N}_\infty\colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{cSet}$ 可提升为等价，将在弱等价处局部化的图的 $(\infty,1)$-范畴与空间/∞-群胚的 $(\infty,1)$-范畴联系起来。因此，任何在空间 ∞-范畴中成立的定理（例如 Blakers–Massey 定理、 Mayer–Vietoris 长正合序列、上同调的可表性）都将有一个关于图的对应版本。

本文代表着朝证明这一猜想迈出的一步。

请注 h意，弱等价的纤维化范畴之间的关系可刻画为满足以下条件的函子： fy the恰当近似 性质。

定义 1.35 ([Cis10, §3.6])。 纤维化范畴之间的正合函子 $F\colon \mathsf{C} \to \mathsf{D}$ 满足右逼近性质，当且仅当：

AP1. F 反映弱等价；并且

AP2. 对于任意对象 $X \in \mathsf{C}$ 和态射 $Y \to FX$ in D，存在一个态射 $X' \to X$ in C，使其适合交换图

$$\begin{array}{ccc} Y & \longrightarrow & FX \\ {\scriptstyle\sim}\uparrow & & \uparrow \\ Y' & \xrightarrow{\sim} & FX' \end{array}$$

其中从 Y' 出发的两个映射都是弱等价。

命题 1.36. [Cis10, 定理 3.19] 纤维化范畴之间的正合函子是弱等价，当且仅当它满足右逼近性质。□

对于任意固定的 n，Graph 和 cSet 中的 n-等价都参与纤维化范畴结构，而神经函子 N_∞ 再次是一个正合函子。

给定 $n \geq 0$，令 cSet_n 表示 cSet 的全子范畴，其对象是关于 n-类型的转移模型结构中纤维化的立方集合。注意，每个 Kan 复形都属于 cSet_n。

定理 1.37. 对于　$n \geq 0$，立方 *Kan* 复形的范畴 cSet_n 具有纤维化范畴结构，其中：

- 纤维化是满足以下条件的立方映射 $f\colon X \to Y\colon \mathrm{cosk}^{n+1} f\colon \mathrm{cosk}^{n+1} X \to \mathrm{cosk}^{n+1} Y$ 是 *Kan* 纤维化；并且

- 弱等价是 n-等价。

证明。 这是由纤维对象组成的模型范畴的全子范畴，因此构成一个纤维化范畴 [Bro73, 例 1.1]。 □

定理 1.38 ([KM24, 定理 3.18])。 对于 $n \geq 0$，图的范畴 Graph 具有纤维化范畴结构，其中：

- 纤维化是满足以下条件的图映射 $f\colon G \to H$

$$\mathrm{cosk}^{n+1}\,\mathrm{N}_\infty f\colon \mathrm{cosk}^{n+1}\,\mathrm{N}_\infty G \to \mathrm{cosk}^{n+1}\,\mathrm{N}_\infty H$$

  是一个 *Kan* 纤维化；并且

- 弱等价是图的 n-等价。

此外，神经函子限制为一个正合函子 $\mathrm{N}_\infty\colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{cSet}_n$。 □

我们的结果通过证明函子，朝离散同伦假设迈出了部分步伐

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{N}_\infty)\colon \mathrm{Ho}(\mathrm{Graph}) \to \mathrm{Ho}(\mathrm{cSet}_n)$$

在两个关于 n-等价的局部化之间是一个等价（定理 4.5）。

2 双映射柱

本节讨论图和立方集合的双映射柱。我们首先辨明并“抽象掉”构造所需的关键输入。我们将这一输入称为图的 n-骨架推出。简言之，图的 n-骨架推出是指对每个 1-神经应用 n-骨架函子后成为推出的方块。双映射柱构造将为我们提供图的n-骨架推出中最重要的例子。

n-骨架推出

定义 2.1. 给定 $n \geq 0$，我们称一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

在 Graph 中是一个 n-骨架推出，如果应用 N_1 和 sk^n后，得到的方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^n\,\mathrm{N}_1\,G & \longrightarrow & \mathrm{sk}^n\,\mathrm{N}_1\,H \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathrm{sk}^n\,\mathrm{N}_1\,K & \longrightarrow & \mathrm{sk}^n\,\mathrm{N}_1\,L \end{array}$$

在 cSet 中是一个推出。

我们来记录一些关于图的 n-骨架推挤的基本事实。

命题 2.2. 若

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

是图的 n-骨架推出，则对所有 $m \leq n$，它也是 m-骨架推出。

证明。 这是因为 $\mathrm{sk}^m \cong \mathrm{sk}^m \circ \mathrm{sk}^n$，且 sk^m 保推出。 □

命题 2.3。 Graph中的交换方块

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

是 0-骨架推出，当且仅当应用顶点集函子后它是一个推出 V： Graph $\to$ Set.

证明。 这是因为 sk^0: cSet $\to$ cSet 自然同构于 V 与函子 D: Set $\to$ cSet 的复合，该函子将一个集合视为离散立方集。函子 D 既保守又余连续，因此它保持并反映推出。□

命题 2.4。 如果 Graph 中的一个交换方块是 1-骨架推出，那么它就是 Graph中的推出。

证明。 如果方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^1 \mathrm{N}_1 G & \longrightarrow & \mathrm{sk}^1 \mathrm{N}_1 H \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathrm{sk}^1 \mathrm{N}_1 K & \longrightarrow & \mathrm{sk}^1 \mathrm{N}_1 L \end{array}$$

是一个推出，那么这些方块

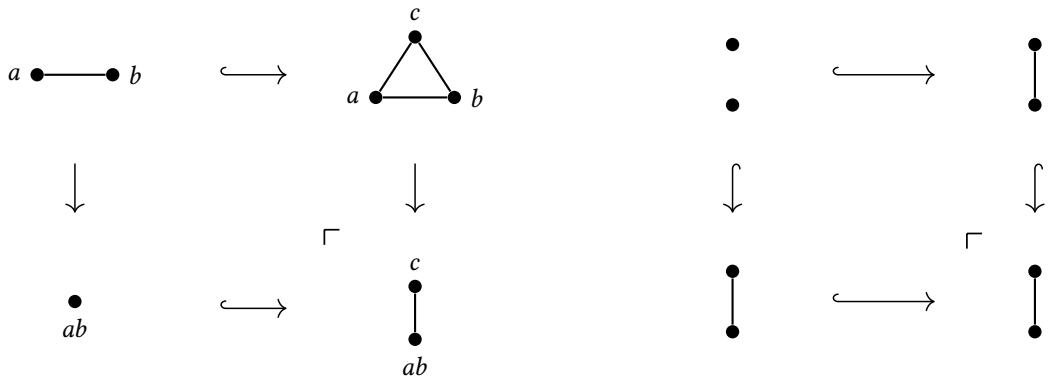
$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Graph}(I_0, G) & \longrightarrow & \mathrm{Graph}(I_0, H) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathrm{Graph}(I_0, K) & \longrightarrow & \mathrm{Graph}(I_0, L) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Graph}(I_1, G) & \longrightarrow & \mathrm{Graph}(I_1, H) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \mathrm{Graph}(I_1, K) & \longrightarrow & \mathrm{Graph}(I_1, L) \end{array}$$

都是 Set 中的推出。因此方块

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

是 Graph 中的一个推出。 □

注 2. 5. 命题 2.4 的逆命题一般而言不成立。下面，我们展示两个图的推出 phs



它们并非 1-骨架推出。概念上，这是因为应用 N_1，后，相应的立方集合推出中含有“平行边”，也就是说，存在源和目标相同但彼此不同的 1-立方体。可以证明，如果这种情况不会发生（即推出 $\mathrm{sk}^1 H \cup_{\mathrm{sk}^1 G} \mathrm{sk}^1 K$ 中不存在源和目标相同但彼此不同的 1- 立方体），那么图 $H \cup_G K$ 的推出就是一个 1- 骨架推出。

n-骨架推出的主要优点是以下结果。

定理 2.6. 给定 $n \geq 0$，若

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

是一个$(n+1)$-骨架推出，并且 $G \to H$或 $G \to K$是单态射，那么对于任意 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，应用函子 $\mathrm{N}m$ 可得一个同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_m G & \longrightarrow & \mathrm{N}_m H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}_m K & \longrightarrow & \mathrm{N}_m L \end{array}$$

n-类型的。

证明。 对于 $m \leq m'$ 中的 $\mathbb{N} \cup \{\infty\}$，存在自然弱等价 $\mathrm{N}_m \hookrightarrow \mathrm{N}_{m'}$，因此只需考虑情形$m = 1$。根据假设，该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^{n+1} \mathrm{N}_1 G & \longrightarrow & \mathrm{sk}^{n+1} \mathrm{N}_1 H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{sk}^{n+1} \mathrm{N}_1 K & \longrightarrow & \mathrm{sk}^{n+1} \mathrm{N}_1 L \end{array}$$

是沿单态射的推出，因此是 Grothendieck 模型结构中的同伦推出。这意味着它也是 n-类型的 Cisinski 模型结构中的同伦推出。由于自然包含 $\mathrm{sk}^{n+1} \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathrm{cSet}}$ 是一个 n-等价 [KM24，引理 2.22], 该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_1 G & \longrightarrow & \mathrm{N}_1 H \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}_1 K & \longrightarrow & \mathrm{N}_1 L \end{array}$$

是 n-类型的同伦推出。 □

实际上，要找出图的方块何时是 n-骨架推挤的条件相当困难。据作者所知，以下结果涵盖了所有已知的 n-骨架推挤示例。

引理 2.7. 设

$$\begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & H \\ \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & L \end{array}$$

是图的交换方块，且 $n \geq 0$ 是一个非负整数。若

1. 方块中的每个态射都是单态射；

2. 该方块是 Graph 中的一个拉回；并且

3. 每个从 n-立方体到 L 的态射$I_1^{\square n} \to L$ 都经由 $H \to L$ 或 $K \to L$分解，

那么该方块是一个 n-骨架推挤。

证明。 首先，我们先证明条件 (3) 的如下加强形式

3'. 对所有 $k \in \{0, \ldots, n\}$，每个态射 $I_1^{\square k} \to L$都经由 $H \to L$或 $K \to L$分解。

为证明这一点，固定 k并考虑这样一个态射 $u\colon\ I_1^{\square k} \to L$。令 $\pi\colon\ I_1^{\square n} \to I_1^{\square k}$表示到前 k 个坐标的投影

$$\pi(x_1, \ldots, x_n) := (x_1, \ldots, x_k).$$

由条件 (3)，复合 $u\pi\colon\ I_1^{\square n} \to L$经由 H或 K分解。不失一般性，假设它经由 H分解。我们现在得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} I_1^{\square n} & \longrightarrow & H \\ {\scriptstyle\pi}\downarrow & & \downarrow \\ I_1^{\square k} & \xrightarrow{u} & L \end{array}$$

乘积投影 π 是分裂满态射，而右侧映射是单态射，因此该方块存在一个提升，即为所求。

回到定理陈述，只需证明该交换方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, G) & \hookrightarrow & \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, H) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, K) & \hookrightarrow & \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, L) \end{array}$$

由.....诱导 对于所有 $k \in \{0, \ldots\ldots, n\}$，后复合是 Set 中的一个推出。也就是说，我们将证明函数

$$\varphi\colon \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, H) \cup_{\mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, G)} \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, K) \to \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, L)$$

是一个双射。

根据条件 (3')，φ是满射。为了验证单射性，取左侧集合中的两个元素 f，g，使得 $\varphi(f) = \varphi(g)$。回想一下，这些函数

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, H) & & & & \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, K) \\ & \searrow^{\lambda_H} & & \swarrow_{\lambda_K} & \\ & & \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, H) \cup_{\mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, G)} \mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, K) & & \end{array}$$

是联合满射。我们通过分类讨论进行证明：

- 假设 f 和 g 都属于 λ_H 的像。这个函数构成一个交换三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Graph}(I_1^{\square k},\ H) & \xrightarrow{\lambda_H} & \mathrm{Graph}(I_1^{\square k},\ H) \cup_{\mathrm{Graph}(I_1^{\square k}, G)} \mathrm{Graph}(I_1^{\square k},\ K) \\ & \searrow & \downarrow \varphi \\ & & \mathrm{Graph}(I_1^{\square k},\ L) \end{array}$$

  根据条件 (1)，该复合映射是单射，由此可得 $f = g$。

- 假设 f 和 g 都属于 λ_K 的像。这与前一种情况的处理方式类似。
- 假设 f 属于 λ_H 的像但不属于 λ_K，且 g 属于 λ_K 的像但不属于 λ_H。我们将证明这种情况会导致矛盾。

  设 $\overline{f}\colon I_1^{\square k} \to H$和 $g\colon I_1^{\square k} \to K$是映射，使得 $\lambda_H(f) = \overline{f}$且 $\lambda_K(g) = \overline{g}$。根据假设，方块

$$\begin{array}{ccc} I_1^{\square k} & \xrightarrow{\overline{f}} & H \\ {\scriptstyle \overline{g}}\downarrow & & \downarrow \\ K & \hookrightarrow & L \end{array}$$

  是交换的。条件 (2) 断言 G 是一个拉回，因此 f和 g 都必须通过 $\overline{G}$分解。¬这与我们的假设矛盾：f不在 λ_K的像中，且 g不在 λ_H的像中。□

我们重点介绍引理 2.7 的一些应用示例。回顾一下，在图中，顶点 v 和w 之间的距离 是从 v 到 w的最短路径的长度。如果不存在从 v 到 w 的路径，则我们规定它们之间的距离为 ∞。

推论 2.8. 设 $n \geq 0$ 是一个非负整数。假设 A和 B是图 G的导出子图，并满足以下条件：

- $A \cup B = G$；并且
- 对于任意两个顶点 v、$w \in X$，如果 $v \notin A$且 $w \notin B$，那么从 v到 w的距离至少为 $n + 1$.

那么，该方块

$$\begin{array}{ccc} A \cap B & \hookrightarrow & A \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \hookrightarrow & G \end{array}$$

是一个 n-骨架推挤。

证明。 我们只需证明这个方块满足引理 2.7 的假设。条件 (1) 和 (2) 显然成立。对于 (3)，设 $u\colon I_1^{\square n} \to G$ 是一个映射。注意， u 的像中任意两个顶点都由一条长度至多为 n 的路径连接。因此， u 的像完全包含在 A 或 B中。由于 A 和 B 是导出子图，我们便得到了 u 的所需分解。□

映射柱

回想一下，在空间的“标准”同伦论中，同伦推出是通过双映射圆柱构造的。该构造以两个连续函数 $f\colon S \to T$ 和 $g\colon S \to U$ 为输入，通过在 S 上取一个圆柱，并沿圆柱的两端粘合 T 和 U 的副本，得到相应的空间，其中 f 和 g 起粘接映射的作用。在任意模型范畴中，也可以进行类似的构造来构造同伦推出。

在本小节中，我们将在图范畴中发展双映射柱的概念。我们将看到，长度足够的双映射柱可构成图的 n骨架推挤示例，而这些示例对于理解图范畴中 n型的同伦论至关重要。

目前，尚无已知的图范畴模型结构（或余纤维化范畴结构），其弱等价为 n等价；也没有弱等价为弱同伦等价的此类结构。因此，在我们的情形中，双映射柱的许多标准性质都必须“从头”证明。

定义 2.9。 设 $f\colon G \to H$和 $g\colon G \to K$为图映射。给定一个非负整数 $m \geq 0$， f和 g的长度为 m的双映射柱定义为以下余极限：

$$\mathrm{Cyl}_m(f,\ g) := \text{余极限} \left(\begin{array}{ccccc} & G & & G & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle i_0} & & \swarrow{\scriptstyle i_m} \searrow{\scriptstyle g} \\ H & & & G \square I_m & & K \end{array} \right)$$

具体而言，$\mathrm{Cyl}_m(f,\ g)$是以下不交并的商

$$\mathrm{Cyl}_m(f,g) = H \sqcup (G \square I_m) \sqcup K \Big/ \sim$$

由以下识别给出：$(v,0) \sim f(v)$ 和 $(v,n) \sim g(v)$。

例 2.10。 我们总结以下“边界情形”的示例。

1. 若 $n = 0$，则 $\mathrm{Cyl}_0(f,g)$ 是 f 与 g 的推出 $H \cup_G K$。

2. 若 $f = \mathrm{id}_G = g$，则 $\mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id}_G, \mathrm{id}_G)$ 是 G 上的圆柱 $G \square I_m$。在这种情况下，结构态射$G \square I_m \to \mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id}_G, \mathrm{id}_G)$ 是一个同构。

3. 双映射柱在同构意义下关于其参数对称。该同构由以下公式给出

$$(v_G, t) \mapsto (v_G, n-t) \qquad v_H \mapsto v_H \qquad v_K \mapsto v_K$$

定义在不交并 $(G \square I_m) \sqcup H \sqcup K$ 上。

4. 如果 $f = \mathrm{id}_G$ 且 g是唯一映射 $!\colon G \to I_0$，那么 $\mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id}_G,\ !)$ 是 G上长度为 n 的锥，即商

$$\big(G \square I_m\big) \Big/ (v,n) \sim (w,n) \text{ for all } v,w \in G.$$

Ex例 2.11。 回忆一下， n 长度立方体的边界 是由 $I_m^{\square n}$ 定义的子图，

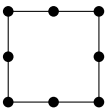
$$\partial I_m^{\square n} := \{(x_1, \ldots, x_n) \in I_m^{\square n} \mid x_i = 0 \text{ or } m \text{ for some } i\}.$$

Graph $I_m^{\square n}$中的一条边 $(x_1,\ldots,x_n) \sim (y_1,\ldots,y_n)$ 包含在子图 $\partial I_m^{\square n}$中，当且仅当对某个 i有 $x_i = 0 = y_i$或 $x_i = m = y_i$（这使得 $\partial I_m^{\square n}$在除 $m = n = 1$之外的所有情况下都是导出子图）。记 $i_m^n\colon \partial I_m^{\square n} \to I_m^{\square n}$为包含映射，则有一个同构 $\mathrm{Cyl}_m(i_m^n, i_m^n) \cong \partial I_m^{\square n+1}$。

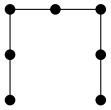
Si类似地，长度为 m 的 n维开盒是由 $\sqcap_m^n \subseteq \partial I_m^{\square n}$ 定义的导出子图 y

$$\sqcap_m^n := \partial I_m^{\square n} - \big\{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_n = m \text{ and } x_i \neq 0, m \text{ for all } i \neq n\big\}.$$

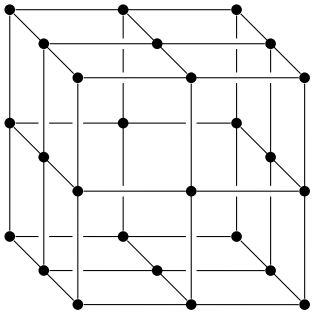
现在我们有一个同构 $\mathrm{Cyl}_m(i_m^n,\ \mathrm{id}^{\partial I_m^{\square n}}) \cong \sqcap_m^{n+1}$。



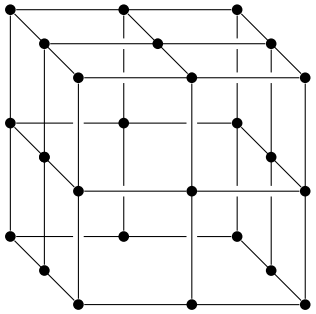
(a) 图 $\partial I_2^{\square 2}$。



(b) 图 $|\sqcap^2|_2$。



(c) 图 $\partial I_2^{\square 3}$。



(d) 图 $\sqcap_2^3$。

图 2：例 2.11 中描述的双映射柱。

例2.12。 令 $!\colon G \to I_0$ 表示唯一映射。给定 $m \geq 0$，图 G的长度为 m 的悬挂记作 $\Sigma_m G$，它是双映射柱 $\mathrm{Cyl}_m(!,\ !)$。

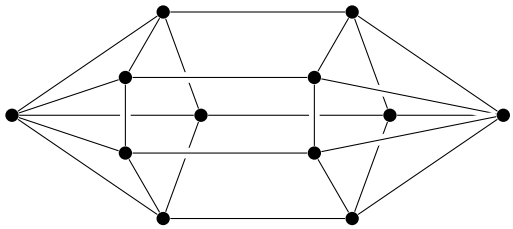


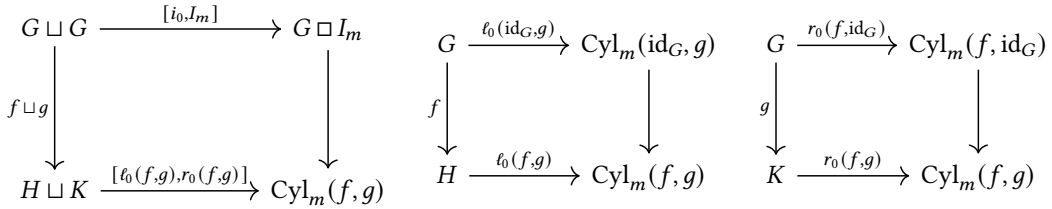
图3：5-圈的长度为3的悬挂 $\Sigma_3 C_5$。

令 $\ell_0(f,\ g)$ 和 $r_0(f,\ g)$ 表示结构态射

$$\ell_0(f,g)\colon H \to \mathrm{Cyl}_m(f,g) \quad r_0(f,g)\colon K \to \mathrm{Cyl}_m(f,g).$$

这些可用于将双映射柱写成一个推出。

命题 2.13。这些方块



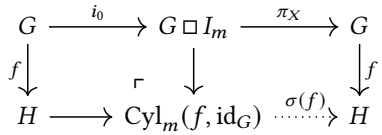
是推出。

证明。 使用 Graph 中推出的显式描述。 □

当 $g = \mathrm{id}_G$ 时，映射 $\ell_0(f, \mathrm{id}_G)$ 有一个回缩

$$\sigma(f)\colon \mathrm{Cyl}_m(f, \mathrm{id}_G) \to H$$

它构造为从推出出发的映射

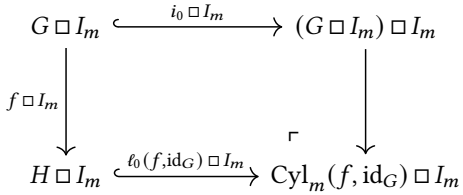


同样，若 $f = \mathrm{id}_G$，则 $r_0(\mathrm{id}_G, g)$ 有一个回缩。我们滥用记号，也将 $\sigma(g) : \mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id}_G, g) \to Z$ 记作这个态射。

命题 2.14。 映射 $\sigma(f)$ 和 $\sigma(g)$ 分别是 $\ell_0(f, \mathrm{id}_G)$ 和 $r_0(\mathrm{id}_G, g)$ 的同伦逆。

证明。 我们证明 $\sigma(f)$ 的情形； $\sigma(g)$ 的论证类似。根据构造， $\sigma(f) \circ \ell_0(f, \mathrm{id}_G) = \mathrm{id}_Y$。只需定义同伦 $\ell_0(f, \mathrm{id}_G) \circ \sigma(f) \sim \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}_m(f, \mathrm{id}_G)}$。

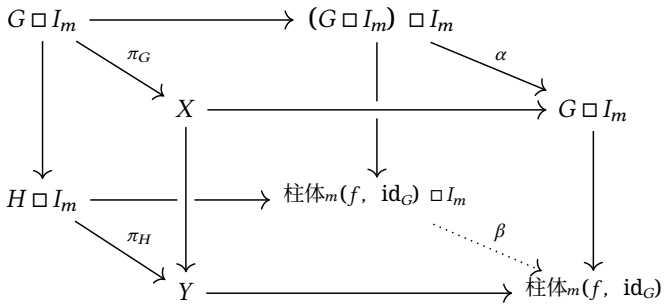
函子 $- \square I_m\colon \mathbf{Graph} \to \mathbf{Graph}$ 保持推出，因此方块



是一个推出。定义映射 $\alpha\colon G \square I_m \square I_m \to G \square I_m$ 如下

$$\alpha(v, t, t') := (v, \min(t, t')).$$

注意到立方体的左侧方块和顶部方块



是可交换的，由此我们将映射 β: 柱体$_m(f) \square I_m \to$柱体$_m(f)$ 定义为推出之间诱导的映射。 β 的显式公式为

$$\begin{aligned}\beta\big((v_G, t), t'\big) &:= \big(v_G, \min(t, t')\big)\\ \beta(v_H, t') &:= v_H.\end{aligned}$$

如果 $t' = m$，那么 $\beta(-,\ m) = \mathrm{id}_{\mathrm{Cyl}_m(f)}$。如果 $t' = 0$，那么 $\beta(-,\ 0) = \ell_0(f,\ \mathrm{id}_G) \circ \sigma(f)$。因此， β是所需的同伦。□

更一般地，给定参数 $k \in \{0,\ \ldots\ldots,\ m\}$，我们定义映射

$$\ell_k(f,g)\colon \mathrm{Cyl}_k(f, \mathrm{id}_G) \to \mathrm{Cyl}_m(f,g) \quad \text{and} \quad r_k(f,g)\colon \mathrm{Cyl}_k(\mathrm{id}_G, g) \to \mathrm{Cyl}_m(f,g)$$

为从下图所示的推出出发的映射:

$$\begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{i_0} & G \square I_k & \xrightarrow{(x,t)\mapsto(x,t)} & G \square I_m \\ {\scriptstyle f}\downarrow & \ulcorner & \downarrow & & \downarrow \\ H & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}_k(f, \mathrm{id}_G) & \xrightarrow{\ell_k(f,g)} & \mathrm{Cyl}_m(f,g) \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} G & \xrightarrow{i_k} & G \square I_k & \xrightarrow{(x,t)\mapsto(x,t+m-k)} & G \square I_m \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \ulcorner & \downarrow & & \downarrow \\ K & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}_k(\mathrm{id}_G, g) & \xrightarrow{r_k(f,g)} & \mathrm{Cyl}_m(f,g) \end{array}$$

当 $k = 0$ 时，这些定义与先前对 $\ell_0(f,\ g)$ 和 $r_0(f,\ g)$ 的定义一致。

Fro根据双映射柱的显式描述，我们推导出以下结果。

Propo命题 2.15。 设 $f\colon\ G \to H$和 $g\colon\ G \to K$为图映射。对于 $m \geq 2$和 $k \neq m$，两个映射

$$\begin{aligned}\ell_k(f,g)&\colon \mathrm{Cyl}_k(f, \mathrm{id}_G) \to \mathrm{Cyl}_m(f,g)\\ r_k(f,g)&\colon \mathrm{Cyl}_k(\mathrm{id}_G, g) \to \mathrm{Cyl}_m(f,g)\end{aligned}$$

都是导出子图含入。 □

命题 2.16。 设 $f\colon\ G \to H$和 $g\colon\ G \to K$为图映射。

1. 若 g 是单态射，则映射

$$\ell_m(f,g)\colon \mathrm{Cyl}_m(f, \mathrm{id}_G) \to \mathrm{Cyl}_m(f,g)$$

是单态射。此外，若 g是导出子图含入，则 $\ell_m(f,g)$是导出子图含入。

2. 若 f是单态射，则映射

$$r_m(f,g)\colon \mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id}_G, g) \to \mathrm{Cyl}_m(f,g)$$

是一个单态射。此外，如果 f是导出子图含入，那么 $r_m(f,g)$也是一个导出子图含入。□

对于较小的 k，子图含入 $\ell_k(f,g)$ 和 $r_k(f,g)$ 在柱体$_m(f,g)$ 中的像不相交。当 $k \geq \lceil m/2 \rceil$时，这两个子图相交，其交集同构于一个以 G为底的圆柱。更准确地说，

命题2.17。 设 $f\colon\ G \to H$和 $g\colon\ G \to K$是图映射。

1. 设 $p \geq 0$ 为非负数， q_1、 $q_2 \geq 1$ 为严格正数。那么，方块

$$\begin{array}{ccc} G \square I_p & \xhookrightarrow{r_p(f,\mathrm{id})} & \mathrm{Cyl}_{p+q_1}(f, \mathrm{id}_G) \\ {\scriptstyle \ell_p(\mathrm{id},g)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \ell_{p+q_1}(f,g)} \\ \mathrm{Cyl}_{p+q_2}(\mathrm{id}_G, g) & \xhookrightarrow{r_{p+q_2}(f,g)} & \mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_2}(f,g) \end{array}$$

是一个拉回。

2. 若 f是单射，则当 $q_1 = 0$时，*(1)* 中的结论也成立。

3. 若 g 是单射，则当 $q_2 = 0$时，*(1)* 中的结论也成立。 □

引理 2.18. 设 $f\colon G \to H$ 和 $g\colon G \to K$ 是图映射。

1. 对于非负的 $p \geq 0$ 和严格为正的 q_1、 $q_2 \geq 1$，该方块

$$\begin{array}{ccc} G \square I_p & \xhookrightarrow{r_p(f,\mathrm{id})} & \mathrm{Cyl}_{p+q_1}(f, \mathrm{id}_G) \\ {\scriptstyle \ell_p(\mathrm{id},g)}\downarrow & \lrcorner & \downarrow{\scriptstyle \ell_{p+q_1}(f,g)} \\ \mathrm{Cyl}_{p+q_2}(\mathrm{id}_G, g) & \xhookrightarrow{r_{p+q_2}(f,g)} & \mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_2}(f,g) \end{array}$$

是一个$(p+1)$-骨架推挤。

2. 如果 f 是单射，那么当 $q_1 = 0$ 时，*(1)* 也成立。

3. 如果 g 是单射，那么当 $q_2 = 0$ 时，*(1)* 也成立。

证明。 (1) 由引理 2.7 得出，前提是我们验证条件 (3)。

我们首先注意到，对于任意 $m \geq 1$，如果 $[v,t]$ 和 $[v',t']$ 是结构态射 $G \square I_m \to \mathrm{Cyl}_m(f,g)$ 的像中的顶点，那么在 $\mathrm{Cyl}_m(f,g)$ 中， $[v,t]$ 到 $[v',t']$ 的距离满足

$$\mathrm{dist}\left([v,t],[v',t']\right) \geq |t - t'|.$$

这由盒积 $G \square I_m$ 中边的描述得出。我们推知，如果 $v \in \mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_2}(f,g)$ 是一个不在 $\ell_{p+q_1}(f,g)$ 的像中的顶点，并且 $v' \in \mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_2}(f,g)$ 是一个不在 $r_{p+q_2}(f,g)$ 的像中的顶点，那么 v 到 v' 的距离至少为 $p+2$。由此可得条件 (3)（参见推论 2.8）。

第 (2) 部分类似；设 f是一个单态射，且 $q_1 = 0$。如果 $v' \in$柱体$_{p+q_2}(f,g)$ 不在 $r_{p+q_2}(f,g)$ 的像中，那么它必定具有如下形式： $\ell_0(f,g)(v_H)$，其中 $v_H \in H$是 f 的像之补集中的某个顶点（这里我们用到了 f 是单态射这一点）。在这种情况下， v' 到形如 $[v,p+1]$ 的顶点的距离满足

$$\begin{aligned} \mathrm{dist}\left(v',[v,p+1]\right) &\geq \mathrm{dist}\left(v_H, f(v)\right) + p + 1 \\ &\geq 1 + p + 1 \\ &= p + 2. \end{aligned}$$

和之前一样，这意味着条件 (3) 成立。

第 (3) 部分的证明与第 (2) 部分的证明类似。 □

推论 2.19。 设 $f\colon\ G \to H$ 和 $g\colon\ G \to K$ 为图映射。

1. 给定非负的 $p \geq 0$、严格正的 q_1、 $q_2 \geq 1$，以及 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_m\left(G \square I_p\right) & \longrightarrow & \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{p+q_1}(f, \mathrm{id}_G)\right) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{p+q_2}(\mathrm{id}_G, g)\right) & \longrightarrow & \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_2}(f, g)\right) \end{array}$$

是一个 p 类型的同伦推出。

2. 如果 f 是单射，那么当 $q_1 = 0$ 时，*(1)* 也成立。

3. 如果 g 是单射，那么当 $q_2 = 0$ 时，*(1)* 也成立。

证明。 结合引理 2.18 和定理 2.6。 □

定理 2.20。 设 $f\colon\ G \to H$ 和 $g\colon\ G \to K$ 是图映射。

1. 给定非负的 $p \geq 0$、整数 $q \geq 2$ 和 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，推出

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle \ell_0(\mathrm{id}, g)}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \ell_0(f, g)} \\ \mathrm{Cyl}_{p+q}(\mathrm{id}_G, g) & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}_{p+q}(f, g) \end{array}$$

f沿着 $\ell_0(\mathrm{id}\ g)$ 变成一个 p-类型的同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_m G & \xrightarrow{\mathrm{N}_m(f)} & \mathrm{N}_m H \\ {\scriptstyle \mathrm{N}_m(\ell_0(\mathrm{id}, g))}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_m(\ell_0(f, g))} \\ \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{p+q}(\mathrm{id}_G, g)\right) & \longrightarrow & \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{p+q}(f, g)\right) \end{array}$$

应用N_m: Graph $\to$ cSet之后。

2. 如果 f或 g 之一是单射，那么当 $q = 1$时，*(1)* 也成立。

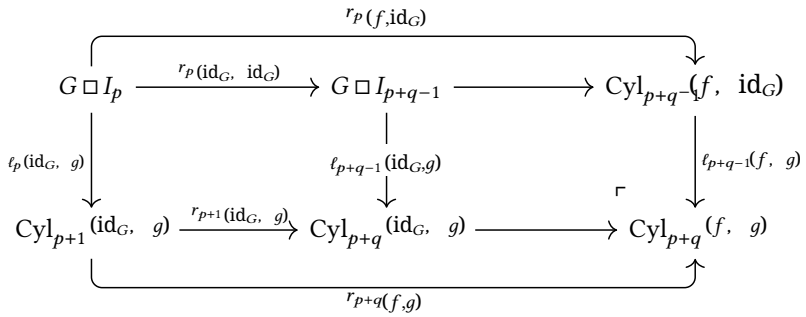
3. 如果 f和 g 都是单射，那么当 $q = 0$时，*(1)* 也成立。

证明。我们首先 证明 (1)。为此，第一个推出方块可以分解为两个推出方块 s:

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{f} & H \\ {\scriptstyle i_0}\downarrow{\scriptstyle \sim} & \ulcorner & {\scriptstyle \sim}\downarrow{\scriptstyle \ell_0(f, \mathrm{id})} \\ G \square I_{p+q-1} & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}_{p+q-1}(f, \mathrm{id}_G) \\ {\scriptstyle \ell_{p+q-1}(\mathrm{id}, g)}\downarrow & \ulcorner & \downarrow{\scriptstyle \ell_{p+q-1}(f, g)} \\ \mathrm{Cyl}_{p+q}(\mathrm{id}_G, g) & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}_{p+q}(f, g) \end{array}$$

根据命题 2.14，左上和右上的态射都是同伦等价。因此，复合方块成为同伦推出，当且仅当底部方块成为同伦推出。

我们在底部方块的左侧再拼接一个方块，得到如下图表：



根据推论 2.19，左侧方块和复合方块都成为 p-类型的同伦推出。因此，右侧方块成为 p-类型的同伦推出。

关于第（2）部分，若 f是单射，则我们逐字重复上面的证明（使用 $q=1$）。若 g 是单射，则我们重复上面的证明，将 $\mathrm{Cyl}^{p+1}(\mathrm{id}_G, g)$ 替换为 $\mathrm{Cyl}^{p}(\mathrm{id}_G, g)$。对于第（3）部分，我们还将所有出现的 $p+q-1$ 替换为 p。□

与立方双映射柱的比较

现在，我们将 Graph 中双映射柱的构造与相应的构造进行比较
在 cSet 中。给定立方集合 cSet 中的立方映射 $f\colon X \to Y$和 $g\colon X \to Z$，我们用 $\mathrm{Cyl}^{\square}(f,g)$ 表示立方集合中的双映射柱

, i.e. 余极限

$$\mathrm{Cyl}^{\square}(f,g) := \text{余极限}\left(\begin{array}{ccccc} & X & & X & \\ {\scriptstyle f}\swarrow & & \overset{\text{标识符}}{\underset{\otimes\partial_{i,\,0}}{\searrow}} \quad \overset{\text{标识符}}{\underset{\otimes\partial_{i,\,1}}{\swarrow}} & & \searrow{\scriptstyle g} \\ Y & & & & Z \\ & & X \otimes \square^1 & & \end{array} \right)$$

我们分别用 $\ell^{\square}(f,g)$ 和 $r^{\square}(f,g)$ 表示结构映射 $Y \to \mathrm{Cyl}^{\square}(f,g)$ 和 $Z \to \mathrm{Cyl}^{\square}(f,g)$。与图的双映射柱情形相同，若 $g=\mathrm{id}_X$，则 $\ell^{\square}(f,\mathrm{id}_X)$ 存在一个回缩 $\sigma(f)$，它同时也是一个同伦逆；若 $f=\mathrm{id}_X$，则 $r^{\square}(\mathrm{id}_X,g)$ 存在一个回缩 $\sigma(g)$，它同时也是一个同伦逆。

我们立即观察到如下事实：

命题 2.21。 令 Λ 表示具有三个对象 0、1、2 以及态射 $0 \to 1$ 和 $0 \to 2$ 的范畴。对于 $m \in \mathbb{N}$，我们有函子：

$$\mathrm{Cyl}_m\colon \mathrm{Fun}(\Lambda, \mathrm{Graph}) \to \mathrm{Graph} \qquad \mathrm{Cyl}^{\square}\colon \mathrm{Fun}(\Lambda, \mathrm{cSet}) \to \mathrm{cSet}$$

分别通过在 Graph 和cSet中取双映射柱来定义。此外，该方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Fun}(\Lambda, \mathrm{cSet}) & \xrightarrow{\mathrm{Cyl}^{\square}} & \mathrm{cSet} \\ {\scriptstyle |-|_m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle |-|_m} \\ \mathrm{Fun}(\Lambda, \mathrm{Graph}) & \xrightarrow{\mathrm{Cyl}_m} & \mathrm{Graph} \end{array}$$

在自然同构意义下交换。 □

注 2.22。 存在一个与命题 2.21 类似的结论，它联系了几何实现函子 $|-|\colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{Top}$ 与拓扑空间中的双映射柱。

我们利用命题 2.21 中的同构，构造 cSet 和 Graph 中双映射柱之间的第一个比较映射：它由单位映射 $\eta_{\mathrm{Cyl}^{\square}(f,\ g)}$给出，我们将其视为一个态射

$$\eta\colon \mathrm{Cyl}^{\square}(f,g) \to \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_m(|f|_m,|g|_m)\right)$$

此外，它关于 $(f,g) \in \mathrm{Fun}(\Lambda,\mathrm{cSet})$ 也是自然的。

我们考察哪些条件能够保证比较映射是 n-等价。

引理 2.23. 设 $f\colon X \to Y$和 $g\colon X \to Z$为立方单态射。给定 $n \geq 0$和 $m \geq n$，假设单位映射

$$\eta_X\colon X \to \mathrm{N}_m\,|X|_m \quad \eta_Y\colon Y \to \mathrm{N}_m\,|Y|_m \quad \eta_Z\colon Z \to \mathrm{N}_m\,|Z|_m$$

是 n-等价。那么，比较映射

$$\eta\colon \mathrm{Cyl}^{\square}(f,g) \to \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_m(|f|_m,|g|_m)\right)$$

是 n-等价。

证明。 立方双映射柱可以写成一个推出

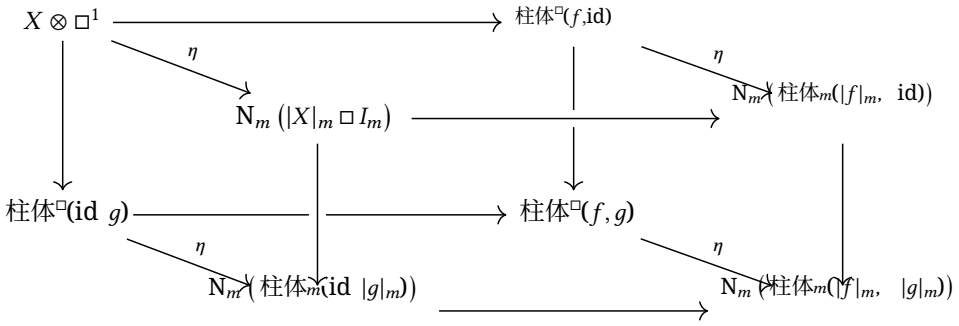
$$\begin{array}{ccc} X \otimes \square^1 & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}^{\square}(f,\mathrm{id}_X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{Cyl}^{\square}(\mathrm{id}_X,g) & \longrightarrow & \mathrm{Cyl}^{\square}(f,g) \end{array}$$

在 cSet 中。将函子 $|-|_m$: cSet $\to$ Graph 应用于这个方块，得到图表

$$\begin{array}{ccc} |X|_m \square I_m & \xrightarrow{r_m(f,\mathrm{id})} & \mathrm{Cyl}_m(|f|_m,\mathrm{id}) \\ {\scriptstyle \ell_m(\mathrm{id},g)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell_m(f,g)} \\ \mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id},|g|_m) & \xrightarrow{r_m(f,g)} & \mathrm{Cyl}_m(|f|_m,|g|_m) \end{array}$$

在 Graph 中。根据推论 2.19，这个方块是 n-型的同伦推出。

比较映射 η 诱导出一个交换立方体



这个立方体的前面和后面都是 n-型的同伦推出：对于前面的方块，这由推论 2.19 得出；对于后面的方块，我们注意到它是由单态射构成的推出，因此在 n-型的 Cisinski 模型结构中是一个同伦推出。

三个对角映射是交换方块中的上方箭头：

$$\begin{array}{ccc} X\otimes\square^1 & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{N}_m\left(|X|_m\square I_m\right) \\ {\scriptstyle\pi_X}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_m(\pi_{|X|_m})} \\ X & \xrightarrow[\sim]{\eta} & \mathrm{N}_m|X|_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Cyl}^{\square}(f,\mathrm{id}) & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_m(|f|_m,\mathrm{id})\right) \\ {\scriptstyle\sigma(f)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_m(\sigma(|f|_m))} \\ Y & \xrightarrow[\sim]{\eta} & \mathrm{N}_m|Y|_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathrm{Cyl}^{\square}(\mathrm{id},g) & \xrightarrow{\eta} & \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id},|g|_m)\right) \\ {\scriptstyle\sigma(g)}\downarrow{\scriptstyle\sim} & & {\scriptstyle\sim}\downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_m(\sigma(|g|_m))} \\ Z & \xrightarrow[\sim]{\eta} & \mathrm{N}_m|Z|_m \end{array}$$

竖直映射都是同伦等价；根据假设，底部映射是 n-等价，因此比较映射是 n-等价。□

引理 2.23 的证明关键依赖于 f和 g 是单态射这一假设；我们给出的论证在一般情形下并不适用。尽管如此，我们仍可在一般情形下构造一条弱等价的之字形序列。

注意，若 $\alpha\colon I_m \to I_{m'}$是一个端点保持的图映射（即 $\alpha(0) = 0$且 $\alpha(m) = m'$），那么对任意 f和 g，都存在一个诱导图映射 $\alpha_*\colon \mathrm{Cyl}_m(f、g) \to \mathrm{Cyl}_{m'}(f、g)$。这个映射是由图表态射诱导的余极限之间的映射：

$$\begin{array}{ccccccccc} H & \xleftarrow{f} & G & \xrightarrow{i_0} & G\square I_m & \xleftarrow{i_m} & G & \xrightarrow{g} & K \\ \| & & \| & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\square\alpha} & & \| & & \| \\ H & \xleftarrow{f} & G & \xrightarrow{i_0} & G\square I_{m'} & \xleftarrow{i_{m'}} & G & \xrightarrow{g} & K \end{array} \qquad \rightsquigarrow \qquad \begin{array}{c} \mathrm{Cyl}_m(f,g) \\ \downarrow{\scriptstyle\alpha_*} \\ \mathrm{Cyl}_{m'}(f,g) \end{array}$$

映射 α_* 为不同长度的双映射圆柱提供了一个比较映射。

固定一个非负整数 $p \in \mathbb{N}$。给定两对非负整数 q_1、$q_1' \geq 0$ 和 q_2、$q_2' \geq 0$，令 Π表示端点保持映射

$$\Pi : I_{p+q_1+q_1'+q_2+q_2'} \to I_{p+q_1+q_2}$$

$$\Pi(t) := \begin{cases} 0 & \text{if } t \leq q_1' \\ t - q_1' & \text{if } q_1' \leq t \leq p+q_1+q_1'+q_2 \\ p+q_1+q_2 & \text{if } t \geq p+q_1+q_1'+q_2 \end{cases}$$

也就是说，Π 收缩第一个 q_1' 顶点和最后一个 q_2' 顶点。这个映射诱导出一个映射

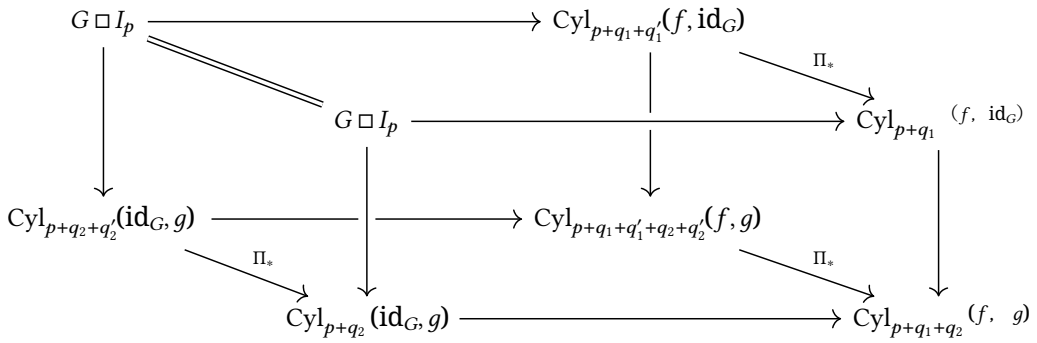
$$\Pi_*\colon \mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_1'+q_2+q_2'}(f,g) \to \mathrm{Cyl}_{p+q_1+q_2}(f,g)$$

它在$(f,g) \in \mathrm{Fun}(\Lambda,\mathrm{Graph})$中是自然的。

命题 2.24。设 $f\colon G \to H$ 和 $g\colon G \to K$ 是图映射。对于非负的 p、q_1'、$q_2' \geq 0$ 以及严格为正的 q_1、$q_2 \geq 1$，

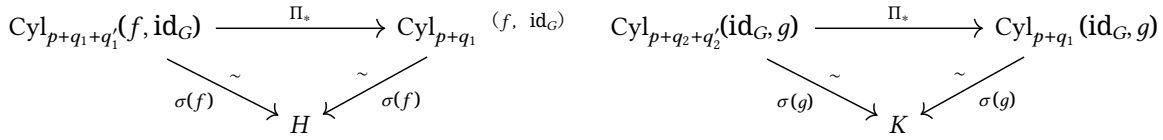
1. 映射 Π_* 是一个 p-等价。*2.* 如果 f是单射，那么当
$q_1 = 0$时，*(1)* 也成立。*3.* 如果 g 是单射，那么当 $q_2 = 0$时，
(1) 也成立。

证明。 对于 q_1的不同取值，映射 Π_* {style id='5'>, q_1', q_2, q_2' 诱导出一个交换立方体



更准确地说，右上方对象之间的映射由令 $q_2 = q_2' = 0$得到；左下方对象之间的映射由令 $q_1 = q_1' = 0$得到。由推论 2.19可知，对于任意 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，应用 $\mathrm{N}m$后，前后两个方块都成为 p-类型的同伦推出。由于函子 $\mathrm{N}m$反映 p-等价，只需证明左上方、右上方和左下方映射之间的每个映射都是 p-等价。

左上方对象之间的映射是同构，因而是一个 p-等价。右上方和右下方对象之间的两个映射，分别是以下两个交换三角形中的上方箭头：



根据命题 2.14，垂直映射是同伦等价，因此顶端的箭头是弱等价。□

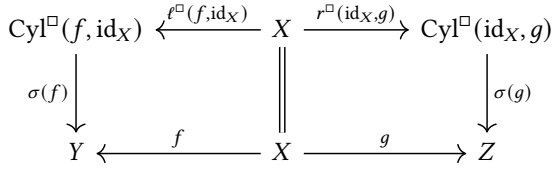
我们使用映射 Π来构造之字形，以比较一对 (f, g) 及其实现 $(|f|_m, |g|_m)$ 的双映射柱。

构造 2.25。 设 $f\colon X \to Y$ 和 $g\colon X \to Z$ 为立方映射。那么，对于任意 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，立方双映射柱 $\mathrm{Cyl}^{\square}(f, g)$ 通过以下之字形与长度为 $m + 2$ 的图双映射柱的 m-神经相连：

$$\mathrm{Cyl}^{\square}(f,g) \xleftarrow{\mathrm{Cyl}^{\square}(\mathrm{id}_X,\sigma(f),\sigma(g))} \mathrm{Cyl}^{\square}\left(r^{\square}(f,\mathrm{id}), \ell^{\square}(\mathrm{id},g)\right) \xrightarrow{\eta} \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_m\left(r_0(|f|_m,\mathrm{id}), \ell_0(\mathrm{id},|g|_m)\right)\right)$$
$$\cong \Big\downarrow$$
$$\mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{3m}(|f|_m,|g|_m)\right) \xrightarrow[\mathrm{N}_m(\Pi_*)]{} \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{m+2}(|f|_m,|g|_m)\right)$$

分别定义每个映射：

1. 第一个映射是将 $\mathrm{Cyl}^{\square}$ 应用于以下图表态射所得到的函子性：



在 cSet 中。

2. 第二个映射是比较映射 η；注意，这些映射的 m-实现

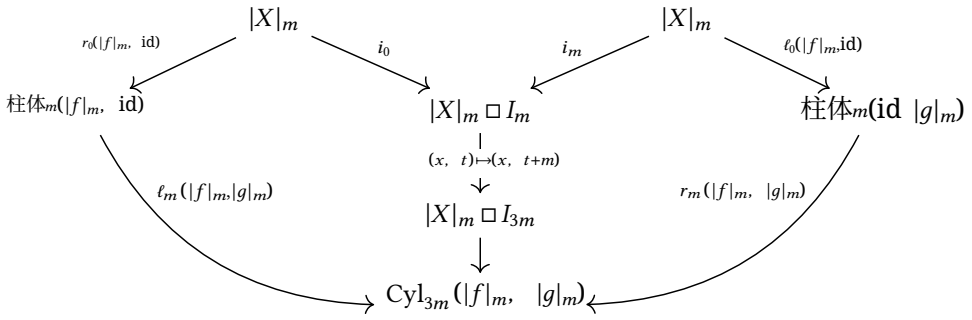
$$r^{\square}(f,\mathrm{id})\colon X \to \mathrm{Cyl}^{\square}(f,\mathrm{id}) \qquad \text{and} \qquad \ell^{\square}(\mathrm{id},g)\colon X \to \mathrm{Cyl}^{\square}(\mathrm{id},g)$$

已分别重写为图映射

$$r_0(|f|_m,\mathrm{id})\colon |X|_m \to \mathrm{Cyl}_m(|f|_m,\mathrm{id}) \qquad \text{and} \qquad \ell_0(\mathrm{id},|g|_m)\colon |X|_m \to \mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id},|g|_m),$$

分别。

3. 第三个映射通过将 N_m 应用于一个明确的图的同构而得到。形式上，这个同构是利用余极限的泛性质应用于以下锥图来定义的：



直观地说，图 $\mathrm{Graph}_m\left(r_0(|f|_m,\mathrm{id})\ \ell_0(\mathrm{id}\ |g|_m)\right)$ 会在圆柱 $|X|_m \square I_m$ 的两端各附加两个长度为 m 的映射柱；这一构造与长度为 $3m$ 的双映射柱 $\mathrm{Cyl}_{3m}(|f|_m,|g|_m)$ 同构。

4. 第四个也是最后一个映射，是将 N_m 应用于在 $p = m$、$q_1 = q_2 = 1$ 和 $q_1' = q_2' = m-1$ 处实例化的映射 Π_* 而得到的。

定理 2.26. 设 $f\colon X \to Y$ 与 $g\colon X \to Z$ 为立方映射。给定 $n \geq 0$ 与 $m \geq \min(n,1)$，若单位映射

$$\eta_X\colon X \to \mathrm{N}_m|X|_m \quad \eta_Y\colon Y \to \mathrm{N}_m|Y|_m \quad \eta_Z\colon Z \to \mathrm{N}_m|Z|_m$$

是 n-等价，则之字形中的每个态射

$$\mathrm{Cyl}^{\square}(f,g) \xleftarrow{\mathrm{Cyl}^{\square}(\mathrm{id}_X,\sigma(f),\sigma(g))} \mathrm{Cyl}^{\square}\left(r^{\square}(f,\mathrm{id}),\ell^{\square}(\mathrm{id},g)\right) \xrightarrow{\eta} \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_m\left(r_0(|f|_m,\mathrm{id}),\ell_0(\mathrm{id},|g|_m)\right)\right)$$

$$\cong \swarrow$$

$$\mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{3m}(|f|_m,|g|_m)\right) \xrightarrow[\mathrm{N}_m(\Pi_*)]{} \mathrm{N}_m\left(\mathrm{Cyl}_{m+2}(|f|_m,|g|_m)\right)$$

在构造 *2.25* 中均为 n-等价，并且关于 $(f,g) \in \mathrm{Fun}(\Lambda,\mathrm{Graph})$ 是自然的。

证明。 自然性易于验证。第一个映射是弱等价，因为函子柱体$^{\square}$ 将逐对象弱等价映为弱等价。第二个映射依引理 2.23 是 n-等价；此处我们使用假设 $m \geq 1$，从而 $r^{\square}(f,\mathrm{id})$ 与 $\ell^{\square}(\mathrm{id}\ g)$ 为单态射。第三个映射是同构，因而为 n-等价。第四个映射依命题 2.24 是 n-等价。□

我们在第 5 节中将定理 2.26 应用于一些值得关注的例子。

3 逆向构造

为了证明神经函子 $\mathrm{N}_\infty\colon \mathbf{Graph} \to \mathbf{cSet}_n$ 在对 n-等价进行局部化后是一个等价，我们需要给出一个方向相反的构造。我们首先构造一个函子 $F_!\colon \mathbf{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathbf{cSet}$，将半立方集合映射到立方集合，然后利用 m-实现函子 $|-|_m\colon \mathbf{cSet} \to \mathbf{Graph}$ 得到一个图。注意，每个立方集合都弱等价于一个半立方集合（由定理 A.22 得出），因此函子 $F_!$ 未定义在整个立方集合范畴上并不成问题。

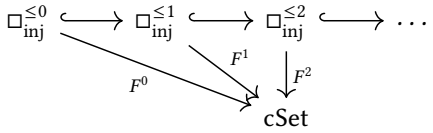
$F_!$ 的定义性质是，$F_!\square^n$ 同构于 $F_!\partial\square^n$ 上的一个锥，并且 n-立方体边界包含 $F_!\partial\square^n \to F_!\square^n$ 与锥包含重合。这使我们能够利用 cSet 和 Graph 中双映射柱的比较结果，以更好地理解 $F_!$ 的 m-实现。

函子 $F_!\colon \mathbf{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathbf{cSet}$ 将被构造为图表 $F\colon \square_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{cSet}$ 的余极限延拓。

构造 3.1. 我们通过归纳法，将图表 $F\colon \square_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{cSet}$ 构造为一列函子

$$F^n\colon \square_{\mathrm{inj}}^{\leq n} \to \mathbf{cSet}$$

它们与这些包含交换



由于 $\square_{\mathrm{inj}}$ 是一个直接范畴，根据 [RV14，引理 3.10], ，只需给出 cSet 中的一个对象 $F^n\square^n$ ，以及一个映射

$$L_{\square^n}F^{n-1} \to F^n\square^n$$

从 $\square^n$ 相对于 F^{n-1}的锁对象出发。

我们对 n使用归纳法。对于 $n=0$，我们将 $F^0\square^0$ 定义为 0-立方体 $\square^0$。对于 $n \geq 1$，我们将 $F^n\square^n$ 定义为锁对象 $L_{\square^n}F^{n-1}$上的锥。也就是说， $F^n\square^n$ 由以下推出定义

$$\begin{array}{ccc} L_{\square^n}F^{n-1} & \longrightarrow & \square^0 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ L_{\square^n}F^{n-1} \otimes \square^1 & \longrightarrow & F^n\square^n \end{array}$$

锁映射$L_{\square^n}F^{n-1} \to F^n\square^n$ 由以下复合给出

$$L_{\square^n}F^{n-1} \xrightarrow{i_0} L_{\square^n}F^{n-1} \otimes \square^1 \to F^n\square^n.$$

图4展示了 n取较小值时的锁映射。

回顾一下，若函子 $D\colon \square_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{cSet}$ 的锁映射 $L_{\square^n}D \to D\square^n$ 是单态射，则称其为***Reedy***余纤维 。

命题 3.2. 图表 $F\colon \square_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{cSet}$是终端图表 $\mathrm{const}_{\square^0}\colon \square_{\mathrm{inj}} \to \mathbf{cSet}$的 ***Reedy***余纤维替换。

证明。 图表 F是 Reedy余纤维的，因为复合

$$L_{\square^n}F^{n-1} \xrightarrow{i_0} L_{\square^n}F^{n-1} \otimes \square^1 \to F^n\square^n$$

是一个单态射。由于 $F\square^n$ 被定义为一个推出

$$\begin{array}{ccc} L_{\square^n} F^{n-1} & \longrightarrow & \square^0 \\ {\scriptstyle i_1}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ L_{\square^n} F^{n-1} \otimes \square^1 & \longrightarrow & F^n \square^n \end{array}$$

且左侧映射是无圈余纤维化，锥点包含映射 $\square^0 \to F^n\square^n$ 是无圈余纤维化，因此是弱等价。□

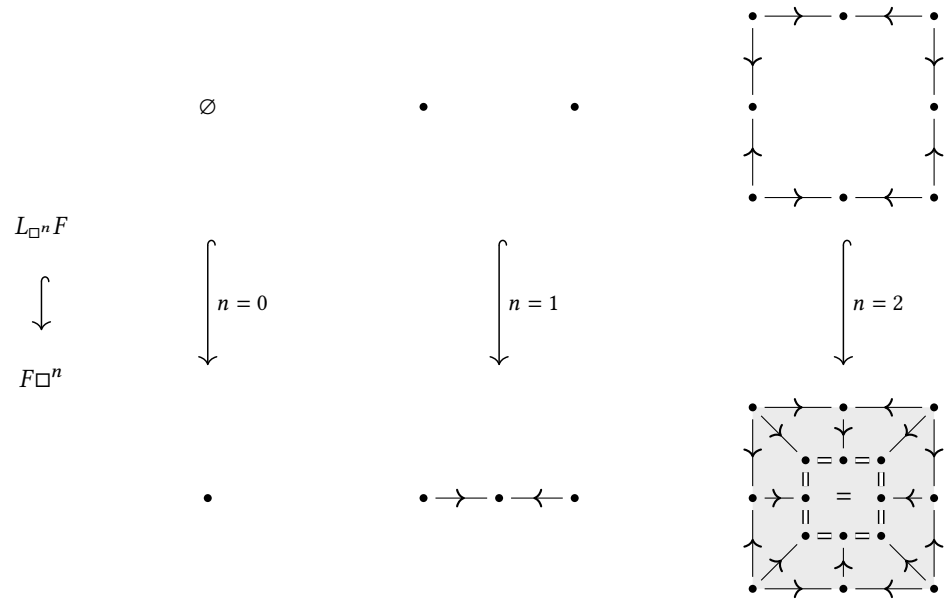


图4： F 的闩映射示意图。

通过余极限对 F 进行扩展，得到一个余连续函子

$$F_! : \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}.$$

By 构造中，序列 $F_!\partial\square^n \to F_!\square^n \to \square^0$ 是一个映射柱分解。也就是说 ，

命题3.3。 对于所有 $n \geq 0$，边界包含映射 i： $\partial\square^n \to \square^n$ 在 $F_!$ 下的像可经由如下图表所示推出方块的底部映射分解：

$$\begin{array}{ccccc} & & F_!(\partial\square^n) & \longrightarrow & \square^0 \\ & & {\scriptstyle i_1}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ F_!(\partial\square^n) & \xrightarrow{i_0} & F_!(\partial\square^n) \otimes \square^1 & \longrightarrow & F_!(\square^n) \\ & \searrow^{F_! i} & & \nearrow & \end{array}$$

证明。 边界包含 $F_! i$： $F_!\partial\square^n \to F_!\square^n$ 与闩映射 $L_{\square^n} F^{n-1} \to F^n\square^n$ 重合，由此可得该结果。□

令 i 表示复合 $\square_{\mathrm{inj}} \hookrightarrow \square \xrightarrow{\jmath} \mathrm{cSet}$，并令 $i_!: \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}$ 表示余极限延拓。

T定理 3.4. 存在一个函子 $L\colon \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}$，以及自然弱等价

$$i_! \xrightarrow{\sim} L \xleftarrow{\sim} F_!$$

使得，

1. L 有一个右伴随；并且
2. 对于任意半立方集合 X，映射 $i_!X \to LX$ 是一个无圈余纤维化。

证明。 我们在 Reedy 模型结构 $\mathrm{Fun}(\square_{\mathrm{inj}}, \mathrm{cSet})$ 中固定 $i_!$ 的一个纤维化替换 $i_! \to \ell \to \mathrm{const}_{\square^0}$。特别地，$i_! \to \ell$ 是一个无圈余纤维化，而 ℓ 同时是纤维化和余纤维化的。我们将函子 L 定义为余极限延拓 $L := \ell_!$。

为了构造自然变换 $F_! \to \ell_!$，注意到图表态射 $\ell \to \mathrm{const}_{\square^0}$ 是一个无圈纤维化（因为 $i \to \mathrm{const}_{\square^0}$ 是一个弱等价）。由于 F 是一个 Reedy 余纤维化图表（命题 3.2），方块

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{const}_{\varnothing} & \longrightarrow & \ell \\ \downarrow & & \downarrow \\ F & \longrightarrow & \mathrm{const}_{\square^0} \end{array}$$

存在一个提升 $F \to \ell$，根据三取二，它还是一个弱等价。

经过余极限延拓后，函子 $i_!$、$\ell_!$和 $F_!$ 都会将边界包含映射 $\partial\square^n \to \square^n$映为余纤维化，因为每个初始图表 i，ℓ，F都是 Reedy余纤维。给定一个半立方集合 X和一个自然数 $n \geq 0$，我们有一个推出方块

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{X_n} \partial\square^n & \longrightarrow & \mathrm{sk}^{n-1} X \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \coprod_{X_n} \square^n & \longrightarrow & \mathrm{sk}^n X \end{array}$$

在 $\mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$中，该方块被 $i_!$、$\ell_!$和 $F_!$中的每个函子保持。映射 $i \to \ell$ 和 $F \to \ell$ 在推出图表之间诱导出自然变换。因此，骨架归纳法表明，所诱导的自然变换 $i_! \to \ell_! \leftarrow F_!$ 都是自然弱等价。最后注意到，映射 $i_! \to \ell_!$ 是单态射，因为根据假设，初始图表态射 $i \to \ell$ 是单态射。□

构造 3.5。 令 X为一个半立方集合。给定一个非负整数 $m \geq 0$，我们将图 Graph $\Gamma_m X$定义为 $F_!X$ 的长度为 m 的实现。也就是说，

$$\Gamma_m X := |F_!X|_m.$$

例3.16展示了当 m 和 n取较小值时的图 $\Gamma_m\square^n$。

实现-神经伴随在 $F_!X$处的单位给出一个映射

$$\eta^m_{F_!X}\colon F_!X \to \mathrm{N}_m\,\Gamma_m X$$

它关于变量 $X \in \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$是自然的。

根据 $F_!$的定义，以下结果成立。

命题 3.6. 设 m、n 为非负数。图 $\Gamma_m\square^n$ 同构于长度为m 的双映射柱

$$\Gamma_m\square^n \cong \mathrm{Cyl}_m\left(\mathrm{id}_{\Gamma_m\partial\square^n}, !_{\Gamma_m\partial\square^n}\right)$$

由 恒等映射$_{\Gamma_m\partial\square^n}\colon \Gamma_m\partial\square^n \to \Gamma_m\partial\square^n$ 和 $!_{\Gamma_m\partial\square^n}\colon \Gamma_m\partial\square^n \to I_0$。在此识别下，由立方边界包含映射诱导的映射 $\Gamma_m\partial\square^n \hookrightarrow \Gamma_m\square^n$ 与映射 $\ell_0($ 恒等映射 , !$)\colon \Gamma_m\partial\square^n \to$ 柱体 $_m($ 恒等映射 , !$)$ 相一致。

证明。 由命题3.3和命题 2.21 得出。 □

推论 3.7. 对于 m、 $n \geq 0$，图 $\Gamma_m \square^n$ 是可缩的。

证明. 由命题 2.14，映射 $r_0(\mathrm{id}, !) : I_0 \to \Gamma_m \square^n$ 是一个同伦等价。 □

推论 3.8. 设 m 与 n 为满足 $m \geq n+2$ 的非负整数。假设 $u\colon \partial\square^k \to X$ 是半立方集合的一个映射。则对任意 $m \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$，该推出

$$\begin{array}{ccc} \partial\square^k & \xrightarrow{u} & X \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \square^k & \longrightarrow & X_u \end{array}$$

在 $\mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 中被映为 n-类型的一个同伦推出

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_m\,\Gamma_m(\partial\square^n) & \xrightarrow{\mathrm{N}_m\,\Gamma_m(u)} & \mathrm{N}_m\,\Gamma_m(X) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}_m\,\Gamma_m(\square^n) & \longrightarrow & \mathrm{N}_m\,\Gamma_m(X_u) \end{array}$$

在应用函子 $\mathrm{N}_m \circ \Gamma_m\colon \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}$之后。此外，若 u 是单态射，则当 $m = n+1$时该结果成立。

证明. 函子 $\Gamma_m\colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{Graph}$ 保持推出，因此

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_m(\partial\square^k) & \xrightarrow{\Gamma_m(u)} & \Gamma_m(X) \\ {\scriptstyle \ell_0(\mathrm{id},!)}\downarrow & & \downarrow \\ \Gamma_m(\square^k) & \longrightarrow & \Gamma_m(X_u) \end{array}$$

是一个推出，并且根据命题 3.6，左映射可识别为 $\ell_0(\mathrm{id}, !)$。应用定理 2.20，其中取 $f = \Gamma_m(u)$ 和 $g = !$ □

本节的主要定理如下:

定理 3.9。设 m、 n为满足 $m \geq n+2$的非负整数。对于任意半立方集合 X，映射

$$\eta^m_{F_! X} : F_! X \to \mathrm{N}_m\,\Gamma_m X$$

是一个 n-等价。此外，若 X是非奇异的，则当 $m = n+1$时结论仍成立。

证明。只需考虑 $X \in \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 有限的情形。这是因为任意半立方集合都可以表示为其有限子对象的一个滤过余极限。函子 $F_!$、 $|-|_m$ 和 N_m 都保持滤过余极限，并且 n-等价在滤过余极限下稳定；因此，若对每个有限子对象 $Y \subseteq X$， $\eta_{F_! Y}$ 都是一个 n-等价，那么 $\eta_{F_! X}$ 就是一个 n-等价。

只需证明该映射

$$\eta^m_{F_!(\mathrm{sk}^k X)} : F_!(\mathrm{sk}^k X) \to \mathrm{N}_m\,\Gamma_m(\mathrm{sk}^k X)$$

对于所有 $k \geq 0$，它都是一个 n-等价（同样，这是因为 n-等价在滤过余极限下稳定）。我们对 k 使用归纳法，并注意到若 $k = 0$，则 $\eta^m_{F_!(\mathrm{sk}^0 X)}$ 是离散立方集之间的一个同构。对于归纳步骤，固定 $k \geq 0$，并假设对所有 $m \geq n+2$，以及有限的 $X \in \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$，$\mathrm{sk}^k X$ 都是一个 n-等价。

现在，固定一个有限的 半立方集合 X。由于 X 是有限的，我们可以将 $\mathrm{sk}^{k+1} X$ 分解为一系列包含映射
s

$$\mathrm{sk}^k X = X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X_d = \mathrm{sk}^{k+1} X$$

其中每个包含映射 $X_i \hookrightarrow X_{i+1}$ 都出现在一个推出

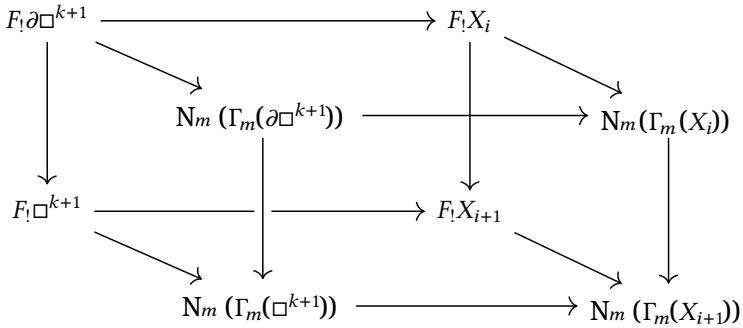
$$\begin{array}{ccc} \partial\square^{j+1} & \longrightarrow & X_i \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \square^{j+1} & \longrightarrow & X_{i+1} \end{array}$$

半立方集合的推出中。我们对 $i \in \{0, \ldots\ldots, d\}$ 进行归纳法，并注意到，在基例 $i = 0$ 中，根据关于 k的归纳假设，映射 $\eta^m_{X_0}$是一个同构。

固定 $i \in \{0, \ldots\ldots, d-1\}$，并假设 $\eta^m_{X_i}$是一个 n-等价。两个函子 $F_!\colon \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{cSet}$ 和 $\Gamma_m\colon \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{Graph}$ 都保留余极限，因此我们得到两个推出方块

$$\begin{array}{ccc} F_!\partial\square^{k+1} & \longrightarrow & F_!X_i \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ F_!\square^{k+1} & \longrightarrow & F_!X_{i+1} \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_m\partial\square^{k+1} & \longrightarrow & \Gamma_m X_i \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \Gamma_m\square^{k+1} & \longrightarrow & \Gamma_m X_{i+1} \end{array}$$

自然变换 η^m 诱导出一个交换立方体



注意，后面的方块是沿单态射作出的推出，因此它是 n-类型的同伦推出。根据推论 3.8，前面的方块是 n-类型的同伦推出。根据关于 i的归纳假设，右上方对象之间的映射是一个n-等价。根据关于 k的归纳假设，左上方对象之间的映射是一个 n-等价。根据推论 3.7，左下方对象之间的映射是一个弱等价。因此，右下方的映射是一个 n-等价，正如所需。□

用 F-序列给出的显式描述。

我们以图 $\Gamma_m\square^n$的逐元素描述结束本节。这将是一个闭式描述，与通过取边界 $\Gamma_m\partial\square^n$的锥来进行的归纳定义相对。

$\Gamma_m\square^n$的顶点集可以描述为模去 F-约化后的 F-序列 集合。下面我们定义这两个概念。

定义 3.10。 对于 $m, n \geq 0$， 一个 F-序列 是一个元组 (φ, k, P, w)，其中：

- φ是一个函数 $\{1, \ldots, n\} \to \{-, +\}$，称为符号 函数
- k 是一个非负整数，称为长度；

- P是一个满射函数 $\{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k\}$，称为划分；并且
- w是一个函数 $\{1,\ \dots\dots,\ k\} \to \{0,\ \dots\dots,\ m\}$，称为权函数。

我们的约定是，若 $n = 0$，则存在唯一的 F-序列 $(!,\ 0,\ \mathrm{id}_{\varnothing},\ !)$，其中 $!$ 始终表示从空集出发的唯一函数。

给定一个 F-序列 $(\varphi,\ k,\ P,\ w)$ 和一个元素 $i \in \{1,\ \dots\dots,\ k\}$，我们将 P_i 记作映射 P 下 i 的原像。这样，满射 P 确定了集合 $\{1,\ \dots\dots,\ n\}$ 的一个划分，该划分包含 k 个等价类；等价类 P_i 的权重为 $w(i)$。若将 P_i 的元素写作 $P_i = \{x_{i,\ 1},\ \dots\dots,\ x_{i,\ \ell(i)}\}$，那么 F-序列可以写成如下形式的表达式：

$$\big((w(1); x^{\pm}_{1,1}, \dots, x^{\pm}_{1,\ell(1)}), (w(2); x^{\pm}_{2,1}, \dots, x_{2,\ell(2)^{\pm}}), \dots, (w(k); x^{\pm}_{k,1}, \dots, x^{\pm}_{k,\ell(k)})\big)$$

其中每个 $x_{i,\ j}$ 都是等价类 P_i 的一个元素（因而也是 $\{1,\ \dots\dots,\ n\}$ 的一个元素），上标表示符号函数在 $x_{i,\ j}$ 处的取值。例如，若 $m = 8$ 且 $n = 3$，则表达式

$$\big((7; 1^+, 3^-), (0; 2^-)\big)$$

对应于如下的 F-序列：

- 符号函数由 $1 \mapsto +$、$2 \mapsto -$ 和 $3 \mapsto -$ 给出；
- 划分由 $P_1 = \{1,\ 3\}$ 和 $P_2 = \{2\}$ 给出；并且
- 权函数由 $1 \mapsto 7$ 和 $2 \mapsto 0$ 给出。

类似地，表达式

$$\big((4; 3^+), (1; 1^+), (4; 2^-)\big)$$

对应于如下的 F-序列：

- 符号函数由 $1 \mapsto +$、$2 \mapsto -$ 和 $3 \mapsto +$ 给出；
- 划分由 $P_1 = \{3\}$、$P_2 = \{1\}$和 $P_3 = \{2\}$给出；并且
- 权函数由 $1 \mapsto 4$、$2 \mapsto 1$和 $3 \mapsto 4$给出。

请注意，一对括号内元素 p_i、$1\dots\dots$、p_i、$_{\ell(i)}$的顺序无关紧要，因此 $((7;\ 1^+, 3^-), (0;\ 2^-))$与 $((7;\ 3^-, 1^+), (0;\ 2^-))$表示同一个 F-序列。然而，括号之间的交换表示不同的 F-序列，因此 $((7;\ 1^+, 3^-), (0;\ 2^-))$ 与 $((0;\ 2^-), (7;\ 1^+, 3^-))$ 并不相等。这是因为重新排列括号的顺序会同时改变满射 P和权函数 w。我们引入记号 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}$，作为表示任意 F-序列 (φ, k, P, w) 的另一种方式。

现在，我们在 F-序列集合上构造一个等价关系，将其定义为由 F-约化规则给出的关系的对称传递闭包：

FR1. 令 $(\varphi, k, P,\ w)$ 为一个满足 $k \geq 2$ 的 F-序列。若对于某个 $i \in \{2,\dots,k\}$，$w(i) = 0$，则我们定义函数

$$P_{\mathrm{FR1}} \colon \{1,\dots,n\} \to \{1,\dots,k-1\}, \quad w_{\mathrm{FR1}} \colon \{1,\dots,k-1\} \to \{0,\dots,m\}$$

by

$$P_{\mathrm{FR1}}(x) := \begin{cases} P(x) & \text{if } x < i \\ P(x-1) & \text{if } x \geq i. \end{cases} \qquad w_{\mathrm{FR1}}(j) := \begin{cases} w(j) & \text{if } j < i \\ w(j+1) & \text{if } j \geq i. \end{cases}$$

FR1-约化规则断言存在如下关系 $(\varphi, k, P, w) \sim_{\mathrm{FR1}} (\varphi, k-1, P_{\mathrm{FR1}}, w_{\mathrm{FR1}})$。

换言之，如果一个等价类 $P_i \neq P_1$ 的权重为 0，那么我们可以将等价类 P_i 并入等价类 P_{i-1}。新形成的等价类 $P_{i-1} \sqcup P_i$ 的权重等于 P_{i-1}的权重。

FR2. 设 (φ, k, P, w) 是一个 F-序列。如果对于某个 $i \in \{1, \ldots, k\}$， $w(i) = m$，那么我们定义函数 s

$$\varphi_{\mathrm{FR2}} \colon \{1, \ldots, n\} \to \{-, +\}, \quad P_{\mathrm{FR2}} \colon \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, i\}, \quad w_{\mathrm{FR2}} \colon \{1, \ldots, i\} \to \{0, \ldots, m\}$$

by

$$\varphi_{\mathrm{FR2}}(j) := \begin{cases} \varphi(j) & \text{if } P(j) < i \\ + & \text{if } P(j) \geq i. \end{cases} \qquad P_{\mathrm{FR2}}(j) := \begin{cases} P(j) & \text{if } P(j) < i \\ i & \text{if } P(j) \geq i. \end{cases} \qquad w_{\mathrm{FR2}}(i) := w(i).$$

FR2-约化规则断言了如下关系：$(\varphi,\ k,\ P,\ w) \sim_{\mathrm{FR2}} (\varphi_{\mathrm{FR2}},\ i,\ P_{\mathrm{FR2}},\ w_{\mathrm{FR2}})$。

换言之，如果某个等价类 P_i的权重为m，那么我们可以将等价类 P_i，P_{i+1}、……、P_k合并为一个权重为 m的等价类，使得新形成的类 $P_i \sqcup \cdots \sqcup P_k$中的每个元素都带正号。

如果存在一条连接两个 F-序列的 F-约化规则之字形链，我们就称这两个序列通过 F-约化相关。

定义 3.11。 设 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 是一个 F-序列。

1. 如果满足以下条件，我们称 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 处于约化形式：

   当 $i \neq 0$ 时，• $w(i) \neq 0$，

   • $w(i) \neq m$ 当 $i \neq k$时，并且

   • 若 $w(k) = m$，则 P_k的每个元素都带正号。

2. 若满足以下条件，则称 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 为展开形式：

   • 每个 P_i 恰有一个元素，并且

   • 若对于某个 $i \in \{1, \ldots, k\}$，有 $w(i) = m$，则对于所有 $j \geq i$， $w(j) = m$。

命题 3.12。 设 $m, n \geq 0$ 非负。

1. 每个 F-序列都可通过 F-约化变换关联到唯一的约化形式 F-序列。

2. 每个 F-序列都可通过 F-约化变换关联到一个展开形式的 F-序列。

证明。 固定一个 F-序列 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$。我们分别给出一种算法，用于求得约化形式和展开形式。

求约化形式 F-序列的算法。

输入：一个 F-序列 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$。

输出：一个约化形式的 F-序列 $(w'; P_i'^{\pm})_{i=1}^{k'}$，它通过 F-约化变换关联到 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$。

1. 定义 $(w'; P_i'^{\pm})_{i=1}^{k'} := (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$。

2. 如果存在 $i \in \{1, \ldots, k\}$，使得 $w'(i) = m$:

   a) 令 i_0 为最小的此类 i。b) 使用 FR2 将 $P'_{i_0}, P'_{i_0+1}, \ldots, P'_k$合并为一个权重为 m 的等价类，使得每个元素都带正号。c) 置 $k' := i_0$。

3. 当存在 $i \in \{2, \ldots, k\}$ 使得 $w'(i) = 0$ 时:

a) 使用 FR1 合并 P'_i和 P'_{i-1}，权重为 $w(i-1)$。

b) 将 k' 减 1。

4. 返回 $(w'; P'^{\pm}_i)_{i=1}^{k'}$。

该算法会终止，因为 while 循环的每次迭代都会减少满足 $w(i) = 0$ 的元素 $i \in \{2、\ldots\ldots、 k\}$ 的数量。根据构造，得到的 F-序列通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$ 相关，而且得到的 F-序列是约化形式。

只需证明，输出的 F-序列是唯一一个处于约化形式且通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$ 相关的 F-序列。注意，对于 F-序列 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$，我们可以关联一个函数Σ: $\{1、\ldots\ldots、 n\} \to \mathbb{N}$，定义如下:

$$\Sigma(j) := \begin{cases} \min\{i \in \mathbb{N} \mid i \le P(j) \text{ and } w(i) = m\} & \text{if } \{i \mid i \le P(j) \text{ and } w(i) = m\} \text{ is nonempty} \\ \max\{i \in \mathbb{N} \mid i \le P(j) \text{ and } w(i) \ne 0\} & \text{if } \{i \mid i \le P(j) \text{ and } w(i) = m\} \text{ is empty} \\ & \quad \text{and } \{i \mid i \le P(j) \text{ and } w(i) \ne 0\} \text{ is nonempty} \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们将 Σ 称为 F-序列 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$ 的特征函数。特征函数在 F-约化下保持不变；也就是说，如果两个 F-序列通过一系列 F-约化相关联，那么它们的特征函数相等。我们进一步注意到，特征函数的取值属于集合 $\{1、\ldots\ldots、 k\}$，因此复合$w \circ \Sigma$: $\{1、\ldots\ldots、 n\} \to \{0、\ldots\ldots、 m\}$ 定义良好，且在 F-约化下保持不变。最后，如果一个 F-序列处于约化形式，那么对所有 $j \in \{1、\ldots\ldots、 n\}$，都有 $\Sigma(j) = P(j)$。

现在，假设 $(w'; P'^{\pm}_i)^{k'}_{i=1}$ 和 $(w''; P''^{\pm}_i)^{k''}_{i=1}$ 是两个约化形式的 F-序列，并且它们通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$ 相关。任意约化形式的 F-序列的长度由其特征函数的最大值 $\max_j \Sigma(j)$ 给出，因此 $k' = k''$。此外，我们有 $P'(j) = \Sigma(j) = P''(j)$，因此划分函数相等 $P' = P''$。为了证明权函数相等，固定 $i \in \{1, \ldots\ldots, k'\}$，并令 $j \in \{1, \ldots\ldots, n\}$ 满足 $P'(j) = P''(j) = i$（这样的 j 存在，因为 $P' = P''$ 是满射）。我们利用 $P' = P'' = \Sigma$ 以及 $w \circ \Sigma$ 在 F- 约化下保持不变这一事实来计算

$$w'(i) = w'(P'(j)) = w'(\Sigma(j)) = w''(\Sigma(j)) = w''(P''(j)) = w''(i),$$

因此 $w' = w''$。关于符号函数的相等性，令 φ、φ' 和 φ'' 分别表示 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$、$(w'; P'^{\pm}_i)^{k'}_{i=1}$ 和 $(w''; P''^{\pm}_i)^{k''}_{i=1}$ 的符号函数 $\{1, \ldots, n\} \to \{-, +\}$。若 $\varphi'(j) = \varphi(j)$ 且 $\varphi''(j) = \varphi(j)$，则显然有 $\varphi'(j) = \varphi''(j)$。若 $\varphi(j) \ne \varphi'(j)$，则必有 $w(\Sigma(j)) = m$，因为一个元素的符号只有通过 FR2 约化才会改变，这意味着元素 j 必须已并入一个权重为 m 的等价类，且 $w(\Sigma(j)) = w(P'(j)) = m$。类似地，若 $\varphi(j) \ne \varphi''(j)$，则 $w(\Sigma(j)) = m$。无论哪种情况，若 $w(\Sigma(j)) = m$，则 $\varphi'(j) = \varphi''(j) = +$，因为 φ' 和 φ'' 都是约化形式下某个 F-序列的符号函数。由此可推得 $\varphi' = \varphi''$，因此 $(w'; P'^{\pm}_i)^{k'}_{i=1} = (w''; P''^{\pm}_i)^{k''}_{i=1}$。

求展开形式 F-序列的算法。

输入：一个 F-序列 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$。

Outp输出：一个处于展开形式的 F-序列 $(w'; P'^{\pm}_i)^{k'}_{i=1}$，它通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$ 相关 .

1. 将在前一个算法中对 $(w; P^{\pm}_i)^k_{i=1}$ 输出的约化形式 F-序列定义为 $(w'; P'^{\pm}_i)^{k'}_{i=1}$。

2. 如果 $w(k') = m$:

a) 将 $P'_{k'}$ 中的元素依次列为 $p'_{k'}$、1、……、 $p'_{k', \ell(k')}$。

b) 反向使用 FR2 将 $P'_{k'}$ 拆分为多个类

$$P'_{k'} := \{p'_{k',1}\}, \quad P'_{k'+1} := \{p'_{k',2}\}, \quad \ldots, \quad P'_{k'+\ell(k')-1} := \{p'_{k',\ell(k')}\}$$

全部具有权重 m。

c) Set $k' := k' + \ell(k') - 1$。

3. 当存在 $i \in \{1, \ldots, k'\}$ 使得 P'_i 含有多个元素时：

a) 选择一个元素 $j \in P'_i$。

b) 反向使用 FR1，将 P'_i 拆分为若干类

$$(P'_i)_{\text{new}} := (P'_i)_{\text{old}} - \{j\} \quad \text{and} \quad (P'_{i+1})_{\text{new}} := \{j\},$$

其中 $(P'_{i+1})_{\text{new}}$ 的权重为 0。注意，这会移动划分和权函数，使得

$$\begin{aligned}
(P'_{i+2})_{\text{new}} &= (P'_{i+1})_{\text{old}} \quad \text{and} \quad w'_{\text{new}}(i+2) = w'_{\text{old}}(i+1) \\
(P'_{i+3})_{\text{new}} &= (P'_{i+2})_{\text{old}} \quad \text{and} \quad w'_{\text{new}}(i+3) = w'_{\text{old}}(i+2) \\
&\vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \\
(P'_{k'+1})_{\text{new}} &= (P'_{k'})_{\text{old}} \quad \text{and} \quad w'_{\text{new}}(k'+1) = w'_{\text{old}}(k')
\end{aligned}$$

c) 将 k' 加 1。

4. 返回 $(w'; P'^{\pm}_i)_{i=1}^{k'}$

该算法会终止，因为 while 循环的每次迭代都会减少等价类 P'_i 中元素的数量。根据构造，输出的 F-序列在每个等价类 P'_i 中恰好包含一个元素，并且可通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)_{i=1}^{k}$ 相关联。如果某个 P'_i 的权重为 m，那么类 P'_i 是在算法的步骤 2 中创建的，因此 P'_{i+1}、……、$P'_{k'}$ 的权重都为 m。于是，输出的 F-序列处于所需的展开形式。□

给定一个 F-序列 $(w; P^{\pm}_i)_{i=1}^{k}$，$(w; P^{\pm}_i)_{i=1}^{k}$ 的约化形式是处于约化形式的唯一 F-序列，并且可通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)_{i=1}^{k}$ 相关联。$(w; P^{\pm}_i)_{i=1}^{k}$ 的展开形式是一个处于展开形式的 F-序列，并且可通过 F-约化与 $(w; P^{\pm}_i)_{i=1}^{k}$ 相关联。

例 3.13. 考虑 $m = 8$ 和 $n = 3$的情形。F-序列 $((7;\ 1^+, 3^-), (0;\ 2^-))$ 的约化形式是$((7;\ 1^+, 2^-, 3^-))$。每个 6 F-序列

$$\begin{array}{ll}
((7;1^+), (0;2^-), (0;3^-)) & ((7;1^+), (0;3^-), (0;2^-)) \\
((7;2^-), (0;3^-), (0;1^+)) & ((7;2^-), (0;1^-), (0;3^-)) \\
((7;3^-), (0;1^+), (0;2^-)) & ((7;3^-), (0;2^-), (0;1^+))
\end{array}$$

都是 $((7;\ 1^+, 3^-), (0;\ 2^-))$的一个展开形式。

如果我们转而考虑 F-序列 $((8;\ 1^+, 3^-), (0;\ 2^-))$，那么符号函数 $((8;\ 1^{\pm}, 3^{\pm}), (0;\ 2^{\pm}))$的任意选择都可通过 F-约化相互关联。集合 $\{1, 2, 3\}$上有 8 个可能的符号函数，因此 $((8;\ 1^+, 3^-), (0;\ 2^-))$有 $6 \times 8 = 48$ 个不同的展开形式。

F-序列 $((4;\ 3^+),\ (1;\ 1^+),\ (4;\ 2^-))$既是约化形式，也是展开形式。此外，通过 F-约化与 $((4;\ 3^+),\ (1;\ 1^+),\ (4;\ 2^-))$相关的唯一 F-序列就是它本身。

定义 3.14。设 $m,\ n \geq 0$ 为非负数。

1. 定义 Graph $F(m,\ n)$ 如下：

- $F(m,\ n)$ 的顶点集是模 F-约化的 F-序列集合。
- 当存在展开形式 $(w, 0; (P, 0)^{\pm}_i)_{i=1}^{n}$ 和 $(w, 1; (P, 1)^{\pm}_i)_{i=1}^{n}$，使得：$-(w, 0; (P, 0)^{\pm}_i)_{i=1}^{n}$ 和 $(w, 1; (P, 1)^{\pm}_i)_{i=1}^{n}$ 的符号函数相等时，两个顶点 $(w_0; (P_0)^{\pm}_i)_{i=1}^{k_0}$ 和 $(w_1; (P_1)^{\pm}_i)_{i=1}^{k_1}$ 由一条边连接；

– 划分函数 $P'_0 = P'_1$ 相等；并且–存在 $i \in \{1,\dots,n\}$，使得对于所有 $j \neq i$属于 $\{1,\dots,n\}$，$|w'_0(i) - w'_1(i)| \le 1$ 和 $w'_0(j) = w'_1(j)$。

2. $F(m,n)$ 的边界是导出子图 $\partial F(m,n) \subseteq F(m,n)$，由满足 $w(1) = 0$ 的约化形式的顶点 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$组成。我们的约定是，若 $n = 0$，则 $\partial F(m,0) = \varnothing$。

3. 对于 $j = 1,\dots,n$ 和 $\varepsilon = 0,1$，我们通过如下赋值定义图映射 $\partial_{j,\varepsilon}$：$F(m,n-1) \to F(m,n)$:

$$\partial_{j,\varepsilon}\left((w; P_i^{\pm})_{i=1}^k\right) := (0; j^{\varepsilon}) \cdot (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$$

这里，记号 $(0;\ j^{\varepsilon}) \cdot (w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 表示通过插入一个权重为 0 的等价类$P_1 := \{j\}$ 得到的 F-序列；j 的符号在 $\varepsilon = 0$ 时为 $-$，在 $\varepsilon = 1$时为 $+$。注意，这会改变符号函数 φ、划分函数 P 和权函数 w，使得：

$$\varphi_{\text{new}}(k) := \begin{cases} \varphi_{\text{old}}(k) & \text{if } k < j \\ - & \text{if } k = j \text{ and } \varepsilon = 0 \\ + & \text{if } k = j \text{ and } \varepsilon = 1 \\ \varphi_{\text{old}}(k-1) & \text{if } k > j. \end{cases}$$

$$P_{\text{new}}(k) := \begin{cases} 1 & \text{if } k = j \\ P_{\text{old}}(k) + 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

$$w_{\text{new}}(i) := \begin{cases} 0 & \text{if } i = 0 \\ w_{\text{old}}(i-1) & \text{otherwise.} \end{cases}$$

特别地，所得 F-序列的长度为 $k+1$。

命题 3　　.15. 对于 $m \ge 0$和 $n \ge 1$，函数 $\partial_{j,\ \varepsilon}$：　$F(m,n-1) \to F(m,n)$ 是一个定义良好的图映射　　*p.*

证明。 设 $(w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$是 $F(m,n-1)$ 中的一个 F-序列。对于任意子集 $\{i_1,\dots,i_\ell\} \in \{1,\dots,k\}$，若在 $(w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 中合并类 $P_{i_1},\dots,P_{i_\ell}$ 后再应用 $\partial_{j,\varepsilon}$，其结果与先应用 $\partial_{j,\varepsilon}$ 再合并类 $P_{i_1+1},\dots,P_{i_\ell+1}$ 相同。由此可推得，$\partial_{j,\varepsilon}$ 在 F-约简下保持不变，并且保留边。□

例3.16。 我们固定 $m = 2$，并绘制图 $F(2,\ 0)$、$F(2,\ 1)$和 $F(2,\ 2)$。

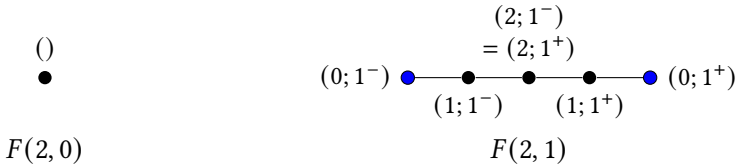


图5：图 $F(2,\ 0)$ 和 $F(2,\ 1)$。蓝色顶点表示边界 $\partial F(2,\ 1)$。

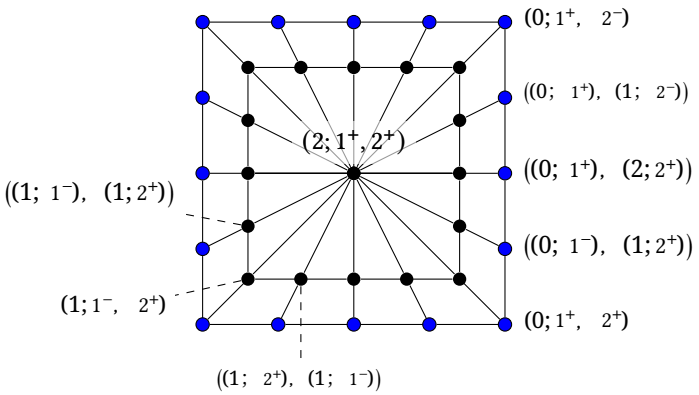


图6：图 $F(2,\ 2)$，其中一部分顶点标注了它们的约化形式。蓝色顶点表示边界 $\partial F(2,\ 2)$。

命题 3　　.17. 设 $m \geq 0$ 为非负数。赋值 $n \mapsto F\ (m, n)$ 和 $(i, \varepsilon) \mapsto \partial_{i,\ \varepsilon}$ 定义了一个函子　　r

$$F(m, -) : \square_{\text{inj}} \to \text{Graph}.$$

证明。 只需验证恒等式 $\partial_{j',\ \varepsilon'}\partial_{j,\ \varepsilon} = \partial_{j,\ \varepsilon}\partial_{j'-1,\ \varepsilon'}$ 对 $j \leq j'$ 成立。根据 FR1-约化规则，对于每个 F-序列 $(w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$，都有等式 $(0;\ j'^{\varepsilon'}) \cdot (0;\ j^{\varepsilon}) \cdot (w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k = (0;\ j^{\varepsilon}) \cdot (0;\ (\ j' - 1)^{\varepsilon'}) \cdot (w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$。□

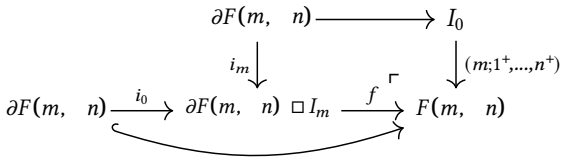
定理3.18。 对于 m、 $n \geq 0$，存在一个同构

$$\Phi^n : \Gamma_m \square^n \cong F(m, n)$$

它关于变量 $n \in \square_{\text{inj}}$ 是自然的。

在证明定理3.18之前，我们先证明以下引理。

引理3.19。 对于 m、 $n \geq 0$，存在一个图映射 $\partial F(m, n) \square I_m \to F(m, n)$，使得图表



是可交换的，并且右侧的方块是一个推出。

证明。 定义图映射 f: $\partial F(m,\ n) \square I_m \to F(m,\ n)$ 如下：给定一个 F-序列 $(w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 和一个顶点 $t \in I_m$，令 $f((w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k,\ t)$ 为由 $(w;\ P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 的约化形式通过令 $w(1) = t$ 得到的 F-序列。根据约化形式的唯一性（命题 3.12），此映射定义良好。注意，值 $w(1)$ 在 F-约化下保持不变。由此可推知，映射 f 保边；此外，当限制在子图 $\partial F(m,\ n) \square I_{m-1}$ 上时，它也反映边。特别地， f 是一个图映射。

FR2 约化规则意味着，如果 $t = m$，那么 $f(-,\ m)$ 在顶点 $(m;\ 1^+,\ \ldots,\ n^+)$ 处为常值。如果 $t = 0$，那么 $f(-,\ 0)$ 与子图包含映射 $\partial F(m,\ n) \hookrightarrow F(m,\ n)$ 重合。因此，上述图表交换。为了证明右侧方块是一个推出，我们结合推出的显式描述以及 f 在子图 $\partial F(m,\ n) \square I_{m-1}$ 上反映边这一事实。□

回顾一下，对于 $n \geq 0$， $\square^n \in \mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 的粘合范畴 $\partial(\square_{\mathrm{inj}} \downarrow [1]^n)$ 是逗号范畴，其对象是 $\square_{\mathrm{inj}}$ 中的非恒等单射 $[1]^p \to [1]^n$，其态射是 $\square_{\mathrm{inj}}$ 中使诱导三角形交换的单射 $[1]^p \to [1]^q$。关于函子 $F(m, -) : \square_{\mathrm{inj}} \to \mathsf{Graph}$， $\square^n \in \mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 的锁对象 是余极限

$$L_{\square^n} F(m, -) := \operatorname{colim}\left(\partial(\square_{\mathrm{inj}} \downarrow [1]^n) \xrightarrow{\Pi} \square_{\mathrm{inj}} \xrightarrow{F(m,-)} \mathsf{Graph}\right).$$

包含 $\partial_{i,\varepsilon}$： $F(m, n-1) \to F(m, n)$ 诱导一个映射 $L_{\square^n} F(m, -) \to F(m, n)$；可以验证该映射经由边界分解，从而得到一个映射

$$L_{\square^n} F(m, -) \to \partial F(m, n).$$

具体而言，锁对象 $L_{\square^n} F(m, -)$ 中的顶点是形如 $[f, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k]$ 的对，其中 f 是一个非恒等单射 $[1]^p \to [1]^n$，且 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 是 $F(m, p)$ 中的一个 F- 序列。这些对服从等同 $[f \circ \partial_{i,\varepsilon}, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k] = [f; (0; i^{\varepsilon}) \cdot (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k]$，对任意面映射 $\partial_{i,\varepsilon} \in \square_{\mathrm{inj}}$ 成立。边由形如 $[f, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k] \sim [f, (w'; P_i'^{\pm})]_{i=1}^{k'}$ 的对给出，其第二个坐标在 $F(m, p)$ 中由一条边相连。

根据 $\square_{\mathrm{inj}}$ ([GM03，引理 4.1，定理 5.1])中态射标准形的存在性，每个单射 $[1]^p \to [1]^n$ in $\square_{\mathrm{inj}}$ 都可以唯一地写成面映射的复合 $\partial_{i_1,\varepsilon_1} \cdots \partial_{i_{n-p},\varepsilon_{n-p}}$ 其中 $i_1 > \cdots > i_{n-p}$。因此，映射 $L_{\square^n} F(m, -) \to \partial F(m, n)$ 有如下显式公式：

$$[\partial_{i_1,\varepsilon_1} \ldots \partial_{i_{n-p},\varepsilon_{n-p}}, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k] \mapsto (0; i_1^{\varepsilon_1}) \cdot \ldots \cdot (0; i_{n-p}^{\varepsilon_{n-p}}) \cdot (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k.$$

引理 3.20. 映射 $L_{\square^n} F(m, -) \to \partial F(m, n)$ 是一个同构。

证明。 在定义逆映射 $\partial F(m, n) \to L_{\square^n} F(m, -)$ 之前，我们先作如下观察。约化形式的一个顶点 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k \in \partial F(m, n)$ 满足 $w(1) = 0$，这是由边界的定义得出的。枚举集合 $\{1, \ldots, n\} - P_1$ 的补集可得到一个双射

$$\sigma : \{1, \ldots, p\} \xrightarrow{\cong} \left(\{1, \ldots, n\} - P_1\right)$$

对于某个 $p \geq 0$（ $p = 0$ 的情形当且仅当 $P_1 = \{1, \ldots, n\}$ 时发生；在此情形下， σ 的定义域和陪域均为空）。将 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k \in \partial F(m, n)$ 的约化形式写作 (φ, k, P, w)，我们通过以下方式在 $F(m, p)$ 中定义一个 F- 序列 $(\varphi', k-1, P', w')$：

$$\varphi'(j) := \varphi(\sigma(j)) \quad P'(j) := P(\sigma(j)) - 1 \quad w'(i) := w(i+1).$$

下文中，我们将此 F-序列记为 $(w'; P_i'^{\pm})_{i=1}^{k-1}$。现在我们对 P_1 中的元素进行排序 as

$$P_1 = \{x_1 > \cdots > x_{n-p}\}.$$

并通过以下方式定义 $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{n-p} \in \{0, 1\}$：

$$\varepsilon_j := \begin{cases} 0 & \text{if } \varphi(x_j) = - \\ 1 & \text{if } \varphi(x_j) = +. \end{cases}$$

现在，我们通过将一个 F-序列 $(w; P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 发送到由 $[\partial_{x_1,\varepsilon_1} \ldots \partial_{x_{n-p},\varepsilon_{n-p}}, (w'; P_i'^{\pm})_{i=1}^{k-1}]$ 给出的有序对，来定义逆映射 $\partial F(m, n) \to L_{\square^n} F(m, -)$。利用 FR1-约化规则可以推知，此映射保持边。

按构造，先应用逆映射再应用正向映射，便得到 $\mathrm{id}_{\partial F(m,n)}$。为了证明反向复合等于 $\mathrm{id}_{L_{\square^n} F(m,-)}$，我们注意到，若 $[f, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k]$ 是 $L_{\square^n} F(m-)$ 中的一个顶点，那么根据识别 $[f \circ \partial_{i,\varepsilon}, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k] = [f; (0; i^{\varepsilon}) \cdot (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k]$，我们可以将 $[f, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^k]$ 唯一地写成一对 $[\partial_{i_1,\varepsilon_1} \ldots \partial_{i_{n-p},\varepsilon_{n-p}}, (w'; P_i^{\pm})_{i=1}^{k'}]$，使得 $(w'; P_i^{\pm})_{i=1}^{k'}$ 处于约化形式，并满足 $k' = 0$ 或 $w(1) \neq 0$。由此即可推出所需的等式。□

定理*3.18*的证明。我们固定 $m \geq 0$ 并构造一族同构

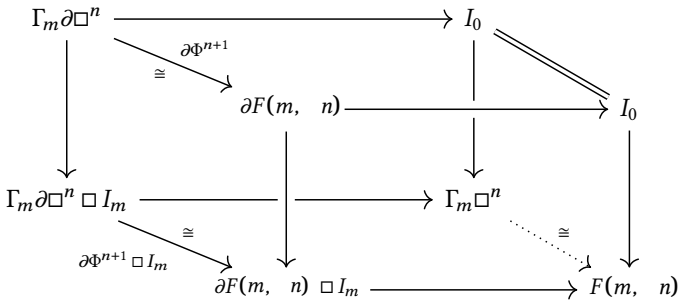
$$\Phi^n \colon \Gamma_m \square^n \to F(m,n)$$

对 n进行归纳。在基例 $n = 0$中，映射 Φ^0 是单顶点图之间的同构。

固定 n，并假设我们已对所有 $k \leq n$构造了 Φ^k。这一族同构诱导出一个同构$\Gamma_m \partial\square^n \to L_{\square^n} F(m, \ -)$，它连接两个锁对象。根据引理 3.20，我们将其识别为一个同构

$$\partial\Phi^{n+1} \colon \Gamma_m \partial\square^n \xrightarrow{\cong} \partial F(m,n).$$

这个同构参与了如下图表



由命题3.3可知，后面是一个推出。由引理3.19可知，前面是一个推出。因此，存在一个诱导同构 $\Gamma_m \square^n \to F(m, n)$，如所求。□

推论 3.21。设 X 是一个半立方集合。对于 $m \geq 0$，图 $\Gamma_m X$ 有如下显式描述：

1. $\Gamma_m X$ 的顶点是形如 $(u、(w; \ P_i^{\pm})_{i=1}^k)$ 的对，其中 u 是 X 的一个非退化 n-立方体，而 $(w; \ P_i^{\pm})_{i=1}^k$ 是 $F(m, n)$ 中的一个 F-序列。这些对满足由以下关系生成的等同：对于任意面映射 $\partial_{i,\varepsilon} \in \square_{\text{inj}}$，$(u\partial_{i,\varepsilon}, (w; \ P_i^{\pm})_{i=1}^k) = (u, (0; \ i^{\varepsilon}) \cdot (w; \ P_i^{\pm})_{i=1}^k)$。

2. 边由如下形式的成对对象给出：$(u, \ (w_0; (P_0)_i^{\pm})_{i=1}^{k_0}) \sim (u, \ (w_1; (P_1)_i^{\pm})_{i=1}^{k_1})$，其中$(w_0; (P_0)_i^{\pm})_{i=1}^{k_0}$ 和$(w_1; (P_1)_i^{\pm})_{i=1}^{k_1}$具有展开形式$(w_0'; (P_0')_i^{\pm})_{i=1}^n$和$(w'1; (P_1')_i^{\pm})_{i=1}^n$，使得：

- 以下函数的符号函数相等：$(w\prime 0; (P\prime 0)_i^{\pm})_{i=1}^n$和 $(w\prime 1; (P\prime 1)_i^{\pm})_{i=1}^n$。
- 划分函数 $P'0 = P'1$ 相等；并且
- 存在 $i \in \{1, \ldots, n\}$，使得 $|w'0(i) - w'1(i)| \leq 1$以及 $w'0(j) = w'1(j)$对所有 $j \neq i$属于$\{1, \ldots, n\}$都成立。

证明。这是一个使用公式 $\operatorname{colim}_{(\square^n, u) \in \int X} \square^n \cong X$ 以及定理3.18的标准论证。 □

4 主要定理

至此，我们已经建立了所有必要的概念；正如其名称所暗示的，本章节的目标是证明本文的主要定理。这就是定理 4.5，它断言图的神经函子 N_∞: Graph $\to$ cSet 通过将 n-等价取逆，诱导同伦范畴的等价。为证明做准备，我们需要先处理若干引理。

回顾一下，图实现函子通过自然满射相互关联

$$(\ell_!)_X, (r_!)_X \colon |X|_{m+1} \to |X|_m.$$

在 $F_!X$处取某个半立方集合 X，我们得到自然变换 $\ell_!, \ r_! \colon \Gamma_{m+1} X \to \Gamma_m X$。

命题 4.1。 对于任意立方集合 X和 $m \in \mathbb{N}$，这些方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X^{m+1}} & \mathrm{N}_{m+1}\,|X|_{m+1} \\ {\scriptstyle \eta_X^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_{m+1}(\ell_!)} \\ \mathrm{N}_m\,|X|_m & \xrightarrow{\ell^*} & \mathrm{N}_{m+1}\,|X|_m \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X^{m+1}} & \mathrm{N}_{m+1}\,|X|_{m+1} \\ {\scriptstyle \eta_X^m}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_{m+1}(r_!)} \\ \mathrm{N}_m\,|X|_m & \xrightarrow{r^*} & \mathrm{N}_{m+1}\,|X|_m \end{array}$$

可交换。

证明。 关于左侧方块，给定一个 k-立方体 $u\colon \square^k \to X$，右上方的复合将 u映射为态射$\ell_!\circ\ |u|_{m+1}$，而左下方的复合将 u映射为态射 $|u|_m \circ \ell^{\square k}$。根据 $\ell_!$的定义，这两者相等。右侧方块的证明类似。 □

推论 4.2。 设 X是一个半立方集合。对于 $n \geq 0$ 和 $m \geq n+2$，映射

$$\ell_X^m, r_X^m\colon \Gamma_{m+1}X \to \Gamma_m X$$

是 n-等价。此外，若 X是非奇异的，则当 $m = n+1$时结论仍成立。

证明。 对于 ℓ_X^m或 r_X^m，我们将命题 4.1 中相应的方块应用于 $F_!X$。底部态射由定理 1.23 知是弱等价。左侧和顶部映射由定理 3.9 知是 n-等价。因此，右侧映射如所需，是一个 n-等价。 □

以下是推论 3.8 的推广。

引理 4.3. 设 $n \geq 0$与 $m \geq n+2$。假设 $f\colon X \hookrightarrow Y$是半立方集合的单态射，且 $g\colon \Gamma_m X \to G$是图映射。则 g沿 $\Gamma_m f$的推出

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_m X & \xrightarrow{\Gamma_m f} & \Gamma_m Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ G & \longrightarrow & \bullet \end{array}$$

在应用 N_m 之后成为 n-类型的同伦推出。

证明。 单态射 f可以分解为一个单态射序列

$$X = (X \cup \mathrm{sk}^{-1}\,Y) \hookrightarrow (X \cup \mathrm{sk}^0\,Y) \hookrightarrow (X \cup \mathrm{sk}^1\,Y) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow (X \cup \mathrm{sk}^k\,Y) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow Y$$

其中每个 $X \cup \mathrm{sk}^k\,Y$是 X与 $\mathrm{sk}^k\,Y$沿 $\mathrm{sk}^k\,X$的推出，且 $\mathrm{colim}_{k\in\mathbb{N}}(X \cup \mathrm{sk}^k\,Y) = Y$。对于 $k \geq 0$，该方块

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\substack{y\in(Y_k)_{\mathrm{nd}} \\ y\notin \mathrm{im}\,f}} \partial\square^k & \xrightarrow{[\partial y]} & X \cup \mathrm{sk}^{k-1}\,Y \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \coprod_{\substack{y\in(Y_k)_{\mathrm{nd}} \\ y\notin \mathrm{im}\,f}} \square^k & \xrightarrow{[y]} & X \cup \mathrm{sk}^k\,Y \end{array}$$

是一个推出。函子 $\Gamma_m\colon \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathrm{Graph}$ 保持单态射和余极限，因此我们得到 $\Gamma_m f$ 的一个分解：

$$\Gamma_m X \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^{k-1}\,Y) \hookrightarrow \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^k\,Y) \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \Gamma_m Y$$

其中每个包含映射 $\Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^{k-1} Y) \hookrightarrow \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^k Y)$ 都是由一个推出得到的

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\substack{y \in (Y_k)_{\mathrm{nd}} \\ y \notin \operatorname{im} f}} \Gamma_m \partial\square^k & \xrightarrow{[\partial y]} & \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^{k-1} Y) \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \coprod_{\substack{y \in (Y_k)_{\mathrm{nd}} \\ y \notin \operatorname{im} f}} \Gamma_m \square^k & \xrightarrow{[y]} & \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^k Y) \end{array}$$

以及 $\operatorname{colim}_{k \in \mathbb{N}} \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^k Y) = \Gamma_m Y$。通过上述包含映射序列，我们可以将所关注的推出分解为

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_m X & \xhookrightarrow{\Gamma_m f} & \Gamma_m Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ G & \longrightarrow & P \end{array}$$

一系列推出：

$$\begin{array}{ccccccccc} \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^{-1} Y) & \hookrightarrow & \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^0 Y) & \hookrightarrow & \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^1 Y) & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & \Gamma_m Y \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \downarrow \\ G & \hookrightarrow & P_0 & \hookrightarrow & P_1 & \hookrightarrow & \cdots & \hookrightarrow & P \end{array}$$

应用 N_m 后，顶部和底部序列都是由单态射构成的序列余极限图（因为 N_m 保持滤过余极限和单态射），因此它们是 Cisinski 模型结构中关于 $\Gamma_m X \cup \mathrm{sk}^n Y \hookrightarrow$-等价的同伦余极限图。因此，只需证明沿每个包含映射 $(\mathrm{sk}^{k-1} Y) (\mathrm{sk}^n)$ 的推出，在应用 N^m 后会变成 -型的同伦推出。

根据命题 3.6，映射 $\Gamma_m \partial\square^k \hookrightarrow \Gamma_m \square^k$ 被识别为双映射柱 $\ell_0(\mathrm{id}, !)$ 中的包含映射：$\Gamma_m \partial\square^k \hookrightarrow \mathrm{Cyl}_m(\mathrm{id}, !)$。注意，给定任意一组映射 $\{f_i \colon G_i \to H_i\}$ 和 $\{g_i \colon G_i \to K_i\}$，我们有一个同构 $\coprod_i \mathrm{Cyl}_m(f_i, g_i) \cong \mathrm{Cyl}_m(\coprod_i f_i, \coprod_i g)$，使得柱体包含映射构成一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} \coprod_i H_i & \xrightarrow{\coprod \ell_0(f_i, g_i)} & \coprod_i \mathrm{Cyl}_m(f_i, g_i) & \xleftarrow{\coprod r_0(f_i, g_i)} & \coprod_i K_i \\ & {\scriptstyle \ell_0(\coprod f_i, \coprod g_i)} \searrow & \downarrow \cong & \swarrow {\scriptstyle r_0(\coprod f_i, \coprod g_i)} & \\ & & \mathrm{Cyl}_m(\coprod f_i, \coprod g_i) & & \end{array}$$

据此，我们可以将定义 $\Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^n Y)$ 的推出重写为如下形式（在同构意义下）：

$$\begin{array}{ccc} \coprod_{\substack{y \in (Y_k)_{\mathrm{nd}} \\ y \notin \operatorname{im} f}} \Gamma_m \partial\square^k & \xrightarrow{[\partial y]} & \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^{k-1} Y) \\ {\scriptstyle \ell_0(\coprod \mathrm{id}, \coprod !)}\downarrow & \ulcorner & \downarrow {\scriptstyle \ell_0([\partial y], \coprod !)} \\ \mathrm{Cyl}_m(\coprod \mathrm{id}, \coprod !) & \xrightarrow{[y]} & \mathrm{Cyl}_m([\partial y], \coprod !) \end{array}$$

其中，同构 $X \cup \mathrm{sk}^n Y \cong \mathrm{Cyl}_m([\partial y], \coprod !)$ 可由命题 2.13 得出。我们将定义 P_k 的推出方块拼接到右侧，得到如下图表：

$$\begin{array}{ccccc}
\coprod\limits_{\substack{y\in(Y_k)_{\mathrm{nd}}\\ y\notin \mathrm{im}\, f}} \Gamma_m \partial\square^k & \xrightarrow{[\partial y]} & \Gamma_m(X \cup \mathrm{sk}^{k-1} Y) & \cdots\cdots\rightarrow & P_{k-1} \\
{\scriptstyle \ell_0(\coprod \mathrm{id}, \coprod !)}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \ell_0([\partial y], \coprod !)} & & \downarrow \\
\mathrm{Cyl}_m(\coprod \mathrm{id}, \coprod !) & \xrightarrow{[y]} & \mathrm{Cyl}_m([\partial y], \coprod !) & \cdots\cdots\rightarrow & P_k
\end{array}$$

我们对左侧方块和复合方块（其中含有 $g = \coprod !$、$p = n$ 和 $q = m - n$）应用定理 2.20，从而得出这些方块都是 n-型的同伦推出。因此，右侧方块是 n 型的同伦推出，正如所需。□

推论 4.4。令 $n \geq 0$ 和 $m \geq n+2$。假设 $f\colon X \hookrightarrow Y$ 是立方集合之间的单态射，且 $w\colon \Gamma_m X \to G$ 是一个 n-等价。那么，沿着 $\Gamma_m f$ 对 w 作出的推出

$$\begin{array}{ccc}
\Gamma_m X & \xrightarrow{\Gamma_m f} & \Gamma_m Y \\
{\scriptstyle w}\downarrow{\scriptstyle \sim} & & \vdots{\scriptstyle \sim} \\
G & \cdots\cdots\rightarrow & \bullet
\end{array}$$

是一个 n-等价。

证明。由引理 4.3 和左正则性可得。□

定理 4.5。神经函子诱导出一个等价

$$\mathrm{Ho}(\mathrm{Graph}) \xrightarrow[\simeq]{\mathrm{Ho}\,\mathrm{N}_\infty} \mathrm{Ho}(\mathrm{cSet}_n)$$

在关于 n-等价的局部化之间。

证明。我们证明 $\mathrm{N}_\infty\colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{cSet}_n$ 满足右逼近性质，由命题 1.36 可知这已足够。性质 (AP1) 由推论 1.24 得出。

为证明性质 (AP2)，固定一个映射 $f\colon X \to \mathrm{N}_\infty G$，其中 $X \in \mathrm{cSet}$ 在关于 n-等价的转移模型结构中是 n-纤维化的。我们将证明组织为以下步骤：

步骤 1：构造一个半立方集合 $X' \in \mathrm{cSet}_{\mathrm{semi}}$ 以及一个 n-等价 $w\colon F_! X' \xrightarrow{\sim} X$。

步骤 2：构造一个滤过 $(X'_m \subseteq X')_{m=n+2}^{\infty}$，使得 $X' = \mathrm{colim}_m X'_m$，并且映射 $fw\colon F_! X' \to \mathrm{N}_\infty G$ 限制为滤过之间的自然变换 $(fw)_m\colon F_! X'_m \to \mathrm{N}_m G$。

步骤 3：构造图的滤过 $(H_m \subseteq H_\infty)_{m=n+2}^{\infty}$，使得滤过中的每个对象都存在一个图映射 $H_m \to G$，并且立方映射 $(fw)_m\colon F_! X'_m \to \mathrm{N}_m G$ 可通过该图映射的神经分解为

$$F_! X'_m \to \mathrm{N}_m H_m \to G$$

步骤 4：双变量立方集合滤过的对角线

$$\left(\mathrm{N}_{m_1}(H_{m_2}) \subseteq \mathrm{N}_\infty H_\infty\right)_{m_1, m_2 = n+2}^{\infty}$$

将容许一个自然变换 $\mathrm{N}_m H_m \to \mathrm{N}_m G$。最后，我们将构造一个自然$n$-等价 $F_! X'_m \xrightarrow{\sim} \mathrm{N}_m H_m$，并证明该方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathrm{N}_\infty G \\ {\scriptstyle w}\uparrow{\scriptstyle \sim} & & \uparrow \\ F_! X' & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{N}_\infty H_\infty \end{array}$$

交换。

现在我们继续进行证明。

*St*第 *1* 步。 我们运用推论 A.14 和定理 A.22，构造一个由弱等价组成的余跨 s

$$X \xrightarrow{\sim} \widetilde{X} \xleftarrow{\sim} i_! \widetilde{X}'$$

~ ~其中 X' 是一个半立方集合， $X \xrightarrow{\sim} X$ 是 Grothendieck 模型结构中的无圈余纤维化。函子 sk^{n+1}: cSet $\to$ cSet 是从 Grothendieck 模型结构到 n-转移模型结构的左 Quillen 函子，因此得到一个余跨

$$\mathrm{sk}^{n+1} X \xrightarrow{\sim} \mathrm{sk}^{n+1} \widetilde{X} \xleftarrow{\sim} \mathrm{sk}^{n+1} i_! \widetilde{X}'$$

其中所有映射都是 n-等价，且 $\mathrm{sk}^{n+1} X \to \mathrm{sk}^{n+1} \widetilde{X}$ 是 n-转移模型结构中的无圈余纤维化。由于 X 是 n-纤维化的，三角形

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{sk}^{n+1} X & \xhookrightarrow{\sim} & X \\ {\scriptstyle\sim}\downarrow & \nearrow_{(\sim)} & \\ \mathrm{sk}^{n+1} \widetilde{X} & & \end{array}$$

存在一个提升；根据三取二，该提升还是一个 n-等价。

我们现在援引定理 3.4 来构造一个弱等价的余跨

$$i_! \widetilde{X}' \xrightarrow{\sim} L\widetilde{X}' \xleftarrow{\sim} F_! \widetilde{X}'$$

其中 $i_! \widetilde{X}' \xrightarrow{\sim} L^{\mathcal{X}'}$ i s 是 Grothendieck 模型结构中的无圈余纤维化。再次应用 sk^{n+1} 得到一个 n-等价的余跨 nces

$$\mathrm{sk}^{n+1} i_! \widetilde{X}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{sk}^{n+1} L\widetilde{X}' \xleftarrow{\sim} \mathrm{sk}^{n+1} F_! \widetilde{X}'$$

其中 $\mathrm{sk}^{n+1} i_! \widetilde{X}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{sk}^{n+1} L\widetilde{X}$ 是 n-转移模型结构中的无圈余纤维化。再次， X 是 n-纤维化的，因此该三角形

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{sk}^{n+1} i_! \widetilde{X}' & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{sk}^{n+1} \widetilde{X} & \overset{\sim}{\dashrightarrow} & X \\ \downarrow{\scriptstyle\sim} & & & \nearrow_{(\sim)} & \\ \mathrm{sk}^{n+1} L\widetilde{X}' & & & & \end{array}$$

存在一个提升，由三取二可知它是一个 n-等价。注意，我们有一个自然同构 $\mathrm{sk}^{n+1} F_! \cong F_! \mathrm{sk}^{n+1}$。我们将 X，定义为半立方集合 $\mathrm{sk}^{n+1} \widetilde{X}'$，并令 $w\colon F_! X' \xrightarrow{\sim} X$ 表示该复合 n-等价

$$F_! X' \xrightarrow{\cong} \mathrm{sk}^{n+1} F_! \widetilde{X}' \xrightarrow{\sim} \mathrm{sk}^{n+1} L\widetilde{X}' \overset{\sim}{\dashrightarrow} X$$

步骤 *2*。沿 fw 拉回会得到一个函子

$$(fw)^*\colon \mathrm{cSet} \downarrow \mathrm{N}_\infty G \to \mathrm{cSet} \downarrow F_! X'$$

由于 cSet 是预层范畴，该函子保持余极限。回想一下，函子 $F_!\colon \mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}} \to \mathsf{cSet}$ 存在一个右伴随，记作 $F^*\colon \mathsf{cSet} \to \mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}$。这一伴随在切片范畴上诱导出一个伴随

$$\mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}\downarrow X' \quad \underset{\eta^*F^*}{\overset{F_!}{\rightleftarrows}} \quad \mathsf{cSet}\downarrow F_!X'$$

其中，右伴随先取切片范畴 $Y \to F_!X'$中的一个对象，应用 F^*得到 $F^*Y \to F^*F_!X'$，然后沿单位映射 $\eta\colon X' \to F^*F_!X'$拉回，从而得到切片范畴 $\mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}\downarrow X'$中的对象，如下图右侧所示：

$$\begin{array}{ccc} \eta^*(F^*Y) & \longrightarrow & F^*Y \\ \downarrow & \lrcorner & \downarrow \\ X' & \xrightarrow{\eta} & F^*F_!X' \end{array}$$

这个函子保持余极限，因为应用 F^*保持余极限（这是因为 F^*还存在一个右伴随 F_*），而沿 η 拉回也保持余极限（同样，这是因为 cSet 是一个预层范畴）。由此，我们得到一个复合伴随

$$\mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}\downarrow X' \quad \underset{\eta^*F^*}{\overset{F_!}{\rightleftarrows}} \quad \mathsf{cSet}\downarrow F_!X' \quad \underset{(fw)^*}{\overset{(fw)_!}{\rightleftarrows}} \quad \mathsf{cSet}\downarrow \mathrm{N}_\infty G$$

其中右伴随保留余极限。因此，序列余极限

$$\left(\mathrm{N}_{n+2}\,G \hookrightarrow \mathrm{N}_{n+3}\,G \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow \mathrm{N}_m\,G \hookrightarrow \ldots\right) \hookrightarrow \mathrm{N}_\infty\,G$$

在 $\mathsf{cSet}\downarrow \mathrm{N}_\infty\,G$ 中被映射为 $\mathsf{cSet}_{\mathrm{semi}}\downarrow X'$ 中的序列余极限，我们将其记为

$$\left(X'_{n+2} \hookrightarrow X'_{n+3} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow X'_m \hookrightarrow \ldots\right) \hookrightarrow X'.$$

这个复合伴随在对象 $\mathrm{N}_m\,G \in \mathsf{cSet}\downarrow \mathrm{N}_\infty\,G$ 处取值时的余单位，是交换方块中的上方态射

$$\begin{array}{ccc} F_!X'_m & \overset{(fw)_m}{\dashrightarrow} & \mathrm{N}_m\,G \\ \downarrow & & \downarrow \\ F_!X' & \xrightarrow{fw} & \mathrm{N}_\infty\,G \end{array}$$

将此 态射记为 $(fw)_m$。随着 m变化，我们得到一个滤过之间的映射 $(fw)_\bullet\colon F_!X'_\bullet \to \mathrm{N}_\bullet\,G$.

步骤 *3*。对于每个 m，我们利用单位$\eta^m_{F_!X'_m}$的泛性质将映射 $(fw)_m\colon F_!X'_m \to \mathrm{N}_m\,G$分解为 $F_!X'_m \to \mathrm{N}_m|F_!X'_m|_m$，形式如下

$$F_!X'_m \to \mathrm{N}_m|F_!X'_m|_m \xrightarrow{\mathrm{N}_m\,g_m} \mathrm{N}_m\,G$$

对于唯一的图映射 $g_m\colon |F_!X'_m|_m \to G$。我们将 $|F_!X'_m|_m$ 重写为 $\Gamma_mX'_m$，使得 g_m 是图映射 $\Gamma_mX'_m \to G$。令 i_m 表示序列包含映射 $X'_m \hookrightarrow X'_{m+1}$。我们声称，若 m 为奇数，则以下方块中的左侧方块：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{m+1}X'_m & \xrightarrow{\Gamma_{m+1}i_m} & \Gamma_{m+1}X'_{m+1} \\ {\scriptstyle \ell_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_{m+1}} \\ \Gamma_mX'_m & \xrightarrow{g_m} & G \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_{m+1}X'_m & \xrightarrow{\Gamma_{m+1}i_m} & \Gamma_{m+1}X'_{m+1} \\ {\scriptstyle r_!}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_{m+1}} \\ \Gamma_mX'_m & \xrightarrow{g_m} & G \end{array}$$

可交换；若 m 为偶数，则右侧方块可交换。我们先证明 m 为奇数的情形； m 为偶数的情形类似。根据伴随性，只需验证应用 N_{m+1} 并预合成单位 $\eta^{m+1}_{F_!X'_m}\colon F_!X'_m \to \mathrm{N}_{m+1}\,\Gamma_{m+1}X'_m$ 后，该方块可交换：

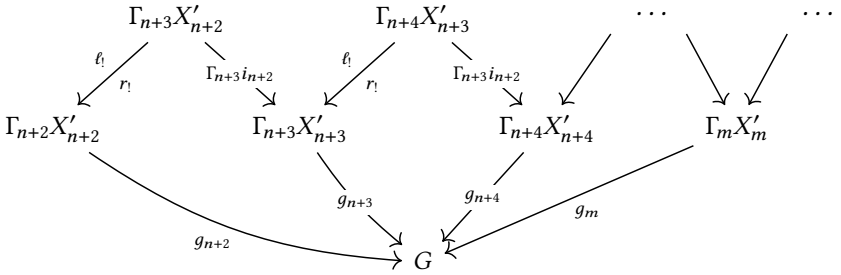
$$\begin{array}{ccccc} F_!X'_m & \xrightarrow{\eta^{m+1}_{F_!X'_m}} & \mathrm{N}_{m+1}\,\Gamma_{m+1}X'_m & \xhookrightarrow{\mathrm{N}_{m+1}\,\Gamma_{m+1}i_m} & \mathrm{N}_{m+1}\,\Gamma_{m+1}X'_{m+1} \\ & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_{m+1}\,\ell_!} & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{N}_{m+1}\,g_{m+1}} \\ & & \mathrm{N}_{m+1}\,\Gamma_m X'_m & \xrightarrow{\mathrm{N}_{m+1}\,g_m} & \mathrm{N}_{m+1}\,G \end{array}$$

现在我们来计算：

$$\begin{aligned} \mathrm{N}_{m+1}\,g_{m+1} \circ \mathrm{N}_{m+1}\,\Gamma_{m+1}i_m \circ \eta^{m+1}_{F_!X'_m} &= \mathrm{N}_{m+1}\,g_{m+1} \circ \eta^{m+1}_{F_!X'_{m+1}} \circ F_!i_m && \text{by naturality of } \eta^{m+1} \\ &= (fw)_{m+1} \circ F_!i_m && \text{by definition of } g_{m+1} \\ &= \ell^* \circ (fw)_m && \text{by naturality of } (fw)_\bullet \\ &= \ell^* \circ \mathrm{N}_m\,g_m \circ \eta^m_{F_!X'_m} && \text{by definition of } g_m \\ &= \mathrm{N}_{m+1}\,g_m \circ \ell^* \circ \eta^m_{F_!X'_m} && \text{by naturality of } \ell^* \\ &= \mathrm{N}_{m+1}\,g_m \circ \mathrm{N}_{m+1}\,\ell_! \circ \eta^{m+1}_{F_!X'_m} && \text{by Proposition 4.1,} \end{aligned}$$

因此，所需的方块可交换。

由此，我们得到一个锥图



这对所有 $m \geq n+2$ 都成立，其中向左的映射 $\Gamma_{m+1}X'_m \to \Gamma_m X_m$ 在 m 为奇数时是 $\ell_!$，在 m 为偶数时是 $r_!$。

令 $H_m \in \mathsf{Graph}$ 表示该截断图表的余极限

$$H_m := \operatorname{colim}\left(\begin{array}{ccccccc} & \Gamma_{n+3}X'_{n+2} & & & \Gamma_{n+4}X'_{n+3} & & \cdots \\ {\scriptstyle \ell_!}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \Gamma_{n+3}i_{n+2}} & {\scriptstyle \ell_!}\swarrow & & \searrow{\scriptstyle \Gamma_{n+3}i_{n+2}} & \swarrow \quad \searrow \\ \Gamma_{n+2}X'_{n+2} & & \Gamma_{n+3}X'_{n+3} & & \Gamma_{n+4}X'_{n+4} & & \Gamma_m X'_m \end{array} \right)$$

这些包含 图表诱导出映射 $j_m\colon H_m \to H_{m+1}$ 对所有 $m \geq n+2$，该序列的余极限

$$H_\infty := \operatorname{colim}\left(H_{n+2} \xrightarrow{j_{n+2}} H_{n+3} \xrightarrow{j_{n+3}} H_{n+4} \to \dots\right)$$

是无限图表的余极限

$$H_\infty = \text{余极限}\left(\begin{array}{ccccccccc} & \Gamma_{n+3}X'_{n+2} & & & \Gamma_{n+4}X'_{n+3} & & \cdots & & \cdots \\ {\scriptstyle \ell_!}\swarrow\ \searrow{\scriptstyle r_!} & & {\scriptstyle \Gamma_{n+3}i_{n+2}}\searrow & {\scriptstyle \ell_!}\swarrow\ \searrow{\scriptstyle r_!} & & {\scriptstyle \Gamma_{n+3}i_{n+2}}\searrow & & \searrow\ \swarrow & \\ \Gamma_{n+2}X'_{n+2} & & \Gamma_{n+3}X'_{n+3} & & \Gamma_{n+4}X'_{n+4} & & & \Gamma_m X'_m & \end{array}\right)$$

由此可知，映射 $g_m\colon\ \Gamma_m X'_m \to G$可分解为：

$$\Gamma_m X'_m \to H_m \to H_\infty \to G.$$

对于 $m \geq n+2$，我们证明余极限锥分量 $\lambda_m\colon\ \Gamma_m X'_m \to H_m$是一个 n-等价。在基例中，根据定义，$\Gamma_{n+2}X'_{n+2} \to H_{n+2}$ 是一个同构。在归纳步骤中，注意到余极限 H_{m+1} 可以通过一个推出计算：

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{m+1}X'_m & \xrightarrow{\Gamma_{m+1}i_m} & \Gamma_{m+1}X'_{m+1} \\ {\scriptstyle r_!}\downarrow{\scriptstyle \ell_!} & & \\ \Gamma_m X'_m & & \downarrow{\scriptstyle \lambda_{m+1}} \\ {\scriptstyle \lambda_m}\downarrow & \ulcorner & \\ H_m & \xrightarrow{j_m} & H_{m+1} \end{array} \qquad (*)$$

根据归纳假设，左下方的映射是一个 n-等价。根据推论 4.2，左上方的映射是一个n-等价。由推论 4.4即可得到该断言。

步骤 *4*。将函子 N_{n+2}、N_{n+3}、.....应用于序列

$$\left(H_{n+2} \hookrightarrow H_{n+3} \hookrightarrow H_{n+4} \hookrightarrow \ldots \hookrightarrow H_m \hookrightarrow \ldots\right) \to H_\infty \to G$$

得到一个交换图：

$$\begin{array}{ccccccccccc} \left(\mathrm{N}_{n+2}H_{n+2} \hookrightarrow \mathrm{N}_{n+2}H_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{N}_{n+2}H_{n+4} \hookrightarrow \ldots \mathrm{N}_{n+2}H_m \hookrightarrow \ldots\right) & & & & & & & & \mathrm{N}_{n+2}H_\infty & \to & \mathrm{N}_{n+2}G \\ \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} \\ \left(\mathrm{N}_{n+3}H_{n+2} \hookrightarrow \mathrm{N}_{n+3}H_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{N}_{n+3}H_{n+4} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{N}_{n+3}H_m \hookrightarrow \ldots\right) & & & & & & & & \mathrm{N}_{n+3}H_\infty & \to & \mathrm{N}_{n+3}G \\ \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} & & \downarrow{\scriptstyle \ell^*}\uparrow{\scriptstyle r^*} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \left(\mathrm{N}_\infty H_{n+2} \hookrightarrow \mathrm{N}_\infty H_{n+3} \hookrightarrow \mathrm{N}_\infty H_{n+4} \hookrightarrow \cdots \hookrightarrow \mathrm{N}_\infty H_m \hookrightarrow \ldots\right) & & & & & & & & \mathrm{N}_\infty H_\infty & \to & \mathrm{N}_\infty G \end{array}$$

其中每个竖直列都是序列余极限。由此，我们提取出一个从对角滤过到最右侧滤过的映射

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{N}_{n+2}H^{n+2} & \longrightarrow & \mathrm{N}_{n+2}G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}_{n+3}H^{n+3} & \longrightarrow & \mathrm{N}_{n+3}G \\ \downarrow & & \downarrow \\ \vdots & & \vdots \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{N}_\infty H_\infty & \longrightarrow & \mathrm{N}_\infty G \end{array}$$

其中同样地，两个竖直列都是序列余极限。

对于 $m \geq n+2$，方块

$$\begin{array}{ccccc} F_! X'_m & \xrightarrow{\eta^m_{F_! X'_m}} & \mathrm{N}_m \, \Gamma_m X'_m & \xrightarrow{\mathrm{N}_m \, \lambda_m} & \mathrm{N}_m \, H_m \\ \downarrow{\scriptstyle F_! i_m} & & & & \downarrow{\scriptstyle \ell^* \circ \mathrm{N}_m \, j_m} \\ F_! X'_{m+1} & \xrightarrow{\eta^{m+1}_{F_! X'_{m+1}}} & \mathrm{N}_{m+1} \, \Gamma_{m+1} X'_{m+1} & \xrightarrow{\mathrm{N}_{m+1} \, \lambda_{m+1}} & \mathrm{N}_{m+1} \, H_{m+1} \end{array}$$

经过直接计算可知其交换

$$\begin{aligned} \ell^* \circ \mathrm{N}_m \, j_m \circ \mathrm{N}_m \, \lambda_m \circ \eta^m_{F_! X'_m} &= \ell^* \circ \mathrm{N}_m (j_m \circ \lambda_m) \circ \eta^m_{F_! X'_m} \\ &= \mathrm{N}_{m+1} (j_m \circ \lambda_m) \circ \ell^* \circ \eta^m_{F_! X'_m} && \text{by naturality of } \ell^* \\ &= \mathrm{N}_{m+1} (j_m \circ \lambda_m) \circ \mathrm{N}_{m+1} \, \ell_! \circ \eta^{m+1}_{F_! X'_m} && \text{by Proposition 4.1} \\ &= \mathrm{N}_{m+1} (j_m \circ \lambda_m \circ \ell_!) \circ \eta^{m+1}_{F_! X'_m} \\ &= \mathrm{N}_{m+1} (\lambda_{m+1} \circ \Gamma_{m+1} i_m) \circ \eta^{m+1}_{F_! X'_m} && \text{by commutativity of } (*) \\ &= \mathrm{N}_{m+1} \, \lambda_{m+1} \circ \mathrm{N}_{m+1} \, \Gamma_{m+1} i_m \circ \eta^{m+1}_{F_! X'_m} \\ &= \mathrm{N}_{m+1} \, \lambda_{m+1} \circ \eta^{m+1}_{F_! X'_{m+1}} \circ F_! i_m && \text{by naturality of } \eta^{m+1}. \end{aligned}$$

由此，　　我们得到滤过 $F_! X'_\bullet \to \mathrm{N}_\bullet \, H_\bullet$ 之间的一个映射。此外，滤过的各个分量

$$F_! X'_m \xrightarrow{\eta} \mathrm{N}_m \, \Gamma_m X'_m \xrightarrow{\mathrm{N}_m \, \lambda_m} \mathrm{N}_m \, H_m$$

都是 n-等价：左侧映射 η 根据定理 3.9 是一个 n-等价，而我们先前已证明右侧映射是一个 n-等价。两个滤过都由单态射组成，因此它们是 n-类型的 Cisinski 模型结构中的同伦余极限。由此可得，余极限上的诱导映射 $F_! X' \to \mathrm{N}_\infty \, H_\infty$ 是一个n-等价。

剩下的只有证明方块

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & \mathrm{N}_\infty \, G \\ {\scriptstyle w}\uparrow{\scriptstyle \sim} & & \uparrow \\ F_! X' & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{N}_\infty \, H_\infty \end{array}$$

交换。换句话说，这可以表述为三角形的交换性

$$\begin{array}{ccc} F_! X' & \xrightarrow{f w} & \mathrm{N}_\infty \, G \\ & {\scriptstyle \sim} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \sim} & \\ & \mathrm{N}_\infty \, H & \end{array}$$

这个三角形源自　　om 其分量由以下给出的序列余极限图之间的映射三角形：

$$\begin{array}{ccc} F_! X'_m & \xrightarrow{(f w)_m} & \mathrm{N}_m \, G \\ & {\scriptstyle \sim} \searrow \quad \nearrow {\scriptstyle \sim} & \\ & \mathrm{N}_m \, H_m & \end{array}$$

根据构造，$(fw)_m$ 分解为

$$\begin{tikzcd} F_! X'_m \arrow[r, "\eta_{F_! X'_m}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{N}_m \Gamma_m X'_m \arrow[d, "\mathrm{N}_m g_m"] \\ \mathrm{N}_m H_m \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{N}_m G \end{tikzcd}$$

并且，再次， g_m 分解为

$$\begin{tikzcd} F_! X'_m \arrow[r, "\eta_{F_! X'_m}"] \arrow[d, "\sim"'] & \mathrm{N}_m \Gamma_m X'_m \arrow[d, "\mathrm{N}_m g_m"] \arrow[dl, "\mathrm{N}_m \lambda_m"'] \\ \mathrm{N}_m H_m \arrow[r, "\sim"] & \mathrm{N}_m G \end{tikzcd}$$

根据定义，上方的三角形现在交换。 □

5 计算显式的离散同伦群

在本文的最后一节中，我们将推导早先结果的一些推论，并将其应用于离散同伦新不变量的具体应用。一个特别活跃的研究领域是寻找球面的离散模型，目前已提出若干候选模型，例如 $\partial I_5^{\square 3}$。尽管它看起来与 S^2 相似，但其离散同伦群此前仅在度不超过 2 的范围内为人所知。该领域的当代研究包括 Babson 的工作；他在 2023年 美国数学研究所的一场报告中，勾勒了一种构造其第三离散同伦群中非平凡元素的可行方法。

我们的方法涵盖了以往的做法，使我们能够计算整个群，而非仅仅构造其中一个非平凡元素；此外，还能描述第四和第五离散同伦群。对于更大的球面模型，情况甚至更理想；同样，对于更高阶 S^n 的暂定模型，也可以得出更多结论。

在本章节的第二部分，我们给出一种将单纯复形转化为图的明确方法，使该图的神经与该复形 n-等价。鉴于此构造适用范围之广（任意单纯复形均可），我们遗憾地发现它的规模会迅速膨胀。事实上，为了恢复 $\mathbb{RP}^2$的 2-型，我们构造了一个包含 1，801 个顶点和 2，700 多条边的图。

球面的离散模型

我们首先证明，当长度 m 足够大时，圆柱函子 $\mathrm{Cyl}_m\colon \mathrm{Fun}(\Lambda,\ \mathrm{Graph}) \to \mathrm{Graph}$ 关于 n-等价是同伦的。特别地，这表明当 m足够大时，悬挂函子$\Sigma_m\colon \mathrm{Graph} \to \mathrm{Graph}$ 保持 n-等价。

定理 5.1。 令 Λ 表示一个具有三个对象 0、1、2 以及态射 $0 \to 1$ 和 $0 \to 2$的范畴。对于 $m \geq 0$，函子

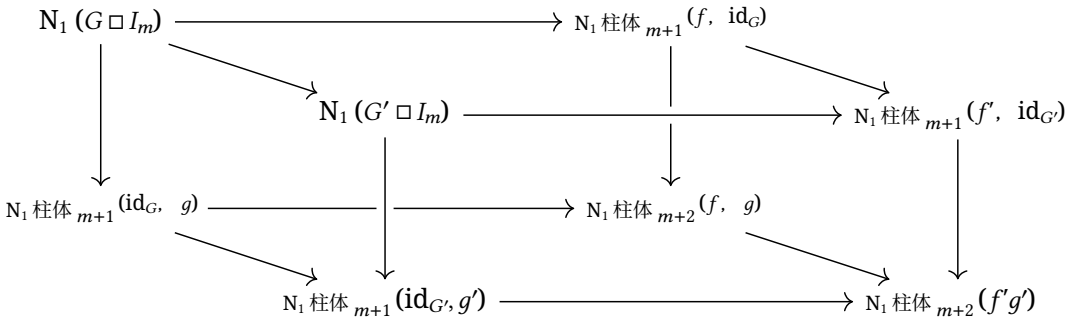
$$\mathrm{Cyl}_{m+2}\colon \mathrm{Fun}(\Lambda, \mathrm{Graph}) \to \mathrm{Graph}$$

将图表之间逐对象的 n-等价映射为 n-等价，适用于所有 $n \in \{0, \ldots, m-2\}$。

证明。假设

$$\begin{tikzcd} H \arrow[d, "\sim"'] & G \arrow[l, "f"'] \arrow[r, "g"] \arrow[d, "\sim"] & K \arrow[d, "\sim"] \\ H' & G' \arrow[l, "f'"'] \arrow[r, "g'"] & K' \end{tikzcd}$$

是一个态射 的图表，它是逐对象的 n-等价。由此，我们得到一个交换立方体



其中，根据推论 2.19，前方和后方的方块都是同伦推出。要证明右下方对象之间的对角映射是一个 n等价，只需证明另外三个对角映射是n等价。

这三个对角映射是将 N_1 应用于方块中的顶部映射得到的：

$$\begin{array}{ccc} G \square I_m & \longrightarrow & G' \square I_m \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ G & \xrightarrow{\sim} & G' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} H \square I_m & \longrightarrow & H' \square I_m \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ H & \xrightarrow{\sim} & H' \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} K \square I_m & \longrightarrow & K' \square I_m \\ \sim\downarrow & & \downarrow\sim \\ K & \xrightarrow{\sim} & K' \end{array}$$

竖直映射是同伦等价，而根据假设，底部映射是 n等价，因此顶部映射是 n等价。□

推论 5.2. 对于 $m \geq 0$，悬挂函子 Σ_{m+2}: Graph $\to$ Graph 对所有 $n \in \{0, \ldots, m\}$，都保持 n-等价。□

我们使用引理 2.23 和定理 2.26，构造拓扑球面的离散模型，直到 n-等价。回顾例 2.11，长度为 m的 k 立方体 $\partial I_m^{\square k}$的边界可表示为一个双映射柱。在立方集合中也有类似结论，具体如下：

定理 5.3. 对于 k、$n \geq 0$ 和 $m \geq n$，单位映射

$$\eta_{\partial \square^k} : \partial \square^k \to \mathrm{N}_m\, \partial I_m^{\square k}$$

是一个 n-等价。

*Pr*证明。 对于 $n = 0$，这很容易验证。因此，我们可以假设 $n \geq 1$ （从而 $m \geq 1$ ）.

现在我们对 k 使用归纳法。 $k = 0$ 的情形成立，因为定义域和陪域均为空。在归纳步骤中，固定 $k \geq 0$ ，并假设$\eta_{\partial \square^k}$是一个 n-等价。立方集合 $\partial \square^{k+1}$ 是双映射柱 $\mathrm{Cyl}^{\square}(i^k, i^k)$，其中 i^k表示边界包含 $\partial \square^k \hookrightarrow \square^k$。根据引理 2.23，只需证明单位态射 $\eta_{\partial \square^k}$和 $\eta_{\square^k}$是 n-等价。对于 $\eta_{\partial \square^k}$： $\partial \square^k \to \mathrm{N}_m\, \partial I_m^{\square k}$，我们应用归纳假设。对于 $\eta_{\square^k}$： $\square^k \to \mathrm{N}_m\, I_m^{\square k}$，我们注意到定义域和陪域都是可缩的。□

特别地，令 $m = n$，长度为 n 的 k 维立方体的边界 $\partial I_n^{\square k}$ 是一个（$k-1$）球面的模型，精确到 n-等价。维数不超过 n 的同伦群和同调群在 n-等价下保持不变（命题 1.18），由此得到以下计算：

推论 5.4. 对于 m、$k \geq 0$，我们有同构

$$A_n(\partial I_m^{\square k}) \cong \pi_n(S^{k-1}) \quad H_n(\partial I_m^{\square k}) \cong H_n(S^{k-1}).$$

对所有 $n \in \{0, \ldots, m\}$。 □

另一种 k-球面的模型来自悬挂函子 $\Sigma_m\colon\ \mathrm{Graph}\ \to \mathrm{Graph}$。我们将 $\Sigma_\square\colon\ \mathrm{cSet}\ \to \mathrm{cSet}$ 记作一个函子，它将立方集合 X 映射为终端映射 $!\colon X \to \square^0$ 与其自身的双映射柱 $\mathrm{Cyl}^{\square}(!,!)$。此外，令 $\square^1/\partial\square^1$ 表示推出：

$$\begin{array}{ccc} \partial\square^1 & \hookrightarrow & \square^1 \\ \downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \square^0 & \longrightarrow & \square^1/\partial\square^1 \end{array}$$

明确地说，$\square^1/\partial\square^1$ 由单个非退化 1-立方体构成，其源与目标已被等同。$\square^1/\partial\square^1$ 的几何实现同胚于圆 S^1。

定理 5.5. 对于 $k \geq 0$、$m \geq k$ 和 $L \geq 5$，存在一条由 n-等价构成的之字形：

$$\Sigma^k_\square(\square^1/\partial\square^1) \simeq \mathrm{N}_1\, \Sigma^k_{m+2}(C_L).$$

证明. 令 $C_L^{\square} \in \mathrm{cSet}$ 表示余等化子：

$$C_L^{\square} := \mathrm{colim}\left(\coprod_{k\in\mathbb{Z}/L} \square^0 \underset{[i_{k+1}\circ\partial_{1,0}]_k}{\overset{[i_k\circ\partial_{1,1}]_k}{\rightrightarrows}} \coprod_{k\in\mathbb{Z}/L} \square^1 \right)$$

也就是说，$C_L^{\square}$ 是将 L 个非退化 1-立方体粘合成一个有向环的立方集合。将除一个 1-立方体外的其余立方体都收缩为一点的映射 $C_L^{\square} \to \square^1/\partial\square^1$ 是一个弱等价。由于立方悬挂函子$\Sigma_\square$: $\mathrm{cSet}\ \to \mathrm{cSet}$ 保持弱等价，我们归结为构造一条由 n-等价构成的之字形：

$$\Sigma^k_\square(C_L^{\square}) \simeq \mathrm{N}_m\, \Sigma^k_{m+2}(C_L).$$

类似地，由赋值 $t \mapsto \lfloor t/m \rfloor$ 定义的圈图之间的映射 $C_{mL} \to C_L$ 是一个弱等价；其定义域与陪域除维数 1 外的离散同伦群都是平凡的（见 [Lut21，定理 1.1]），并且通过直接检验可知该映射在离散基本群上诱导一个同构。由推论 5.2，我们归结为构造一条由 n-等价构成的之字形：

$$\Sigma^k_\square(C_L^{\square}) \simeq \mathrm{N}_m\, \Sigma^k_{m+2}(C_{mL}).$$

现在我们对 k 进行归纳。对于基例 $k = 0$，我们注意到立方集合 $C_L^{\square}$ 的 m 实现是圈图 C_{mL}；也就是说，我们有一个同构 $|C_L^{\square}|_m \cong C_{mL}$。由此，实现–神经伴随的单位具体化为映射 $C_L^{\square} \to \mathrm{N}_m\, C_{mL}$。根据定理 1.23，除了在维数 1 上之外，这两个对象的同伦群都平凡，因此可以直接证明该映射是弱等价。

对于归纳步骤，固定 $k \geq 0$，并假设我们有一个由 n 等价组成的之字形 $\Sigma^k_\square(C_L^{\square}) \simeq \mathrm{N}_m\, \Sigma^k_{m+2}(C_{mL})$。注意，对于任意立方集合 $X \in \mathrm{cSet}$，立方悬挂 $\Sigma_\square X$ 可以写成一个推出

$$\begin{array}{ccc} X \otimes \partial\square^1 & \hookrightarrow & X \otimes \square^1 \\ {\scriptstyle \pi_{\partial\square^1}}\downarrow & \ulcorner & \downarrow \\ \partial\square^1 & \longrightarrow & \Sigma_\square X \end{array}$$

这是沿单态射的推出，因此是针对 n-类型的 Cisinski 模型结构中的同伦推出。由此可推得，立方悬挂函子保持 n-等价。结合这一事实与我们的归纳假设，我们得到一串 n-等价组成的之字形：

$$\Sigma_\square\big(\Sigma^k_\square(C_L^{\square})\big) \simeq \Sigma_\square\big(\mathrm{N}_m\, \Sigma^k_{m+2}(C_{mL})\big).$$

根据推论 1.31，将实现-神经伴随的单位应用于立方集合 $\mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})$，得到的是一个弱等价。我们将定理 2.26 应用于 $X = \mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})$ 和 $Y = Z = \square^0$，以通过一串 n-等价组成的之字形进一步扩展右侧：

$$\Sigma_\square\big(\Sigma^k_\square(C_L^\square)\big) \simeq \Sigma_\square\big(\mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})\big) \simeq \mathrm{N}_m\,\big(\Sigma_{m+2}|\mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})|_m\big)$$

根据命题 1.30，余单位 $|\mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})|_m \to \Sigma^k_{m+2}(C_{mL})$ 是弱等价，因此它是一个 n-等价。由于图纬悬保持 n-等价（推论 5.2），我们得到所需的之字形：

$$\Sigma_\square\big(\Sigma^k_\square(C_L^\square)\big) \simeq \Sigma_\square\big(\mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})\big) \simeq \mathrm{N}_m\,\big(\Sigma_{m+2}|\mathrm{N}_m\,\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})|_m\big) \simeq \mathrm{N}_m\,\big(\Sigma_{m+2}\Sigma^k_{m+2}(C_{mL})\big).$$ □

推论 5.6。对于 k、$m \geq 0$ 和 $L \geq 5$，我们有同构

$$A_n\big(\Sigma^k_{m+2}(C_L)\big) \cong \pi_n(S^{k+1}) \quad H_n\big(\Sigma^k_{m+2}(C_L)\big) \cong H_n(S^{k+1})$$

对所有 $n \in \{0, \ldots, m\}$。 □

上述结果使我们能够确定 $\partial I^{\square\,n}_m$ 和 $\Sigma^k_m C_L$ 的许多此前未知的同伦群。我们将其中一些整理在下表中：

	图超立方体的边界													
	S^2 的模型					S^3的模型					S^4的模型			
	$\partial I^{\square\,3}_2$	$\partial I^{\square\,3}_3$	$\partial I^{\square\,3}_4$	$\partial I^{\square\,3}_5$	$\partial I^{\square\,3}_6$	$\partial I^{\square\,4}_2$	$\partial I^{\square\,4}_3$	$\partial I^{\square\,4}_4$	$\partial I^{\square\,4}_5$	$\partial I^{\square\,4}_6$	$\partial I^{\square\,5}_7$	$\partial I^{\square\,5}_8$	$\partial I^{\square\,5}_9$	$\partial I^{\square\,5}_{10}$
A_1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_2	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0
A_3		$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$		$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	0	0	0	0
A_4			$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$			$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$
A_5				$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$				$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
A_6					$\mathbb{Z}_{12}$					$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$
A_7											$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}_{12}$
A_8												$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
A_9													$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2\times\mathbb{Z}_2$
A_{10}														$\mathbb{Z}_{24}\times\mathbb{Z}_3$
	Σ_4	Σ_5	Σ_6	Σ_7	Σ_8	Σ^2_4	Σ^2_5	Σ^2_6	Σ^2_7	Σ^2_8	Σ^3_9	Σ^3_{10}	Σ^3_{11}	Σ^3_{12}
	S^2的模型					S^3的模型					S^4的模型			
	长度为 ≥ 5 的圈图的悬挂													

表 1：各种球面模型的离散同伦群。空白项表示数值未知或尚未得到证明。

从单纯复形构造一个与其 n等价的图

最后，我们将定理 4.5 中构造的逆过程展开为一种显式构造：以单纯复形为输入，输出一个图，使其离散同伦群在维数不超过 n时与初始单纯复形的离散同伦群一致。

所谓单纯复形，是指一个对 (X,A)，其中 X 是一个集合，而 A 是 X的有限子集构成的一个向下封闭的族。为方便起见，我们常常把对 (X,A) 的数据简称为 X。我们把

具有 $(n+1)$ 个元素的子集 $A \in \mathsf{A}$ 称为 X 的一个 n-单形 。我们假设集合 X配备了全序；该全序可用于将单纯复形视为单纯集合，即把 n-单形规定为从线性序 $[n]$ 到 X、且像属于 A 的保序映射。

对于 X，我们按如下方式关联一个半立方集合 CX： CX中的一个 n-立方体由一对非空单形$\varnothing \neq B \subseteq A$组成，使得集合补集 $A - B$有 n个元素。为计算一个 n-立方体（A， B）的面，我们首先利用 X上的序关系，将 $A - B$的顶点排序如下

$$A - B = \{x_1 < x_2 < \cdots < x_n\}.$$

对于 $i \in \{1, \ldots\ldots, n\}$和 $\varepsilon = 0, 1$，我们将面（A， B）$\partial_{i,\varepsilon}$定义为

$$(A,B)\partial_{i,\varepsilon} := \begin{cases} (A - \{x_i\}, B) & \text{if } \varepsilon = 0 \\ (A, B \sqcup \{x_i\}) & \text{if } \varepsilon = 1. \end{cases}$$

特别地，若 $A' \subseteq A$且 $B' \supseteq B$，则一对（A'， B'）是（A， B）的一个面。 CX的一个最高维立方体是形如（A, $\{x\}$）的一对，其中 A 是 X 的一个最高维单形。

将 X视为单纯集合时，半立方集合 CX与第 A 节中定义的其立方化一致。特别地，命题 A.18 表明，CX的几何实现与 X的几何实现（的细分）同胚。

给定 $m \geq 0$，我们可以将 CX 的显式描述与推论 3.21 保证的显式描述结合起来，从而得到 $\Gamma_m(CX)$的如下描述：

- $\Gamma_m(CX)$的顶点是形如 $\left(A, B, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}\right)$的元组，其中 B和 A是 X的非空嵌套单形，且$(w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}$是 $F(m, n)$中的一个 F-序列，其中 n是集合 $A - B$的补集的基数。这些有序对满足以下等同关系：

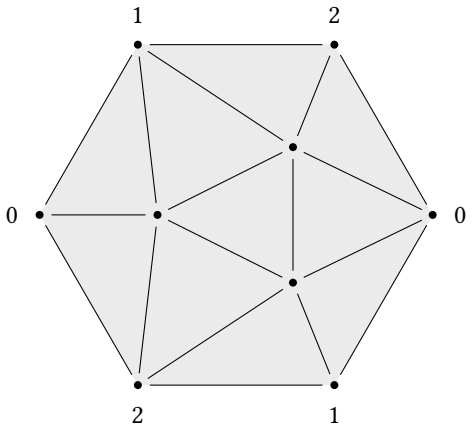
$$\left(A - \{x_i\}, B, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}\right) \sim \left(A, B, (0; i^-) \cdot (w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}\right) \text{ and } \left(A, B \sqcup \{x_i\}, (w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}\right) \sim \left(A, B, (0; i^+) \cdot (w; P_i^{\pm})_{i=1}^{k}\right)$$

  对于补集 $A - B = \{x_1 < \cdots < x_n\}$中的任意元素 x_i。
- $\Gamma_m(CX)$中的边由形如 $\left(A, B, (w_0; (P_0)_i^{\pm})_{i=1}^{k_0}\right) \sim \left(A, B, (w_1; (P_1)_i^{\pm})_{i=1}^{k_1}\right)$的有序对给出，其中$(w_0, (P_0)_i^{\pm})_{i=1}^{k_0}$和$(w_1; (P_1)_i^{\pm})_{i=1}^{k_1}$可展开为$(w, 0; (P, 0)_i^{\pm})_{i=1}^{n}$和$(w, 1; (P, 1)_i^{\pm})_{i=1}^{n}$，使得：
  - the sign functions of $(w_0'; (P_0')_i^{\pm})_{i=1}^{n}$ and $(w_1'; (P_1')_i^{\pm})_{i=1}^{n}$ are equal;
  - the partition functions $P_0' = P_1'$ are equal; and
  - there exists $i \in \{1, \ldots, n\}$ such that $|w_0'(i) - w_1'(i)| \leq 1$ and $w_0'(j) = w_1'(j)$ for all $j \neq i$ in $\{1, \ldots, n\}$.

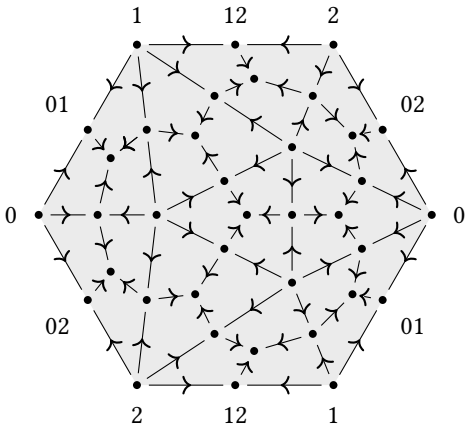
注意，半立方集合 CX是非奇异的；这是命题 A.21 的一个实例，因为 X可以视为一个非奇异的单纯集合。因此，给定一个固定的 n，图 $\Gamma_{n+1}X$的离散同伦群和同调群与 X的相应群一致，直到维数 $\leq n$，这由定理 3.9 得出。

即使对于较小的 si 复形 X以及较小的 m 值，图 $\Gamma_m(CX)$ 可能相当大。作为

例如，考虑左侧所示的单纯复形 X：



X



CX

其几何实现与实射影平面 $\mathbb{RP}^2$同胚。这个单纯复形有 6 个顶点、15 条边和 10 个三角形。这个单纯复形 CX 的立方化如右侧所示（具有相同标记的源和目标的 1-立方体是相同的）。我们计算 $\Gamma_3 X$中的顶点数量：

- X 的每个 0-单形都会在 CX 中贡献一个 0-立方体。 CX 中的每个 0-立方体都会在 $\Gamma_3 X$ 中贡献一个顶点。 X 中有 6 个顶点，它们在 $\Gamma_3 X$ 中总共贡献 6 个顶点。
- 在 X中，每个 1-单形都会在 CX中额外贡献 1 个 0-立方体和 2 个 1-立方体。对于 $m = 3$， CX中的每个 1-立方体都会在 $\Gamma_3 X$中贡献 5 个顶点，每个顶点对应于 F中不位于边界∂F 上的一个 F-序列 $(3,\ 1)$。 X中共有 15 个 1-单形，因此在 $\Gamma_3 X$中总共额外贡献 $15 + (15 * 2 * 5) = 165$ 个顶点。
- X中的每个 2-单形都会在 CX中增加 1 个 0-立方体、3 个 1-立方体和 3 个 2-立方体。对于 $m = 3$， CX 中的每个 2-立方体都会在 $\Gamma_3 X$中贡献 49 个顶点，每个顶点对应 $F(3,2)$ 中一个不位于边界 $\partial F(3,2)$ 上的 F-序列。 X中共有 10 个 1-单形，总计在 $\Gamma_3 X$中贡献$10 + (10 * 3 * 5) + (10 * 3 * 49) = 1,630$ 个额外顶点。

总的来说，图 $\Gamma_3 CX$ 有 1,801 个顶点。经人工检查可知，每个顶点的度至少为 3，因此 $\Gamma_3 CX$中有超过 $2,700$ 条边。

非奇异立方集合

在本附录中，我们汇集了关于 Reedy 理论和空间的组合模型（包括单纯集和立方集合）的必要事实。我们的首要目标（推论 A.14）是证明 Reedy 范畴上的 *fondind* 预层 A 与其直接子范畴上的预层 A_+相对应。随后，我们证明（定理 A.22）每种同伦类型都可以由一个非奇异 立方集合建模，也就是说，这种立方集合具有这样的性质：每个非退化立方体都确定一个单态射 $\square^n \to X$。这是通过立方化 构造实现的；该构造是一个函子 C: 单纯集 $\to$ cSet，后接三角剖分函子 T: cSet $\to$ 单纯集后，可还原标准细分运算。

fondind 预层这一概念由 Yuki Maehara 提出。本附录中的许多观点是我们从 Kensuke Arakawa 和 Mitsunobu Tsutaya 那里了解到的，我们猜想其中许多观点对专家而言早已广为人知。

Reedy 范畴

我们先回顾 Reedy 理论的基本定义。

定义 A.1. *Reedy* 范畴 是一个范畴 A，带有函数 $\deg\colon \mathrm{ob}\ A \to \mathbb{N}\cup\{0\}$，以及 A 的两个子范畴A_- 和 A_+，使得：

1. 每个恒等态射都同时包含在 A_- 和 A_+中。
2. 若非恒等映射 $a \to b$属于 A_-，则 $\deg a > \deg b$；若非恒等映射 $a \to b$属于 A_+，则 $\deg a < \deg b$。
3. 对任意态射 $\varphi \in A$，存在唯一的态射 $\varphi_- \in A_-$ 和 $\varphi_+ \in A_+$，使得 $\varphi = \varphi_+\varphi_-$。

注意，这些条件蕴含 A 没有非恒等同构。

例 A.2. 单纯形范畴 Δ 以及若干种盒范畴 $\square$ 的变体（例如带有或不带有连接的变体）都是 Reedy 范畴（参见 [DKLS24, Cor.1.17]）。

借用单纯形范畴中使用的说法，我们将 A_- 中的态射称为退化映射或退化态射；将 A_+ 中的态射称为面映射或面。

例 A.3. 若存在函数 $\deg\colon \mathrm{ob}\ I \to \mathbb{N}$，使得对 I中的每个非恒等态射 $i \to j$，都有 $\deg i < \deg j$（分别地，$\deg i > \deg j$），则称范畴 I是正向的（分别地，反向的）。根据这些定义，每个正向范畴或反向范畴都是 Reedy 范畴。此外，对于任意 Reedy 范畴 R，子范畴 R_- 是反向范畴，而子范畴 R_+ 是正向范畴。

例 A.4. 如果 $(A, A_-, A_+, \deg)$ 是一个 Reedy 范畴，那么其对偶范畴 $(A^{\mathrm{op}}, (A_+)^{\mathrm{op}}, (A_-)^{\mathrm{op}}, \deg)$ 也是一个 Reedy 范畴。

Reedy 范畴上的预层

以下始终设 A 是一个 Reedy 范畴。我们用 aSet 表示 A 上的预层范畴，即函子 $A^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Set}$。我们将 aSet 的对象记作 X，Y .....。给定一个对象 $a \in A$，我们将集合 $X(a)$ 记作 X_a。给定态射 $\varphi\colon a \to b$（属于 A）以及 $x \in X_b$，我们将函数 $X(\varphi)\colon X_b \to X_a$ 作用于元素 x 的结果记作 $x\varphi$。对于 $a \in A$，相应的可表预层记作 $\widehat{a}$。

定义 A.5. 设 A 为一个 Reedy 范畴，$X \in \mathrm{aSet}$ 为 A 上的一个预层。给定一个元素 $x \in X_a$，

1. x 的面是任何形如 $x\delta$ 的元素，其中 δ 是面映射。
2. x 的退化态射是任何形如 $x\sigma$ 的元素，其中 σ 是退化映射。
3. 如果存在一个退化映射 $\sigma\colon a \to b$ 以及一个元素 $y \in X_b$，使得 $x \in X_a$ 满足 $\sigma \neq \mathrm{id}_a$ 和 $x = y\sigma$，则称 $x \in X_a$ 是退化的。如果 x不是退化的，则称其为非退化的。

定义 A.6。 如果对于任意元素 $x \in X_a$，都存在唯一的退化态射 $\sigma\colon a \to b$ 以及唯一的非退化元素 $y \in X_b$，使得 $x = y\sigma$，则称预层 $X \in \mathrm{aSet}$ 满足 *Eilenberg-Zilber* 引理。

例 A.7。 在任意 Reedy 范畴中，每个可表预层都满足 Eilenberg-Zilber 引理。这由分解的唯一性得出。

例 A.8。 如果 A 是一个直接范畴，那么每个预层都（显然）满足 Eilenberg-Zilber 引理。

备注 A.9。一般而言，预层 X 中的每个元素 x 都可以写成 $x = y\sigma$，其中 σ 是某个退化态射，而 y 是非退化的（参见命题 A.12 的证明）。定义 A.6 的内容在于这种分解的**唯一性**，但这一点通常并不成立。作为一个反例，考虑由两个平行箭头$1 \rightrightarrows 0$给出的范畴 A，这两个箭头都属于 A_-。那么，该预层

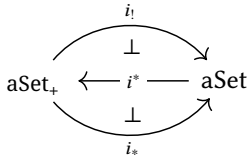
$$X_0 = \{a, b\} \rightrightarrows \{*\} = X_1$$

不满足 Eilenberg-Zilber 引理。

定义 A.10. 预层 $X \in \mathrm{aSet}$ 是*fondind* 的，如果对任意非退化元素 $x \in X_a$ 以及态射$\varphi\colon\ b \to a$（在 A_+ 中），元素 $x\varphi \in X_b$ 仍是非退化的。

术　语*fondind* 是一个缩写：它代表**F**ace of **O**f **N**on-**D**egenerate**I**s **N**on-**D**egenerate .

该子范畴　$A_+ \subseteq A$ 仍是一个 Reedy 范畴（因为它是一个直接范畴）。我们将 aSet_+ 记为预层范畴　在 A_+ 上的预层。包含函子 $i\colon\ A_+ \hookrightarrow A$ 诱导出一个伴随三元组：



我们使用 A 上的 Reedy 结构来描述函子 $i_!$。

命题　A.11. 给定一个预层 $X \in \mathrm{aSet}_+$，预层 $i_!(X)$ 有如下显式描述　*n:*

在对象 $a \in A$ 处，集合 $i!\ (X)_a$ 由下式给出

$$i_!(X)_a := \{(\sigma, x) \mid \sigma\colon a \to b \ in\ A_-\ and\ x \in X_b\},$$

其中 $\sigma\colon\ \ a \to b$ 是任意一个定义域为 a 的退化态射，而 x 是 X_b 的一个元素。

在一个态射处 态射 $\varphi\colon\ \ c \to a$ 在 A 中时，函数 $i_!(X)(\varphi)$ 由公式 $(\sigma, x)\varphi\colon = \big((\sigma\varphi)_-, x(\sigma\varphi)_+\big)$给出 .

证明。左 Kan 延拓 $i_!(X)$ 的余极限公式为

$$i_!(X)_a := \operatorname*{colim}_{\varphi \in (a \downarrow i)^{\mathrm{op}}} K_{\mathrm{cod}(\varphi)},$$

其中 $a \downarrow i$ 表示逗号范畴，其对象是 A 中的箭头 $a \to b$，态射则是 A_+ 中使相应三角形交换的箭头 $b \to c$。根据 Reedy 范畴中分解的唯一性，该逗号范畴有一个始子范畴，它是由属于 A_- 的对象 $a \to b$ 所张成的全子范畴。此外，根据分解的唯一性，这个全子范畴是一个离散范畴。因此，这个余极限可简化为一个余积，其显式描述即得定理陈述。□

我们将证明，函子 $i_!$ 将 aSet_+ 与由 fondind 预层以及保持非退化元素的映射所跨出的 aSet 子范畴等同起来。

我们称 aSet 中的态射 $f\colon\ K \to L$ 为 局部非退化的，如果对于所有对象 $a \in A$，函数 $f_a\colon\ X_a \to L_a$都将非退化元素映射为非退化元素。令 $\mathrm{aSet}_{\mathrm{nd}} \subseteq \mathrm{aSet}$ 表示由 fondind 预层和局部非退化态射组成的子范畴。定义函子 $N\colon \mathrm{aSet}_{\mathrm{nd}} \to \mathrm{aSet}_+$ 如下：

- 对于对象 $X \in \mathrm{aSet}$，预层 $N(K)\colon\ A\mathrm{op}_+ \to \mathrm{Set}$ 定义如下：给定对象 $a \in A$，定义 $N(K)_a$ 为 X_a 的非退化元素集合 $(X_a)\mathrm{nd}$；将态射 $\varphi\colon\ b \to a\,\mathrm{in}\ A_+$ 映射为限制函数 $K(\varphi)|_{(X_a)\mathrm{nd}}$。这是良定义的，因为 K 是 fondind。

- 对于态射 $f\colon K \to L$，自然变换 $N(f)$ 在对象 $a \in A_+$ 上定义为限制函数 $f_a|_{(X_a)_{\mathrm{nd}}}$。这是良定义的，因为 f 是局部非退化的。

设 $X \in \mathrm{aSet}_+$ 是 A_+ 上的预层。由命题 A.11 中给出的 $i_!(X)$ 的显式描述可知，元素 $(\sigma, x) \in i_!(X)_a$ 是非退化的，当且仅当 $\sigma = \mathrm{id}_a$。这意味着 $i_!$ 的取值落在子范畴 $\mathrm{aSet}_{\mathrm{nd}}$ 中。此外，存在一个显然的自然同构 $X \xrightarrow{\cong} N(i_!(X))$，它将元素 $x \in X_a$ 映射为 $(\mathrm{id}_a, x) \in N(i_!(X))$。

对于 A 上的预层 $X \in \mathrm{aSet}$，存在一个自然变换 $i_!(N(K)) \to K$，它将元素 $(\sigma, x) \in i_!(N(K))_a$ 映射到元素 $x\sigma \in X_a$。

命题 A.12。对于预层 $X \in \mathrm{aSet}$，自然映射 $i_!(N(K)) \to K$ 是满态射。此外，它是单态射（因而是同构）当且仅当 K 满足 *Eilenberg-Zilber* 引理。

证明。第二个陈述由定义可得。对于第一个陈述，固定一个元素 $x \in X_a$。令 $n \in \mathbb{N}$ 为满足下述条件的最小元素：存在 σ，使得 $a \to b$ 属于 A_-，且 $y \in X_b$ 满足 $x = y\sigma$ 和 $\deg(b) = n$。由 n 的极小性，元素 y 是非退化的，因此 (σ, y) 是 $i_!(N(K))_a$ 的一个元素，且属于 x 的原像。□

定理 A.13。自然变换 $\mathrm{id} \Rightarrow N \circ i_!$ 和 $i_! \circ N \Rightarrow \mathrm{id}$ 是一个伴随的单位和余单位

$$\mathrm{aSet}_+ \underset{N}{\overset{i_!}{\rightleftarrows}} \mathrm{aSet}_{\mathrm{nd}} \quad (\perp)$$

此外，左伴随 $i_!$ 是全忠实的，其本质像由满足 *Eilenberg-Zilber* 引理的预层 $X \in \mathrm{aSet}$ 构成。

证明。对于这个伴随，只需注意映射 $K \to N(i_!(X))$ 和 $i_!(N(K)) \to K$ 满足三角恒等式。由于单位是同构，函子 $i_!$ 是全忠实的。本质像的刻画由命题 A.12 得出。□

推论 A.14. 函子 $i_!$ 和 N 在 aSet_+ 与 aSet 的一个子范畴之间诱导出范畴等价；该子范畴的对象是满足 *Eilenberg-Zilber* 引理的 *fondind* 预层，态射则是将非退化元素映射到非退化元素的映射。□

fondind 预层的概念与非奇异 预层的概念密切相关。

定义 A.15. 若预层 $X \in \mathrm{aSet}$ 对任意非退化元素 $x \in X_a$ 所对应的映射 $x\colon \widehat{a} \to X$ 都是单态射，则称其为非奇异预层。

命题 A.16. 设 A 是一个 *Reedy* 范畴，并满足：

- A_- 中的每个态射都是分裂满态射，并且
- A_+ 中的每个态射都是单态射。

那么，每个 *over* A 的非奇异预层都是 *fondind*。

证明。设 $X \in \mathrm{aSet}$ 是一个非奇异预层。固定一个非退化元素 $x \in X_a$ 和一个面映射 $\delta\colon b \to a$。假设对于某个退化态射 $\sigma\colon b \to c$ 和非退化的 $y \in K_c$，有 $x\delta = y\sigma$。由于两个态射 $x\colon \widehat{a} \to K$ 和 $\widehat{\delta}\colon b \to \widehat{a}$ 都是单态射，复合 $x\delta = y\widehat{\sigma}$ 是单态射，由此可推得 $\widehat{\sigma}\colon b \to c$ 是单态射。由于 $\widehat{\sigma}$ 也是分裂满态射，我们必有 $\sigma = \mathrm{id}_b$。□

三角剖分与立方化

现在我们将注意力转向立方集合；我们的目标是证明每个立方集合都弱等价于一个非奇异立方集合（定理 A.22）。

回顾一下，立方集合与单纯集合通过三角剖分 伴随相关联。更具体地说，我们有单纯集合中的一个余立方对象 $\square \to \mathrm{sSet}$，它将对象 $[1]^n$ 映到单纯 n-立方体 $(\Delta^1)^n$。三角剖分函子 $T\colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{sSet}$ 被定义为该余立方对象的余极限延拓。

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{[1]^n \mapsto (\Delta^1)^n} & \mathrm{sSet} \\ {\scriptstyle よ}\downarrow & \nearrow_{T} & \\ \mathrm{cSet} & & \end{array}$$

该函子具有一个右伴随，记为 $U\colon \mathrm{sSet} \to \mathrm{cSet}$，其 n-立方体集合由下式给出

$$(UK)_n := \mathrm{sSet}\big((\Delta^1)^n, X\big).$$

伴随 $T \dashv U$ 在立方集合上的 Grothendieck 模型结构与单纯集合上的 Kan–Quillen 模型结构之间构成 Quillen 等价 [Cis06，命题 8.4.30]。

我们现在另行定义一个函子 $\mathrm{sSet} \to \mathrm{cSet}$，即立方化 函子。定义一个余半单纯对象 $C\colon \Delta \to \mathrm{cSet}$，它将 n-单形映到下半部分 $(n+1)$-立方体

$$C[n] := \bigcup_{k=1}^{n+1} \partial_{k,1},$$

即 $(n+1)$-立方体的 $\varepsilon = 1$ 面的并。

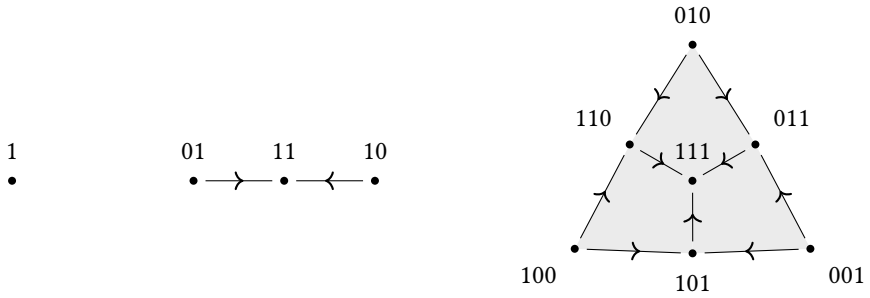


图 7：立方集合 $C[0]$、$C[1]$ 和 $C[2]$ 的图示。

为定义 C 在 Δ 的态射上的作用，令 d_i 表示其中的顶部复合箭头

$$\begin{array}{ccc} \{1,\dots,n\} & \xrightarrow{d_i} & \{1,\dots,n+1\} \\ {\scriptstyle -1}\downarrow{\scriptstyle \cong} & & {\scriptstyle \cong}\uparrow{\scriptstyle +1} \\ [n-1] & \xrightarrow{\partial_i} & [n] \end{array}$$

具体而言，给定 $i \in \{0,\dots,n\}$，集合函数 d_i“跳过”$\{1,\dots,n+1\}$ 中的元素 $i+1$。

对于 $i \in \{0, \dots\dots, n\}$，我们将单纯形面态射 $C\partial_i\colon C[n-1] \to C[n]$ 分别定义在 $C[n-1]$ 的每个面上；给定 $k \in \{1, \dots\dots, n\}$，限制 $C\partial_i|_{\partial_{k,1}}$ 定义为立方体面包含 $\partial_{d_i(k),0}\colon \square^n \to C[n+1]$。对于 $i \in \{0, \dots\dots, n\}$，单纯形退化态射 $C\sigma_i\colon C[n+1] \to C[n]$ 是立方体连接映射的限制

$$\gamma_{i+1,0}|_{C[n+1]}\colon C[n+1] \to C[n].$$

命题 A.17。 态射 $C\partial_i$ 和 $C\sigma_i$ 满足单纯恒等式。

证明。 由于三角剖分函子 T: cSet $\to$ sSet 是忠实的，只需验证应用 T 后的单纯恒等式

。下半立方体的三角剖分 $TC[n]$ 是偏序子集 $P^n \subseteq [1]^{n+1}$ 的神经，该子集省略了零顶点 $(0, \ldots, 0)$；也就是说，

$$TC[n] = NP^n, \text{ where } P^n = [1]^{n+1} - \{(0, \ldots, 0)\}.$$

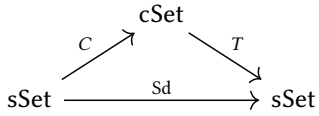
单纯集合 NP^n 与细分后的 n-单形 sd$[n]$同构。可以验证， $C\partial_i$ 和 $C\sigma_i$ 分别映射到通常的面映射和退化映射 ∂_i: $P^{n-1} \to P^n$ 以及 σ_i: $P^{n+1} \to P^n$，其公式如下

$$\begin{aligned} &\partial_i(x_0, \ldots, x_{n-1}) && \sigma_i(x_0, \ldots, x_{n+1}) \\ &= (x_0, \ldots, x_{i-1}, 0, x_i, \ldots, x_{n-1}) && = (x_0, \ldots, x_{i-1}, \max(x_i, x_{i+1}), x_{i+2}, \ldots, x_{n+1}). \end{aligned}$$

□

我们通过余极限延拓，定义<styl id='1'>立方化 函子 C: sSet $\to$ cSet。

命题 A.18. 函子三角形



在自然同构意义下交换。

证明. 由于这是一个由左伴随组成的函子三角形，只需在可表对象 Δ^n 上构造该同构，这显然成立（参见命题 A.17 的证明）。□

推论 A.19. 函子 C: 单纯集 $\to$ 立方集合 是从单纯集合上的 *Kan-Quillen* 模型结构到立方集合上的 *Grothendieck* 模型结构的左 *Quillen* 等价。

证明. 要证明 C 是左 Quillen 函子，注意到三角剖分会反映单态射和弱等价。因此，只需（根据命题 A.18）注意到 Sd 保持余纤维化和无圈余纤维化。

要证明 C 是等价，利用命题 A.18 中出现的函子三角形上的三取二性质 . □

回想一下，对于任意单纯集合 X，存在一个自然同伦等价 Sd $X \to X$。将此映射改写为 $TC(X) \to X$，我们便得到转置的自然变换 $C(X) \to U(X)$。

命题 A.20. 若 $X \in$ 单纯集 是 *Kan*复形，则自然映射 $CX \to UX$ 是弱等价。

证明. 由于 $TC(X) \to X$是弱等价，这由 [Hov99, Cor. 1.4.4.(b)] 得出。 □

命题 A.21. 立方化函子 C： 单纯集 $\to$ cSet 将非奇异单纯集合映为非奇异立方集合。

证明。 固定一个单纯集合 K。一个 n-立方体 u: $\square^n \to CK$ 由某个维数的单形 u_1: $\Delta^k \to K$ 以及一个 n-立方体 u_2: $\square^n \to C[k]$的数据决定（但不一定唯一）；由这些数据得到的映射 u是复合$u = C(u_1) \circ u_2$。 n-立方体 u是非退化的，当且仅当 u_1 是一个非退化单纯形且 u_2 是一个非退化立方体。在此情形下，映射 $C(u_1)$ 是单态射，因为 C保持单态射，而根据假设 K是非奇异的。映射 u_2 是单态射，因为立方集合 $C[k]$ 是非奇异的（它是 $(k+1)$-立方体 $\square^{k+1}$的一个子对象）。□

我们可以使用 th 立方化函子，用于将一个立方集合（在弱等价意义下）替换为一个非奇异的立方集合。

定理 A.22. 存在函子 $\Phi, \Phi\colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{cSet}$，以及自然弱等价

$$\mathrm{id} \xrightarrow{\sim} \overline{\Phi} \xleftarrow{\sim} \Phi$$

使得对于任意立方集合 X，

1. ΦX 是非奇异的；*2.* ΦX 是 *Kan*复形；*3.* 对于任意立方集合 X，映射 $X \to \Phi X$ 是无圈余纤维化。

证明. 令 $T^{\mathrm{fib}}\colon \mathrm{cSet} \to \mathrm{sSet}$ 表示先应用三角剖分、再进行某种函子性的纤维化替换（例如 Ex^∞ 函子）所得到的函子。定义 Φ 为 $UT\mathrm{fib}$。导出单位 $\mathrm{id} \to UT^{\mathrm{fib}}$ 既是单射又是弱等价，因为 $T \dashv U$ 是 Quillen 等价。此外，函子 U 保持纤维对象，从而证明了 (2) 和 (3)。

回顾一下（例如参见 [Lur09, Variant 4.2.3.15]）：存在一个函子 $\Psi\colon \mathrm{sSet} \to \mathrm{Pos}$，从单纯集合映至偏序集，以及一个自然弱等价 $\varphi\colon N\Psi \xrightarrow{\sim} \mathrm{id}$。我们将 Φ 定义为复合 $CN\Psi T^{\mathrm{fib}}$，其中自然变换 $\Phi \to \Phi$ 由以下复合自然变换给出

$$CN\Psi T^{\mathrm{fib}} \xrightarrow{C\varphi_{T^{\mathrm{fib}}}} CT^{\mathrm{fib}} \to UT^{\mathrm{fib}}.$$

左侧映射是弱等价，因为 C 保持弱等价。右侧映射是弱等价，这是由命题 A.20 得出的，因为根据构造，T^{fib} 取值于 Kan复形中。□

参考文献

[Atk74] R. H. Atkin, 《复形上模式的代数 I》, 《国际人机研究杂志》6（1974）, 285–307。[Atk76] R. H. Atkin, 《复形上模式的代数 II》, 《国际人机研究杂志》8（1976）, 第5期, 483–498。[BBdLL06] E. Babson、H. Barcelo、M. de Longueville 和 R. Laubenbacher, 《图的同伦理论》, 《代数与组合》24 1, 31 2006 44 ( ), 第–期。[BCW14] H. Barcelo、V. Capraro 和 J. A. White, 《度量空间的离散同调理论》, 《伦敦数学学会会报》46（2014）, 第5期, 889–905。[BGJW19] H. Barcelo、C. Greene、A. S. Jarrah 和 V. Welker, 《图的离散立方同调与路径同调》, 《代数组合》2 3, 417 2019 437 ( ), 第–期。[BGJW21] H. Barcelo、C. Greene、A. S. Jarrah 和 V. Welker, 《关于图的离散奇异立方同调的消失》, 《离散数学杂志》35（2021）, 第1期, 35–54。[BKLW01] H. Barcelo、X. Kramer、R. Laubenbacher 和 C. Weaver, 《单纯复形连通性理论的基础》, 《应用数学进展》26（2001）, 第1期, 97–128。[BL05] H. Barcelo 和 R. Laubenbacher, 《A同伦论及其应用展望》, 《离散数学》298（2005）, 第1–3期, 39–61。[Bro73] K. S. Brown, 《抽象同伦论与广义层上同调》, 《美国数学会汇刊》186（1973年）, 419–458。[CCO15] J. Chalopin、V. Chepoi 和 D. Osajda, 《关于 Maurer 对拟阵基图的两个猜想》, 《组合理论杂志B辑》114（2015）, 1–32。MR3354288[Cis06] D.-C. Cisinski, 《预层作为同伦类型的模型》, 《Astérisque》308（2006）, xxiv+390。[Cis10] D.-C. Cisinski, 《可导范畴》, 《法国数学会会刊》138（2010）, 第3期, 317–393。MR2729017[Cis19] D.-C. Cisinski, 《高阶范畴与同伦代数》, 《剑桥高等数学研究》, 第180卷, 剑桥大学出版社, 剑桥, 2019年。[CK23] D. Carranza 和 K. Kapulkin, 《立方集合的同伦群》, 《数学博览》41（2023）, 第4期, 论文编号125518, 55页。MR4656605[CK24] D. Carranza 和 K. Kapulkin, 《离散同伦论的立方框架：再探》, 《组合数学》160（2024）, 第12期, 2856–2903。[DKLS24] B. Doherty、K. Kapulkin、Z. Lindsey 和 C. Sattler, 《(∞,1)-范畴的立方模型》, 《美国数学会回忆录》297（2024）, 第1484期, v+110。

[Doh23] B. Doherty, 《无连接的高阶范畴立方模型》, 《纯粹与应用代数杂志》227（2023）, 第9期, 论文编号107373, 55页。MR4559375[GM03] M. Grandis 和 L. Mauri, 《立方集合及其位点》, 《范畴论理论与应用》11（2003）, 第8期, 185–211。MR1988396[Hir03] P. S. Hirschhorn, 《模型范畴及其局部化》, 《数学调查与专著》第99卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2003年。勘误见 https://math.mit.edu/psh/MCATL-errata-2018-08-01. pdf。[Hov99] M. Hovey, 《模型范畴》, 《数学调查与专著》第63卷, 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 1999年。[Jar06] J. F. Jardine, 《范畴同伦论》, 《同调、同伦与应用》8（2006）, 第1期, 71–144。[Joy02] A. Joyal, 《拟范畴与 Kan复形》, 《纯粹与应用代数杂志》175（2002）, 第1–3期, 207–222。纪念 Max Kelly 教授70岁生日专辑。[Joy09] A. Joyal, 《拟范畴理论及其应用》, 2009年。来自“高阶范畴中的单纯方法”课程讲义第二卷, 巴塞罗那数学研究中心, 巴塞罗那, 2008年。`Kan[D. M. Kan, 《抽象同伦 I》, 《美国国家科学院院刊》41（1955）, 1092–1096。55] KK24a[K. Kapulkin 和 N. Kershaw, 《图范畴上的闭对称幺半结构》, 《范畴论理论与应用》41（2024）, 论文编号23, 760–784。] KK24b[K. Kapulkin 和 N. Kershaw, 《离散立方同调的高效计算》, 2024年。预印本。] KK[K. Kapulkin 和 N. Kershaw, 《使用离散立方同调进行数据分析》, 2025年。预印本。25] KM[K. Kapulkin 和 U. Mavinkurve, 《立方集合与图的同伦24] 类型》, 2024年。预印本。 *n*KM[K. Kapulkin 和 U. Mavinkurve, 《离散同伦论中的基本群》, 《应用数学进展》164（2025）, 论文编号102838, 56页。MR484713825] Lur[J. Lurie, 《高阶拓扑斯理论》, 《数学年刊研究》第170卷, 普林斯顿大学出版社, 新泽西州普林斯顿, 2009年。09] Lut[B. Lutz, 《图的高阶离散同伦群》, 《代数组合》4（2021）, 第1期, 69–88。21] Mau[S. B. Maurer, 《拟阵基图 I》, 《组合理论杂志B辑》14（1973）, 216–240。MR3179717 3] RV[E. Riehl 和 D. Verity, 《Reedy 范畴理论与实践》, 《范畴论理论与应用》29（2014）, 256–301。MR3217884