arXiv:2602.19311v1 [math.MG] 22 Feb 2026

距离平衡测度与度量空间中的曲率

STEFAN STEINERBERGER

Abstract. 设 (X, d) 是一个紧度量空间。我们考察具有以下性质的概率测度 μ

$$\int_X d(x,y)d\mu(y) \qquad \text{is independent of } x \in X.$$

此类测度一旦存在，似乎就编码了某种“曲率型”量。我们在特殊情形下对此进行研究：其中 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条闭凸曲线，$d = \|\cdot\|_2$ 是欧几里得距离：即使单个具有较小曲率的点，也意味着此类测度不存在。反之，对于曲率足够接近常数的所有曲线，此类测度 μ 都存在。曲率通常通过二阶导数定义；而这里的曲率则通过一个积分方程定义，因此可适用于粗糙得多的空间。我们还讨论了它与图上的曲率、Gross-Stadje 定理以及大小之间的联系。

1. Introduction and Results

1.1. 引言。 设 (X, d) 是一个紧度量空间。我们考察概率 y
具有如下性质的测度 μ

$$f(x) = \int_X d(x,y)d\mu(y) \qquad \text{is constant for all } x \in X.$$

本文的主要目的是指出，只要存在这样的测度 μ，它就可以作为一种有意义的曲率概念。 μ满足一个积分方程，而不是通过求导来定义；因此，这一概念可以应用于粗糙得多的空间。这一对象此前已在 $(X,\ d)$ 为有限组合图 $G = (V,\ E)$ 的情形中得到研究，见 §2.1。本文的主要目的是考察 $X \subset \mathbb{R}^2$ 为配备通常欧几里得距离 $d(x,\ y)$ 的有界子集 $= \|x - y\|_{\ell_2}$ 时的情形。我们将看到，一个非常自然的特例是 X 为严格凸曲线的情形。

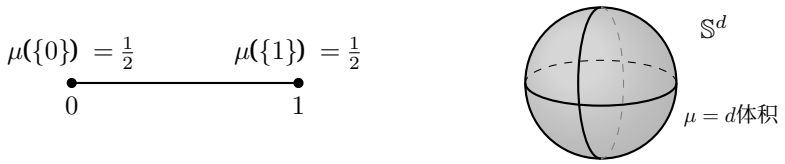


Figure 1. 单位区间上的测度 μ（左）和球面上的测度（右），它们满足积分方程。

线段的情形（任意维数）如图 1 所示。将一半质量置于每个端点上的测度μ 满足该方程；稍加想象，便会发现这与我们的直觉相符：端点具有“无穷大曲率”，内部则是平坦的。球面 $\mathbb{S}^d$ 的情形有一个简单的解：（归一化的）表面测度 $\mu = d\sigma$ 是一个合适的选择。这也符合球面 $\mathbb{S}^d$ 上的曲率应当为常数这一观点。然而，积分方程相当微妙；它是一个紧算子问题，并非对大多数右端项都有解。此外，求逆问题可能极其复杂且不稳定。事实上，对于大多数集合 X，都不存在这样的测度。

命题 1 (Wilson [6])**.** 设 $X \subset \mathbb{R}^n$ 是紧致且连通的。如果存在一个定义在 X 上的概率测度 μ，使得

$$\int_X \|x - y\| d\mu(y) \qquad \textit{is constant for all } x \in X,$$

那么 X 要么是线段，要么不包含任何一条直线上的三个点。

从数值上看，对集合 X 进行离散化，然后求解相应的线性方程组，结果颇具说服力，尽管极限对象可能并不存在（示例见 §1.5）。就理解积分方程而言，命题 1 指出了一类值得研究的自然集合：我们假设 $X \subset \mathbb{R}^2$ 是一条严格凸闭曲线。示例 $h(\theta) = 1 + 0.1\cos(3\theta)$ 如图 2 所示。从数值上看，积分方程（离散化后）的解对应于曲线上的一个光滑密度，其表现类似于曲率。

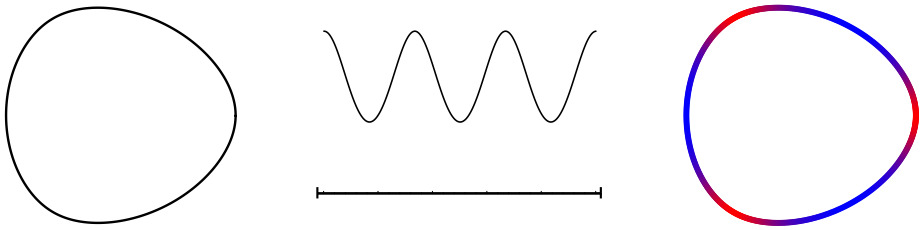


FIGURE 2. 左：凸曲线 $X \subset \mathbb{R}^2$。中：μ 密度作为弧长函数的近似图。右：按 μ 的密度着色的曲线（红色表示密度较高）。

1.2. 小曲率意味着不存在。 对于 $\mathbb{R}^2$中的闭凸曲线，命题 1 可以进一步细化：相关量是曲率。

命题 2。 设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条光滑闭严格凸曲线，满足$X \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : 0.999 \le \|x\| \le 1.001\}$，并假设 X 上存在一点，其曲率为 $\kappa \le 0.0001$。那么，对于 X上的每个概率测度 μ，

$$\int_X \|x - y\| d\mu(y) \qquad \textit{is not constant for all } x \in X.$$

该证明较为初等，且未对常数进行优化。假设 X 与单位圆盘一致接近，几乎可以肯定并非必要，但这简化了论证，也有助于说明核心要点：即使对于光滑的，

在 $\mathbb{R}^2$ 中接近单位圆的闭凸曲线，只要存在一个曲率较小的点，就足以确保不存在这样的 μ。从证明中可以看出，这一论证可推广到高维；然而，即使在二维中，对“临界”曲率给出良好的定量估计也颇具挑战。

1.3. **存在性结果**。我们的主要结果是一个存在性结果：如果曲率接近常数，那么这就意味着积分方程存在解。

定理。存在一个普适的 $\varepsilon_0 > 0$，使得若 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中的一条光滑、闭合且严格凸的曲线，并满足

$$1 - \varepsilon_0 \leq \frac{\text{length}(X_n)}{2\pi} \min_{x \in X_n} \kappa(x) \leq \frac{\text{length}(X_n)}{2\pi} \max_{x \in X_n} \kappa(x) \leq 1 + \varepsilon_0,$$

那么存在一个概率测度 μ，定义在 X 上，使得

$$\int_X \|x - y\| d\mu(y) \qquad \textit{is constant for all } x \in X.$$

证明采用了极限论证，由此得到一个未具体说明的常数 $\varepsilon_0 > 0$。看来可以用我们的方法求出 ε_0的显式值，但这个值想必远非最优值。若能更深入地理解命题 2（曲率较小时不存在解）与主要结果（足够接近圆形的曲线存在解）之间的相互关系，将会很有意义。

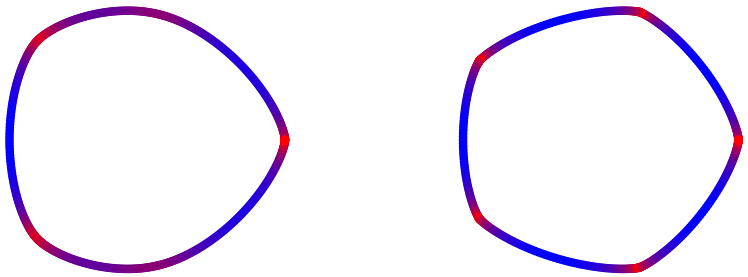


FIGURE 3. 按 μ 的密度着色的曲线（红色表示密度较高）。

1.4. **开放问题**。这引出了若干开放问题。

(1) 当 X 是平面中的一条严格凸曲线时，积分方程解的精确存在性理论是什么？某种形式的曲率必然会发挥重要作用。(2) 当 $X = \partial\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 是光滑凸区域的边界时，关于积分方程解的存在性理论能得出什么结论？相关量可能是高斯曲率。(3) 是否有别的方法可以证明积分方程解的存在，而不采用定理的证明中概述的方法？不同方法可能各有局限，也可能有助于展现其他视角。(4) 与仅考虑概率测度相比，如何处理更一般的有符号测度？概率测度的情形似乎对应于某种“正曲率”和凸性（见命题 1）。有符号曲率将提供一个更一般的框架。

(5) 是否还有其他可以分析该方程的度量空间？当 $(X,\ d)$ 是有限图时，所得结果非常有说服力，见 §2.1 和 [40]。

最令人好奇的方面之一或许是以下这一点：尽管积分方程解的存在性可能相当微妙，但离散化通常会导出一个有解的线性方程组。例如，假设我们有一条连续闭曲线 $\gamma:\ \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ 并将其离散化为 n个点 $p_1,\ \ldots,\ p_n \in \mathbb{R}^2$，其中 $p_j = \gamma(e^{2\pi ij/n})$。然后，考虑弧长元后，可得到线性方程组 $Ax = b$，其中

$$A_{k\ell} = \|p_k - p_\ell\| \cdot \|\gamma'(e^{2\pi i\ell/n})\| \qquad \text{and} \qquad b_k = \|\gamma'(e^{2\pi ik/n})\|.$$

图 4 展示了一条非凸曲线的示例。尽管极限积分方程没有解（因为该曲线上有 3 个点位于同一直线上），但离散化后的线性方程组似乎有一个非常理想的解，并且反映了曲线的几何形状：符号测度在曲线外侧的（“凸”）区域为正，在内侧的（“凹”）部分为负。

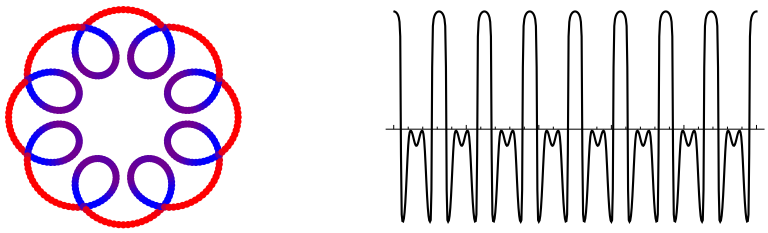


FIGURE 4. 一条按（符号）测度密度着色的非凸曲线（左），以及作为离散化数值解写出的符号测度密度（右）。

对二维区域进行离散化时，这种现象依然存在（见图5）。由此产生的解并非概率测度，但它们似乎确实会在某种弱意义下收敛到一类奇异符号测度。

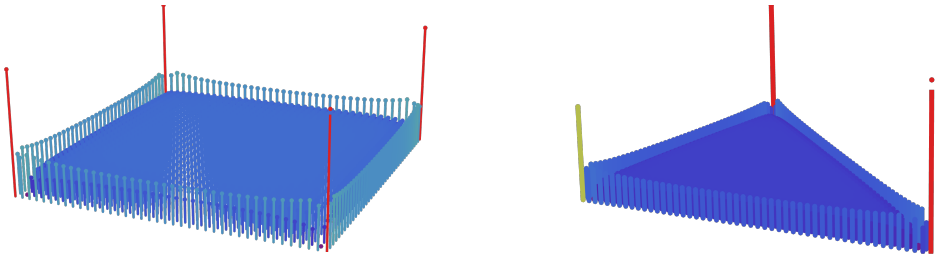


FIGURE 5. 离散化正方形（左）和离散化直角三角形（右）的数值解。数值解在角点处较大且为正，在边界处略小。

图5凸显了测度的几何与底层几何之间的关联：它能够识别边界；对于直角三角形，甚至还能识别张角。给定 n 个 $\mathbb{R}^d$中的互异点，距离矩阵 $D_{ij} = \|x_i - x_j\|$是可逆的 [30]。这表明曲线可能存在一种存在性理论（按弧长等距采样）；而对于曲面，局部沃罗诺伊胞的体积似乎会出现，这种情形则更为微妙。

2. Related topics and ideas

类似的想法也出现在许多不同领域中。我们将简要概述以下领域中的一些相关想法：(1) 图曲率；(2) 距离几何与 Gross-Stadje 定理；(3) 微分几何中的一些刚性定理；以及 (4) Leinster 的 Magnitude 定义。

2.1. 图曲率。 设 $G = (V, E)$ 是一个有限连通图。近年来，人们对能否在离散情形下定义一种“曲率”概念产生了浓厚兴趣。例如 Ollivier-Ricci 曲率 [36], 、Lin-Lu-Yau 曲率 [28] 和电阻曲率 [9]。 [40] 中提出的一种定义如下：若顶点为 $\{v_1, \ldots, v_n\}$，且 v_i 与 v_j 之间的距离由 $d(v_i, v_j)$ 给出，则求解以下线性方程组

$$\begin{pmatrix} d(v_1,v_1) & d(v_1,v_2) & \cdots & d(v_1,v_n) \\ d(v_2,v_1) & d(v_2,v_2) & \cdots & d(v_2,v_n) \\ d(v_3,v_1) & d(v_3,v_2) & \cdots & d(v_3,v_n) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ d(v_n,v_1) & d(v_n,v_2) & \cdots & d(v_n,v_n) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

并将顶点 v_i 处的“曲率”定义为 x_i。图6展示了一些示例。Chen-Tsui [5],、Cushing-Kamtue-Law-Liu-M¨unch-Peyerimhoff [8], 、Robertson [37]以及 Robertson- Southerland-Surya [38]进一步探讨了这一概念。将 $d(\cdot, \cdot)$替换为“电阻”（一种基于随机游走的距离概念），并使用同一个线性方程组，由此启发了电阻曲率的概念 [9] ，它也具有许多理想性质。值得探究的是，图上的其他距离概念是否也能产生此类其他有趣的“类曲率”定义。

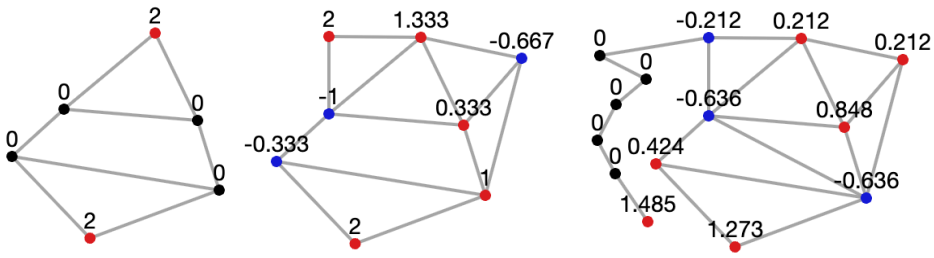


Figure 6. 三个图像及其曲率；图片使用“GraphCurvature Calculator” [7]创建。

与图上其他现有的曲率概念相比，这一定义似乎没有直接的连续情形对应物：它是全局性的，而人们通常会认为曲率概念应当是局部的。尽管如此，出于尚未完全理解的原因，它在图上似乎确实非常有效。对连续对应物的探究启发了本文；我们再次发现，一个全局定义的对象竟能出色地刻画局部行为。

2.2. **Gross-Stadje 定理**。 Oliver Alfred Gross [16]提出了一个关于紧致连通度量空间的卓越结果。

定理 (Gross，1964年)。 设(X,d) 是一个紧致连通度量空间。存在唯一的数 $r>0$，使得对于任意 $n\in\mathbb{N}$ 以及任意一组不必互异的 n 个点 $x_1,\dots,x_n\in X$，都存在一点 $x\in X$，使得

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} d(x,x_i)=r.$$

容易看出，$\operatorname{diam}(X)/2\le r\le\operatorname{diam}(X)$，但除此之外，普遍成立的结果寥寥无几。我们请读者参阅 Cleary-Morris-Yost [6]一篇精彩的综述。除少数情况外，$r(X,d)$ 的值尚不为人所知，但很容易通过数值方法近似求得 [23]。精确计算数 $r(X,d)$ 的已知方法寥寥，其中之一是找到 X 上的概率测度 μ，使得

$$\int_X d(x,y)d\mu(y)=c \qquad \text{is a constant independent of } x.$$

以近似测度 μ 的方式选取 $x_1,\dots,x_n$，便可得出$c=r(X,d)$。例如，这使得我们能够计算 $X=[0,1]$或 $X=\mathbb{S}^d$对应的数值。此外，这恰好就是我们在此研究的积分方程。据我们所知，μ 中编码的几何信息此前尚未与曲率联系起来。相关文献可参见 Farkas-Revesz [10, 11, 12], Hinrichs[18, 19], Hinrichs-Nickolas-Wolf [20], Hinrichs-Wenzel [21], Morris-Nickolas [31],Nickolas-Wolf [32], Stadje [39], Thomassen [43] 以及 Wolf [44, 45, 46, 47, 48, 49]。

2.3. **微分几何**。 人们或许会研究优化问题

$$\int_{X\times X} d(x,y)d\mu(x)d\mu(y)\to\max$$

在所有支撑位于 X 的概率测度中（在某些条件下，该问题的最大化者具有所需性质，见 §3.1）。这引出了一个离散问题：寻找 n 个点，使 $\sum_{i,j=1}^{n} d(x_i,x_j)\to$ max.*</style}* 达到最大值。*Alexander-Stolarsky Bjorck* 等许多人研究过这一问题。当 且将 *(,y)* 替换为 log $|x-y|$ 时，便得到超越直径这一概念，见 Fekete [13] 和 Fekete-Szeg¨o [14]。在更抽象空间的背景下，Grove-Markvorsen [17] 证明了 Alexandrov 空间中的比较界和刚性界，将最大平均离散度与底层空间的曲率联系起来。Kokkendorf [22] 证明，在所有满足 $\operatorname{Ric}(X)\ge n-1$ 的 $n-$ 维黎曼流形中，平均距离的最大值由 $n-$ 维球面取得。在组合图的背景下，这些思想与关于距离矩阵 [41] 的普适不等式，以及将图 Lipschitz 嵌入到 $\ell^1(\mathbb{R}^m)$ [42] 中所生成的测度有关。

2.4. **大小**。 所有这些思想似乎都以某种方式与大小这一概念相关。它是 Leinster [24, 25, 26] 提出的一种度量空间数值不变量，可将其解释为范畴欧拉示性数的一种形式。不过，这种联系的确切性质尚不明朗；然而，以下引自 Leinster-Meckes [27] 综述的文字则明确无误。

> 紧度量空间 (A, d) 上的**权测度** 是一个有限有符号博雷尔测度 μ，定义在 A 上，使得
>
> $$\int_A e^{-d(a,b)} d\mu(b) = 1$$
>
> 对每一个 $a \in A$ 成立。 [...] 这表明，只要 A 具有权测度 μ，便可将紧度量空间的大小定义为 $|A| = \mu(A)$。（Leinster 与 Meckes, [27]）

这一权测度即我们的积分方程，其中 $d(x, y)$ 被替换为 $e^{-d(x,y)}$。大小此后得到了广泛研究；关于欧几里得空间中的结果，我们参阅 Barcel´o-Carbery [3], Gimperlein-Goffeng [15], Meckes [29] 。我们强调，大小这一概念是附属于度量空间的单个数值，而我们关注的是其底层测度（若其存在）。人们不禁想知道，这些不同概念之间究竟如何相互联系。

3. Proof of Proposition 1 and Proposition 2

3.1. **命题 1 的证明**。

证明概要来自 [6]。假设 X 包含直线 ℓ 上的三个点，但 X本身不是线段。我们取直线 ℓ 上彼此距离最大的两个点，并将它们记为 a和 b。直线上的第三个点 c 位于 a 和 b 的凸包中，因此对于某个 $0 < \lambda < 1$，有 $c = \lambda a + (1 - \lambda)b$ 。接下来

$$\begin{aligned} x \notin \{a, b\} \implies \|x - c\| &= \|\lambda x + (1 - \lambda)x - \lambda a - (1 - \lambda)b\| \\ &< \lambda\|x - a\| + (1 - \lambda)\|x - b\|. \end{aligned}$$

如果测度并非全部集中在 $\{a, b\}$，那么对X 积分此不等式可得

$$\int_X \|x - c\| d\mu(x) < \lambda \int_X \|x - a\| d\mu(x) + (1 - \lambda) \int_X \|x - b\| d\mu(x)$$

这与这三个积分都取相同值的假设矛盾。如果测度的支撑全部位于 $\{a, b\}$，那么很容易看出， X 必定是 a与 b之间的线段。结论得证。□

3.2. **命题 2 的证明**。

证明。 反证法。设 X 是 $\mathbb{R}^2$ 中一条包含于 $X \subset \left\{x \in \mathbb{R}^2 : \, 0.999 \leq \|x\| \leq 1.001\right\}$ 的光滑闭严格凸曲线。我们假设某个特定点的曲率非常小，接下来的论证将致力于导出矛盾。存在曲率很小的点意味着存在 $c > 0$ （取决于曲率），使得对于任意小的 $d > 0$ ，都能在曲线上找到三个点，经旋转和平移后排列如图 7 所示。

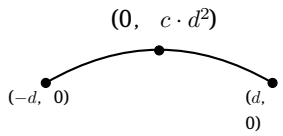


FIGURE 7. 凸曲线上一段相对平坦的线段。

如果这样的概率测度 μ 存在，那么可以推导出

$$I = \int_X (\|(-d,0) - y\| + \|(d,0) - y\| - 2\|(0, c \cdot d^2) - y\|)\ d\mu(y) = 0.$$

对于固定的 y_1, $y_2 \in \mathbb{R}$，我们考虑实值函数

$$f(t) = \sqrt{(y_1 - t)^2 + y_2^2}$$

并注意到

$$\|(-d,0) - y\| + \|(d,0) - y\| - 2\|y\| = f(d) + f(-d) - 2f(0).$$

利用

$$\begin{aligned} f(d) + f(-d) - 2f(0) &\geq d^2 \min_{|t| \leq d} f''(t) \\ &= d^2 \min_{|t| \leq d} \frac{y_2^2}{((t - y_1)^2 + y_2^2)^{3/2}} \\ &\geq d^2 \frac{y_2^2}{(d + |y_1|)^2 + y_2^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

可得

$$\|(-d,0) - y\| + \|(d,0) - y\| - 2\|y\| \geq \frac{y_2^2}{(d + |y_1|)^2 + y_2^2)^{3/2}} d^2.$$

与此同时，由三角不等式可得

$$2\|(0, cd^2) - y\| \leq 2\sqrt{y_1^2 + y_2^2} + 2cd^2$$

因此

$$0 = I \geq d^2 \int_X \left(\frac{y_2^2}{((|y_1| + d)^2 + y_2^2)^{3/2}} - 2c \right)\ d\mu(y).$$

我们还注意到， μ 是一个概率测度，因此这等价于

$$\int_X \frac{y_2^2}{((|y_1| + d)^2 + y_2^2)^{3/2}}\ d\mu(y) \leq 2c.$$

由于该估计一致成立，我们可以取 $d \to 0^+$ 并推出

$$\int_X \frac{y_2^2}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}}\ d\mu(y) \leq 2c$$

并且由于 $y_1^2 + y_2^2 \leq 1.001^2 \leq 1.003$，这将意味着

$$\int_X y_2^2\ d\mu(y) \leq 3c.$$

接下来需要给出这个积分的一个下界。现在假设 μ 的大部分质量靠近原点，例如

$$\mu\left(\{y \in X : y_2 \geq -0.1\}\right) \geq \frac{4}{5}.$$

那么，距离积分必然会有相当大的波动，因为

$$\int_X \|(0, cd^2) - y\| d\mu(y) \leq 0.2\frac{4}{5} + 2\frac{1}{5} \leq 0.6$$

而对于曲线另一侧的对跖点 z

$$\int_X \|z - y\| d\mu(y) \geq 1 \cdot \frac{4}{5} = 0.8$$

这意味着积分不可能是常数。然而，

$$\int_X y_2^2 \, d\mu(y) \geq \frac{1}{100}\frac{1}{5} = \frac{1}{500}.$$

这意味着 $c \geq 1/2500$ 曲率必须至少为 $1/10000$。 □

4. Proof of the Theorem

4.1. 主要思想。 §4.1 旨在阐释存在性证明背后的主要思想；这一思想用途广泛，也可应用于其他情境和高维情形。然而，就目前而言，这也是我们唯一已知的证明此类测度存在的方法。该思想围绕 Bj¨orck[4] 于 1958年 得出的一个结果展开。设 $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为一个紧集，并考虑每个支撑于 Ω 上的概率测度 μ 所对应的泛函

$$I(\mu) = \int_{\Omega\times\Omega} \|x - y\| d\mu(x) d\mu(y).$$

Bj¨orck [4]考虑了最大化该泛函的问题，即

$$\mu^* = \arg\max_{\mu\in\mathcal{P}(\Omega)} I(\mu),$$

并证明这样的测度存在且唯一，并且其支撑包含于边界。

定理 (Bj¨orck [4])。 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集。存在唯一的最大化概率测度 μ^* ，使得 $I(\mu) \leq I(\mu^*)$对所有支撑于Ω的概率测度 μ均成立。此外，

$$\int_\Omega \|x - y\| d\mu(y) \qquad \begin{cases} = I(\mu^*) & \text{if } x \in \operatorname{supp}(\mu^*) \\ \leq I(\mu^*) & \text{if } x \notin \operatorname{supp}(\mu^*). \end{cases}$$

此外，$supp(\mu^*) \subseteq \partial\Omega$。

证明概要。由于论证相对简单，我们在此给出证明概要。注意， $I(\mu) \leq \operatorname{diam}(\Omega) < \infty$。取一个概率测度序列 μ_n ，使得$I(\mu_n)$ 收敛到上确界；存在一个弱收敛的子列。由于 $\|x - y\|$ 连续，其极限是一个极值者。关于$\int_\Omega \|x-y\| d\mu(y)$ 的结论可由欧拉-拉格朗日论证得出（详情见 [4] ），该论证也意味着极值者唯一。 μ 的支撑位于边界这一事实，则源于以下事实：固定 y时，函数 $\|x - y\|$ 是严格次调和的，因此$\int_\Omega \|x-y\| d\mu(y)$ 严格次调和，因而不可能在区域内部取得最大值。□

这为所需测度的存在提供了充分条件。

推论 1. 设$\Omega \subset \mathbb{R}^n$ 为紧集。若使以下表达式达到最大值的测度 μ^*

$$I(\mu) = \int_{\Omega\times\Omega} \|x-y\| d\mu(x) d\mu(y)$$

在 $\partial\Omega$ 上有稠密的支撑，则

$$\int_{\partial\Omega} \|x-y\| d\mu^*(y) \qquad \textit{is a constant independent of } x \in \partial\Omega.$$

证明。 由 Bj¨orck 的结果可知，这是因为 $\int_{\partial\Omega} \|x-y\| d\mu^*(y)$ 是连续的，并且对所有 $x \in \mathrm{supp}(\mu^*)$，都有 $f(x) = I(\mu^*)$。□

4.2. **近圆情形**。 我们假设该命题不成立，并且对每个 $n \in \mathbb{N}$，都存在一条位于 $\mathbb{R}^2$ 中的光滑闭凸曲线 X_n，满足

$$1 - \frac{1}{n} \le \frac{\mathrm{length}(X_n)}{2\pi} \min_{x\in X_n} \kappa(x) \le \frac{\mathrm{length}(X_n)}{2\pi} \max_{x\in X_n} \kappa(x) \le 1 + \frac{1}{n}$$

对于这条曲线，不存在任何以 X_n 为支撑的概率测度能够解该积分方程。由于整个问题在缩放下保持不变，我们不妨假设 X_n 的长度为 2π。我们首先证明，这个（假设的）反例序列必然收敛到单位圆。

引理。 设$(x(s)\ y(s))$ 是 X_n 的弧长参数化。对曲线$(x(s)\ y(s))$ 进行旋转和平移，使得

$$|x(s) - \cos(s)| + |y(s) - \sin(s)| \le \frac{16\pi^2}{n}.$$

证明。 我们利用平面曲线基本定理（例如，参见 [1,定理 1.88]）推得，经过适当的旋转和平移后，该曲线可以参数化为

$$x(s) = \int_0^s \cos\left(\int_0^\tau \kappa(\xi) d\xi\right) d\tau \quad \text{and} \quad y(s) = \int_0^s \sin\left(\int_0^\tau \kappa(\xi) d\xi\right) d\tau.$$

如果曲率为 $\kappa \equiv 1$，则可得到参数化形式 $(\sin\ s,\ 1 - \cos s)$，它描绘出一个圆，我们将把该曲线与这个特定的圆进行比较。曲率的一致下界意味着

$$\int_0^\tau \kappa(\xi) d\xi \ge \left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau.$$

至于上界，我们利用总曲率为 2π，从而得到

$$\begin{aligned}\int_0^\tau \kappa(\xi) d\xi &= \int_0^{2\pi} \kappa(\xi) d\xi - \int_\tau^{2\pi} \kappa(\xi) d\xi \\ &\le 2\pi - (2\pi - \tau)\left(1 - \frac{1}{n}\right) \le \frac{2\pi}{n} + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\tau.\end{aligned}$$

综上所述，我们有

$$\left|\int_0^\tau \kappa(\xi) d\xi - \tau\right| \le \frac{2\pi + \tau}{n} \le \frac{4\pi}{n}.$$

因此

$$\begin{aligned}|x(s)-\sin(s)| &= \left|\int_0^s \cos\left(\int_0^\tau \kappa(\xi)d\xi\right)d\tau - \int_0^s \cos\left(\int_0^\tau 1 d\xi\right)d\tau\right| \\ &\le \left|\int_0^s \cos\left(\int_0^\tau \kappa(\xi)d\xi\right) - \cos\left(\int_0^\tau 1 d\xi\right)d\tau\right| \\ &\le \left|\int_0^s \left|\int_0^\tau \kappa(\xi)d\xi - \tau\right| d\tau\right| \le \left|\int_0^s \frac{4\pi}{n} d\tau\right| \le \frac{8\pi^2}{n}.\end{aligned}$$

第二坐标 $y(s)$ 也同样如此，因此我们得到了所需结果。 □

4.3. **定理的证明**。 对于任意 X_n，我们用 Ω_n 表示封闭域，并令

$$\mu_n^* = \arg\max_{\mu\in\mathcal{P}(\Omega_n)} \int_{\Omega_n\times\Omega_n} \|x-y\| d\mu(x) d\mu(y).$$

根据 Bj¨orck 定理，测度 μ_n^* 存在，且其支撑位于 $\partial\Omega_n$中。根据推论 1，如果 μ_n^* 的支撑是稠密的，那么就存在一个满足我们积分方程的概率测度。因此，我们可以假设其支撑不是稠密的，即存在一个与该测度的支撑不相交的开集。

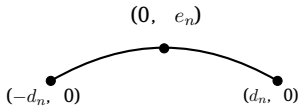


FIGURE 8. 局部图像： μ_n^* 在弧上没有支撑。曲率下界意味着 e_n有下界。

我们延长这段弧，使其两侧的端点都属于 μ_n^* 的支集闭包。经过旋转和平移区域 Ω_n 后，不失一般性地假设这些点为（$-d_n$，0）和（d_n，0），其中 $d_n > 0$。此后我们假设所有曲线 X_n 都经过旋转和平移，以符合这一图像。由于曲率下界，我们注意到 $e_n > 0$ ；不过请注意，曲线不一定关于 y–轴对称，而且 e_n 也不一定是曲线上具有最大 y–坐标的点。由于（$-d_n$，0）和（d_n，0）属于测度μ_n的支撑，Bj¨orck 定理意味着

$$\int_{X_n} \|y-(-d_n,0)\|\, d\mu_n^*(y) = I(\mu_n^*) = \int_{X_n} \|y-(d_n,0)\|\, d\mu_n^*(y)$$

而这正是该积分所达到的最大值，因此

$$\int_{X_n} \|y-(0,e_n)\|\, d\mu_n^*(y) \le I(\mu_n^*).$$

这两个事实结合起来蕴含该不等式

$$\int_{X_n} \left(2\|y-(0,e_n)\| - \|y-(-d_n,0)\| - \|y-(d_n,0)\|\right) d\mu_n^*(y) \le 0. \quad (\diamond)$$

论证的其余部分旨在推出与（$\diamond$）矛盾的结论，假设曲率足够接近常数。不妨将 d_n

视为“近乎固定”。由于 $0 \le d_n \le \pi$，序列 $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ 有一个收敛子序列，我们仍记为 $(d_n)_{n=1}^{\infty} \to d_*$。我们区分两种情况： $d_* = 0$ 的情形和 $d_* > 0$的情形。

情形 1 ($d_* > 0$)**.** 这种情形稍微简单一些，因为所有情况都发生在尺度~ 1上。曲线在 Gromov–Hausdorff 距离下收敛到一个圆，这迫使

$$e_n \to 1 - \sqrt{1 - d_*^2}$$

由于 X_n 收敛到一个包含点 $(\pm d_*, 0)$ 的圆，它必定收敛到圆心为 $(0, -\sqrt{1-d_*^2})$ 的圆。将图 8 中的三个点简记为

$$a = (-d_*, 0), b = (d_*, 0), c = (0, 1 - \sqrt{1 - d_*^2})$$

以及圆的中点 $m = (0, -\sqrt{1-d_*^2})$ 和变量 $z = (\cos t, \sin t) + m$，则 $(\diamond)$ 中的被积函数将收敛到

$$\begin{aligned} 2\|z-c\| - \|z-a\| - \|z-b\| = &\sqrt{8 - 8\sin(t)} \\ &- \sqrt{2 - 2d_*\cos(t) - 2\sqrt{1-d^2}\sin(t)} \\ &- \sqrt{2 + 2d_*\cos(t) - \sqrt{1-d_*^2}\sin(t)}. \end{aligned}$$

作为 t 的函数，这个函数只有 2 个根。由于 $f(\pm d_*, 0) > 0$，并且根据假设，测度 μ_n^* 在连接 $(\pm d_*, 0)$ 的弧上不赋予任何权重，因此在曲线 X_n 上测度的支撑所在的整条线段上，被积函数最终为正。这与 $(\diamond)$ 矛盾，从而完成了此情形的证明。

情形 2 ($d_* = 0$)。 这一情形略有不同，因为 $(\diamond)$ 中的被积函数将收敛到 0，因此需要在长度尺度 $\sim d_n^2$ 上进行更为精细的分析。我们可以将 $(-d_n,\ 0)$ 与 $(d_n,\ 0)$ 之间的凸曲线写成函数$y = \phi(x)$的图像。曲率下界意味着

$$1 - \frac{1}{n} \le \kappa \le \frac{|\phi''(x)|}{(1+\phi'(x)^2)^{3/2}} \le |\phi''(x)|.$$

现在我们假设 $\phi'(0) \le 0$ （情形 $\phi'(0) \ge 0$ 是类似的，因为图 8 中的图形可以关于 $y-$轴反射）。于是

$$\begin{aligned} \phi(d_n) - \phi(0) = \int_0^{d_n} \phi'(x)dx &= \int_0^{d_n} \left(\phi'(0) + \int_0^x \phi''(y)dy \right) dx \\ &\le \int_0^{d_n} \left(\int_0^x \phi''(y)dy \right) dx \\ &\le \int_0^{d_n} \left(\int_0^x -\left(1 - \frac{1}{n}\right) dy \right) dx = -\left(1 - \frac{1}{n}\right)\frac{d_n^2}{2}. \end{aligned}$$

这意味着 e_n 的下界，如图 9 所示。出于纯代数方面的原因，为了使表达式更易于处理，我们将用 $d_n^2/2$近似 e_n （正如 $n \to \infty$，这一近似将相当准确，且只会引入很小的误差）。三角不等式、 e_n 的下界以及（$\diamond$）意味着

$$\int_{X_n} \left(2\left\| y - \left(0, \frac{d_n^2}{2}\right) \right\| - \|y - (-d_n, 0)\| - \|y - (d_n, 0)\| \right) d\mu_n^*(y) \le \frac{d_n^2}{n}. \quad (\diamond\diamond)$$

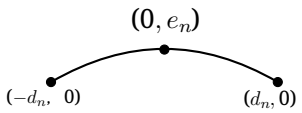


FIGURE 9. 局部图像： μ_n^* 在弧上没有支撑。曲率下界蕴含 e_n的下界。

（◇◇）中的被积函数可写为

$$f(y_1, y_2) = 2\sqrt{y_1^2 + (y_2 - d_n^2/2)^2} - \sqrt{(y_1 - d_n)^2 + y_2^2} - \sqrt{(y_1 + d_n)^2 + y_2^2}.$$

我们的目标是证明该被积函数在测度 μ_n^* 有支撑的积分域上“很大”。首先注意到 $f(\pm d_n, 0) > 0$。 f 沿这两点$(\pm d_n,0)$之间的弧的行为更为复杂，但最终无关紧要，因为测度 μ_n^* 在该弧上没有支撑。

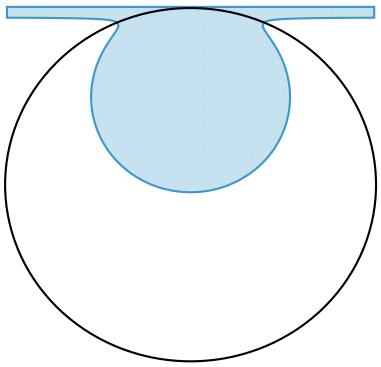


FIGURE 10. 集合 $\{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : f(y_1, y_2) \leq 0\}$，其中 $d_n = 0.4$ (蓝色) 显示在一个半径为 1 的圆盘上，该圆盘经过两点 $(-d_n,0)$ 和 $(d_n, 0)$。

可以对此情形进行非常精确的分析：特别地，如果 (y_1, y_2) 是下半平面中的一个根， $f(y_1, y_2) = 0$和 $y_2 \leq 0$，那么

$$y_1 = \pm \frac{\sqrt{4 - d_n^2 + 4y_2}}{\sqrt{4d_n^2 - 16y_2}}(d_n^2 - 4y_2) \qquad \text{for all} \quad \frac{d_n^2}{4} - 1 \leq y_2 \leq 0.$$

从几何上看，这意味着图 10 中的“蓝色气泡”具有可加以处理的闭形式参数化。我们发现这在代数上相当繁琐，因此将采用略有不同的论证；不过值得一提的是，对蓝色气泡进行更精确的分析可能会得到更好的定量估计。至于我们的不同论证，我们首先注意到，对于与原点保持严格正距离的 (y_1, y_2)，当 $d_n \to 0$ 时，我们有渐近展开

$$f(y_1, y_2) = \frac{(-y_2)y_1^2 - y_2^2 - y_2^3}{(y_1^2 + y_2^2)^{3/2}} d_n^2 + \mathcal{O}(d_n^4).$$

容易看出，首项系数在半径为 $1/2$、以 $(0,-1/2)$ 为圆心的圆盘外部为正。特别地，这表明对任意 $\varepsilon \to 0$，存在$\delta > 0$，使得对所有充分大的 $n \in \mathbb{N}$

$$\int_{X_n} f(y) 1_{\|y\| \geq \delta} \, d\mu_n(y) \geq (2-\varepsilon) d_n^2.$$

这已接近与 $(\diamond\diamond)$ 相矛盾。尚需证明，曲线靠近 $(0,0)$ 的部分——其中级数展开的误差项并不一致——不会贡献过多。我们引入函数 $g(y_1, y_2)$，它将是 $f(y_1, y_2)$ 的代数简化形式

$$g(y_1, y_2) = 2\sqrt{y_1^2 + y_2^2} - \sqrt{(y_1 - d_n)^2 + y_2^2} - \sqrt{(y_1 + d_n)^2 + y_2^2}$$

并注意到，三角不等式蕴含 $|f(y_1, y_2) - g(y_1, y_2)| \leq d_n^2$，它与我们的下界处于同一尺度，但又足够接近，因而可在一个小邻域内使用。此外，对于 $y_2 \leq 0$，我们有 $f(y_1, y_2) \geq g(y_1, y_2)$。采用 $g(y_1, y_2)$ 的原因在于，某些单调性变得更加显而易见：若 $y_1 \geq 0$ 且 $y_2 \leq 0$，则该函数关于 y_1 单调递增。这可如下看出。我们有

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = \frac{2y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} - \frac{y_1 + d_n}{\sqrt{(d_n + y_1)^2 + y_2^2}} - \frac{y_1 - d_n}{\sqrt{(y_1 - d_n)^2 + y_2^2}}.$$

将 y_2 视为常数，并写作

$$h(t) = \frac{t}{\sqrt{t^2 + y_2^2}} \qquad \text{we have} \qquad h''(t) = -\frac{3t}{(1+t^2)^{5/2}}$$

并可将导数改写为

$$\frac{\partial g}{\partial y_1} = 2h(y_1) - h(y_1 + d_n) - h(y_1 - d_n).$$

这意味着，对于 $y_1 \geq d_n$，三个自变量均为正，且函数 h 在该区域内是凹函数，因此

$$\frac{\partial g}{\partial y_1}(y_1, y_2) \geq 0 \qquad \text{provided} \qquad y_1 \geq d_n.$$

曲率的上界意味着，对于 $d_n \ll 1/1000$，曲线段

$$X \cap \left\{ (y_1, y_2) : d_n \leq y_1 \leq \frac{1}{100} \wedge y_2 \leq 0 \right\}$$

位于图像 $y = -5(x - d_n)^2$的上方。利用凸曲线弧长测度的相对刚性，我们注意到，缺失的积分可以从下方估计为

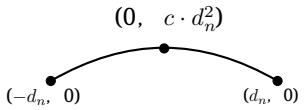
$$\int_{X_n} f(y) 1_{\|y\| \leq \delta} \, d\mu_n(y) \geq 10 \int_{d_n}^{1/100} g(x, -5(x - d_n)^2) dx.$$

然而，该函数可以进行一致收敛的泰勒展开，并且

$$g(x, -5(x-d_n)^2) = -\frac{25\sqrt{x^2 + 25x^4}}{(1+25x^2)^2} d^2 + \mathcal{O}(d^3)$$

这表明，积分缺失部分的贡献渐近地大于 $-d_n^2/2$，这与（$\diamond\diamond$）矛盾，从而完成证明。$\square$

注：显然，就常数而言，这种方法远非最优。不过，该论证确实暗示了一个自然的上限：对于接近圆的曲线（有人或许会认为，这类曲线是最理想的例子），我们所能期待的结果大概也只能到此为止。假设局部结构为



相关的问题是，是否可能出现

$$\int_{X_n} \left(2\left\|y - \left(0, c \cdot d_n^2\right)\right\| - \|y - (-d_n, 0)\| - \|y - (d_n, 0)\|\right) d\mu_n^*(y) \sim 0$$

对被积函数进行泰勒级数展开可得

$$\text{integrand} = \frac{-2cy_1^2y_2 - 2cy_2^3 - y_2^2}{\left(y_1^2 + y_2^2\right)^{3/2}} d^2 + o(d^2).$$

代入 $y_1 = \cos t$ 和 $y_2 = -1 + \sin t$ 后，分子可简化为

$$-2cy_1^2y_2 - 2cy_2^3 - y_2^2 = (-1 + 4c)(1 - \sin t)^2$$

这表明，对于 $c = 1/4$，对应于曲率 $1/2$，存在一个临界阈值。这再次凸显了一个基本主题：存在与否将由涉及曲率的临界阈值决定。

5. Curvature as 'almost' a solution

满足该积分方程的概率测度是否存在，与曲率有关。更进一步，概率测度本身也与底层曲线的曲率有关（例如见图 2 和图 3；定量比较见图 12）。我们证明，对于接近单位圆的曲线，其曲率函数作为一种测度，几乎满足该积分方程。使用支撑函数刻画来表述这一结论最为简便（见图 11）。我们将支撑函数 $h(\theta)$ 引入为……的投影

$$h(\theta) = \max_{x \in X} \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, x \right\rangle.$$

圆的支撑函数参数化为 $h(\theta) = 1$。

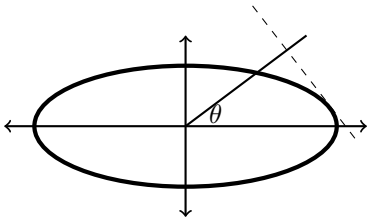


Figure 11. 支撑函数参数化。

命题 3. 设 X 为一条曲率 κ 有下界的闭合光滑凸曲线。那么测度 $\mu = \kappa\, d\sigma$ 可能不满足该积分方程，但与常数的偏差

$$V = \max_{x\in X} \int_X \|x-y\| d\mu(y) - \min_{x\in X} \int_X \|x-y\| d\mu(y)$$

由……从上方界定

$$V \leq 4 \max_{0\leq t\leq 1} |h(t)-1| + |h'(t)|.$$

支撑函数刻画中的曲率由 $\kappa(t) = 1/(h(t)+h''(t))$ 给出，它取决于 h 的二阶导数；而定理中的误差项只取决于与常数的偏差和一阶导数。证明源于弧长元与曲率之间适当的消去，这一点在支撑函数参数化中最容易看出。命题 3 可能并未给出完整的图景，也可能还有其他结果能够使图 12 所示的经验观察变得严谨。

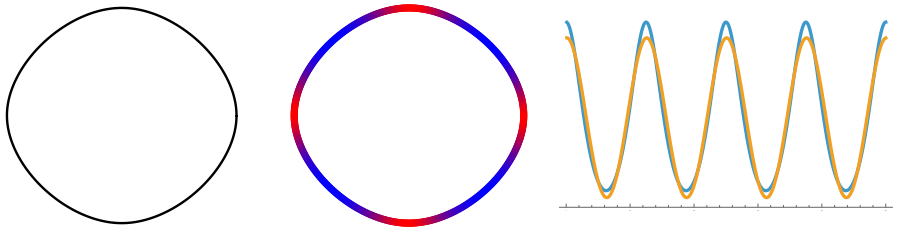


FIGURE 12. 一条曲线（左），按测度密度着色（中），以及与曲率相比较的（重标度后）密度；二者均表示为弧长的函数（右）。

命题 3 的证明。支撑函数 $h(\theta)$

$$h(\theta) = \max_{x\in X} \left\langle \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}, x \right\rangle$$

通过求导可改写为更经典的形式（$x(\theta)$ $y(\theta)$）

$$x(t) = h(t)\cos(t) - h'(t)\sin(t)$$
$$y(t) = h(t)\sin(t) + h'(t)\cos(t).$$

这并非 弧长参数化，经过简短计算可得

$$x'(t) = h'(t)\cos t - h(t)\sin t - h''(t)\sin t - h'(t)\cos t$$
$$y'(t) = h'(t)\sin t + h(t)\cos t + h''(t)\cos t - h'(t)\sin t$$

这意味着弧长为

$$\sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} = h(t) + h''(t).$$

另一种计算表明，曲率为

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{1}{h(t)+h''(t)}.$$

将曲线参数化为 $\gamma(t) = (x(t), y(t))$，并考虑弧长参数化后，积分方程变为

$$\int_0^{2\pi} \|\gamma(t) - \gamma(s)\|(h(s) + h''(s))d\mu(s) = c$$

对某个与 t无关的常数 c。作试探形式

$$\mu(s) = \kappa(s)ds = \frac{ds}{h(s) + h''(s)},$$

我们得到函数

$$V(t) = \int_0^{2\pi} \|\gamma(t) - \gamma(s)\|ds.$$

由于 $\gamma(t) = (h(t)\cos(t) - h'(t)\sin(t), h(t)\sin(t) + h'(t)\cos(t))$, 我们有 $\|\gamma(t) - (\cos t, \sin t)\| \le |h(t) - 1| + |h'(t)|$。因此,

$$\begin{aligned} V(t) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma(t) - \gamma(s)\|ds \\ &= \int_0^{2\pi} \|(\cos(t), \sin(t)) - (\cos(s), \sin(s))\|ds \\ &+ \int_0^{2\pi} |h(t) - 1| + |h'(t)| + |h(s) - 1| + |h'(s)|ds. \end{aligned}$$

因此

$$|V(t) - 4| \le 4\pi \max_{0\le t\le 1} |h(t) - 1| + |h'(t)|.$$

注意到我们要寻找的是一个概率测度，并且 $\int_0^{2\pi} \kappa(s)ds = 2\pi$，我们可以用 2π 重新标度，从而得到所需结果。□

References

[1] H. Alencar、S. Walcy 和 G. Silva Neto，《平面曲线微分几何》。第 96 卷。美国数学会，2022年。[2] R. Alexander 和 K. Stolarsky，距离几何中与能量积分相关的极值问题。美国数学会会刊，193（1974），1–31。[3] J. Barcel´o 和 A. Carbery，欧几里得空间中紧集的大小，《美国数学杂志》140（2018），449–494。[4] G. Bj¨orck，具有某种广义能量积分最大值的正质量分布， *Ark. Mat.* **3**（1958年），255–269。[5] W.-C. Chen 和 M.-P. Tsui，关于 Steinerberger 曲率与图距离矩阵，《离散数学》348.8（2025）：114475。[6] J. Cleary、S. A. Morris、D. Yost，《数值几何——形状的数值》，*The American Mathematical Monthly* **93** 1986 260 （），第 275 –[7] ¨ D. Cushing、R. Kangaslampi、V. Lipiainen、S. Liu 和 G. W. Stagg，图曲率计算器与三次图的曲率。《实验数学》，31（2022），583–595。[8] D. Cushing、S. Kamtue、E. Law、S. Liu、F. M¨unch 和 N. Peyerimhoff，关于图的 Steinerberger 曲率的一则注记。arXiv 预印本 arXiv:2404.17860。[9] K. Devriendt、A. Ottolini 和 S. Steinerberger，通过电阻距离研究图曲率。《离散应用数学》348（2024），68–78。[10] B. Farkas、S. Revesz，赋范空间中的会合数，Bull. Austral. Math. Soc. 72（2005），第 3 期，423–440。[11] B. Farkas、S. Revesz，会合数的位势论方法，Monatsh. Math. 148（2006），第 4 期，309–331。[12] B. Farkas、S. Revesz，度量空间的会合数——一种位势论方法，Arch. Math. (Basel) 86（2006），第 3 期，268–281。

[13] M. Fekete, ¨关于某些具有整数系数的代数方程根的分布，Math Z. 17 1923 228 249 （），第 – M. Fekete 和 G. Szego, [14] ″关于根属于给定集合且具有整数系数的代数方程，Math. Zeitschrift. 63（1955），158–172。[15] H. Gimperlein 和 M. Goffeng，欧几里得空间中区域的大小函数，《美国数学杂志》143（2021），939–967。[16] O. Gross，度量空间的会合值，Ann. of Math. Stud.，52，49–53，1964年。[17] K. Grove 和 S. Markvorsen，通过亚历山德罗夫几何研究黎曼识别计划中的新极值问题。J. Amer. Math. Soc. 8（1995），第 1 期，1–28。[18] A. Hinrichs，经典巴拿赫空间的平均距离性质，Bull. Austral. Math. Soc. 62（2000），第 1 期，119–134。[19] A. Hinrichs，在有限维赋范空间中对距离取平均及约翰椭球，Proc. Amer. Math. Soc. 130（2002），第 2 期，579–584。[20] A. Hinrichs、P. Nickolas 和 R. Wolf，关于单位球的度量几何的一则注记，Math. Z. 268（2011），第 3–4 期，第 887–896 页。[21] A. Hinrichs 和 J. Wenzel，经典巴拿赫空间的平均距离性质。II，Bull. Austral. Math. Soc. 65（2002），第 3 期，511–520。[22] S. Kokkendorf，以平均距离刻画圆球面，Differential Geom. Appl. 26（2008），第 6 期，638–644。[23] G. Larcher、W. Schmid 和 R. Wolf，关于距离几何中出现的某些质量分布的近似，Acta Math. Hungar. 87（2000），第 4 期，295–316。[24] T. Leinster，范畴的欧拉示性数，Doc. Mathematica 13（2008）：21–49。[25] T. Leinster，度量空间的大小，Documenta Mathematica 18（2013）：857–905。[26] T. Leinster，图的大小。载于《剑桥哲学学会数学论文集》166（2019），第 247–264 页。[27] T. Leinster 和 M. Meckes，度量空间的大小：从范畴论到几何测度论，载于：《非光滑空间中的测度论》，德格鲁伊特出版社，2017年。[28] Y. Lin、L. Lu 和 S.T. Yau，图的里奇曲率。《东北数学杂志》第二辑，63（2011），605–627。[29] M. W. Meckes，欧几里得空间中凸体的大小与内在体积。《Mathematika》，66（2020），343–355。[30] C. A. Micchelli，散乱数据的插值：距离矩阵与条件正定函数。《构造性逼近》，2（1986），11–22。[31] S. Morris 和 M. Nickolas，关于紧连通度量空间的平均距离性质，Arch. Math. (Basel) 40（1983），第 5 期，459–463。[32] P. Nickolas 和 R. Wolf，拟双曲度量空间中的距离几何。I，Bull. Aust. Math. Soc. 80（2009），第 1 期，1–25。[33] P. Nickolas 和 R. Wolf，有限拟双曲度量空间，Acta Math. Hungar. 124（2009），第 3 期，243–262。[34] P. Nickolas 和 R. Wolf，拟双曲度量空间中的距离几何。II，Math. Nachr. 284（2011），第 2–3 期，332–341。[35] P. Nickolas 和 R. Wolf，拟双曲度量空间中的距离几何。III，Math. Nachr. 284（2011），第 5–6 期，747–760。[36] Y. Ollivier，度量空间上马尔可夫链的里奇曲率。《泛函分析杂志》，256（2009），810–864。[37] S. Robertson，树上曲率的比较研究。arXiv 预印本 arXiv:2412.20661。[38] S. Robertson、F. Southerland 和 E. Surya，距离例外图与曲率指标。arXiv 预印本 arXiv:2511.03719。[39] W. Stadje，紧连通空间的一个性质，Arch. Math. 36（1981），第 3 期，275–280。[40] S. Steinerberger，通过平衡测度研究图上的曲率，*Journal of Graph Theory* **103** 2023 415 436 （），第 – 。[41] S. Steinerberger，距离矩阵的第一特征向量近乎为常数。《离散数学》，346（2023），113291。[42] S. Steinerberger，图上的距离和及嵌入欧几里得空间。《Mathematika》，69（2023），600–621。[43] C. Thomassen，对称矩阵和紧连通度量空间的会合数，Amer. Math. Monthly 107（2000），第 2 期，163–166。

[44] R. Wolf, 《巴拿赫空间中球面的平均距离性质》, Arch. Math. (Basel) 62 (1994), 第 4 期, 338–344。[45] R. Wolf, 《有限维实巴拿赫空间中的平均距离性质》, Bull. Austral. Math. Soc. 51 (1995), 第 1 期, 87–101。[46] R. Wolf, 《某些巴拿赫空间中的距离平均》, Bull. Austral. Math. Soc. 55 (1997), 第 1 期, 147–160。[47] R. Wolf, 《平均距离性质与某些能量积分》, Ark. Mat. 35 (1997), 第 2 期, 387–400。[48] R. Wolf, 《有限维实拟双曲度量巴拿赫空间中的距离平均》, Israel J. Math. 110 (1999), 125–151。[49] R. Wolf, 《距离几何中某些测度的存在性》, Arch. Math. (Basel) 76 (2001), 第 4 期, 308–313。

Department of Mathematics and Department of Applied Mathematics, University of Washington, Seattle, WA 98195, USA*Email address*: steinerb@uw.edu